JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

CLAUDE BERGE

Sur une théorie ensembliste des jeux alternatifs

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 32 (1953), p. 129-184.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1953_9_32__129_0>

Sur une théorie ensembliste des jeux alternatifs (1);

PAR CLAUDE BERGE.

AVANT-PROPOS.

Le premier, J. von Neumann eut l'idée d'utiliser les développements les plus modernes de l'analyse mathématique pour une théorie des jeux à deux personnes. Depuis la parution de son ouvrage fondamental (2), ses résultats furent constamment améliorés, notamment par A. Wald, S. Karlin, H. Weyl, L. S. Shapley (3).

Néanmoins, les recherches partaient toujours du point de vue strictement local posé par von Neumann, et semblaient ignorer les problèmes globaux posés par la structure du jeu.

Dans la théorie de von Neumann, un *jeu alternatif* serait décrit de la façon suivante : deux joueurs, que nous appellerons A et B, font un choix à tour de rôle parmi plusieurs alternatives possibles, appelées *mouvements*. Les mouvements jouables à un moment donné dépendent

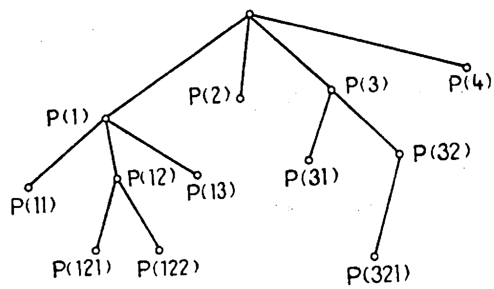
---

(1) Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris, le 2 février 1952, en vue d'obtenir le grade de Docteur ès Sciences Mathématiques.

(2) J. VON NEUMANN et O. MORGENSTERN, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, 1944.

(3) Cf. *Contributions to the Theory of Games*, Princeton, 1950.

des mouvements effectués antérieurement suivant une loi, que l'on peut représenter par un arbre tel que celui-ci :



Au début, le joueur A choisit un mouvement parmi P(1), P(2), P(3), P(4). S'il choisit P(1), par exemple, B pourra alors effectuer un des mouvements P(11), P(12), P(13). A chaque branche terminale de l'arbre est associé un coefficient λ, positif ou négatif, appelé le gain de A; si λ est positif, on dit que A *gagne de* λ; si λ est négatif, A *perd de* $|\lambda|$.

Dans la présente étude, nous ne décrivons pas les choix effectifs des joueurs avec des « mouvements », mais avec des entités *arbitraires*, appelées « positions de jeu »; lorsque A aura choisi une position x_1, B pourra choisir une position x_2 dans un ensemble Γx_1 ne dépendant que de x_1, et ainsi de suite. Le jeu ne s'arrêtera que si la position du jeu appartient à un ensemble pondéré K, et son poids sera le *gain*, positif ou négatif, du joueur A.

Cette nouvelle description constitue bien une généralisation, car nous rejetons trois hypothèses, qui semblaient fondamentales dans la théorie de von Neumann; en effet :

1° chaque joueur choisit un élément x dans un ensemble quelconque, qui n'est pas nécessairement fini, ni même numérique;

2° la durée du jeu n'est pas bornée par un nombre n fixé à l'avance;

3° les positions x du jeu sont définies par un caractère qui n'est pas nécessairement l'ensemble des positions antérieures.

Du point de vue théorique, on remarquera que les raisonnements y gagnent en élégance, le schéma étant devenu *global* (le jeu n'est plus considéré par un « arbre », mais par une fonction multiforme Γ); du point de vue pratique est devenue triviale la méthode de simplification préalable due à Krentel, Mac Kinsey et Quine ([4]), et sans laquelle les calculs numériques dans certains jeux seraient inextricables : la seule simplification sera ici de reconsidérer la définition primitive de l'élément « position », afin d'identifier les positions équivalentes.

Nous prenons pour cadre celui des jeux *alternatifs*, c'est-à-dire où les deux joueurs jouent à tour de rôle, mais cette restriction n'a rien d'essentiel : en effet, on remarquera que tous les jeux de position usuels peuvent se ramener au cas alternatif.

Chapitre I : *Transformateurs inverses et associés.* — La relation Γ étant un transformateur, il convient donc d'étudier au préalable certaines propriétés générales des transformateurs. Ce chapitre préliminaire sera surtout le développement de deux notes ([5]), où nous définissons l'*adjoint* et l'*inverse*; seulement, pour plus de généralité, nous supposons ici que le domaine de définition est un semi-treillis quelconque, simple ou non, ce qui nécessite l'introduction de notions nouvelles, comme le noyau et l'anti-noyau. Cette généralisation n'est d'ailleurs pas purement spéculative, car nous rencontrerons au chapitre suivant des treillis non simples (treillis des cycles).

Chapitre II : *Jeux alternatifs absolus*, ou étude de la règle. — De l'algèbre des transformateurs étudiée au chapitre I, nous déduisons aussitôt diverses opérations sur les jeux : *inversion, adjonction, produit, superposition*, etc.

Cette *Algèbre des jeux* va nous permettre d'étudier les propriétés intrinsèques des positions de nullité, de gain ou de perte. L'ensemble des positions gagnantes de chaque joueur sera donné par une formule algébrique, et les jeux seront classés par la structure de leurs règles.

Nous avons pris comme cadre celui des jeux alternatifs *absolus*,

---

([4]) W. D. Krentel, J. C. C. Mc Kinsey, W. V. Quine, *A simplification of Games in extensive Form* (*Duke Math. J.*, vol. **18**, 1951, p. 885).

([5]) C. Berge, *Sur L'isovalence et la régularité des transformateurs*, (*C. R. Acad. Sc.*, t. **231**, 1950, p. 1404); *Sur l'inversion des transformateurs* (*Ibid.*, t. **232**, 1951, p. 134).

c'est-à-dire sans valuation de l'ensemble K des positions finales, car l'étude de tels jeux est entièrement globale. Mais il est évident que les problèmes posés par la règle sont les mêmes pour les jeux *relatifs* et se résolvent de la même façon.

CHAPITRE III : *Jeux alternatifs relatifs*, ou étude du gain. — Si l'on pondère l'ensemble des positions finales (jeux relatifs), il se pose, en outre, un problème d'ordre local : celui du meilleur gain (ou de la moins mauvaise perte) que chaque joueur peut garantir à un moment donné. Pour le résoudre, nous devons ramener le jeu à une forme normalisée, qui coïncide alors avec la forme normalisée de la théorie classique. Autrement dit, nous rejoignons ici le point de vue de von Neumann; seulement, comme nous sommes parti avec une définition plus générale, nous n'avons pas fait les deux hypothèses fondamentales de sa théorie, à savoir :

Hypothèse I : Les ensembles Γx sont des ensembles finis pour toute position x;

Hypothèse II : La durée de la partie est bornée par un nombre fixé à l'avance.

Le rejet des hypothèses I et II posera des problèmes nouveaux; nous verrons, en particulier, que le théorème principal de von Neumann peut alors être mis en défaut.

Dans ce chapitre, nous avons déterminé parfaitement la borne supérieure précise de tous les « gains qu'un des joueurs peut prétendre *a priori* dépasser à un moment quelconque fixé par lui »; par contre, nous ne savons à peu près rien de la borne supérieure précise des gains qu'il peut prétendre dépasser « tôt ou tard »; ce problème encore non résolu relève de la théorie des nombres transfinis.

CHAPITRE IV : *Jeux alternatifs neumanniens*, ou étude de l'information. — En faisant quelques hypothèses supplémentaires sur le transformateur Γ, on obtient une catégorie de jeux, dits *neumanniens*, pour lesquels il est possible, aux joueurs A et B, de jouer sans connaître parfaitement la position : le problème fondamental qui se pose est alors de reconnaître si le jeu est *parfait* ([6]).

([6]) En anglais : strictly determined.

Ce problème se pose surtout pour les jeux dits « de stratégie », dans lesquels la position est constituée par un couple de deux distributions $P(x)$ et $Q(y)$ (sur des ensembles X et Y donnés) choisies respectivement par les joueurs A et B. Von Neumann [7], qui supposait les ensembles X et Y finis, avait démontré en 1937 l'important théorème suivant : *Tout jeu de stratégie est parfait.*

Puis, J. Ville [8] et A. Wald [9] étendirent par continuité ce résultat à des ensembles X et Y d'un autre type, mais toujours bornés.

Dans ce chapitre, notre but principal sera d'élargir ces critères et de les adapter à des ensembles X et Y non bornés. C'est ainsi que nous généraliserons les théorèmes de Ville et de von Neumann.

Nous nous étendrons plus spécialement sur le cas important où X et Y sont des ensembles dénombrables. Ici, le passage du cas fini au cas infini sera grandement facilité par des résultats connus de l'espace hilbertien.

CHAPITRE I.

TRANSFORMATEURS INVERSES ET ASSOCIÉS DANS UN SEMI-TREILLIS.

1. SEMI-TREILLIS. — Dans toute cette étude, il ne sera question que de *treillis* au sens *complet* du mot; ce sera une famille d'ensembles D telle que :

$$e_\lambda \in D \quad (\lambda) \quad \text{entraîne} \quad \bigcup_\lambda e_\lambda \in D; \tag{1}$$

$$e_\lambda \in D \quad (\lambda) \quad \text{entraîne} \quad \bigcap_\lambda e_\lambda \in D. \tag{2}$$

(7) J. VON NEUMANN, *Über ein ökonomisches Gleichungssystem* (*Math. Kolloquiums*, t. 8, 1937).

(8) J. VILLE, in *Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications* (E. BOREL), t. IV, vol. 2, Paris, 1938.

(9) A. WALD, *Foundations of a general Theory of Sequential Decision Functions* (*Econometrica*, t. 15, 1947).

Les intersections et les réunions sont prises avec une infinité d'ordre quelconque d'ensembles e_λ.

D sera un *semi-treillis* si l'on a seulement

$$(1) \qquad e_\lambda \in D \quad \text{entraîne} \quad \bigcup_\lambda e_\lambda \in D.$$

Un ensemble e de D sera un *ensemble minimal* s'il ne contient pas d'autres ensembles de D que l'ensemble e lui-même et l'ensemble vide O, qui peut toujours être considéré comme appartenant à D.

D sera un *treillis simple* si tout ensemble de D est une réunion d'ensembles minimaux. Par exemple, les sous-ensembles d'un intervalle forment un treillis simple dont les ensembles minimaux sont les points. Avec tout semi-treillis D, on peut former un treillis simple δ en considérant toutes les réunions des ensembles minimaux de D. L'ensemble

$$\{D\} = \bigcup_{e_\lambda \in D} e_\lambda$$

est l'*ensemble maximal* du semi-treillis D.

2. Transformateurs. — Considérons, sur une famille d'ensembles D_A, une relation A faisant correspondre à tout ensemble e de D_A un ensemble Ae bien déterminé.

Nous dirons que A est un *transformateur* si

1° D_A est un semi-treillis;

2° $A\left(\bigcup e_\lambda\right) = \bigcup Ae_\lambda$ (où $e_\lambda \in D_A$);

3° $AO = O$ (où O est l'ensemble vide).

D_A est le *domaine de définition* de A.

Les ensembles de la forme Ae constituent aussi un semi-treillis Δ_A, appelé *domaine des valeurs* de A.

A sera un *transformateur régulier* dans D_A si

$$Ae_1 = Ae_2 \qquad (e_1, e_2 \in D_A)$$

entraîne

$$e_1 = e_2.$$

On a, comme avec les treillis au sens ordinaire du mot, le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Si* A *est un transformateur*, $e_1 \subset e_2$ *entraîne* $Ae_1 \subset Ae_2$. *Si, de plus*, A *est régulier*, $Ae_1 \subset Ae_2$ *entraîne* $e_1 \subset e_2$.

En effet, le fait que A soit un homomorphisme dans un semi-treillis complet ne change rien à la démonstration usuelle ([10]).

D'après ce théorème, si l'on a

$$e_\lambda \in D_A, \qquad \bigcap_\lambda e_\lambda \in D_A,$$

on peut écrire :

$$A\left(\bigcap e_\lambda\right) \subset \bigcap Ae_\lambda.$$

Nous dirons alors que le transformateur A est *isovalent* dans D_A si, de plus,

1° D_A est un treillis;

2° $A\left(\bigcap e_\lambda\right) = \bigcap Ae_\lambda$.

Ce terme d'isovalence est expliqué par une analogie avec la théorie des opérateurs linéaires. Nous avons démontré, en effet, qu'on peut établir une correspondance biunivoque entre les opérateurs linéaires isovalents et les transformateurs isovalents ([11]).

3. INVERSE D'UN TRANSFORMATEUR A. — Nous nous proposons de traiter ici le problème de l'inversion de A pour un semi-treillis quelconque D_A, problème qui nécessite l'introduction de quelques notions préalables.

Un ensemble $\mathcal{E}$ étant donné, les ensembles E de D_A tels que

---

([10]) *Cf.*, par exemple, Garett BIRKOFF, *Lattice Theory* (*Amer. Math. Soc.*, Colloquium publications, vol. XXV, 1948, p. 21).

([11]) CLAUDE BERGE, *Sur l'isovalence et la régularité des transformateurs*, *C. R. Acad. Sc.*, t. **231**, 1950, p. 1404).

$AE_\cap \mathcal{E} = O$ constituent évidemment un semi-treillis $N(\mathcal{E})$, que nous appellerons *noyau de* D_A (par rapport au transformateur A).

Remarquons que, si D_A est un treillis et si E_λ sont des ensembles de $N(\mathcal{E})$, on a

$$A\left(\bigcap E_\lambda\right) \cap \mathcal{E} \subset \left(\bigcap AE_\lambda\right) \cap \mathcal{E} = O$$

$N(\mathcal{E})$ est donc aussi un treillis.

Éliminons de D_A tous les ensembles du type

$$e = E' \cup E'' \qquad (E' \in D_A,\ E'' \in N(\mathcal{E}),\ E' \neq e,\ E'' \neq O).$$

Avec les ensembles e_λ qui restent, on peut former, en prenant leurs réunions de toutes les façons possibles, un semi-treillis $\overline{N}(\mathcal{E})$, que nous appellerons *anti-noyau de* D_A (par rapport au transformateur A).

Lorsque le semi-treillis D_A est simple, la définition de l'antinoyau est simplifiée; on voit, en effet, qu'un ensemble E appartient à $\overline{N}(\mathcal{E})$ si, et seulement si, *il est une réunion d'ensembles minimaux n'appartenant pas à* $N(\mathcal{E})$.

Nous pouvons maintenant définir l'*inverse* A^{-1} d'un transformateur A. Ce sera la relation qui fait correspondre à un ensemble e quelconque la réunion $A^{-1}e$ des ensembles E_λ du semi-treillis $d_A = \overline{N}(\{\Delta_A\})$, tels que

$$AE_\lambda \subset e.$$

Il s'ensuit immédiatement que $A^{-1}e \in d_A$ quel que soit e, que $e_1 \supset e_2$ entraîne $A^{-1}e_1 \supset A^{-1}e_2$, et que $A^{-1}O = O$.

LEMME. — *A tout ensemble* E *de* D_A *correspond un ensemble* $\overline{E}$ *de* $\overline{N}(\mathcal{E})$ *tel que*

$$AE \cap \mathcal{E} = A\overline{E} \cap \mathcal{E}.$$

En effet, considérons tous les ensembles e_λ de D_A contenus dans E, et éliminons ceux qui sont de la forme

$$e_\lambda = E'_\lambda \cup E''_\lambda \qquad (E'_\lambda \in D_A,\ E''_\lambda \in N(\mathcal{E}),\ E'_\lambda \neq e_\lambda,\ E''_\lambda \neq O).$$

On peut toujours supposer que E'_λ n'est pas lui-même un ensemble éliminé, à condition de prendre pour E''_λ la réunion de tous les ensembles de $N(\mathcal{E})$ contenus dans e_λ. Prenons maintenant pour $\overline{E}$ la réunion de tous les ensembles e_{λ_i} non éliminés :

$$\overline{E} \in \overline{N}(\mathcal{E}),$$

et on peut écrire :

$$A\overline{E} \cap \mathcal{E} = \Big(\bigcup A e_{\lambda_i}\Big) \cap \mathcal{E} = \bigcup (A e_{\lambda_i} \cap \mathcal{E}) \cup \bigcup (A E'_\lambda \cap \mathcal{E}) \cup \bigcup (A E''_\lambda \cap \mathcal{E}).$$

On a donc

$$A\overline{E} \cap \mathcal{E} = A E \cap \mathcal{E}.$$

Théorème 1. — $A^{-1}A \supset 1$ *dans* d_A, *et* $AA^{-1} = 1$ *dans* Δ_A. *Partout ailleurs*, $AA^{-1} \subset 1$.

En effet, quel que soit e, on a

$$(1) \qquad AA^{-1}e = A\Big(\bigcup_{\substack{AE_\lambda \subset e \\ E_\lambda \in d_A}} E_\lambda\Big) = \bigcup AE_\lambda \subset e.$$

Si de plus $e \in \Delta_A$, on a $e = AE$. On peut toujours supposer que $E \in \overline{N}(\mathcal{E})$, d'après le lemme, quitte à remplacer E par $\overline{E}$. On a alors, d'après la définition de l'inverse,

$$E \subset A^{-1}e,$$

ce qui entraîne, d'après le théorème (1, § 2),

$$AE \subset AA^{-1}e.$$

Si l'on compare avec (1), il vient :

$$e = AA^{-1}e \quad \text{dans } \Delta_A. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

En outre,

$$A^{-1}AE = A^{-1}e \supset E \quad \text{dans } d_A. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème 2. — *Si* A *est un transformateur régulier dans* D_A, $e = AE$ *équivaut à* $E = A^{-1}e$, $e \in \Delta_A$.

Supposons, en effet, que A soit régulier dans D_A, et considérons dans Δ_A un ensemble $e = AE$; on a, puisque $D_A = d_A$,

$$E \subset A^{-1}e.$$

Si $E \neq A^{-1}e$, on pourrait trouver un ensemble $\mathscr{E}$ de D_A non contenu dans E et tel que :

$$E \cup \mathscr{E} \subset A^{-1}e.$$

En tenant compte du théorème précédent :

$$A(E \cup \mathscr{E}) \subset A A^{-1} e = e, \qquad \text{ou} \qquad AE \cup A\mathscr{E} \subset AE,$$

ou encore

$$A\mathscr{E} \subset AE.$$

Mais, d'après le théorème (1, § 2), on aurait $\mathscr{E} \subset E$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Inversement, si $E = A^{-1}e$, avec $e \in \Delta_A$, on a, d'après le théorème 1,

$$AE = A A^{-1} e = e.$$

Lorsque A et B sont des transformateurs réguliers, le théorème 2 nous indique, en particulier, que

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

Théorème 3. — *Si* A *est un transformateur régulier dans* d_A, A^{-1} *est un transformateur régulier dans* Δ_A.

En effet,

$$A\left(\bigcup A^{-1} e_\lambda\right) = \bigcup A A^{-1} e_\lambda = \bigcup e_\lambda = A\left(A^{-1} \bigcup e_\lambda\right).$$

Comme A est régulier dans d_A,

$$A^{-1}\left(\bigcup e_\lambda\right) = \bigcup A^{-1} e_\lambda.$$

Comme, de plus, $A^{-1} O = O$, A^{-1} est donc un transformateur.

En outre, $A^{-1} e_1 = A^{-1} e_2$ entraîne

$$e_1 = A A^{-1} e_1 = A A^{-1} e_2 = e_2;$$

A^{-1} est donc aussi régulier.

Conséquence. — Il s'ensuit immédiatement que l'on peut appliquer le théorème 2 à A^{-1}, qui est un transformateur régulier dans Δ_A :

$$e = AE \qquad \text{équivaut à} \qquad E = A^{-1} e$$

et, par conséquent, à

$$e = (A^{-1})^{-1} E \qquad (E \in d_A).$$

On aura donc, si A est régulier dans d_A,

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad \text{dans } d_A.$$

4. Fermeture d'un ensemble E de d_A. — Nous appellerons *fermeture* (*par rapport à* A) d'un ensemble E ($\in d_A$) l'ensemble $\mathcal{F}E = A^{-1}AE$.

On déduit immédiatement de ce qui précède :

1° $\mathcal{F}E \supset E$ quel que soit $E(\in d_A)$;
2° $E_1 \supset E_2$ entraîne $\mathcal{F}E_1 \supset \mathcal{F}E_2$;
3° $\mathcal{F}(\mathcal{F}E) = \mathcal{F}E$.

$\mathcal{F}$ est donc, au sens topologique du mot, une relation de fermeture, et il en résulte les propriétés suivantes, d'ailleurs bien connues :

Théorème 1. — $\mathcal{F}\left(\bigcup E_\lambda\right) \supset \bigcup \mathcal{F}E_\lambda$.

Ceci résulte de l'extensivité de $\mathcal{F}$.

Théorème 2. — *$\mathcal{F}E$ est le plus petit ensemble fermé qui contient* E.

Nous appellerons *fermé* un ensemble F tel que $\mathcal{F}F = F$. Ainsi, $\mathcal{F}E$ est fermé (d'après 3°) et contient E (d'après 1°).

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}E) = (A^{-1}A)(A^{-1}A)E = A^{-1} 1 AE = \mathcal{F}E.$$

Enfin, si un ensemble F_1 est fermé et contient e, on a

$$\mathcal{F}F_1 \supset \mathcal{F}e,$$

donc

$$F_1 \supset \mathcal{F}e. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème 3. — *L'intersection d'un nombre quelconque ou d'une infinité d'ensembles fermés est un ensemble fermé.*

En effet, si $F_1, F_2, \ldots$ sont fermés, on a quel que soit k,

$$\bigcap F_n \subset F_k \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{F}\left(\bigcap F_n\right) \subset F_k.$$

Par conséquent :

$$\mathcal{F}\left(\bigcap F_n\right) \subset \bigcap F_n.$$

D'autre part, d'après l'extensivité, on a, l'inclusion inverse, donc

$$\mathcal{F}\left(\bigcap F_n\right) = \bigcap F_n. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarquons que A est régulier avec les ensembles fermés, car si $AF_1 = AF_2$, on a aussi :

$$A^{-1}AF_1 = A^{-1}AF_2 \qquad \text{et} \qquad F_1 = F_2.$$

5. Transformateur associé d'un transformateur A. — On appellera *transformateur associé* $A^\star$ du transformateur A la relation qui fait correspondre à e la réunion $A^\star e$ des ensembles minimaux de $\overline{N}(e)$ [5]. On a, en particulier, quel que soit e,

$$A^\star e \in d_A, \qquad A^\star e \in \delta_A,$$

(où δ_A est le treillis simple extrait du semi-treillis D_A).

Théorème 1. — *$A^\star$ est un transformateur dans tout semi-treillis.*

En effet, si $e = O$, tout ensemble E_λ de D_A réalise

$$AE_\lambda \cap e = O,$$

donc

$$\{\overline{N}(e)\} = O \qquad \text{et} \qquad A^\star O = O.$$

([5]) Il est à remarquer que si A représente l'extension-aux-parties d'une fonction multiforme $f(x)$, $A^\star$ réprésente l'extension-aux-parties de l'inverse $f^{-1}(x)$. Par contre, A^{-1} représente une relation nouvelle, que l'on pourra appeler l'inverse fort $f^{(-1)}$ de la fonction multiforme f. Du point de vue algébrique, $f^{(-1)}$ jouit de propriétés tout aussi intéressantes que celles de f^{-1}. On peut comparer, par exemple, les propriétés des ensembles e fermés (tels que $f^{-1}fe = e$) et celles des ensembles ε stables (tels que $f^{(-1)}f\varepsilon = \varepsilon$), puisqu'on a démontré que $f^{(-1)}f$ est une relation de fermeture (ce qui n'était pas le cas pour $f^{-1}f$).

D'autre part, $A^*\left(\bigcup e_k\right)$ est la réunion des ensembles minimaux E_λ tels que

$$AE_\lambda \cap e_{k_0} \neq O$$

pour au moins une valeur k_0.

D'où :

$$A^*\left(\bigcup e_k\right) = \bigcup A^* e_k.$$

A^* est donc un transformateur.

THÉORÈME 2. — *Si* A *est un transformateur isovalent dans* d_A, *on a* : $A^* \subset A^{-1}$ *dans* Δ_A.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait un ensemble minimal E_λ de d_A tel que

$$1^\circ \quad AE_\lambda \not\subset e,$$
$$2^\circ \quad AE_\lambda \cap e \neq O.$$

Supposons que $e = A\mathcal{E}$ soit un ensemble de Δ_A et que, de plus, A soit isovalent; les relations précédentes deviennent :

$$1^\circ \quad E_\lambda \not\subset \mathcal{E},$$
$$2^\circ \quad E_\lambda \cap \mathcal{E} \neq O.$$

Mais $E_\lambda \cap \mathcal{E}$ serait un ensemble non vide, différent de E_λ et cependant contenu dans un ensemble minimum E_λ, ce qui est absurde.

THÉORÈME 3. — *On a* $(AB)^* = B^*A^*$ *si, pour tout* $E_\lambda \in \delta_B$, BE_λ *appartient à* δ_A.

Remarquons que si $E \in \delta_A$, la relation

$$AE \cap e \neq O$$

est équivalente à

$$E \cap A^* e \neq O.$$

(L'intersection et le transformateur associé jouent entre eux un rôle identique au produit scalaire avec l'opérateur associé.)

On a donc l'équivalence entre les relations

$$
\begin{aligned}
E_\lambda \cap (AB)^\star e &\neq O, \\
ABE_\lambda \cap e &\neq O, \\
BE_\lambda \cap A^\star e &\neq O, \\
E_\lambda \cap B^\star A^\star e &\neq O.
\end{aligned}
$$

En prenant successivement pour E_λ les ensembles minimaux de δ_B, on établit la relation annoncée; on vérifie aussi de proche en proche, la relation

$$(A^n)^\star = (A^\star)^n.$$

Théorème 4. — *On a* $(A^\star)^\star = A$ *dans* δ_A.

En effet, si $E \in \delta_A$, on a l'équivalence entre

$$
\begin{aligned}
E_\lambda \cap AE &\neq O, \\
A^\star E_\lambda \cap E &\neq O, \\
E_\lambda \cap A^{\star\star} E &\neq O,
\end{aligned}
$$

ce qui entraîne $A^{\star\star} = A$ dans δ_A.

CHAPITRE II.

JEUX ALTERNATIFS ABSOLUS.

6. Description. — Nous avons un *jeu alternatif absolu* lorsque deux joueurs (1) et (2) choisissent alternativement un élément d'un ensemble X donné, appelé *ensemble des positions du jeu* : (1) ayant choisi une position x_1, (2) peut choisir une position x_2 dans un ensemble Γx_1 ne dépendant que de x_1, puis (1) choisit à son tour un élément x_3 dans un ensemble Γx_2 ne dépendant que de x_2, etc. Dès que la position x appartient à un ensemble donné K_1 — resp. K_2 —, le jeu s'arrête, et l'on dit que x est une *position de mat* pour (2) — resp. pour (1) —, ou que le joueur (1) — resp. (2) — a *gagné*. Dans le jeu des échecs, par exemple, on pourra prendre pour position l'ensemble des coordonnées des pièces de l'échiquier, avec en outre, l'indication du joueur ayant le droit de jouer, ou le *trait*.

On désigne par X_1 l'ensemble des *coups de* (1), c'est-à-dire des positions permises avec le trait au joueur (2); dans la plupart des jeux, on a $K_1 \subset X_1$, $K_2 \subset X_2$, comme dans le jeu des échecs, mais ceci n'a rien d'essentiel. Dans le jeu de « qui perd gagne » usuel, (Dames-Réversi), par exemple, on a au contraire $K_1 \subset X_2$, $K_2 \subset X_1$.

Nous ne supposons même pas ici que les buts que se proposent les deux joueurs soient incompatibles, c'est-à-dire que $K_1 \cap K_2 = O$.

7. Transformateur fondamental du jeu. — On appelle *transformateur fondamental* du jeu la relation Γ tel que Γx soit l'ensemble des positions pouvant suivre immédiatement la position x. Si e est un ensemble de positions disjoint de $K = K_1 \cup K_2$, on pose

$$\Gamma e = \bigcup_{x \in e} \Gamma x.$$

Les ensembles e forment un treillis D_Γ, pour lequel Γ est un transformateur.

Le semi-treillis Δ_Γ est la *structure* du jeu.

$\Gamma^{-1}e$ est l'ensemble des positions x qui deviendront une position de e au coup suivant (*car* $\Gamma x \neq O$, $\Gamma x \subset e$); *$\Gamma^{\star}e$ est l'ensemble des positions x qui peuvent précéder une position de e* (*car* $\Gamma x \cap e \neq O$).

Enfin, nous dirons que la structure du jeu sur un semi-treillis D donné ($D \subset D_\Gamma$) est *isovalente* (ou *régulière*) si Γ est isovalent (ou régulier) dans D.

Remarque 1. — *La condition nécessaire et suffisante pour que le jeu soit régulier partout,* (*c'est-à-dire dans tout* D_Γ) *est que chaque position puisse être suivie de positions propres* (*c'est-à-dire non consécutives à d'autres positions*).

Cette condition est nécessaire car, si $\Gamma x \subset \Gamma e$, avec $x \notin e$, il existerait deux ensembles, e et $e \cup x$, réalisant $\Gamma e = \Gamma(e \cup x)$: le jeu ne serait pas régulier.

Elle est aussi suffisante, car si $\Gamma x \subset \Gamma e$ entraîne $x \in e$ et si l'on a l'égalité $\Gamma e_1 = \Gamma e_2$, la relation $x \in e_1$ entraîne $\Gamma x \subset \Gamma e_2$, donc $x \in e_2$; on en déduit $e_1 = e_2$.

Remarque 2. — *La condition nécessaire et suffisante pour que le jeu* *soit isovalent partout est que chaque position x détermine d'une façon unique toutes les positions qui l'ont précédée au cours du jeu.*

La condition est nécessaire, car si le jeu est isovalent partout, on a, pour $x \neq y$,

$$\Gamma x \cap \Gamma y = \Gamma(x \cap y) = \Gamma O = O.$$

Elle est suffisante, car si $\Gamma x \cap \Gamma y = O$ pour $x \neq y$,

$$\Gamma e_1 \cap \Gamma e_2 = \Big(\bigcup_{x \in e_1} \Gamma x\Big) \cap \Big(\bigcup_{y \in e_2} \Gamma y\Big) = \bigcup_{x \in e_1 \cap e_2} \Gamma x,$$

ou

$$\Gamma e_1 \cap \Gamma e_2 = \Gamma(e_1 \cap e_2).$$

Lorsque le jeu est partout régulier, il résulte du théorème (3, § 3) que Γ^{-1} est un transformateur régulier dans la structure Δ_Γ; lorsque le jeu est partout isovalent, $\Gamma^\star$ est un transformateur régulier et isovalent dans Δ_Γ, et $\Gamma^{-1} = \Gamma^\star$ dans Δ_Γ.

8. Étude des positions de nullité. — Les positions de nullité sont de quatre sortes :

1° *Les positions d'ententes.* — Ce sont les positions de $K_1 \cap K_2$, qui sont des positions d'égalité, chacun des deux joueurs ayant réussi dans le but qu'il se proposait.

2° *Les positions de pat.* — Ce sont, par définition, les positions de x de $X - K$ telles que $\Gamma x = O$. Leur ensemble est désigné par J; $J_1 = J \cap X_1$ est l'*ensemble des positions de pat au joueur* (2).

Ce sont bien des positions d'égalité, chacun des deux joueurs ayant échoué dans le but qu'il se proposait.

3° *Les positions pseudo-cycliques.* — Enfin, la partie est nulle si les joueurs s'obstinent toujours à ramener la position du jeu dans un ensemble e bien déterminé, disjoint de K et de J.

Si l'un des joueurs, par exemple (2), peut maintenir la position du jeu dans e s'il le désire, nous dirons que e est un *pseudo-cycle pour* (1), et nous désignerons leur réunion par C_1.

Algébriquement, e est un pseudo-cycle pour (1) si

$$\Gamma(e\cap X_1)\subset e,$$
$$\Gamma(e\cap X_2)\cap e\neq O,$$
$$e\cap J=O.$$

c'est-à-dire si

$$\boxed{\begin{array}{l} e\cap X_1\subset\Gamma^{-1}(e\cap X_2),\\ e\cap X_2\subset\Gamma^{*}\,(e\cap X_1). \end{array}}$$

Les pseudo-cycles pour (1) constituent un sous-treillis D_1 de D_Γ, et l'on a

$$C_1=\{D_1\},\qquad C_2=\{D_2\}.$$

4° *Positions cycliques.* — Ce sont les positions pseudo-cycliques à la fois pour (1) et pour (2). Si la position du jeu est cyclique, la partie, ne pouvant jamais s'arrêter, sera nulle.

Algébriquement, e sera un cycle si c'est un sous-ensemble de X disjoint de $J\cup K$, et tel que $\Gamma e\subset e$.

Les cycles constituent un treillis D_0, qui est à la fois un sous-treillis pour D_1 et pour D_2 ; c'est d'ailleurs le produit $D_1\times D_2$ des treillis D_1 et D_2.

Un cycle peut être agrandi lorsque l'on prend sa fermeture. En effet,

$$\mathcal{F}e=\Gamma^{-1}\Gamma e$$

est encore un cycle, car si $\Gamma e\subset e$, on a

$$\Gamma\mathcal{F}e=\Gamma\Gamma^{-1}\Gamma e=\Gamma e\subset e\subset\mathcal{F}e.$$

D'après le théorème (2, § 4), $\mathcal{F}e$ est un cycle plus grand et fermé.

L'intersection de cycles fermés étant un cycle et étant fermée (th. 3, § 4), ce sera un cycle fermé.

Les cycles fermés jouent un rôle important, car les joueurs ne seront jamais forcés d'y inclure la position du jeu si celle-ci n'y est pas déjà.

Remarquons enfin que $\{D_0\}$ est un cycle qui ne peut être agrandi avec une fermeture : c'est donc un cycle fermé.

9. Généralisations de l'isovalence. — En vue d'étudier les propriétés de ces diverses positions de nullité, introduisons ici quelques définitions nouvelles.

Si D_1 et D_2 sont deux semi-treillis, leur *superposition* $D_1 \times D_2$ sera formée par définition des ensembles du type $e_1 \cap e_2 (e_1 \in D_1, e_2 \in D_2)$, ainsi que de leurs réunions.

C'est donc un semi-treillis; si, de plus, D_1 et D_2 sont des treillis, $D_1 \times D_2$ sera un treillis. Soient en effet e et e' deux ensembles de $D_1 \times D_2$; on a

$$e \cap e' = \bigcup (e_1 \cap e_2) \cap \bigcup (e'_1 \cap e'_2) = \bigcup (e_1 \cap e'_1) \cap (e_2 \cap e'_2) \in D_1 \times D_2.$$

Le *complémentaire* $\overline{D}$ de D sera par définition formé des ensembles du type $Ce = \{D\} - e$, où $e \in D$. Si D est un treillis, $\overline{D}$ est aussi un treillis, et, par conséquent, $D \times \overline{D}$ est aussi un treillis.

Nous dirons que le jeu est *quasi-isovalent* dans un semi-treillis D si $e_1 \cap e_2 = O$ (où e_1, $e_2 \in D$) entraîne $\Gamma e_1 \cap \Gamma e_2 = O$.

Un jeu isovalent est aussi quasi-isovalent, mais la réciproque n'est pas vraie. Par exemple, le jeu est quasi-isovalent dans le treillis D_0 des cycles, mais il n'est pas, en général, isovalent dans ce treillis.

Nous dirons que le jeu est *totalement isovalent* dans D s'il est quasi-isovalent dans $D \times \overline{D}$; pour démontrer qu'un jeu totalement isovalent dans D est aussi isovalent dans D, il nous suffira d'établir la relation

$$\Gamma e \cap \Gamma e' = \Gamma(e \cap e') \cup [\Gamma(e \cap Ce') \cap \Gamma(e' \cap Ce)]. \tag{1}$$

Or, celle-ci s'obtient immédiatement en développant :

$$\Gamma e \cap \Gamma e' = [\Gamma(e \cap e') \cup \Gamma(e \cap Ce')] \cap [\Gamma(e \cap e') \cup \Gamma(e' \cap Ce)].$$

Il est à noter que la relation (1) est analogue à la relation des réunions

$$\Gamma e \cup \Gamma e' = \Gamma(e \cap e') \cup [\Gamma(e \cap Ce') \cup \Gamma(e' \cap Ce)]. \tag{2}$$

Remarque. — On voit aisément que l'isovalence, la quasi-isovalence et la totale isovalence ne forment qu'une même propriété si D est un treillis ponctuel.

Plus généralement, supposons que $D = \bar{D}$; si Γ est isovalent dans D, et si

$$(e_1 \cap C e'_1) \cap (e_2 \cap C e'_2) = O,$$

on a

$$\Gamma(e_1 \cap C e'_1) \cap \Gamma(e_2 \cap C e'_2) = \Gamma(e_1 \cap C e'_1 \cap e_2 \cap C e'_2) = \Gamma O = O.$$

Γ est donc totalement isovalent dans D.

Si, maintenant, Γ est quasi-isovalent dans D, on voit que le semi-treillis D (tel que $D = \bar{D}$) est un treillis, et, d'après la formule (1), il s'ensuit que Γ est isovalent dans D.

En résumé, *si* $D = \bar{D}$, *l'isovalence, la quasi-isovalence et la totale isovalence dans* D *ne sont qu'une même propriété.*

THÉORÈME 1. — *Si le jeu est régulier dans un semi-treillis* D, $D \times \bar{D}$ *admet un noyau vide; de plus, si le jeu est totalement isovalent dans* D *on a la propriété réciproque.*

En effet, si $D \times \bar{D}$ admettait un noyau non vide, il existerait au moins deux ensembles e et e' de D tels que

$$\Gamma(e \cap C e') = O \qquad (e \cap C e' \neq O).$$

On peut donc écrire, d'après la formule (2) :

$$\Gamma e' = \Gamma(e \cap e') \cup \Gamma(e \cap C e') \cup \Gamma(e' \cap C e) = \Gamma(e \cup e') = \Gamma e \cup \Gamma e'.$$

D'où

$$\Gamma e' \supset \Gamma e.$$

Si, de plus, Γ est régulier dans D, on devrait avoir, d'après le théorème (1, § 2),

$$e' \supset e,$$

ce qui est absurde, puisqu'on a supposé $e \cap C e' \neq O$: $D \times \bar{D}$ admet donc un noyau vide.

Inversement, montrons que, si $D \times \bar{D}$ admet un noyau vide, Γ ne peut être totalement isovalent et non régulier dans D.

Soient e_1 et e_2 deux ensembles de D tels que $\Gamma e_1 = \Gamma e_2$. Supposons tout d'abord que l'on ait $e_1 \supset e_2$; $e_3 = e_1 - e_2$ appartient à $D \times \overline{D}$, et l'on a

$$\Gamma e_1 = \Gamma e_2 \cup \Gamma e_3.$$

Si Γ est totalement isovalent dans D, on a

$$\Gamma e_2 \cap \Gamma e_3 = O.$$

Donc

$$\Gamma e_3 = \Gamma e_1 - \Gamma e_2 = O.$$

Comme $D \times \overline{D}$ n'admet pas de noyau, $e_3 = O$ et $e_1 = e_2$.

Si, maintenant, l'on ne suppose plus que l'on ait $e_1 \supset e_2$, on aura néanmoins

$$\Gamma(e_1 \cup e_2) = \Gamma e_2,$$
$$\Gamma(e_1 \cup e_2) = \Gamma e_1.$$

Donc, d'après ce qui précède,

$$e_1 \cup e_2 = e_2,$$
$$e_1 \cup e_2 = e_1.$$

Il s'ensuit que, de toutes façons, $\Gamma e_1 = \Gamma e_2$ entraîne $e_1 = e_2$, et, par conséquent, le jeu est régulier dans D. C. Q. F. D.

On déduit immédiatement de ce théorème : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un jeu partout isovalent n'admette pas de positions de pat est qu'il soit partout régulier.*

Enfin, par analogie avec un théorème bien connu dans la théorie des groupes, on peut également énoncer : *Un homomorphisme de treillis, sur un treillis qui est son propre complémentaire et dont le noyau est vide, est un isomorphisme de treillis.*

THÉORÈME 2. — *Si le jeu est isovalent dans* D, *la structure* Δ *correspondante est un treillis; de plus, si le jeu est régulier dans* D, *on a la propriété réciproque.*

La première partie du théorème étant évidente, démontrons que, si Δ est un treillis, le transformateur Γ, régulier dans D, y est nécessairement isovalent.

Par hypothèse, on a

$$\Gamma e_1 \cap \Gamma e_2 = \Gamma \mathcal{E} \qquad (\mathcal{E} \in \mathrm{D})$$

donc

$$\Gamma \mathcal{E} \subset \Gamma e_1,$$

ce qui entraîne $\mathcal{E} \subset e_1$, d'après le théorème (1, § 2), et, par suite,

$$\mathcal{E} \subset e_1 \cap e_2,$$

D'où :

$$\Gamma e_1 \cap \Gamma e_2 = \Gamma \mathcal{E} \subset \Gamma(e_1 \cap e_2).$$

Mais, comme Γ est un transformateur, on a aussi l'inclusion inverse; d'où l'égalité : Γ est bien isovalent dans D.

On déduit immédiatement de ce théorème : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un jeu partout régulier admette pour structure* Δ_Γ *un treillis est qu'il soit partout isovalent :*

Théorème 3. — *Si le jeu est régulier dans* D_0, *ce treillis ne comporte que des cycles fermés, et réciproquement.*

Si le jeu est régulier dans D_0, l'inverse Γ_0^{-1} de Γ, pris avec D_0 comme domaine de définition, réalise, d'après le théorème (3, § 3)

$$\Gamma^{-1}\Gamma e = \Gamma_0^{-1}\Gamma e = e \qquad (e \in \mathrm{D}_0).$$

Donc tout cycle de D_0 est fermé.

Réciproquement, si tout cycle de D_0 est fermé, l'égalité

$$\Gamma e_1 = \Gamma e_2 \qquad (\text{où } e_1,\ e_2 \in \mathrm{D}_0)$$

entraîne

$$\Gamma^{-1}\Gamma e_1 = \Gamma^{-1}\Gamma e_2 \qquad \text{et} \qquad e_1 = e_2.$$

Γ est donc régulier dans D_0.

Corollaire 1. — *Si le jeu est totalement isovalent dans* D_0, *ce treillis ne comporte que des cycles fermés.*

En effet, le théorème 1 montre que le jeu est alors régulier dans D_0, puisque, $\{\mathrm{D}_0\}$ ne comportant pas de position de pat, $\mathrm{D}_0 \times \overline{\mathrm{D}}_0$ a un noyau vide.

D'après le théorème 3, D_0 ne comporte donc que des cycles fermés.

Corollaire 2. — *Si* D_0 *est son propre complémentaire, ce treillis ne comporte que des cycles fermés.*

En effet, le jeu est quasi isovalent dans D_0. Si l'on a $D_0 = \bar{D}_0$, il est aussi totalement isovalent dans D_0, d'après une remarque faite précédemment, et D_0 ne comporte que des cycles fermés.

10. Coups justes. — On appelle *coup juste pour* (1) une position de X_1 telle que (1) puisse gagner, quoi que fasse (2) par la suite.

Désignons par $G_1(n)$ l'ensemble des coups justes qui peuvent donner le mat en n coups, ou *positions gagnantes d'ordre n.*

$G_1(n)$ est l'ensemble des positions x telles que

$$\Gamma x \subset \Gamma^* G_1(n-1) \qquad (\Gamma x \neq O),$$

donc :

$$G_1(n) = \Gamma^{-1}\Gamma^* G_1(n-1) = (\Gamma^{-1}\Gamma^*)^n G_1(0).$$

L'ensemble des coups justes pour (1) sera donc [12] :

$$G_1 = [1 + \Gamma^{-1}\Gamma^* + (\Gamma^{-1}\Gamma^*)^2 + \ldots] G_1(0)$$

ou, symboliquement,

$$G_1 = \frac{1}{1 - \Gamma^{-1}\Gamma^*}[G_1(0)].$$

Si $K_1 \subset X_1$, comme pour les Échecs, on a $G_1(0) = K_1$.

Si $K_1 \subset X_2$, comme pour le « qui perd gagne », $G_1(0)$ est l'ensemble des positions x telles que $\Gamma x \subset K_1$, $\Gamma x \neq O$, soit

$$G_1(0) = \Gamma^{-1} K_1.$$

On a donc la formule générale :

$$\boxed{G_1 = \frac{1}{1 - \Gamma^{-1}\Gamma^*}\Big[(K_1 \cap X_1) \cup \Gamma^{-1}(K_1 \cap X_2)\Big].} \qquad (1)$$

Remarquons que $G_1(n) = \Gamma^{-1}\Gamma^* G_1(n-1)$ appartenant à d_Γ

---

(12) Si A et B sont deux relations d'ensembles, on pose, suivant la convention habituelle,

$$(A + B)e = Ae \cup Be.$$

si $n \neq 0$, on peut prendre sa fermeture ; on a, d'après le théorème (1, § 3).

$$\mathcal{F} G_1(n) = \Gamma^{-1}(\Gamma\Gamma^{-1})\Gamma^* G_1(n-1) \subset \Gamma^{-1}\Gamma^* G_1(n-1) = G_1(n).$$

Mais, d'après l'extensivité de $\mathcal{F}$, on a aussi l'inclusion inverse ; on a donc

$$\mathcal{F} G_1(n) = G_1(n).$$

$G_1(n)$ est un ensemble fermé et G_1 est analogue à un F_σ dans un espace topologique.

Si la position initiale du jeu $x_0 (\in X_2)$ appartient à G_2, on dira que le jeu est *injuste* contre (1).

11. Coups faux. — On appelle *coup faux pour* (1) une position de X_1 telle que (1) puisse perdre, quoi qu'il fasse par la suite.

Leur ensemble P_1 comprend, outre les positions de $K_2 \cap X_1$ les positions x telles que

$$\Gamma x \cap G_2 \neq O.$$

On a donc

$$\boxed{P_1 = \Gamma^* G_2 \cup (K_2 \cap X_1).} \tag{2}$$

De même,

$$\boxed{G_1 = \Gamma^{-1} P_2 \cup (K_1 \cap X_1).} \tag{2'}$$

Les formules (2) et (2') font apparaître une dualité entre les symboles P et G, Γ^* et Γ^{-1}, K_1 et K_2.

Nous utiliserons par la suite cette dualité ; en particulier, on déduit de (1) la relation duale

$$\boxed{P_1 = \frac{1}{1 - \Gamma^* \Gamma^{-1}} \left[(K_2 \cap X_1) \cup \Gamma^* (K_2 \cap X_2) \right].} \tag{1'}$$

12. Théorème des jeux alternatifs. — Les formules (2) et (2') contiennent un résultat, généralement connu sous le nom de théorème des jeux alternatifs, que nous allons essayer de préciser.

THÉORÈME. — *Il existe, pour l'un au moins des joueurs, un moyen d'arriver à coup sûr à gagner, à se faire donner le pat à lui-même, ou à empêcher le jeu de se terminer.*

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi. Par hypothèse, (1) ne peut pas prétendre amener la position du jeu dans

$$K'_1 = J_2 \cup K_1$$

et (2) ne peut pas prétendre l'amener dans

$$K'_2 = J_1 \cup K_2.$$

Soient G′ et P′ les ensembles de coups justes et faux correspondants.

La position initiale x_0 ne peut donc être ni un coup juste de (2), ni un coup faux de (2).

Or, d'après la formule (2), $x_0 \notin P'_2$ entraîne $x_0 \notin \Gamma^* G'_1$, soit :

$$\Gamma x_0 \cap G'_1 = O.$$

De même, d'après la formule (2′), $x_0 \notin G'_2$ entraîne $x_0 \notin \Gamma^{-1} P'_1$, soit :

$$\Gamma x_0 \not\subset P'_1.$$

Il s'ensuit que (1) jouera un coup x_1 tel que $x_1 \notin G'_1$ et que, si (1) le désire, $x_1 \notin P'_1$: ce sont précisément les conditions auxquelles était soumis x_0 ; donc si (1) et (2) veulent jouer en évitant P'_1 et P'_2, ils le pourront toujours et le jeu ne s'arrêtera jamais, aucun des joueurs n'arrivant à obtenir une position de mat ou de pat. C. Q. F. D.

Considérons, par exemple, le jeu bien connu du « Loup et des Agneaux » [13], où il n'est pas possible de prolonger le jeu indéfiniment, et où l'on a seulement trois résultats possibles :

1° Les agneaux bloquent le loup sur sa bande de départ : mat au loup (K_1) ;

2° Le loup n'est pas bloqué quand les agneaux ont achevé leurs possibilités de jouer : mat aux agneaux (K_2) ;

3° Les agneaux bloquent le loup, mais pas sur sa bande de départ : pat au loup (J_1).

---

[13] *Cf.*, par exemple, KRAITCHIK, *Théorie mathématique des jeux*, Bruxelles, 1930.

Le théorème des jeux alternatifs indique alors *a priori* que les agneaux ont une méthode pour gagner à coup sûr, ou bien que le loup peut prétendre gagner ou faire partie nulle.

Comme le jeu n'a pas de positions d'entente, ces deux alternatives sont incompatibles; l'expérience montre d'ailleurs facilement que le jeu est injuste contre le loup.

13. Jeux de reconstitution. — A chaque jeu alternatif de transformateur fondamental Γ, on peut associer un autre jeu alternatif de transformateur $\Gamma' = \Gamma^{\star}$.

$\Gamma^{\star} x$ est l'ensemble des positions y telles que $\Gamma y \cap x \neq O$, c'est-à-dire $x \in \Gamma y$. On voit donc que l'on a seulement « renversé » l'orientation dans la règle du jeu. Il s'agit donc pour (1) de *reconstituer* une position antérieure d'un ensemble K'_1 ou, pour (2), une position d'un ensemble K'_2, à partir d'une position initiale x'_0 appartenant à $\{d_\Gamma\}$.

Si $\Gamma = \Gamma^{\star}$, le jeu est dit *symétrique*; sa règle coïncide avec celle du jeu de reconstitution associé. Soit le jeu d'escrime, par exemple, ce jeu étant continu n'est pas à proprement parler un jeu alternatif; mais il peut être « approché » autant que l'on veut par un jeu alternatif qui est symétrique.

Théorème 1. — *Un jeu symétrique ne peut être partout isovalent,*

Ceci résulte de la remarque (1, § 7).

Théorème 2. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un jeu symétrique soit partout régulier est que chaque joueur soit contraint à jouer toujours le même coup.*

En effet, si le jeu est partout régulier, toute position x admet, d'après la remarque (2, § 7), une position propre y, qui ne peut être une position de mat ou de pat (car $x \in \Gamma y$). Si $z \in \Gamma y$, avec $z \neq x$, on a $y \in \Gamma z$, ce qui contredit l'hypothèse que y est une position propre de x. Donc $\Gamma y = \{x\}$, et comme y est également une position propre on a $\Gamma x = \{y\}$; x et y sont donc les seules positions de jeu possibles.

Inversement, il est évident qu'un tel jeu est partout régulier.

THÉORÈME 3. — *Un jeu de reconstitution n'a pas de positions de pat, excepté, peut-être, la position initiale* x_0.

La démonstration est immédiate.

THÉORÈME 4. — *La condition nécessaire et suffisante pour que le jeu de reconstitution admette des positions cycliques est que* x_0 *ne soit ni une position de pat, ni un élément de* $\frac{1}{1-\Gamma}K'$.

La condition est nécessaire, car, si e' est un cycle, on a $\Gamma^\star e' \subset e'$; ce qui entraîne

$$x_0 \in e'.$$

x_0 n'est donc pas une position de pat, puisqu'elle fait partie d'un cycle.

Comme x_0, $\Gamma^\star x_0$, $(\Gamma^\star)^2 x_0 \ldots$ sont contenus dans e', on a aussi, quel que soit n,

$$(\Gamma^\star)^n x_0 \cap K' = O.$$

Donc, x_0 n'appartient à aucun des ensembles $[(\Gamma^\star)^n]^\star K'$.

Mais, d'après les théorèmes (3, § 5) et (4, §5), on a

$$[(\Gamma^\star)^n]^\star = [(\Gamma^\star)^\star]^n = \Gamma^n.$$

x_0 n'appartient donc pas à

$$\frac{1}{1-\Gamma}K' = K' \cup \Gamma K' \cup \Gamma^2 K' \cup \ldots.$$

La condition est suffisante, car alors on a au moins le cycle

$$e = x_0 \cup \Gamma^\star x_0 \cup (\Gamma^\star)^1 x_0 \cup \ldots.$$

Nous signalons ces résultats, d'ailleurs très simples, pour montrer en quoi consisterait une « algèbre des jeux ». D'autres « relations » entre deux jeux donnés seraient évidemment susceptible de fournir des théorèmes analogues, mais il nous a semblé que leur étude systématique ne peut encore prendre place ici.

14. SUPERPOSITION DES JEUX. — Soient deux jeux (Γ_1) et (Γ_2) définis par leurs transformateurs fondamentaux Γ_1 et Γ_2. Leur superposition

sera, par définition, le jeu $(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ défini par le transformateur fondamental

$$\Gamma_1 \times \Gamma_2\, e = \bigcup_{x \in e} \Gamma_1 x \cap \Gamma_2 x.$$

On remarque que la structure $\Delta_{\Gamma_1 \times \Gamma_2}$ est un sous-semi-treillis de $\Delta_{\Gamma_1} \times \Delta_{\Gamma_2}$.

On avait déjà rencontré les transformateurs produit et somme :

$$\Gamma_1 \Gamma_2 e = \Gamma_1(\Gamma_2 e),$$
$$(\Gamma_1 + \Gamma_2)\, e = \Gamma_1 e \cup \Gamma_2 e.$$

La superposition est donc une nouvelle opération, qui a plus spécialement sa signification dans l'étude des règles de jeu.

Propriété 1. — *La superposition est distributive par rapport à l'addition.*

En effet, on a

$$(\Gamma_1 + \Gamma'_1) \times (\Gamma_2 + \Gamma'_2)\, e = \bigcup_{x \in e} [(\Gamma_1 x \cup \Gamma'_1 x) \cap (\Gamma_2 x \cup \Gamma'_2 x)].$$

Or, chaque terme de cette réunion peut s'écrire :

$$(\Gamma_1 x \cap \Gamma_2 x) \cup (\Gamma_1 x \cap \Gamma'_2 x) \cup (\Gamma'_1 x \cap \Gamma_2 x) \cup (\Gamma'_1 x \cap \Gamma'_2 x).$$

On aura donc

$$(\Gamma_1 + \Gamma'_1) \times (\Gamma_2 + \Gamma'_2) = \Gamma_1 \times \Gamma_2 + \Gamma_1 \times \Gamma'_2 + \Gamma'_1 \times \Gamma_2 + \Gamma'_1 \times \Gamma'_2.$$

Propriété 2. — *La superposition est associative et commutative.*

Cela provient de ce que

$$\Gamma_1 \times (\Gamma_2 \times \Gamma_3)\, e = \bigcup_{x \in e} \Gamma_1 x \cap \Gamma_2 x \cap \Gamma_3 x.$$

On voit donc que la superposition $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ jouit des mêmes propriétés que le produit $\Gamma_1 . \Gamma_2$, avec, en outre, la commutativité. (Les jeux forment ainsi un anneau commutatif).

Théorème 1. — *On a*

$$(\Gamma_1 \times \Gamma_2)^* = \Gamma_1^* \times \Gamma_2^*.$$

En effet, si $x \in (\Gamma_1 \times \Gamma_2)^* e$, on a

$$\Gamma_1 x \cap \Gamma_2 x \cap e \neq O,$$

donc x peut être suivi, dans le jeu (Γ_1) comme dans le jeu (Γ_2), d'au moins une position y commune.

Comme $x \in \Gamma_1^* y$, $x \in \Gamma_2^* y$, on a

$$x \in \bigcup_{y \in e} \Gamma_1^* y \cap \Gamma_2^* y = (\Gamma_1^* \times \Gamma_2^*) e.$$

Le même raisonnement pouvant se faire à rebours, le théorème est donc démontré.

Il s'ensuit notamment que, si les jeux (Γ_1) et (Γ_2) sont symétriques, il en est de même du jeu $(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ car on a

$$(\Gamma_1 \times \Gamma_2)^* = \Gamma_1^* \times \Gamma_2^* = \Gamma_1 \times \Gamma_2.$$

Il est à remarquer qu'aucune relation analogue n'est possible avec l'inverse. On ne peut donc pas résoudre, d'une façon simple et sous sa forme générale, le problème de l'équitabilité des jeux :

« Étant donné un jeu (Γ_1), injuste pour (1), caractériser les jeux (Γ_2) que l'on pourrait lui superposer pour que le nouveau jeu ne soit plus injuste ».

LEMME. — *On a*

$$\Gamma_1 \times \Gamma_2 e \subset \Gamma_1 e \cap \Gamma_2 e.$$

En effet, on peut écrire

$$\Gamma_1 e \cap \Gamma_2 e = \Gamma_1\left(\bigcup x_i\right) \cap \Gamma_2\left(\bigcup x_j\right) = \left(\bigcup \Gamma x_i\right) \cap \left(\bigcup \Gamma x_j\right)$$

ou

$$\Gamma_1 e \cap \Gamma_2 e = \Gamma_1 \times \Gamma_2 e \cup \bigcup_{i \neq j} (\Gamma_1 x_i \cap \Gamma_2 x_j).$$

THÉORÈME 2. — *Le jeu* $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ *sera isovalent dans un treillis* D *si l'un au moins des deux jeux* Γ_1 *ou* Γ_2 *est isovalent dans le treillis* $D \times \overline{D}$.

En effet, d'après la formule (1, § 9), et en tenant compte du lemme précédent, on a

$$\Gamma_1 \times \Gamma_2 e \cap \Gamma_1 \times \Gamma_2 e' = \Gamma_1 \times \Gamma_2 (e \cap e') \cup R,$$

où

$$R = \Gamma_1 \times \Gamma_2(e \cap Ce') \cap \Gamma_1 \times \Gamma_2(e' \cap Ce).$$

Si, par exemple, Γ_1 est isovalent dans $D \times \overline{D}$, on a

$$\Gamma_1(e \cap Ce') \cap \Gamma_1(e' \cap Ce) = \Gamma_1(O) = O.$$

D'où $R = O$: le jeu est isovalent dans D.

En particulier, on voit, d'après ce théorème, que si Γ_1 est isovalent pour les sous-ensembles de E, $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ est *a fortiori* isovalent pour les sous-ensembles de E.

Remarque. — Si l'on fait intervenir ici la notion de totale isovalence, on peut obtenir un énoncé plus général, dont l'hypothèse est plus faible et la conclusion plus forte que pour le théorème précédent.

Supposons que Γ_1 soit quasi-isovalent dans D et considérons dans D deux ensembles disjoints e et e'. On a

$$\Gamma_1 \times \Gamma_2 e \cap \Gamma_1 \times \Gamma_2 e' \subset \Gamma_1 e \cap \Gamma_1 e' \cap \Gamma_2 e \cap \Gamma_2 e' = O.$$

Donc, $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ est quasi isovalent dans D.

En remplaçant D par $D \times \overline{D}$, on obtient le théorème annoncé :

Si Γ_1 *est totalement isovalent dans* D, $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ *est totalement isovalent dans* D.

En combinant ce nouveau résultat avec le théorème (1, § 9), on trouve :

Le jeu $(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ *sera régulier dans* D *si* Γ_1 *est totalement isovalent dans* D *et si* $D \times \overline{D}$ *a un noyau vide.*

CHAPITRE III.

Jeux alternatifs relatifs.

15. Description. — Il est possible, dans le jeu précédent, de valuer les positions de K_1 et de K_2, c'est-à-dire d'attribuer à chaque position de K_1 (ou de K_2) un nombre réel λ (ou μ) représentant le *gain* du

joueur (1) [ou du joueur (2)]. On dit aussi que $-\lambda$ est la *perte* du joueur (1). Si λ est positif, on dit que (1) *gagne de* λ; si λ est négatif, on dit que (1) *perd de* $|\lambda|$. Chaque joueur n'essaie plus de gagner, mais de gagner le plus possible, c'est-à-dire d'amener la position du jeu dans un ensemble $K_{1,\lambda}$ (ou $K_{2,\mu}$) avec le plus grand indice λ (ou μ) possible.

Si une position x appartient à un $K_{1,\lambda}$ et à aucun $K_{2,\mu}$ ($\mu \neq 0$), le gain du joueur (2) est nul, donc $x \in K_{2,0}$.

Autrement dit, on a

$$\bigcup_{\lambda} K_{1,\lambda} = \bigcup_{\mu} K_{2,\mu} = K.$$

Comme, d'autre part, les $K_{1,\lambda}$ (ou les $K_{2,\mu}$) sont des ensembles disjoints, on voit que *les* $K_{1,\lambda}$ *et les* $K_{2,\mu}$ *forment deux partitions dans* K, au sens complet du mot.

16. Notion de fonction-guide. — L'ensemble des coups du joueur (1) lui permettant d'amener à coup sûr le jeu dans $K_{1,\lambda}$ est, d'après la théorie précédente (où $K_1 = K_{1,\lambda}$, $K_2 = K - K_{1,\lambda}$),

$$G_{1,\lambda} = \frac{1}{1 - \Gamma^{-1}\Gamma^{*}}[(K_{1,\lambda} \cap X_1) \cup \Gamma^{-1}(K_{1,\lambda} \cap X_2)].$$

Les coups du joueur (2) permettant à (1) d'obtenir à coup sûr le gain λ forment, de même, l'ensemble

$$P_{2,\lambda} = \frac{1}{1 - \Gamma^{*}\Gamma^{-1}}[(K_{1,\lambda} \cap X_2) \cup \Gamma^{*}(K_{1,\lambda} \cap X_1)].$$

L'ensemble des positions pour lesquelles (1) peut garantir à coup sûr le gain λ est donc, tout calcul fait,

$$E_\lambda = \frac{1 + \Gamma^{*}}{1 - \Gamma^{-1}\Gamma^{*}}(K_{1,\lambda} \cap X_1) \cup \frac{1 + \Gamma^{-1}}{1 - \Gamma^{*}\Gamma^{-1}}(K_{1,\lambda} \cap X_2).$$

(A titre de vérification, on remarque que cette expression est invariante par dualité, à une permutation d'indice près.)

Une même position x peut appartenir à plusieurs de ces ensembles; les indices λ tels que $E_\lambda \ni x$ forment un ensemble que nous désignerons par $\Lambda(x)$: Ce sera l'ensemble des gains que (1) pourra garantir à coup sûr pour lui-même au moment de la position x.

De la même façon, on peut former l'ensemble $E'_\lambda = G_{2,\lambda} \cup P_{1,\lambda}$ des positions x telles que (2) puisse, quoi que fasse (1), amener le jeu dans $K_{1,\lambda}$. L'ensemble des indices λ tels que $E'_\lambda \ni x$ est désigné par $\Lambda'(x)$: ce sera l'ensemble des gains que (2) pourra garantir pour (1) au moment de la position x.

S'il est plus ou moins perspicace, le joueur (1) pourra déterminer, à défaut de tout l'ensemble $\Lambda(x)$, un élément $f(x)$ plus ou moins grand de $\Lambda(x)$. Il prendra pour $f(x)$ le plus grand gain qu'il discerne (ou, s'il ne discerne rien du tout, on posera $f(x) = -\infty$). Le jeu consistera alors pour (1) à obtenir une valeur de $f(x)$ aussi grande que possible.

Il est à remarquer que $f(x)$ n'est pas une fonction quelconque. Elle jouit des propriétés suivantes :

1° Si $x \in K \cup J$, on peut supposer que (1) puisse connaître son gain, nul si $x \in J$, égal à λ si $x \in K_{1,\lambda}$; $f(x)$ est alors déterminé par une valeur finie ne dépendant pas de la perspicacité de (1).

2° Si $x \notin K \cup J$ et si $x \in X_1$, le joueur (2) aura à choisir une position y de Γx. Quelle que soit cette position y, $f(y)$ pourra être pris au moins égal à $f(x)$, si (1) ne discerne pas de meilleurs gains. Donc

$$\text{(A)} \qquad \boxed{\inf_{y \in \Gamma x} f(y) \geq f(x)} \qquad (x \in X_1).$$

3° Si $x \in X_2$, c'est au joueur (1) de choisir une position y. Il pourra toujours, s'il le désire, rester dans l'ensemble $E_{f(x)}$. Donc

$$\text{(B)} \qquad \boxed{\sup_{y \in \Gamma x} f(y) \geq f(x)} \qquad (x \in X_2).$$

Lorsque (1) joue ainsi, en essayant de majorer $f(x)$, nous dirons qu'il *joue l'attaque*. Dans certain cas, néanmoins, il serait vain pour (1) de jouer l'attaque; il lui reste alors une autre façon de mener le jeu, qui est de *jouer la défense*.

Il peut, en effet, discerner un élément $f'(x)$ de $\Lambda'(x)$, dont la valeur sera aussi petite que possible, et égale $+\infty$ s'il ne discerne rien du tout; il est prudent pour (1) de jouer en sorte que la valeur de $f'(x)$ décroisse le moins possible. De la même façon que précédemment, on voit que $f'(x)$ jouit des propriétés suivantes :

$$\text{(A}'\text{)} \qquad \boxed{\inf_{y\in\Gamma x} f'(y) \leq f'(x)} \qquad (x\in X_1),$$

$$\text{(B}'\text{)} \qquad \boxed{\sup_{y\in\Gamma x} f'(y) \leq f'(x)} \qquad (x\in X_2).$$

On dira que $f(x)$ est une *fonction-guide* pour l'attaque, et que $f'(x)$ est une *fonction-guide* pour la défense.

17. Forme schématique du jeu. — Par extension, nous appellerons *fonction-guide pour l'attaque* toute fonction $f(x)$ réalisant (A) et (B); nous appellerons *fonction guide pour la défense* toute fonction $f'(x)$ réalisant (A′) et (B′).

De cette façon, nous pouvons donner du jeu alternatif une description plus schématique : deux joueurs (1) et (2) choisissent à tour de rôle une position de X_1 et de X_2 à l'aide d'un transformateur Γ. Sur $X_1 \cup X_2$, on définit une fonction-guide $f(x)$, pour l'attaque, par exemple. Le but du joueur (1) est de rendre sa valeur aussi grande que possible; de toutes façons, d'après (A) et (B), cette valeur ne pourra pas décroître si (1) joue convenablement.

Une position x étant donnée, nous appellerons encore *gain du joueur* (1) la valeur de $f(x)$ qui lui correspond. Enfin, on peut toujours supposer que la durée du jeu n'est jamais finie; il suffira de remplacer X_1 par $X'_1 = X_1 \cup K \cup J$, X_2 par $X'_2 = X_2 \cup K \cup J$, et Γ par un transformateur Γ' défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Gamma' x &= \Gamma x && \text{si} \quad x \notin K \cup J, \\ \Gamma' x &= x && \text{si} \quad x \in K \cup J. \end{aligned}$$

Les relations (A) et (B) n'en seront pas modifiées.

C'est sous cette forme simplifiée, ou « *forme schématique* » du jeu, que nous nous proposons de faire la théorie du gain.

Lemme 1. — *Considérons les fonctions :*

$$g_n(x) = \sup_{x_1 \in \Gamma x} \inf_{x_2 \in \Gamma x_1} \sup_{x_3 \in \Gamma x_2} \dots \sup_{x_{2n-1} \in \Gamma x_{2n-2}} \inf_{x_{2n} \in \Gamma x_{2n-1}} f(x_{2n}).$$

La suite $g_n(x)$ est croissante pour tout x de X_2.

Le lemme est vrai pour $n \leqq 1$, car, d'après (A),

$$\inf_{y \in \Gamma x_1} f(y) \geqq f(x_1).$$

Or, d'après (B),

$$\sup_{x_1 \in \Gamma x} \inf_{y \in \Gamma x_1} f(y) \geqq \sup_{x_1 \in \Gamma x} f(x_1) \geqq f(x)$$

ou

$$g_1(x) \geqq g_0(x).$$

De plus, si l'on a $g_n(x) \geqq g_{n-1}(x)$, on a aussi

$$\sup_{x_1 \in \Gamma x} \inf_{x_2 \in \Gamma x_1} g_n(x_2) \geqq \sup_{x_1 \in \Gamma x} \inf_{x_2 \in \Gamma x_1} g_{n-1}(x_2),$$

$$g_{n+1}(x) \geqq g_n(x). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème 1. — *Le joueur* (1) *peut garantir* a priori *un gain supérieur ou égal (à ε près) à*

$$G(x_0) = \lim_{n = \infty} g_n(x_0).$$

La suite $g_n(x_0)$ étant croissante, elle tend vers une limite $G(x_0)$. Montrons que la valeur de la fonction-guide $f(x)$ pourra, si le joueur (1) joue convenablement, dépasser à un moment donné $G - \varepsilon$, ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut.

Prenons pour n une valeur assez grande pour que

$$g_n(x_0) \geqq G - \frac{\varepsilon}{2}.$$

(1) peut choisir une position x_1 telle que, en posant

$$\varphi_n(x) = \inf_{y \in \Gamma x} g_n(y),$$

on ait

$$\varphi_{n-1}(x_1) \geqq \sup_{x_1 \in \Gamma x_0} \varphi_{n-1}(x_1) - \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Quelle que soit la position x_2 choisie après par (2), on aura

$$g_{n-1}(x_2) \geqq \inf_{x_2 \in \Gamma x_1} g_{n-1}(x_2) = \varphi_{n-1}(x_1) \geqq \sup_{x_1 \in \Gamma x_0} \varphi_{n-1}(x_1) - \frac{\varepsilon}{2n},$$

ou encore, d'après (A)

$$g_{n-1}(x_2) \geqq g_n(x_0) - \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Lorsque x_2 sera connue de (1), celui-ci pourra de la même façon choisir une position x_3 telle que

$$g_{n-2}(x_4) \geqq g_{n-1}(x_2) - \frac{\varepsilon}{2n} \qquad (x_4 \in \mathrm{F} x_3).$$

Finalement, on aura

$$f(x_{2n}) = g_0(x_{2n}) \geqq g_1(x_{2n-2}) - \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Additionnons toutes ces relations membre à membre

$$f(x_{2n}) \geqq g_n(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \geqq \mathrm{G} - \varepsilon.$$

Le gain du joueur (1) peut donc dépasser $\mathrm{G} - \varepsilon$, quelle que soit la façon de jouer de son adversaire.

Nous allons montrer que (1) ne peut pas prétendre davantage.

Remarque. — Le raisonnement précédent s'applique également aux fonctions $f'(x)$, guides pour la défense; la suite $g'_n(x)$ est alors décroissante pour tout x de X_2 et le joueur (1) peut garantir, pour le $n^{\text{ième}}$ coup, un gain supérieur à $g'_n(x_0) - \varepsilon$; la valeur de $f'(x)$, cependant, continuera à décroître après ce $n^{\text{ième}}$ coup.

THÉORÈME 2. — $\mathrm{G}(x_0)$ *est la borne supérieure précise de tous les gains que le joueur* (1) *peut prétendre dépasser au bout d'un temps fixé par lui à l'avance.*

Soit M la borne supérieure précise de tous les gains que (1) prétend ainsi dépasser. D'après le théorème 1, $\mathrm{M} \geqq \mathrm{G}$. Supposons que $\mathrm{M} = \mathrm{G} + \delta$, δ étant un nombre positif. (1) pourrait prétendre à un gain supérieur à $\mathrm{G} + \frac{\delta}{2}$ au bout d'un temps $(n+1)$. Montrons que cette hypothèse est absurde.

En effet, on peut supposer que (2) veuille jouer *contre* (1), c'est-à-dire avec une fonction-guide $f'(x) = -f(x)$. $f'(x)$ est bien une fonction-guide de défense pour (2), car

$$\sup_{y \in \Gamma x} f'(y) \leqq f'(x) \quad \text{sur } X_1,$$
$$\inf_{y \in \Gamma x} f'(y) \leqq f'(y) \quad \text{sur } X_2.$$

(2) cherche ici à rendre son *gain* $f'(x)$ aussi grand que possible, ou sa *perte* $-f'(x) = f(x)$ aussi petite que possible.

D'après la remarque précédente, (2) pourra garantir pour le $n^{\text{ième}}$ coup, à partir de la position x_1, un gain supérieur ou égal (à ε près) à

$$g'_n(x_1) = \sup_{x_2 \in \Gamma x_1} \inf_{x_3 \in \Gamma x_2} \cdots \sup_{x_{2n} \in \Gamma x_{2n-1}} \inf_{x_{2n+1} \in \Gamma x_{2n}} f'(x_{2n+1}).$$

Si le coup x_1 n'est pas encore joué, il pourra seulement garantir une valeur de $-f(x)$ supérieure ou égale (à ε près) à

$$\inf_{x_1 \in \Gamma x_0} g'_n(x_1) = -\sup_{x_1 \in \Gamma x_0} \inf_{x_2 \in \Gamma x_1} \cdots \inf_{x_{2n} \in \Gamma x_{2n-1}} \sup_{x_{2n+1} \in \Gamma x_{2n}} f(x_{2n+1}).$$

A fortiori, d'après la relation (B), (2) pourra garantir, pour le $(n+1)^{\text{ième}}$ coup, une valeur de $f(x)$ inférieure ou égale à $g_{n+1}(x_0) + \varepsilon$.

Il peut prendre $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$, et, au $(n+1)^{\text{ième}}$ coup, la valeur de $f(x)$ sera encore inférieure à $G + \frac{\delta}{2}$, ce qui est absurde.

Remarque 1. — Supposons que les joueurs (1) et (2) jouent *l'un contre l'autre*. Le théorème 1 indique au joueur (1) une méthode pour obtenir un gain $f(x)$ supérieur à $G(x_0) - \varepsilon_1$, ε_1 étant un nombre choisi par lui *a priori*; le théorème 2 indique au joueur (2) une méthode pour interdir jusqu'au $n^{\text{ième}}$ coup à son adversaire un gain supérieur à $G(x_0) + \varepsilon_2$, (n et ε_2 étant fixés par (2) *a priori*). Mais en général, (2) n'a pas de méthode pour maintenir cette interdiction *ad libitum* au cours de la partie.

Une telle méthode existe, par contre, si la durée du jeu est limitée; on peut alors énoncer :

La borne supérieure précise $G(x_0)$ *de tous les gains que* (1) *peut prétendre* a priori *dépasser, ou meilleur gain de* (1), *est égale à la borne* *inférieure précise* $G'_1(x_0)$ *de toutes les pertes que* (2) *peut prétendre* a priori *ne pas dépasser, ou moins mauvaise perte de* (2).

Si l'on suppose, en outre, que les ensembles Γx ont un nombre fini d'éléments, les bornes supérieures ou inférieures sont des maximums ou des minimums, et l'énoncé précédent devient le théorème bien connu de von Neumann [14] :

La plus grande valeur de $f(x)$ *à laquelle* (1) *peut prétendre est égale à la plus petite valeur de* $f(x)$ *à laquelle* (2) *peut prétendre.*

On dit aussi que le jeu, lorsqu'il est joué avec une complète information (comme c'est le cas dans ce chapitre), est *parfait* lorsque sa durée est bornée.

Remarque 2. — Dans tout jeu alternatif relatif, le problème du gain peut être envisagé de diverses façons :

1° (1) prétend obtenir un gain rigoureusement égal à λ. La borne supérieure de tous ces gains stricts est

$$F(x) = \sup_{\lambda \in \Lambda(x)} \lambda.$$

2° (1) prétend obtenir un gain au moins égal à λ, au bout d'un nombre de coups n aussi grand qu'il veut, mais annoncé à l'avance. La borne supérieure de tous ces gains est

$$G(x) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \sup_{x_1 \in \Gamma x} \cdots \inf_{x_{2n} \in \Gamma x_{2n-1}} F(x_{2n}).$$

3° (1) prétend obtenir tôt ou tard (il ne sait pas quand) un gain au moins égal à λ.

La détermination de la borne supérieure précise $H(x)$ de tous ces gains λ est un problème très différent.

Une fonction $F_n(x)$ étant donnée, on pose

$$F_{n+1}(x) = \sup_{x_1 \in \Gamma x} \inf_{x_2 \in \Gamma x_1} F_n(x_2).$$

([14]) *Cf.* J. von Neumann et O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, 1944 et 1947.

Il est évident que $H(x)$ reste toujours supérieur ou égal aux fonctions $F_0(x) = F(x)$, $F_1(x)$, ..., $F_\omega(x) = G(x)$, $F_{\omega+1}(x)$, ... [ω désigne selon la notation usuelle (15) le premier nombre cardinal transfini.]

Si le jeu n'est pas fini, il peut arriver que $H(x)$ ne soit égal à aucune de ces fonctions; construisons par exemple un jeu alternatif avec le schéma suivant :

$x(\in X_1)$ étant donné, Γx est un ensemble infini dénombrable : (1), (2), (3), ..., (k), ...; la position (k) admettant chaque fois deux positions consécutives : (k, 1); (k, 2); et toutes les positions z qui peuvent se présenter au cours de la partie sont telles que $\Gamma(z)$ ait zéro ou deux éléments ($z \neq x$).

Les branches z terminales ($\Gamma(z) = O$) et les gains $\lambda(z)$ associés sont donnés par le tableau suivant :

1. $\lambda(1, 1) = \lambda(2, 1) = \lambda(3, 1) \ldots = -1$;
   $\lambda(1, 2) = +1$;
2. $\lambda(2, 2, 1) = \lambda(3, 2, 1) = \lambda(4, 2, 1) = \ldots = +1$;
   $\lambda(2, 2, 2, 1) = \lambda(3, 2, 2, 1) = \lambda(4, 2, 2, 1) = \ldots = -1$;
   $\lambda(2, 2, 2, 2) = +\frac{1}{2}$;
3. $\lambda(3, 2, 2, 2, 1) = \lambda(4, 2, 2, 2, 1) = \ldots = +1$;
   $\lambda(3, 2, 2, 2, 2, 1) = \lambda(4, 2, 2, 2, 2, 1) = \ldots = -1$;
   $\lambda(3, 2, 2, 2, 2, 2) = +\frac{1}{3}$;
4. etc...

Il est clair que $H(x) = 0$, alors que $F_0(x) = -1$; $F_n(x) = -1$; $G(x) = \operatorname{Lim}_n F_n(x) = -1$; etc...

THÉORÈME 3. — *Si le jeu est parfait dans un ensemble e, il est parfait dans l'ensemble $\Gamma^{-1} e$.*

En effet, on a vu que, contrairement aux jeux dont la durée est

(15) *Cf.* N. SIERPINSKI, *Leçons sur les Nombres transfinis*, Paris.

limitée, le meilleur gain absolu $H(x)$ de (1) n'est pas nécessairement égal à la moins mauvaise perte absolue $H'(x)$ de (2). Si, dans un ensemble e, on a

$$H(x) \equiv H'(x) \qquad (x \in e)$$

on dit que le jeu est parfait dans e.

Or, les fonctions $H(x)$ et $H'(x)$ réalisent toutes deux les relations

$$\sup_{y \in \Gamma x} H(y) = H(x) \qquad (x \in X_2),$$
$$\inf_{y \in \Gamma x} H(y) = H(y) \qquad (x \in X_1).$$

Supposons que le jeu soit parfait dans e, et considérons un élément x de $\Gamma^{-1} e$.

Comme $\Gamma x \subset e$, on a

$$H(y) \equiv H'(y) \qquad (y \in \Gamma x).$$

Donc, en prenant la borne supérieure ou inférieure de cette fonction, suivant que x appartient à X_1 ou à X_2, on obtient

$$H(x) = H'(x). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous n'avons pas déterminé l'ensemble $E\{\omega(x) = 0\}$ des positions x pour lesquelles $\omega(x) = H'(x) - H(x) = 0$, mais, d'après ce théorème, nous savons du moins que

$$\Gamma^{-1} E\{\omega = 0\} \subset E\{\omega = 0\}.$$

18. Jeux de durée. — Considérons un jeu alternatif absolu, injuste contre le joueur (2), c'est-à-dire tel que la position initiale soit un élément de P_2. Si, de plus, $\Gamma \subset \Gamma^{-1}$ pour le treillis formé par les sous-ensembles de X_2, le jeu sera dit *strictement injuste contre* (2).

Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait $K_1 \subset X_1$, $K_2 \subset X_2$, comme dans le jeu des Échecs. On peut écrire, d'après la formule (2, § 11)

$$\Gamma x_0 \subset \Gamma P_2 \subset \Gamma^{-1} P_2 \subset G_1.$$

Donc, quoi que fasse (1), la position x_1 qu'il adoptera sera gagnante et, par conséquent, on est assuré d'avoir

$$x_2 \in P_2.$$

De proche en proche, on voit donc que (1) aura pendant tout le jeu une position gagnante, qu'il joue bien ou mal.

A un tel jeu, on peut associer un nouveau jeu alternatif, dans lequel le but de (1) n'est pas de donner le mat, mais de « donner le mat le plus vite possible ».

La fonction-guide d'attaque du joueur (1) sera alors à $-n(x)$, $n(x)$ étant l'ordre de la position gagante x, c'est-à-dire le plus petit entier qu'il discerne et tel que

$$G(n) \ni x.$$

En effet, le but de (1) est de rendre n aussi petit que possible et $f(x) = -n(x)$ réalise bien les relations (A) et (B).

La fonction-guide de défense du joueur (2) sera $f'(x) = n(x)$, le but de (1) étant de résister le plus longtemps possible.

On peut toujours supposer que la durée d'un tel jeu est limitée : d'après la remarque (1, § 17), on voit donc que le meilleur temps que peut garantir (1) pour gagner est égal au meilleur temps auquel (2) peut prétendre pour résister.

Un exemple connu d'un tel jeu de durée est fourni par la poursuite en mer : dans un domaine simplement connexe (« la mer »), que l'on supposera ici à deux dimensions, deux mobiles $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ sont doués de vitesses maxima V et $V'(V > V')$.

Le but de M (« bateau poursuivant ») est de rattraper M' (« bateau poursuivi »), et cela le plus vite possible, le but de M' étant de résister le plus longtemps possible.

Ce jeu continu peut être approché par un jeu alternatif symétrique et strictement injuste, pour lequel les considérations précédentes s'appliquent. Si $F(x, y, x', y')$ est le meilleur temps que M peut garantir pour rattraper M', il s'agit bien en effet pour M de rendre sa valeur aussi petite que possible et, pour M', de la rendre aussi grande que possible.

On démontre (16) que cette fonction $F(x, y, x', y')$ vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$V\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} - V'\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)^2} = 1.$$

---

(16) Ce résultat est dû à G. Choquet, auquel est dû une théorie des jeux de poursuite.

CHAPITRE IV.

Jeux alternatifs neumanniens.

19. Description. — Dans les jeux alternatifs précédemment étudiés, nous n'avons fait aucune hypothèse sur les positions x et sur le transformateur Γ.

Supposons maintenant que les choix des mouvements que peuvent effectuer chacun des joueurs dépendent de caractères de nature essentiellement différente : toute position x pourra être décomposée en trois éléments bien distincts, le trait α, et deux caractères x_1 et x_2; sur x_1, seul le joueur (1) agira directement quand il aura le trait, et sur x_2, seul le joueur (2) pourra agir. x_1 est la *position du joueur* (1), x_2 la *position du joueur* (2).

Avec cette restriction, il n'est pas nécessaire de connaître complètement la position x pour pouvoir jouer. Il suffira au joueur (1), par exemple, de connaître sa position x_1, et de choisir un élément dans un ensemble déterminé déduit de x_1 seulement.

Inversement, si (1) joue avec une information incomplète sur la position x du jeu, il ne peut modifier qu'un caractère de x qu'il connaît, et que l'on doit donc distinguer des autres. L'étude de ces jeux alternatifs particuliers est donc, en fait, l'étude des jeux alternatifs avec information incomplète, que nous appellerons *jeux Neumanniens*.

Nous n'étudierons pas ici les jeux Neumanniens sous leur forme générale (ou « extensive »), quoique le point de vue adopté ici permette de généraliser notablement certains résultats de la théorie classique ([17]). Nous nous bornerons à certains problèmes pour lesquels on peut sans inconvénient remplacer la description précédente par une autre plus simple, appelée *forme normalisée* du jeu. Nous n'insisterons pas sur le passage d'une forme à l'autre, qui est

---

([17]) *Cf.* C. Berge, *Le Problème du Gain dans la Théorie Généralisée dés Jeux sans Informations* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 81, 1953, p. 1). Cette étude a été faite indépendamment de notre thèse.

devenu classique [18]; qu'il nous suffise d'adopter dès maintenant, pour les jeux dont il sera question par la suite, la description suivante :

Les deux joueurs (1) et (2) jouent à tour de rôle; (2) choisit une position y dans un ensemble Y donné, puis (1) choisit ensuite une position x dans un ensemble X donné. Il en résulte pour (1) un gain $f(x, y)$ et pour (2), un gain $-f(x, y)$.

Cette description est celle donnée par von Neumann, avec cette seule différence que nous ne supposons plus que X et Y sont des ensembles finis, ni même des ensembles numériques.

20. Schéma d'information. — Nous dirons que le joueur (1) a un *schéma d'information* sur la position y du joueur (2) si, étant donné une partition $D_y = \{Y_k\}_k$ de Y, il prétend *a priori* pouvoir identifier dans quel ensemble Y_k de D_y se trouve y.

Un schéma d'information D_y a donc les propriétés caractéristiques suivantes :

1° $$\bigcup_k Y_k = Y;$$

2° $$k \neq j \quad \text{entraîne} \quad Y_k \cap Y_j = O.$$

Nous dirons que D'_y est un schéma d'information *plus fin* que D_y si D'_y est une sous-partition de D_y, c'est-à-dire une famille d'ensembles Y'_λ formant une partition dans Y, et telle que

$$Y'_\lambda \cap Y_k \neq O \quad \text{entraîne} \quad Y'_\lambda \subset Y_k.$$

Les partitions $O_y = \{y\}_{y \in Y}$ et $1_y = \{Y\}$ sont les schémas d'information pour la connaissance parfaite et l'ignorance parfaite.

Quand (1) possède à la fois deux schémas d'information D^1 et D^2, il possède aussi le schéma d'information $D^1 \times D^2 = \{Y^1_\lambda \cap Y^2_\mu\}_{\lambda, \mu}$, partition-produit de D^1 et D^2.

On démontre [19] dans la théorie des partitions que c'est le moins fin schéma d'information qui soit à la fois plus fin que D^1 et que D^2;

---

(18) *Cf.* H. Kuhn, *Extensive Games* (*Proc. Nat. Ac. of Sc.*, 1950, p. 570); ou : W. D. Krentel, J. C. C. Mc Kinsey, W. V. Quine, *A Simplification of Games in Extensive Form* (*Duke Math. J.*, 1951, p. 885).

(19) *Cf.* G. Birckoff, *op. cit.*

les schémas d'information forment ainsi un demi-groupe abélien, avec un élément neutre 1_y.

21. Meilleur gain garanti relativement au schéma d'information D. — Supposons que, dans le jeu normalisé, (1) puisse avoir une information incomplète sur la position y prise par (2). Soit D_y son schéma d'information. Comme il prétend *a priori* pouvoir identifier dans quel Y_k se trouve y, il peut garantir un gain supérieur ou égal (à ε près) à :

$$V(D_y) = \inf_k \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y_k} f(x, y).$$

Il ne peut garantir davantage. $V(D_y)$ sera le *meilleur gain garanti relativement* (*à* D_y) du joueur (1), ou « m. g. g. r. » de (1).

Si, pour deux schémas d'information D^1_y et D^2_y, on a

$$V(D^1_y) \geqq V(D^2_y),$$

on dira que le schéma d'information D^1_y est *meilleur* que le schéma d'information D^2_y. Ainsi, nous avons introduit une relation d'ordre total dans l'ensemble des schémas d'information.

Théorème 1. — *Si* D'_y *est une sous-partition de* D_y, *on a*

$$V(D_y) \leqq V(D'_y). \tag{1}$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver un nombre positif ε tel que

$$\inf_k \sup_x \inf_{y \in Y_k} f(x, y) = \inf_{k,p} \sup_x \inf_{y \in Y^p_k} f(x, y) + \varepsilon = N + \varepsilon,$$

où Y^p_k désigne un ensemble de D'_y contenu dans Y_k.

Quel que soit k, on a donc

$$\sup_x \inf_{y \in Y_k} f(x, y) \geqq N + \varepsilon.$$

Donc, pour une valeur x_k de x, on peut écrire

$$\inf_{y \in Y_k} f(x_k, y) \geqq N + \frac{\varepsilon}{2}$$

ou, *a fortiori*,

$$\inf_{y \in Y^p_k} f(x_k, y) \geqq N + \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit :

$$N \geq N + \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous avons donc démontré rigoureusement qu'un schéma d'information *plus fin* est aussi un schéma d'information *meilleur*.

22. Jeux parfaits. — Si le joueur (1) joue en second et peut avoir une information complète sur la position prise par (2), le plus grand résultat qu'il pourra garantir *a priori* sera

$$w = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y) = V(1_y).$$

Le plus petit résultat que le joueur (2), qui joue en premier, pourra garantir est aussi w : nous retrouverons un théorème de von Neumann, que nous avons établi au chapitre précédent pour des jeux plus généraux, et selon lequel le jeu, joué avec le schéma d'information correspondant à la connaissance complète, est *parfait*.

Si, au contraire, le joueur (1) n'a aucune information sur la position y prise par (2), le plus grand résultat qu'il pourra garantir sera

$$v = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x, y).$$

Le plus petit résultat que (2) pourra garantir sera comme précédemment

$$w = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y).$$

Le jeu, joué avec le schéma d'information O_y, sera donc parfait si et seulement si $v = w$.

Plus généralement, supposons que (2) possède un schéma d'information D_y. Comme $v = V(O_y)$, $w = V(1_y)$, on a, en appliquant le théorème 1,

$$v \leq V(D_y) \leq w.$$

Si $v = w$, on aura $V(D_y) = w$: le jeu sera parfait avec n'importe quel schéma d'information D_y.

Inversement, si le jeu est parfait quel que soit D_y, on a $v = w$.

Si $v = w$, nous dirons donc que le jeu est *toujours parfait*, ou, plus simplement, *parfait*, aucune confusion n'étant possible avec les cas précédemment étudiés.

Donnons un exemple.

Si (1) et (2) se placent sur une circonférence de centre O en des points x et y, on peut prendre $f(x, y) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ avec la détermination comprise entre $-\pi$ et $+\pi$.

Ici, $w = \pi$, $v = -\pi$: le jeu n'est pas parfait.

Si, au contraire, y poursuit x sur la circonférence dans le sens négatif avec une vitesse angulaire maximum ω_y, si leurs positions initiales sont suffisamment éloignées, et si l'on prend pour $f(x, y)$ la détermination comprise entre zéro et 2π, le jeu est parfait.

23. Jeux de stratégie. — Si X et Y constituent des ensembles probabilisables, on peut associer au jeu précédent un « jeu de stratégie », particulièrement important dans la théorie de l'économie, et que, dans le cas général, l'on peut formuler ainsi :

(1) et (2) ne choisissent pas eux-mêmes les positions x et y, qui seront déterminées par le hasard, mais ils choisissent respectivement les probabilités pour que le hasard « sorte » la position x et la position y. X étant ordonné, (1) devra donc choisir une fonction $P(x)$, représentant la probabilité pour que la position soit inférieure ou égale à x, qui devra donc être croissante sur X de 0 à 1, et appelée la *stratégie de* (1). (1) devra donc essayer de majorer l'espérance mathématique

$$G(P, Q) = \int_X \int_Y f(x, y)\, dP(x)\, dQ(y).$$

Le but de (2) sera, au contraire, de minorer $G(P, Q)$.

Le jeu sera parfait si

$$\sup_P \inf_Q G(P, Q) = \inf_Q \sup_P G(P, Q).$$

On peut montrer, comme pour le cas où X et Y sont finis, étudié par von Neumann, que si le jeu $f(x, y)$ est parfait, le jeu de stratégie correspondant $G(P, Q)$ est *a fortiori* parfait.

Nous nous bornerons ici à étudier le cas particulièrement important où les deux ensembles infinis X et Y sont dénombrables :

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots), \qquad Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots).$$

On posera $f(x_i, y_i) = a_{ij}$; la matrice $A = \| a_{ij} \|$, qui caractérise le jeu, sera la *matrice fondamentale du jeu.*

(1) choisira la probabilité p_i pour que $x = x_i$, c'est-à-dire un vecteur $\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots)$ réalisant

$$p_i \geqq 0 \qquad \sum_1^\infty p_i = 1.$$

De même, (2) choisira une « stratégie » $\vec{q} = (q_1, q_2, \ldots)$ jouissant des deux mêmes propriétés.

L'espérance mathématique est alors le produit scalaire

$$g(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = (\vec{p}, \overrightarrow{Aq})$$

(1) devra choisir $\vec{p}$ pour que g soit le plus grand possible, et (2), au contraire, cherchera une stratégie $\vec{q}$ telle que g soit aussi petit que possible.

Les stratégies $\vec{p}$ et $\vec{q}$ sont les éléments d'un domaine $\mathcal{D}$ de l'espace hilbertien réel, intérieur à la sphère unité, car

$$\sum_1^\infty |p_i|^2 \leqq \left(\sum_1^\infty p_i \right)^2 \leqq 1.$$

On devra évidemment supposer que $g(\vec{p}, \vec{q})$ reste borné dans $\mathcal{D}$ et, pour cela, que A *représente un opérateur continu dans l'espace hilbertien réel.*

On aura alors

$$\left| g(\vec{p}, \vec{q}) \right| = \left| (\vec{p}, \overrightarrow{Aq}) \right| \leqq |\vec{p}| . |\overrightarrow{Aq}| \leqq M_A.$$

M_A étant la borne de l'opérateur continu A dans la sphère unité, son transposé A^* sera aussi un opérateur continu de borne M_A [20]. Proposons-nous de reconnaître si le jeu est parfait.

THÉORÈME 1. — *Désignons par $\mathcal{Q}_m$ l'ensemble des vecteurs*

$$\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_m, 0, 0, \ldots) \, (\Sigma p_i = 1, p_i \geqq 0).$$

Si A *est un opérateur continu et si $\mathcal{A}$ est un domaine intérieur à la sphère unité, on a*

$$\boxed{\inf_{q \in \mathcal{Q}_m} \sup_{p \in \mathcal{A}} g(\vec{p}, \vec{q}) \to \inf_{q \in \mathcal{Q}} \sup_{p \in \mathcal{A}} g(\vec{p}, \vec{q})}$$

quand m augmente indéfiniment.

Comme $\mathcal{Q}_m \supset \mathcal{Q}_n$ si $m > n$,

$$\varphi(m) = \inf_{q \in \mathcal{Q}_m} \sup_p g(\vec{p}, \vec{q}).$$

décroît quand m croît.

Comme, de plus, l'opérateur A est continu, $g(\vec{p}, \vec{q})$ est borné, et $\varphi(m)$ tend vers une limite L finie et supérieure ou égale à $-M_A$.

On a, puisque $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_\infty \supset \mathcal{Q}_m$,

$$\inf_{q \in \mathcal{Q}} \sup_p g(\vec{p}, \vec{q}) \leqq L.$$

Si l'on n'avait pas l'égalité, il existerait un nombre positif ε tel que

$$\inf_{q \in \mathcal{Q}} \sup_p g(\vec{p}, \vec{q}) = L - \varepsilon.$$

D'où l'existence d'un vecteur $\vec{q}_0 (\in \mathcal{Q})$ tel que

$$\sup_p g(\vec{p}, \vec{q}_0) \leqq L - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$g(\vec{p}, \vec{q}_0) \leqq L - \frac{\varepsilon}{2},$$

quel que soit $p (\in \mathcal{A})$.

---

[20] *Cf.*, par exemple, G. JULIA, *Introduction mathématique aux Théories quantiques*, 2e partie, Paris, 1938, p. 147.

Considérons le vecteur

$$\vec{r}_m = \left(\frac{q_1}{\sum_1^m q_i}, \frac{q_2}{\sum_1^m q_i}, \ldots, \frac{q_m}{\sum_1^m q_i}, 0, 0, \ldots \right),$$

quand $m \to \infty$, il converge faiblement vers $\vec{q}_0 = (q_1, q_2, \ldots, q_m, \ldots)$

$$\vec{r}_m \rightharpoonup \vec{q}_0.$$

Comme $|\vec{r}_m|^2 \to |\vec{q}_0|^2$, on a même, d'après le théorème de Riesz (21), la convergence forte

$$\vec{r}_m \to \vec{q}_0.$$

A étant un opérateur continu, $\overrightarrow{\mathrm{A}r_m} \to \overrightarrow{\mathrm{A}q_0}$, et, d'après un théorème classique de Hilbert (22),

$$(\vec{p}, \overrightarrow{\mathrm{A}r_m}) \to (\vec{p}, \overrightarrow{\mathrm{A}q_0})$$

uniformément pour tout $\vec{p} (\in \mathcal{Q})$.

Il existe donc un entier m tel que, quel que soit $\vec{p}$ dans $\mathcal{Q}$, on ait

$$g(\vec{p}, \vec{r}_m) \leqq g(\vec{p}, \vec{q}_0) + \frac{\varepsilon}{4} \leqq \mathrm{L} - \frac{\varepsilon}{4}.$$

D'où

$$\sup_p g(\vec{p}, \vec{r}_m) \leqq \mathrm{L} - \frac{\varepsilon}{4},$$

ce qui est absurde, car on aurait alors

$$\mathrm{L} - \frac{\varepsilon}{4} \geqq \inf_{q \in \mathcal{D}_m} \sup_p g(\vec{p}, \vec{q}) \geqq \mathrm{L}.$$

---

(21) $x_i^n \to x_i$, $|\vec{\mathrm{X}}^n|^2 \to \sum_i |x^i|^2$ *est équivalent* à $\vec{\mathrm{X}}^n \to (x_1, x_2, \ldots)$.

(22) *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $\vec{\mathrm{X}}^n \to \vec{\mathrm{X}}$ *est que*

$$(\mathrm{Y}, \mathrm{X}^n) \to (\mathrm{Y}, \mathrm{X})$$

uniformément pour tout $\vec{\mathrm{Y}}$ *réalisant* $|\vec{\mathrm{Y}}| \leqq 1$. *Cf.* G. Julia, *op. cit.*, p. 12-28.

On démontrerait de la même façon que, quand m augmente indéfiniment,

$$\boxed{\sup_{p \in \mathcal{Q}_m} \inf_{q \in \mathcal{A}} g(\vec{p}, \vec{q}) \to \sup_{p \in \mathcal{Q}} \inf_{q \in \mathcal{A}} g(\vec{p}, \vec{q}).}$$

24. Avant de démontrer un théorème symétrique, posons $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_\infty$ et $\inf\limits_{q \in \mathcal{Q}_n} g(\vec{p}, \vec{q}) = \varphi_n(\vec{p})$. Quand n augmente, $\varphi_n(\vec{p})$ diminue. Démontrons alors quelques lemmes préliminaires.

Lemme 1. — *$m > n$ entraîne*

$$\sup_p \varphi_m(p) \leqq \sup_p \varphi_n(p).$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait un nombre ε positif et deux entiers m et $n (m > n)$ tels que

$$\sup_{p \in \mathcal{A}} \varphi_m(\vec{p}) = \sup_{p \in \mathcal{A}} \varphi_n(\vec{p}) + \varepsilon.$$

D'où l'existence d'un vecteur $\vec{p}_0 (\in \mathcal{A})$ tel que

$$\varphi_m(\vec{p}_0) > \sup_p \varphi_m(\vec{p}) - \frac{\varepsilon}{2} = \sup \varphi_n(\vec{p}) + \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\varphi_n(\vec{p}_0) \geqq \varphi_m(\vec{p}_0) \geqq \sup_p \varphi_n(\vec{p}) + \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui est absurde.

Lemme 2. — Quand $m \to \infty$, $\varphi_m(\vec{f}) \to \varphi_\infty(\vec{f})$ *pour tout vecteur $\vec{f}$ réel de l'espace hilbertien.*

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait un vecteur $\vec{f}$ et un nombre positif ε tels que

$$\inf_{q \in \mathcal{Q}_m} (\vec{f}, \vec{A} q) \geqq \inf_{q \in \mathcal{Q}} (\vec{f}, \vec{A} q) + \varepsilon, \quad \text{quel que soit } m.$$

Si $\vec{q}_0 = (q_1, q_2, \ldots)$, posons

$$\vec{r}_m = \left(\frac{q_1}{\sum\limits_1^m q_i}, \ldots, \frac{q_m}{\sum\limits_1^m q_i}, 0, 0, \ldots \right).$$

On a :

$$\left(\vec{f}, \overrightarrow{\mathrm{A}r_m}\right) \geqq \inf_{q \in \mathcal{D}} \left(\vec{f}, \overrightarrow{\mathrm{A}q}\right) + \varepsilon \quad \text{quels que soient } m \text{ et } \vec{q}_0 (\in \mathcal{D}).$$

Comme $\vec{r}_m \to \vec{q}_0$, on a, quel que soit $\vec{q}_0 (\in \mathcal{D})$,

$$\left(\vec{f}, \overrightarrow{\mathrm{A}q_0}\right) \geqq \inf_{q \in \mathcal{D}} \left(\vec{f}, \overrightarrow{\mathrm{A}q}\right) + \varepsilon,$$

ce qui est absurde.

Lemme 3. — *Si* A *est totalement continu, c'est-à-dire si*

$$\vec{q} \rightharpoonup \vec{q}'_0 \quad \textit{entraîne} \quad \overrightarrow{\mathrm{A}q} \to \overrightarrow{\mathrm{A}q_0},$$

$\varphi_m(p)$ *est continu par rapport à la convergence faible.*

En effet, si A est totalement continu, on sait qu'il en est de même de l'opérateur adjoint $\mathrm{A}^\star$, et, par conséquent,

$$\vec{p}_i \rightharpoonup \vec{f} \quad \text{entraîne} \quad \overrightarrow{\mathrm{A}^\star p_i} \to \mathrm{A}^\star \vec{f}.$$

Donc, d'après le théorème de Hilbert,

$$\left(\mathrm{A}^\star \vec{p}_i, \vec{q}\right) \to \left(\mathrm{A}^\star \vec{f}, \vec{q}\right)$$

uniformément pour tout $\vec{q}$ de la sphère $\left|\vec{q}\right| \leqq 1$.

Quel que soit $\vec{q}$ dans $\mathcal{D}_m$, on aura, pour tout nombre positif ε, un entier I suffisamment grand pour que $i > \mathrm{I}$ entraîne

$$\inf_{q \in \mathcal{D}_m} g\left(\vec{f}, \vec{q}\right) - \varepsilon \leqq \inf_{q \in \mathcal{D}_m} g\left(\vec{p}_i, \vec{q}\right) \leqq \inf_{q \in \mathcal{D}_m} g\left(\vec{f}, \vec{q}\right) + \varepsilon.$$

Donc

$$\varphi_m\left(\vec{p}_i\right) \to \varphi_m\left(\vec{f}\right). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Lemme 4. — *Si* A *est totalement continu,* $\varphi_m\left(\vec{p}\right) \to \varphi_\infty\left(\vec{p}\right)$ *uniformément pour tout* $\vec{p}$ *de* $\mathfrak{A}$.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; il existerait une infinité d'entiers m_i et des vecteurs $\vec{p}_i (\in \mathfrak{A})$ tels que, pour un certain nombre ε positif,

$$\varphi_{m_i}\left(\vec{p}_i\right) - \varphi_\infty\left(\vec{p}_i\right) > \varepsilon \quad \text{quel que soit } i.$$

On peut supposer les différents $\vec{p}_i$ en nombre infini, car sans cela $\varphi_m(\vec{p})$ ne convergerait pas vers $\varphi_\infty(\vec{p})$ pour l'un au moins de ces vecteurs.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass étant vrai au sens de la convergence faible ([23]), on pourra donc extraire de la suite $\{\vec{p}_i\}$ une suite $\{p_{i_k}\}$ telle que

$$\vec{p}_{i_k} \rightharpoonup \vec{f}.$$

D'après le lemme 3, on aura alors, si grand que soit m, un indice i_k tel que $m_{i_k} > m$ et que

$$\varphi_m(\vec{f}) - \varphi_\infty(\vec{f}) > \varphi_m(p_{i_k}) - \varphi_\infty(\vec{p}_{i_k}) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, *a fortiori*,

$$\varphi_m(\vec{f}) - \varphi_\infty(\vec{f}) \geqq \varphi_{m_{i_k}}(\vec{p}_{i_k}) - \varphi_\infty(\vec{p}_{i_k}) - \frac{\varepsilon}{2} \geqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\varphi_m(\vec{f})$ ne convergerait donc pas vers $\varphi_\infty(\vec{f})$ pour le vecteur f réel de la fermeture $\mathfrak{A}$ (au sens de la convergence faible), ce qui est contraire au lemme 2.

Théorème 2. — *Si l'opérateur* A *est totalement continu, on a, quand m augmente indéfiniment,*

$$\boxed{\sup_{p \in \mathfrak{A}} \inf_{q \in \mathfrak{D}_m} g(\vec{p}, \vec{q}) \to \sup_{p \in \mathfrak{A}} \inf_{q \in \mathfrak{D}} g(\vec{p}, \vec{g}).}$$

En effet, d'après le lemme 1, $\sup \varphi_m(\vec{p})$ décroît quand m augmente; et, comme A est bornée, il tend en décroissant vers une limite L finie. Le lemme 1 nous montre aussi que

$$\sup_p \varphi_\infty(\vec{p}) \leqq \text{L}.$$

Si l'on n'avait pas l'égalité, il existerait un nombre positif ε tel que

$$\sup_p \varphi_\infty(\vec{p}) = \text{L} - \varepsilon,$$

([23]) *Cf.* G. Julia, *op. cit.*, p. 16.

ou :

$$\varphi_\infty(p) \leqq L - \varepsilon \quad \text{quel que soit } \vec{p}\,(\in \mathcal{A}).$$

$m > M(\varepsilon)$ entraîne, d'après le lemme 4,

$$\varphi_m(\vec{p}) \leqq \varphi_\infty(\vec{p}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqq L - \frac{\varepsilon}{2},$$

et ceci quel que soit $\vec{p}$. Donc

$$\sup_p \varphi_m(\vec{p}) \leqq L - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Faisons tendre m vers l'infini. On aurait

$$L \leqq L - \frac{\varepsilon}{2}.$$

ce qui serait absurde.

On démontrerait de même que, si n tend vers l'infini, on a

$$\boxed{\inf_{q\in\mathcal{A}} \sup_{p\in\mathcal{O}_n} g(\vec{p}, \vec{q}) \to \inf_{q\in\mathcal{A}} \sup_{p\in\mathcal{O}} g(\vec{p}, \vec{q}).}$$

25. Théorème fondamental. — X *et* Y *étant des ensembles infinis dénombrables, le jeu de stratégie est parfait lorsque l'opérateur* A *est totalement continu.*

Nous nous proposons maintenant d'étendre le « théorème fondamental » de la théorie de von Neumann, qui s'énonce ainsi : *Lorsque* X *et* Y *sont des ensembles finis, le jeu de stratégie est parfait* (24).

Autrement dit,

$$\boxed{\sup_{p\in\mathcal{O}_m} \inf_{q\in\mathcal{O}_m} g(\vec{p}, \vec{q}) = \inf_{q\in\mathcal{O}_m} \sup_{p\in\mathcal{O}_n} g(\vec{p}, \vec{q}).}$$

Dans cette formule, faisons tendre m vers l'infini; en vertu des théorèmes 1 et 2, où $\mathcal{A} = \mathcal{O}_n$, on a

$$\sup_{p\in\mathcal{O}_n} \inf_{q\in\mathcal{O}} g(\vec{p}, \vec{q}) = \inf_{q\in\mathcal{O}} \sup_{p\in\mathcal{O}_n} g(\vec{p}, \vec{q}).$$

(24) Une démonstration élémentaire de ce théorème, a été donnée par

Faisons tendre n vers l'infini; on a alors, en vertu des mêmes théorèmes, où $\mathcal{A} = \mathcal{D}$, la relation

$$\sup_{p\in\mathcal{D}} \inf_{q\in\mathcal{D}} g\left(\vec{p}, \vec{q}\right) = \inf_{q\in\mathcal{D}} \sup_{p\in\mathcal{D}} g\left(\vec{p}, \vec{q}\right). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

D'après la démonstration donnée, on voit, en outre, que la condition nécessaire et suffisante pour que le jeu de stratégie soit parfait est que l'opérateur A soit totalement continu dans la fermeture de $\mathcal{D}$ (au sens de la convergence faible).

En particulier, on a le résultat suivant, qui contient celui de von Neumann :

Corollaire. — X *et* Y *étant des ensembles finis ou infinis, le jeu est parfait lorsque* $\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2$ *converge.*

1^er^ *cas.* — Si X et Y sont tous les deux infinis, vérifions alors que l'opérateur A est totalement continu.

Pour montrer que $\vec{f}_n \rightharpoonup \vec{f}$ entraîne $\overrightarrow{Af_n} \to \overrightarrow{Af}$, on peut toujours supposer $\vec{f} = \vec{0}$; on a alors

$$|Af_n|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\left(\vec{e}_i, \overrightarrow{Af_n}\right)\right|^2 = \sum_{1}^{I} |(A^*e_i, f_n)|^2 + \sum_{I+1}^{\infty} |(A^*e_i, f_n)|^2.$$

Puisque $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2$ converge, on peut choisir I assez grand pour que

$$\sum_{I+1}^{\infty} \left|\vec{A}^*e_i\right|^2 \leq \frac{\varepsilon}{\sup |f_n|^2}.$$

Dans ce cas,

$$\sum_{I+1}^{\infty} |(A^*e_i, f_n)|^2 \leq \left|\vec{f}_n\right|^2 \sum_{I+1}^{\infty} |A^*e_i|^2 \leq \varepsilon.$$

J. Ville dans le *Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications* (Émile Borel), t. IV, *Applications aux Jeux de Hasard*, Paris, 1938, p. 105-110.

I étant choisi, prenons n assez grand pour que

$$|(A^* e_i, f_n)|^2 < \frac{\varepsilon}{I} \qquad (i = 1, 2, \ldots, I).$$

On aura donc, pour n assez grand, $|A f_n|^2 < 2\varepsilon$. C. Q. F. D.

2ᵉ *cas*. — Si X est infini et Y fini, on peut considérer une matrice A′ infinie dans les deux sens en complétant la matrice A avec des zéros.

A′ étant totalement continue, on peut faire tendre n vers l'infini dans la formule (1) et, en vertu des théorèmes 1 et 2, on a bien

$$\sup_{p \in \mathcal{O}} \inf_{q \in \mathcal{O}_m} g(\vec{p}, \vec{q}) = \inf_{q \in \mathcal{O}_m} \sup_{p \in \mathcal{O}} g(\vec{p}, \vec{q}).$$

3ᵉ *cas*. — Si X et Y sont finis, le théorème est vérifié, puisque le jeu est toujours parfait.

Remarque. — Il est facile de démontrer le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que le jeu soit parfait est qu'il existe, pour tout nombre ε positif, deux stratégies $\vec{p}_0$ et $\vec{q}_0$ et un nombre v tels que :

$$(1) \qquad \left(\overrightarrow{A^* p_0}\right)_n \geqq v - \varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$(2) \qquad \left(\overrightarrow{A\, q_0}\right)_m \leqq v + \varepsilon \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

La condition est nécessaire, car si

$$\sup_p \inf_q \left(\vec{p}, \overrightarrow{Aq}\right) = \inf_q \sup_p \left(\vec{p}, \overrightarrow{Aq}\right) = v,$$

le joueur (1) pourra choisir une stratégie $\vec{p}_0$ telle que

$$\inf_q \left(\vec{p}_0, \overrightarrow{Aq}\right) \geqq v - \varepsilon,$$

$$\left(\vec{p}_0, \overrightarrow{Aq}\right) \geqq v - \varepsilon \quad \text{quel que soit } \vec{q},$$

En particulier, faisons

$$\vec{q} = \vec{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots), \qquad \vec{q} = \vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots), \qquad \ldots.$$

On aura bien

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{A}^\star p}, \vec{e}_n\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{A}^\star p}\right)_n \geqq v - \varepsilon.$$

On raisonnera de même avec la stratégie $\vec{q}_0$.

La condition est aussi suffisante, car s'il existe, quel que soit ε, des stratégies $\vec{p}_0$ et $\vec{q}_0$ réalisant de telles inégalités (1) et (2), on a

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{A}^\star p_0}, \vec{q}\right) = \sum_i q_i\left(\overrightarrow{\mathrm{A}^\star p_0}, \vec{e}_i\right) \geqq v - \varepsilon$$

quel que soit $\vec{q} \in \mathcal{Q}$. On en déduit

$$\sup_p \inf_q\left(\vec{p}, \overrightarrow{\mathrm{A}q}\right) \geqq v \geqq \inf_q \sup_p\left(\vec{p}, \overrightarrow{\mathrm{A}q}\right).$$

Mais comme, d'après le théorème (1, § 21), le premier membre de cette inégalité ne peut être plus grand que le dernier membre, on a bien le résultat annoncé.

Le but du joueur (1) sera donc de déterminer une stratégie $\vec{p}_0$ réalisant l'inégalité (1) avec le plus petit nombre ε possible. S'il peut prendre $\varepsilon = 0$, $\vec{p}_0$ sera une *stratégie optimum* du joueur (1).

Du théorème précédent, on déduit le résultat suivant : *Si* X *et* Y *sont tous deux infinis dénombrables, on a nécessairement* $v = 0$ *lorsque le jeu est parfait* (on dit alors que le jeu est *équitable*).

En effet, supposons par exemple $v > 0$; prenons $\varepsilon = \frac{v}{2}$; il existe une stratégie $\vec{p}_0$ telle que

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{A}^\star p_0}\right)_n \geqq v - \varepsilon = \frac{v}{2} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Donc, $\overrightarrow{\mathrm{A}^\star p_0}$ ne peut être un vecteur de l'espace hilbertien, et, par conséquent, A n'est pas un opérateur continu, ce qui est absurde puisque le jeu est parfait.

26. Extension du théorème de Ville. — Ville a démontré ([25]), en

([25]) *Cf.* E. Borel, *op. cit.*

partant du théorème de von Neumann, le résultat suivant : *Si* X *et* Y *sont les intervalles fermés* [o, 1], *et si* $f(x, y)$ *est continu dans le carré unité, le jeu est parfait* :

$$\inf_Q \sup_P \int_X \int_Y f(x, y)\, dP(x)\, dQ(y) = \sup_P \inf_Q \int_X \int_Y f(x, y)\, dP\, dQ.$$

Nous allons indiquer brièvement comment les considérations précédentes permettent d'étendre ce résultat, comme, d'ailleurs, d'autres théorèmes analogues dus à Karlin et Bohnenblust ([26]).

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ une suite croissante d'ensembles probabilisables.

Désignons par $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des distributions sur X_n, c'est-à-dire des fonctions $P(x)$ croissantes, continues à droite, et telles que

$$P(x) = 0 \quad \text{si} \quad x < \inf_{\lambda \in X_n} \lambda,$$
$$P(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \geq \sup_{\lambda \in X_n} \lambda.$$

On désignera, de même, par $\mathcal{P}'_m$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ l'ensemble des distributions sur Y_m, $X = \sup X_n$ et $Y = \sup Y_m$.

Posons enfin

$$AQ = \int_Y f(x, y)\, dQ(y)$$

et

$$(P, Z) = \int_X Z(x)\, dP(x).$$

Si la fonction $f(x, y)$ est telle que l'opérateur A soit totalement continu, au sens usuel dans les espaces de Banach, et si l'on a

$$\sup_{P \in \mathcal{P}_n} \inf_{Q \in \mathcal{P}'_m} (P, AQ) = \inf_{Q \in \mathcal{P}'_m} \sup_{P \in \mathcal{P}_n} (P, AQ),$$

on pourra par des raisonnements rigoureusement analogues à ceux qui précèdent, faire tendre m et n vers l'infini.

En particulier, si X_n et Y_n sont les intervalles fermés [o, n] et si

---

([26]) *Cf. Contributions to the Theory of Games*, Kuhn and Tucker, Princeton, 1950.

$f(x, y)$ est une fonction continue en tout point de $[x \geqq 0, y \geqq 0]$, on obtient, en faisant tendre m et n vers l'infini, la relation

$$\sup_{P \in \mathcal{O}} \inf_{Q \in \mathcal{O}} \iint f(x, y)\, dP(x)\, dQ(y) = \inf_{Q \in \mathcal{O}'} \sup_{P \in \mathcal{O}} \iint f(x, y)\, dP\, dQ.$$

Le théorème de Ville est donc encore vrai lorsque l'on remplace l'intervalle fermé $[0, 1]$ par l'intervalle semi-ouvert $[0, +\infty]$.

Bibliographie.

R. Bellmann et D. Blackwell, *Some two-person games involving bluffing* (*Proceedings*, 1949, p. 600-605).

C. Berge, *Sur l'isovalence et la régularité des transformateurs*, (*C. R. Acad. Sc.*, t. **231**, 1950, p. 1404); *Sur l'inversion des transformateurs* (*Ibid.*, t. **232**, 1951, p. 134); *Sur une théorie ensembliste des jeux alternatifs*, (*Ibid.*, t. **232**, 1951, p. 294).

Bohnenblust, Brown, Oresher, Gale, Karlin, Kuhn, Mc Kinsey, Nash, von Neumann, Shapley, Sherman, Snow, Tucker et Weyl, *Contributions to the theory of Games* (*Annals Math. studies,* Princeton, 1950). p. 179-181).

I. Kaplansky, *A Contribution to the von Neumann's Theory of Games* (*Annals math.*, 1945, p. 474-479).

O. Morgenstern et Ivon Neumann, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, 1944.

J. Ville, *Sur la Théorie génerale des Jeux où intervient l'habilité des Joueurs* [*Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications* (E. Borel), t. IV, vol. 2, Paris, 1938].

A. Wald, *Foundations of a General Theory of Sequential Decision Functions* (*Econometrica*, t. 15, 1947).