JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HUBERT DELANGE

Un théorème sur les fonctions entières à zéros réels et négatifs

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 31 (1952), p. 55-78.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1952_9_31__55_0>

Un théorème sur les fonctions entières à zéros réels et négatifs;

Par Hubert DELANGE.

Nous nous proposons ici d'abord de montrer que la théorie des familles normales de fonctions analytiques permet de donner une démonstration simple du théorème suivant, dû à M. Valiron [1] :

Théorème A. — *Soit $f(z)$ une fonction entière de genre p ayant tous ses zéros réels et négatifs, et soit $n(t)$ le nombre des zéros de $f(z)$ de module au plus égal à t.*

---

(1) *Ann. de la Faculté des Sciences de Toulouse*, (3), t. 5, 1913, p. 117-257. *Voir*, en particulier, p. 237-244.

En fait, l'énoncé de M. Valiron est plus général que celui donné ici : Dans (1), x^ρ est remplacé par $x^{\rho(x)}$, où la fonction $\rho(x)$ satisfait à

$$p < \varliminf_{x \to +\infty} \rho(x) \leqq \varlimsup_{x \to +\infty} \rho(x) < p+1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} x\rho'(x) \log x = 0.$$

La conclusion devient :

$$n(t) \sim A \frac{|\sin \pi\rho(t)|}{\pi} t^{\rho(t)}.$$

La méthode employée ici permettrait aussi d'établir le résultat général. Ce n'est que pour simplifier que nous nous bornons au cas $\rho(x) = \text{const}$.

Le cas particulier de l'énoncé donné ici correspondant à $p = 0$ a aussi été établi, indépendamment de M. Valiron, par Titchmarsh (*Proc. London Math. Soc.*, (2), t. **26**, 1927, p. 185-200). Une autre démonstration pour ce cas particulier a été donnée par M. Heins (*Ann. of Math.*, vol. **49**, 1948, p. 200-213).

D'autre part, dans un Mémoire précédent (*Ann. Sc. de l'Éc. norm. Sup.*, (3), t. **62**, 1945, p. 115-183), nous avons donné (p. 166-168) une démonstration du résultat général basée sur un principe entièrement différent.

ρ étant un nombre réel satisfaisant à $p < \rho < p+1$, si l'on a pour x tendant vers $+\infty$

$$\log|f(x)| \sim (-1)^p A x^\rho, \tag{1}$$

on a pour t tendant vers $+\infty$

$$n(t) \sim A \frac{|\sin \pi\rho|}{\pi} t^\rho. \tag{2}$$

D'autre part, on sait que, quand (2) est satisfaite, pour tout θ de module inférieur à π et tel que $\cos \rho\theta \neq 0$, on a, quand r tend vers $+\infty$,

$$\log|f(r e^{i\theta})| \sim (-1)^p A r^\rho \cos\rho\theta. \tag{3}$$

Nous établirons encore, en utilisant toujours la théorie des familles normales, la généralisation suivante du théorème précédent :

Théorème B. — *$f(z)$, $n(t)$ et ρ ayant la même signification que dans le théorème A, si, pour un θ de module inférieur à π et tel qu'il n'existe aucun entier impair m satisfaisant à*

$$m\frac{\pi}{2(p+1)} < |\theta| \leqq m\frac{\pi}{2\rho},$$

on a pour r infini

$$\log|f(r e^{i\theta})| \sim (-1)^p A r^\rho \cos\rho\theta, \tag{3}$$

alors on a pour t infini

$$n(t) \sim A \frac{|\sin \pi\rho|}{\pi} t^\rho \quad (^2). \tag{2}$$

---

(2) Dans le Mémoire cité, nous avons montré que le fait que l'on ait

$$\log|f(r e^{i\theta})| \sim (-1)^p A r^{\rho(r)} \cos\theta\rho(r),$$

où $\rho(x)$ satisfait aux hypothèses de M. Valiron, pour un θ de module $< \pi$ et tel qu'il n'existe aucun entier impair m satisfaisant à

$$m\frac{\pi}{2(p+1)} \leqq |\theta| \leqq m\frac{\pi}{2p}$$

suffit à entraîner que pour t infini,

$$n(t) \sim A \frac{|\sin \pi\rho(t)|}{\pi} t^{\rho(t)}.$$

Dans une Note ultérieure (*C. R. Acad. Sc.*, t. **225**, 1947, p. 483-485), nous

Nous montrerons, par contre, que, *quel que soit* θ *de module inférieur à* π *et satisfaisant à*

$$m\frac{\pi}{2(p+1)} < |\theta| < m\frac{\pi}{2\rho}, \quad \textit{avec m entier impair,}$$

(3) *peut avoir lieu pour ce* θ, *sans que l'on ait* (2).

Comme (3) n'a pas de sens pour $|\theta| = m\frac{\pi}{2\rho}$, avec m entier impair, du fait qu'alors $\cos\rho\theta = 0$, on voit ainsi que le théorème B ne peut être amélioré de manière à conserver la même conclusion avec une hypothèse plus large.

1. Remarquons une fois pour toutes que nous pouvons supposer sans inconvénient que

$$f(z) = \prod_{j=1}^{+\infty} \mathrm{E}_p\left(-\frac{z}{\alpha_j}\right), \tag{4}$$

où les α_j sont réels positifs non décroissants, la série $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_j^{p+1}}$ est convergente, et

$$\mathrm{E}_p(u) = \begin{cases} (1-u)\,e^{u+\frac{u^2}{2}+\ldots+\frac{u^p}{p}} & \text{si } p \geqq 1, \\ 1-u & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

En effet, toute fonction entière de genre p ayant tous ses zéros réels et négatifs est de la forme

$$f(z) = e^{\mathrm{P}(z)}\Pi(z),$$

où Π est, soit une fonction du type précédent, soit un polynome, et P est un polynome de degré au plus égal à p.

On a alors

$$\log|f(z)| = \log|\Pi(z)| + \mathcal{R}[\mathrm{P}(z)],$$

---

avons indiqué que le résultat resterait vrai si l'on supposait seulement qu'il n'existe aucun entier impair m satisfaisant à

$$m\frac{\pi}{2(p+1)} < |\theta| \leqq m\frac{\pi}{2\rho_1}, \quad \text{avec} \quad \rho_1 = \overline{\lim_{x \to +\infty}}\, \rho(x).$$

La méthode du présent Mémoire permettrait ici encore d'établir ce résultat dans toute sa généralité.

de sorte que, quel que soit θ, on a pour r infini

$$\log|f(re^{i\theta})| = \log|\Pi(re^{i\theta})| + O[r^p].$$

La relation supposée pour $f(z)$ dans chacun des théorèmes A et B entraîne donc la même relation pour la fonction $\Pi(z)$.

De plus, il est clair que cette relation n'est pas possible si $\Pi(z)$ est un polynome.

Il est donc entendu dans tout ce qui suit que $f(z)$ est de la forme (4) et que $n(t)$ est le nombre des α_j aux plus égaux à t.

1.1. Remarquons que l'hypothèse que la série $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_j^{p+1}}$ est convergente entraîne que l'on a pour t infini

$$n(t) = o[t^{p+1}].$$

En effet, étant donné ε positif, il existe un T_0 tel que

$$\sum_{\alpha_j > T_0} \frac{1}{\alpha_j^{p+1}} \leqq \frac{\varepsilon}{2},$$

puis un T_1 tel que $n(T_1) \geqq 2n(T_0)$.

Alors, pour $t \geqq T_1$,

$$n(t) \leqq \varepsilon t^{p+1}.$$

En effet,

$$\frac{n(t) - n(T_0)}{t^{p+1}} \leqq \sum_{T_0 < \alpha_j \leq t} \frac{1}{\alpha_j^{p+1}} \leqq \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$n(t) \leqq \frac{\varepsilon}{2} t^{p+1} \frac{n(t)}{n(t) - n(T_0)}.$$

Mais $n(t) \geqq n(T_1) \geqq 2n(T_0)$, donc

$$n(T_0) \leqq \frac{1}{2} n(t), \qquad \text{d'où} \qquad \frac{n(t)}{n(t) - n(T_0)} \leqq 2.$$

2. Formules fondamentales. — Pour simplifier le langage, dans tout ce qui suit, nous désignerons par D le domaine constitué par le plan coupé suivant la demi-droite Ox' opposée à Ox, et par D_1 le domaine formé par le plan coupé suivant la partie de cette demi-droite située à gauche du point $-\alpha_1$ ou en ce point.

La fonction $\log f(z)$ ne possède donc aucun point critique dans D_1.

Nous désignerons par $\operatorname{Log} f(z)$ la détermination de cette fonction holomorphe dans D_1 et réelle pour z réel supérieur à $-\alpha_1$.

2.1. On voit que dans D_1

$$\operatorname{Log} f(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left\{ \log\left(1 + \frac{z}{\alpha_j}\right) - \frac{z}{\alpha_j} + \ldots + (-1)^p \frac{z^p}{p\,\alpha_j^p} \right\} \quad (5)$$ [3],

où $\log\left(1 + \frac{z}{\alpha_j}\right)$ est pris avec la valeur dans laquelle le coefficient de i est de module inférieur à π.

En effet, la série est uniformément convergente sur tout ensemble borné contenu dans D_1 et représente par suite une fonction holomorphe dans ce domaine, et, pour z réel $> -\alpha_1$, elle est égale à la valeur réelle de $\log f(z)$.

En supposant z dans D, la formule (5) peut aussi s'écrire

$$\operatorname{Log} f(z) = \int_0^{+\infty} \left\{ \log\left(1 + \frac{z}{t}\right) - \frac{z}{t} + \ldots + (-1)^p \frac{z^p}{pt^p} \right\} dn(t), \quad (6)$$

où $\log\left(1 + \frac{z}{t}\right)$ est pris avec la valeur dans laquelle le coefficient de i est de module inférieur à π.

La dérivée par rapport à t de la fonction entre crochets étant égale à $(-1)^{p+1} \frac{z^{p+1}}{t^{p+1}(z+t)}$, on a par intégration par parties

$$\begin{aligned} \int_0^{L} & \left\{ \log\left(1 + \frac{z}{t}\right) - \frac{z}{t} + \ldots + (-1)^p \frac{z^p}{pt^p} \right\} dn(t) \\ &= \left\{ \log\left(1 + \frac{z}{L}\right) - \frac{z}{L} + \ldots + (-1)^p \frac{z^p}{pL^p} \right\} n(L) \\ &\quad + (-1)^p z^{p+1} \int_0^{L} \frac{n(t)}{t^{p+1}(z+t)}\, dt. \end{aligned}$$

---

(3) Ici, ainsi que dans la formule (6) écrite plus bas, il faut considérer que les termes qui suivent le logarithme n'existent pas si $p = 0$.

Les autres formules de ce paragraphe et des paragraphes **2.2** et **2.3** restent exactement de même forme pour $p = 0$ ou $p > 0$.

Quand L tend vers $+\infty$, le premier membre tend vers $\operatorname{Log} f(z)$ et le premier terme du second membre tend vers zéro. Il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n(t)}{t^{p+1}(z+t)}\,dt$ est convergente et que l'on a

$$(7) \qquad \operatorname{Log} f(z) = (-1)^p z^{p+1} \int_0^{+\infty} \frac{n(t)}{t^{p+1}(z+t)}\,dt.$$

2.2. Il résulte immédiatement de là que, quel que soit φ de module inférieur à π, on a pour tout r positif

$$(8) \qquad |\operatorname{Log} f(r e^{i\varphi})| \leqq \frac{1}{\cos\frac{\varphi}{2}} |\operatorname{Log} f(r)|.$$

En effet, on a, quels que soient r et t positifs,

$$|r e^{i\varphi} + t| \geqq (r+t)\cos\frac{\varphi}{2},$$

car la distance du point $-t$ à la droite joignant les points r et $re^{i\varphi}$ est $(r+t)\cos\frac{\varphi}{2}$.

On a donc

$$|\operatorname{Log} f(r e^{i\varphi})| \leqq r^{p+1} \int_0^{+\infty} \frac{n(t)}{t^{p+1}\,|r e^{i\varphi} + t|}\,dt \leqq \frac{r^{p+1}}{\cos\frac{\varphi}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{n(t)}{t^{p+1}(r+t)}\,dt.$$

2.3. D'autre part, on peut dériver terme à terme la formule (5) et l'on obtient ainsi

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = (-1)^p z^p \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_j^p (z+\alpha_j)}.$$

Cette formule montre, en passant, que le développement de Taylor de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ au voisinage de l'origine commence par un terme en z^p et, par suite, celui de $\operatorname{Log} f(z)$, qui est nul pour $z=0$, par un terme en z^{p+1}.

Nous introduirons la fonction $F(z)$ définie dans D_1 par

$$F(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_j^p} \log\left(1 + \frac{z}{\alpha_j}\right) \quad (^1), \tag{9}$$

où $\log\left(1 + \frac{z}{\alpha_j}\right)$ est pris avec la valeur dans laquelle le coefficient de i est de module inférieur à π.

Ceci définit bien une fonction holomorphe dans D_1, car la série est uniformément convergente sur tout ensemble borné contenu dans D_1.

En dérivant terme à terme, on obtient

$$F'(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_j^p (z + \alpha_j)},$$

c'est-à-dire

$$F'(z) = \frac{(-1)^p}{z^p} \frac{f'(z)}{f(z)}. \tag{10}$$

3. Démonstration du théorème A. — Supposons que l'on ait pour x tendant vers $+\infty$

$$\log|f(x)| = \operatorname{Log} f(x) \sim (-1)^p A x^\rho, \qquad \text{avec} \quad p < \rho < p + 1.$$

Nous allons montrer que pour t infini

$$n(t) \sim A \frac{|\sin \pi\rho|}{\pi} t^\rho. \tag{2}$$

3.1. On voit d'abord qu'il existe un nombre positif M tel que, pour tout x positif,

$$|\operatorname{Log} f(x)| \leq M x^\rho,$$

puisque que le rapport $\frac{\operatorname{Log} f(x)}{x^\rho}$ est continu pour $x > 0$ et tend vers $(-1)^p A$ pour x infini et vers zéro pour $x = 0$.

---

[1] Si $p = 0$, on a simplement $F(z) = \operatorname{Log} f(z)$.

D'après (8), il en résulte que, quel que soit φ de module inférieur à π, on a pour tout r positif

$$|\operatorname{Log} f(r e^{i\varphi})| \leqq \frac{M}{\cos\frac{\varphi}{2}} r^{\rho}.$$

3.1.1. Définissons une famille de fonctions Ψ_λ holomorphes dans D et dépendant du paramètre réel positif λ par

$$\Psi_\lambda(z) = \frac{\operatorname{Log} f(\lambda z)}{\lambda^{\rho}}.$$

On voit que, pour $|\varphi| \leqq \alpha$, avec $\alpha < \pi$, et r positif quelconque,

$$|\Psi_\lambda(r e^{i\varphi})| \leqq \frac{M}{\cos\frac{\alpha}{2}} r^{\rho}.$$

Il en résulte que les fonctions $\Psi_\lambda(z)$ sont bornées dans leur ensemble sur tout ensemble compact contenu dans D, et *forment donc une famille normale dans ce domaine.*

Alors, de toute suite de valeurs de λ tendant vers $+\infty$ on pourra extraire une suite $\{\lambda_n\}$ telle que $\Psi_{\lambda_n}(z)$ tende vers une fonction limite $\Psi(z)$, la convergence étant uniforme sur tout ensemble compact contenu dans D.

$\Psi'_{\lambda_n}(z)$ tendra naturellement vers $\Psi'(z)$.

On voit que l'on a nécessairement pour x réel positif

$$\Psi(x) = (-1)^p A x^{\rho},$$

puisque pour n infini $\operatorname{Log} f(\lambda_n x) \sim (-1)^p A \lambda_n{}^{\rho} x^{\rho}$, et par suite

$$\Psi'(x) = (-1)^p A \rho x^{\rho-1}.$$

Donc, partout dans D,

$$\Psi'(z) = (-1)^p A \rho z^{\rho-1},$$

où $z^{\rho-1}$ est pris avec la détermination réelle positive pour z réel > 0.

Finalement, on voit que, de toute suite de valeurs de λ tendant vers

$+\infty$, on peut extraire une suite $\{\lambda_n\}$ telle que $\Psi'_{\lambda_n}(z)$ converge dans D vers $(-1)^p A\rho z^{\rho-1}$. Autrement dit, quand λ tend vers $+\infty$,

$$\Psi'_\lambda(z) = \frac{1}{\lambda^{\rho-1}} \frac{f'(\lambda z)}{f(\lambda z)} \quad \text{tend vers} \quad (-1)^p A\rho z^{\rho-1}.$$

En particulier, en prenant $z = e^{i\varphi}$, avec $|\varphi| < \pi$, on voit que pour λ infini

$$\frac{f'(\lambda e^{i\varphi})}{f(\lambda e^{i\varphi})} \sim (-1)^p A\rho\, e^{(\rho-1)i\varphi} \lambda^{\rho-1}.$$

En tenant compte de (10), ceci montre que pour r infini

$$F'(r e^{i\varphi}) \sim A\rho\, e^{(\rho-p-1)i\varphi} r^{\rho-p-1},$$

d'où

$$\frac{d}{dr} F(r e^{i\varphi}) \sim A\rho\, e^{(\rho-p)i\varphi} r^{\rho-p-1},$$

d'où encore

$$F(r e^{i\varphi}) \sim A \frac{\rho}{\rho-p} e^{(\rho-p)i\varphi} r^{\rho-p}.$$

En définitive, on voit que, pour tout φ de module inférieur à π,

$$(11) \qquad \lim_{r \to +\infty} \frac{1}{r^{\rho-p}} F(r e^{i\varphi}) = A \frac{\rho}{\rho-p} e^{(\rho-p)i\varphi}, \quad (^5)$$

et, par suite,

$$(12) \qquad \lim_{r \to +\infty} \frac{1}{r^{\rho-p}} \mathcal{J}[F(r e^{i\varphi})] = A \frac{\rho}{\rho-p} \sin(\rho-p)\varphi.$$

---

[5] Dans le cas particulier où $p = 0$, on arrive plus directement à ce résultat de la façon suivante :

On voit que la fonction $\Psi(z)$ du texte est nécessairement égale partout dans D à Az^ρ, où z^ρ est pris avec la détermination réelle positive pour z réel positif, puisqu'il y a égalité pour z réel positif.

Donc, de toute suite de valeurs de λ tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{\lambda_n\}$ telle que $\Psi_{\lambda_n}(z)$ converge dans D vers Az^ρ. Autrement dit, quand λ tend vers $+\infty$, $\Psi_\lambda(z)$, qui est égal à $\frac{F(\lambda z)}{\lambda^\rho}$, converge dans D vers Az^ρ.

Il ne reste plus qu'à prendre $z = e^{i\varphi}$, avec $|\varphi| < \pi$.

3.2. Nous allons maintenant tenir compte de ce que, d'après (9),

$$\mathcal{J}[F(re^{i\varphi})] = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha_j{}^p} \operatorname{Arg}\left(1 + \frac{re^{i\varphi}}{\alpha_j}\right),$$

où les arguments sont pris avec leurs valeurs de module inférieur à π.

a. Soient d'abord η positif quelconque et φ compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π et tel que $(1+\eta)|\cos\varphi| > 1$.

Si $r = (1+\eta)t$, avec $t > 0$, on a pour $\alpha_j \leqq t$, d'où $\frac{r}{\alpha_j} \geqq 1 + \eta$,

$$\operatorname{Arg}\left(1 + \frac{re^{i\varphi}}{\alpha_j}\right) \geqq \pi - \operatorname{Arctg}\frac{(1+\eta)\sin\varphi}{(1+\eta)|\cos\varphi| - 1}.$$

D'autre part, pour tout j,

$$\operatorname{Arg}\left(1 + \frac{re^{i\varphi}}{\alpha_j}\right) > 0.$$

On voit donc que

$$\mathcal{J}\{F[(1+\eta)te^{i\varphi}]\} > \left[\pi - \operatorname{Arctg}\frac{(1+\eta)\sin\varphi}{(1+\eta)|\cos\varphi| - 1}\right] \sum_{\alpha_j \leq t} \frac{1}{\alpha_j{}^p},$$

d'où

$$\frac{1}{t^{\rho-p}} \sum_{\alpha_j \leq t} \frac{1}{\alpha_j{}^p} \leqq \frac{(1+\eta)^{\rho-p}}{\pi - \operatorname{Arctg}\dfrac{(1+\eta)\sin\varphi}{(1+\eta)|\cos\varphi| - 1}} \, \frac{1}{[(1+\eta)t]^{\rho-p}} \mathcal{J}\{F[(1+\eta)te^{i\varphi}]\}.$$

En tenant compte de (12), ceci donne

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t^{\rho-p}} \sum_{\alpha_j \leq t} \frac{1}{\alpha_j{}^p} \leqq \frac{(1+\eta)^{\rho-p}}{\pi - \operatorname{Arctg}\dfrac{(1+\eta)\sin\varphi}{(1+\eta)|\cos\varphi| - 1}} \, A \frac{\rho}{\rho - p} \sin(\rho - p)\varphi.$$

En faisant tendre d'abord φ vers π, avec η fixé, puis η vers zéro, on obtient,

$$\overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{1}{t^{\rho-p}} \sum_{\alpha_j \leq t} \frac{1}{\alpha_j{}^p} \leqq A \frac{\rho}{\rho - p} \frac{|\sin \pi\rho|}{\pi}. \tag{13}$$

b. Si $r=(1-\eta)t$, avec $t>0$, $0<\eta<1$ et $0<\varphi<\pi$, on a pour $\alpha_j>t$, d'où $\frac{r}{\alpha_j}<1-\eta$,

$$\operatorname{Arg}\left(1+\frac{r e^{i\varphi}}{\alpha_j}\right)<\operatorname{Arctg}\frac{\frac{r}{\alpha_j}\sin\varphi}{1-\frac{r}{\alpha_j}}<\frac{\frac{r}{\alpha_j}\sin\varphi}{1-\frac{r}{\alpha_j}}=\frac{r\sin\varphi}{\alpha_j-r},$$

ou encore

$$\operatorname{Arg}\left(1+\frac{r e^{i\varphi}}{\alpha_j}\right)<\frac{(1-\eta)\,t\sin\varphi}{\alpha_j-(1-\eta)\,t}<\frac{1-\eta}{\eta}\,\frac{t\sin\varphi}{\alpha_j},$$

puisque

$$\frac{\alpha_j}{\alpha_j-(1-\eta)\,t}<\frac{t}{t-(1-\eta)\,t}=\frac{1}{\eta}.$$

Par ailleurs, pour tout j,

$$\operatorname{Arg}\left(1+\frac{r e^{i\varphi}}{\alpha_j}\right)<\pi.$$

On voit donc que, si $0<\eta<1$ et $0<\varphi<\pi$, on a pour $t>0$

$$\mathcal{I}\{F[(1-\eta)\,t e^{i\varphi}]\}\leqq\pi\sum_{\alpha_j\leq t}\frac{1}{\alpha_j^{p}}+\frac{1-\eta}{\eta}\,t\sin\varphi\sum_{\alpha_j>t}\frac{1}{\alpha_j^{p+1}},$$

d'où

$$(14)\qquad \frac{1}{t^{\rho-p}}\sum_{\alpha_j\leq t}\frac{1}{\alpha_j^{p}}\geqq\frac{(1-\eta)^{\rho-p}}{\pi}\,\frac{1}{[(1-\eta)\,t]^{\rho-p}}\,\mathcal{I}\{F[(1-\eta)\,t e^{i\varphi}]\}-\frac{1-\eta}{\pi\eta}\,\frac{\sin\varphi}{t^{\rho-p-1}}\sum_{\alpha_j>t}\frac{1}{\alpha_j^{p+1}}.$$

Quand t tend vers $+\infty$, le premier terme du second membre tend, d'après (12), vers

$$\frac{A\,(1-\eta)^{\rho-p}}{\pi}\,\frac{\rho}{\rho-p}\sin(\rho-p)\,\varphi.$$

D'autre part, on a

$$\sum_{\alpha\,>t}\frac{1}{\alpha_j^{p+1}}=O\,[t^{\rho-p-1}].$$

En effet, si l'on pose $\mu(t)=\sum_{\alpha_j\leq t}\frac{1}{\alpha_j^{p}}$, on a pour $L>t>0$

$$(15)\qquad \sum_{t<\alpha\,\leq L}\frac{1}{\alpha_j^{p+1}}=\int_t^L\frac{d\mu(u)}{u}=\frac{\mu(L)}{L}-\frac{\mu(t)}{t}+\int_t^L\frac{\mu(u)}{u^2}\,du.$$

Mais, d'après (13), $\mu(t) = O[t^{\rho-p}]$. Ceci montre d'abord qu'en faisant tendre L vers $+\infty$, (15) donne à la limite

$$\sum_{\alpha_j > t} \frac{1}{\alpha_j^{p+1}} = -\frac{\mu(t)}{t} + \int_t^{+\infty} \frac{\mu(u)}{u^2}\,du,$$

puisque ceci est $O[t^{\rho-p-1}]$.

En posant

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t^{\rho-p-1}} \sum_{\alpha_j > t} \frac{1}{\alpha_j^{p+1}} = \sigma,$$

(14) donne

$$\underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t^{\rho-p}} \sum_{\alpha_j \leq t} \frac{1}{\alpha_j^{p}} \geqq \frac{A(1-\eta)^{\rho-p}}{\pi} \frac{\rho}{\rho-p} \sin(\rho-p)\varphi - \frac{\sigma(1-\eta)\sin\varphi}{\pi\eta}.$$

En faisant tendre d'abord φ vers π, puis η vers zéro, on obtient

$$\underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t^{\rho-p}} \sum_{\alpha_j \leq t} \frac{1}{\alpha_j^{p}} \geqq A \frac{\rho}{\rho-p} \frac{|\sin\pi\rho|}{\pi}. \tag{16}$$

(13) et (16) montrent que pour t infini

$$\sum_{\alpha_j \leq t} \frac{1}{\alpha_j^{p}} \sim A \frac{\rho}{\rho-p} \frac{|\sin\pi\rho|}{\pi} t^{\rho-p}.$$

3.3. Si $p = 0$, ceci se réduit à la relation (2) que nous voulions établir.

Si $p \geqq 1$, on obtient immédiatement (2) en remarquant que, si l'on pose comme plus haut $\mu(t) = \sum_{\alpha_j \leq t} \frac{1}{\alpha_j^p}$, on a pour $t > 0$

$$n(t) = \int_0^t u^p\,d\mu(u) = t^p \mu(t) - p \int_0^t \mu(u)\,u^{p-1}\,du.$$

4. Il est clair que le théorème B sera établi quand nous aurons démontré les deux théorèmes suivants, dont chacun est intéressant en lui-même :

Théorème 1. — *Si l'on a pour t infini $n(t) = O[t^\rho]$, avec $p < \rho < p+1$,* *et si, pour un θ de module inférieur à π et tel que* $\cos\rho\theta \neq 0$, *on a quand r tend vers $+\infty$*

$$\log|f(re^{i\theta})| \sim (-1)^p A r^\rho \cos\rho\theta, \tag{3}$$

on a pour t infini

$$n(t) \sim A \frac{|\sin\pi\rho|}{\pi} t^\rho. \tag{2}$$

Théorème 2. — ρ *satisfaisant à* $p < \rho < p+1$, *si, pour un θ de module inférieur à π et tel qu'il n'existe aucun entier impair m satisfaisant à*

$$m\frac{\pi}{2(p+1)} < |\theta| \leq m\frac{\pi}{2\rho},$$

on a, quand r tend vers $+\infty$,

$$\log|f(re^{i\theta})| = O[r^\rho], \tag{17}$$

alors on a pour t infini

$$n(t) = O[t^\rho].$$

4.1. *Démonstration du théorème* 1. — Remarquons d'abord que, puisque $|f(z)|$ prend la même valeur en deux points imaginaires conjugués, si l'on a (3), on a aussi

$$\log|f(re^{-i\theta})| \sim (-1)^p A r^\rho \cos\rho\theta = (-1)^p A r^\rho \cos(-\rho\theta).$$

Il n'y a donc aucun inconvénient à supposer θ positif ou nul.

Le cas où $\theta = 0$ étant contenu dans le théorème A, il suffira de traiter le cas où $\theta > 0$.

4.1.1. L'hypothèse sur $n(t)$ entraîne d'abord qu'il existe un nombre positif M tel que, pour tout t positif ou nul,

$$n(t) \leq M t^\rho.$$

La formule (7) montre alors que, quel que soit φ de module inférieur à π, on a pour $r > 0$

$$|\operatorname{Log} f(re^{i\varphi})| \leq M r^{p+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\rho-p-1}}{|re^{i\varphi}+t|} dt.$$

Si $|\varphi| \leqq \alpha$, avec $\alpha < \pi$, on a, quels que soient $r > 0$ et $t \geqq 0$,

$$|r e^{i\varphi} + t| \geqq |r e^{i\alpha} + t|.$$

Par suite, pour $r > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\rho-p-1}}{|r e^{i\varphi} + t|} dt \leqq \int_0^{+\infty} \frac{t^{\rho-p-1}}{|r e^{i\alpha} + t|} dt = r^{\rho-p-1} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho-p-1}}{|e^{i\alpha} + u|} du.$$

Finalement, on voit que, si $|\varphi| \leqq \alpha$, avec $\alpha < \pi$, on a pour $r > 0$

$$|\operatorname{Log} f(r e^{i\varphi})| \leqq \mathrm{K}(\alpha) r^{\rho}, \qquad \text{avec} \quad \mathrm{K}(\alpha) = \mathrm{M} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho-p-1}}{|e^{i\alpha} + u|} du.$$

Si alors on définit $\Psi_\lambda(z)$ comme au paragraphe **3.1.1**, on voit que, pour $|\varphi| \leqq \alpha$, avec $\alpha < \pi$, et $r > 0$ quelconque,

$$|\Psi_\lambda(r e^{i\varphi})| \leqq \mathrm{K}(\alpha) r^{\rho}.$$

Les fonctions $\Psi_\lambda(z)$ forment encore une famille normale dans D et l'on peut encore dire que, de toute suite de valeurs de λ tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{\lambda_n\}$ telle que $\Psi_{\lambda_n}(z)$ converge dans D vers une fonction limite $\Psi(z)$, $\Psi'_{\lambda_n}(z)$ convergeant en même temps vers $\Psi'(z)$.

Nous poserons ici

$$\Psi_\lambda(z) = \mathrm{U}_\lambda(z) + i\mathrm{V}_\lambda(z) \qquad \text{et} \qquad \Psi(z) = \mathrm{U}(z) + i\mathrm{V}(z).$$

Il est clair que, pour z réel positif, $\mathrm{V}_\lambda(z) = 0$, $\Psi_\lambda(z)$ étant alors réel, et par suite, à la limite, $\mathrm{V}(z) = 0$.

De plus, on voit que pour tout $r > 0$

$$\mathrm{U}(r e^{i\theta}) = (-1)^p \mathrm{A} r^{\rho} \cos \rho\theta,$$

car

$$\mathrm{U}(r e^{i\theta}) = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{U}_{\lambda_n}(r e^{i\theta}) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\log |f(\lambda_n r e^{i\theta})|}{\lambda_n{}^{\rho}}.$$

De même,

$$\mathrm{U}(r e^{-i\theta}) = (-1)^p \mathrm{A} r^{\rho} \cos \rho\theta.$$

D'une façon générale, $\mathrm{U}(z)$, comme limite de $\frac{\log |f(\lambda_n z)|}{\lambda_n{}^{\rho}}$, prend toujours la même valeur en deux points imaginaires conjugués.

D'autre part, pour $|\varphi| \leqq \alpha$, avec $\alpha < \pi$, et $r > 0$,

$$|U(re^{i\varphi})| \leqq K(\alpha) r^\rho,$$

puisque, quel que soit $\lambda > 0$,

$$|U_\lambda(re^{i\varphi})| \leqq |\Psi_\lambda(re^{i\varphi})| \leqq K(\alpha) r^\rho.$$

4.1.2. Nous allons déduire de là que l'on a

$$\Psi(z) = (-1)^p A z^\rho,$$

où z^ρ est pris avec la détermination réelle positive pour z réel positif, et par suite, comme au paragraphe **3.1.1**,

$$\Psi'(z) = (-1)^p A \rho z^{\rho-1},$$

où $z^{\rho-1}$ est pris avec la détermination réelle positive pour z réel > 0.

En effet, soit

$$H(z) = U(z) + (-1)^{p+1} A \mathcal{R}[z^\rho].$$

Cette fonction est harmonique dans D et nulle sur les demi-droites $\operatorname{Arg} z = \pm\theta$, et satisfait entre ces demi-droites à une inégalité de la forme

$$|H(z)| \leqq C |z|^\rho.$$

De plus, elle prend la même valeur en deux points imaginaires conjugués.

Si l'on définit $H_1(Z)$ pour $\mathcal{I}(Z) \geqq 0$ par

$$H_1(Z) = H\left(e^{-i\theta} Z^{\frac{2\theta}{\pi}}\right) \qquad \text{pour} \quad Z \neq 0 \qquad \text{et} \quad H_1(0) = 0,$$

$Z^{\frac{2\theta}{\pi}}$ étant pris avec la valeur dont l'argument est compris entre 0 et 2θ, on obtient une fonction continue dans le demi-plan $\mathcal{I}[Z] \geqq 0$, harmonique dans le demi-plan ouvert $\mathcal{I}[Z] > 0$, nulle pour Z réel, et satisfaisant à

$$(18) \qquad |H_1(Z)| \leqq C |Z|^{\frac{2\rho\theta}{\pi}}.$$

En outre, elle prend la même valeur en deux points symétriques par rapport à l'axe imaginaire.

On peut prolonger H_1 dans le plan tout entier en prenant pour $\mathcal{J}[Z] < 0$

$$H_1(Z) = -H_1(\bar{Z}).$$

On obtient ainsi une fonction harmonique dans tout le plan, satisfaisant partout à (18), et prenant deux valeurs opposées en deux points symétriques par rapport à l'origine. C'est la partie réelle d'une fonction entière impaire.

L'inégalité (18) montre, d'une part, que cette fonction entière se réduit à un polynome de degré au plus égal à $\frac{2\rho\theta}{\pi}$, d'autre part, en examinant ce qui se passe au voisinage de l'origine, que les coefficients des termes de degré inférieur à $\frac{2\rho\theta}{\pi}$ sont nuls.

Comme, d'après l'hypothèse que $\cos\rho\theta \neq 0$, $\frac{2\rho\theta}{\pi}$ n'est pas un entier impair, cette fonction est forcément identiquement nulle.

Alors

$$H(z) = 0, \qquad \text{donc} \quad U(z) = (-1)^p A \mathcal{R}[z^\rho].$$

En particulier, pour z réel positif,

$$U(z) = \Psi(z) = (-1)^p A z^\rho.$$

Par suite, $\Psi(z) = (-1)^p A z^\rho$ partout dans D.

4.1.3. En définitive, nous avons montré, comme au paragraphe **3.1.1**, que, de toute suite de valeurs de λ tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{\lambda_n\}$ telle que $\Psi'_{\lambda_n}(z)$ converge dans D vers $(-1)^p A\rho z^{\rho-1}$.

La démonstration s'achève maintenant comme celle du théorème A [6].

4.2. *Démonstration du théorème* 2. — Remarquons d'abord que la

---

[6] Ici, comme au paragraphe **3.1.1**, la démonstration peut être abrégée dans le cas où $p = 0$ en déduisant directement (11) du fait que l'on a nécessairement $\Psi(z) = Az^\rho$, comme il a été indiqué dans la note [5], p. 000.

formule (6) donne, en prenant les parties réelles des deux membres,

$$\log|f(re^{i\theta})| = \int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{r}{t}, \theta\right) dn(t), \tag{19}$$

avec

$$\varphi(u, \theta) = \log|1 + ue^{i\theta}| - u\cos\theta + \ldots + (-1)^p \frac{u^p}{p} \cos p\theta \quad [7].$$

On a

$$\varphi'_u(u, \theta) = (-1)^p \frac{u^p \cos(p+1)\theta + u^{p+1}\cos p\theta}{1 + 2u\cos\theta + u^2}.$$

Si θ est de module inférieur à π et s'il n'existe aucun entier impair m satisfaisant à

$$m\frac{\pi}{2(p+1)} < |\theta| < m\frac{\pi}{2p},$$

ce qui est équivalent à $|p\theta| < m\frac{\pi}{2} < |(p+1)\theta|$, $\cos p\theta$ et $\cos(p+1)\theta$ sont tous deux de même signe, ou bien l'un nul, l'autre différent de zéro. Alors $\varphi'_u(u, \theta)$ est de même signe pour toutes les valeurs positives de u. Comme $\varphi(0, \theta) = 0$, on voit que $\varphi(u, \theta)$ est de signe constant pour $u > 0$ et que $|\varphi(u, \theta)|$ croît avec u.

Donc, pour r positif fixé, $\varphi\left(\frac{r}{t}, \theta\right)$ est de signe constant pour $t > 0$ et son module est une fonction décroissante de t. La formule (19) montre alors que

$$|\log|f(re^{i\theta})|| = \int_0^{+\infty} \left|\varphi\left(\frac{r}{t}, \theta\right)\right| dn(t) \geqq \int_0^{r} \left|\varphi\left(\frac{r}{t}, \theta\right)\right| dn(t) \geqq |\varphi(1, \theta)|\, n(r).$$

Par suite, si, pour un θ satisfaisant aux conditions indiquées à l'instant, on a, quand r tend vers $+\infty$,

$$\log|f(re^{i\theta})| = O[r^\rho],$$

on a aussi $n(r) = O[r^\rho]$.

---

[7] Naturellement, ici, comme dans la formule (6), il faut considérer que les termes qui suivent le logarithme n'existent pas si $p = 0$. Mais l'expression de $\varphi'_u(u, \theta)$ est la même pour $p > 0$ ou $p = 0$.

Il ne reste donc plus, pour établir le théorème 2, qu'à traiter le cas où l'on aurait

$$\log|f(r e^{i\theta})| = O[r^{\rho}]$$

pour un θ de module inférieur à π et satisfaisant à

$$m\frac{\pi}{2\rho} < |\theta| < m\frac{\pi}{2p}, \quad \text{avec } m \text{ entier impair.}$$

Nous supposons donc maintenant qu'il en est ainsi.

$|f(z)|$ prenant la même valeur en deux points imaginaires conjugués, nous pouvons supposer sans inconvénient que $\theta > 0$.

4.2.1. Remarquons que, si $z = re^{i\varphi}$, avec $|\varphi| < \pi$, la fonction sous le signe $\int$ dans la formule (7) a, quel que soit $t \geqq 0$, un argument compris (au sens large) entre 0 et $-\varphi$. L'intégrale est donc nécessairement différente de zéro et a aussi un argument compris entre 0 et $-\varphi$.

La fonction $(-1)^p \operatorname{Log} f(z)$ ne s'annule donc pas dans D et, si $z = re^{i\varphi}$, avec $r > 0$ et $|\varphi| < \pi$, elle a un argument compris entre $p\varphi$ et $(p+1)\varphi$. Il en est de même de

$$G_\lambda(z) = \frac{\operatorname{Log} f(\lambda z)}{\log f(\lambda)} \qquad (\lambda \text{ réel} > 0),$$

puisque, toujours d'après (7), $\log f(\lambda)$ est du signe de $(-1)^p$.

Nous considérerons, dans D, la branche de la fonction $\log G_\lambda(z)$ réelle pour z réel positif, et nous la désignerons par $g_\lambda(z)$.

Nous poserons

$$g_\lambda(z) = u_\lambda(z) + i v_\lambda(z).$$

On voit par continuité que, si $z = re^{i\varphi}$, avec $r > 0$ et $|\varphi| < \pi$, $v_\lambda(z)$ est compris entre $p\varphi$ et $(p+1)\varphi$. Il en résulte que, partout dans D, $|v_\lambda(z)| < (p+1)\pi$, ce qui entraîne que *les fonctions $g_\lambda(z)$ forment une famille normale.*

Donc, de toute suite de valeurs de λ tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{\lambda_n\}$ telle que $g_{\lambda_n}(z)$ converge dans D vers une fonction limite $g(z) = u(z) + iv(z)$.

Naturellement, $g(z)$ est encore compris entre $p\varphi$ et $(p+1)\varphi$ si $z=re^{i\varphi}$, avec $r>0$ et $|\varphi|<\pi$. Il en résulte que $v(z)=0$ pour z réel >0 et que $|v(z)|<(p+1)\pi$ partout dans D.

De plus, $g(1)=0$ puisque, quel que soit $\lambda>0$, $g_\lambda(1)=0$.

Comme $G_{\lambda_n}(z)=\exp[g_{\lambda_n}(z)]$, on voit que $G_{\lambda_n}(z)$ converge dans D vers

$$e^{g(z)}=e^{u(z)+iv(z)},$$

et que, par suite, $\mathcal{R}[G_{\lambda_n}(z)]$, qui est égal à $\dfrac{\log|f(\lambda_n z)|}{\log f(\lambda_n)}$, tend vers $e^{u(z)}\cos v(z)$.

En particulier, $\dfrac{\log|f(\lambda_n r e^{i\theta})|}{\log f(\lambda_n)}$ tend vers $e^{u(re^{i\theta})}\cos v(re^{i\theta})$.

D'autre part, l'hypothèse faite sur $f(z)$ montre que, pour tout $r>0$,

$$\log|f(\lambda_n r e^{i\theta})|=O[\lambda_n{}^\rho].$$

Si, pour un $r>0$, $\cos v(re^{i\theta})\neq 0$, on déduit de là que

$$\log f(\lambda_n)=O[\lambda_n{}^\rho],$$

car, pour cet r, $\dfrac{\log f(\lambda_n)}{\log|f(\lambda_n r e^{i\theta})|}$ tend vers une limite finie.

Si, au contraire, $\cos v(re^{i\theta})=0$ pour tout $r>0$, il existe un entier impair m_1 tel que, pour tout $r>0$, $v(re^{i\theta})=m_1\dfrac{\pi}{2}$. Il en résulte que $v(z)=m_1\dfrac{\pi}{2\theta}\operatorname{Arg}z$, où $\operatorname{Arg}z$ est pris avec la valeur de module infé- à π, car ceci est la seule fonction harmonique dans D, bornée dans D, et égale à zéro pour z réel >0 et à $m_1\dfrac{\pi}{2}$ pour $z=re^{i\theta}$, avec $r>0$.

On a forcément $m_1\dfrac{\pi}{2\theta}\leqq p+1$, d'où $m_1\leqq 2(p+1)\dfrac{\theta}{\pi}$, puisque partout dans D $|v(z)|<(p+1)\pi$.

On voit ensuite que $u(z)=m_1\dfrac{\pi}{2\theta}\log|z|+\text{const.}$, puis que la constante est nulle puisque $u(1)=0$.

Alors, $e^{u(z)+iv(z)}$ est égal à la détermination de $z^{m_1\frac{\pi}{2\theta}}$ réelle positive pour z réel positif.

Donc G_{λ_n} converge dans D vers cette détermination de $z^{m_1\frac{\pi}{2\theta}}$. En particulier, en prenant $z = r$ réel > 0, on voit que $\frac{\log f(\lambda_n r)}{\log f(\lambda_n)}$ tend vers $r^{m_1 \frac{\pi}{2\theta}}$.

En définitive, on a établi que, de toute suite de valeurs de λ tendant vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{\lambda_n\}$ telle que :

ou bien $\log f(\lambda_n) = O[\lambda^\rho{}_n]$;

ou bien il existe m_1 entier impair $\leqq 2(p+1)\frac{\theta}{\pi}$ tel que, pour tout $r > 0$, $\frac{\log f(\lambda_n r)}{\log f(\lambda_n)}$ tend vers $r^{m_1 \frac{\pi}{2\theta}}$.

4.2.2. Nous allons voir que ceci implique que, pour r tendant vers $+\infty$,

$$\log f(r) = O[r^\rho],$$

d'où il résulte, d'après ce qui a été vu au paragraphe **4.2**, que pour t infini

$$n(t) = O[t^\rho]$$

(car c'est le cas particulier de (19) correspondant $\theta = 0$).

Supposons que l'on n'ait pas cette relation, autrement dit que $(-1)^p \frac{\log f(r)}{r^\rho}$, qui est positif d'après (7), ne reste pas borné supérieurement quand r tend vers $+\infty$.

Nous définirons $\psi(r)$ pour $r > 0$ comme la borne inférieure des $r' > 0$ tels que

$$(-1)^p \frac{\log f(r')}{r'^\rho} \geqq (-1)^p \frac{\log f(r)}{r^\rho}.$$

Comme $\frac{\log f(u)}{u^\rho}$ tend vers zéro avec u, on a $\psi(r) > 0$.

On voit alors que

$$(-1)^p \frac{\log f(u)}{u^\rho} < (-1)^p \frac{\log f(r)}{r^\rho} \qquad \text{si} \quad 0 < u < \psi(r),$$

et

$$(-1)^p \frac{\log f(u)}{u^\rho} = (-1)^p \frac{\log f(r)}{r^\rho} \qquad \text{si} \quad u = \psi(r).$$

Ceci étant, prenons une suite $\{r_n\}$ tendant vers $+\infty$ et telle que $(-1)^p \frac{\log f(r_n)}{r^\rho{}_n}$ tende vers $+\infty$, et posons $\psi(r_n) = \lambda'_n$.

Pour chaque n, on a

$$(-1)^p \frac{\log f(\lambda'_n)}{\lambda'^{\rho}_n} = (-1)^p \frac{\log f(r_n)}{r_n^\rho}$$

et, pour $r < 1$,

$$(-1)^p \frac{\log f(\lambda'_n r)}{\lambda'^{\rho}_n r^\rho} < (-1)^p \frac{\log f(r_n)}{r_n^\rho} = (-1)^p \frac{\log f(\lambda'_n)}{\lambda'^{\rho}_n},$$

d'où

$$(20) \qquad \frac{\log f(\lambda'_n r)}{\log f(\lambda'_n)} < r^\rho.$$

Puisque $(-1)^p \frac{\log f(\lambda'_n)}{\lambda'^{\rho}_n}$ tend vers $+\infty$, la suite $\{\lambda'_n\}$ tend vers $+\infty$.

De cette suite, on doit pouvoir extraire une suite $\{\lambda_n\}$ telle que l'on ait l'une des propriétés indiquées plus haut.

Comme on ne peut avoir $\log f(\lambda_n) = O[\lambda^\rho_n]$, il doit exister un m_1 entier impair $\leqq 2(p+1)\frac{\theta}{\pi}$ tel que, pour tout $r > 0$, $\frac{\log f(\lambda_n r)}{\log f(\lambda_n)}$ tende vers $r^{m_1 \frac{\pi}{2\theta}}$.

En tenant compte de (20), on voit que, pour $r < 1$, on a $r^{m_1 \frac{\pi}{2\theta}} \leqq r^\rho$, d'où il résulte que

$$m_1 \frac{\pi}{2\theta} \geqq \rho, \qquad \text{ou} \qquad m_1 \geqq \frac{2\rho\theta}{\pi}.$$

Mais, d'après l'hypothèse sur θ, il n'existe aucun entier impair m_1 satisfaisant à

$$\frac{2\rho\theta}{\pi} \leqq m_1 \leqq 2(p+1)\frac{\theta}{\pi},$$

puisque l'on a

$$\frac{2\rho\theta}{\pi} > m \qquad \text{et} \qquad 2(p+1)\frac{\theta}{\pi} < m+2.$$

En effet, les inégalités $\frac{m\pi}{2\rho} < \theta < \frac{m\pi}{2p}$ donnent

$$\frac{2\rho\theta}{\pi} > m \qquad \text{et} \qquad 2(p+1)\frac{\theta}{\pi} < \frac{p+1}{p} m = m + \frac{m}{p}.$$

Si $m \leqq 2p-1$, $m + \frac{m}{p} < m+2$. Sinon, $m = 2p+1$, puisque $m < 2\rho < 2p+2$, du fait que $\theta < \pi$.

Alors

$$2(p+1)\frac{\theta}{\pi} < 2(p+1) < m+2.$$

On arrive donc à une contradiction.

5. Nous allons maintenant montrer que le théorème B ne peut être amélioré.

5.1. ω étant un nombre positif non entier, posons

$$f_\omega(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \mathrm{E}_p\left(-\frac{z}{n^{\frac{1}{\omega}}}\right), \qquad \text{où} \quad p < \omega < p+1.$$

C'est une fonction du type considéré dans ce qui précède, et pour laquelle $n(t) = \mathrm{E}[t^\omega]$, où $\mathrm{E}[\ \ ]$ désigne la partie entière de la quantité entre crochets.

Nous allons d'abord étudier cette fonction.

5.1.1. La formule (7) donne

$$\operatorname{Log} f_\omega(z) = (-1)^p z^{p+1} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{E}[t^\omega]}{t^{p+1}(z+t)}\, dt.$$

En prenant $z = re^{i\varphi}$, avec $r > 0$ et $|\varphi| < \pi$, on obtient

$$(21) \qquad \operatorname{Log} f_\omega(re^{i\varphi}) = (-1)^p r^{p+1} e^{(p+1)i\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{E}[t^\omega]}{t^{p+1}(re^{i\varphi}+t)}\, dt.$$

Mais

$$(-1)^p r^{p+1} e^{(p+1)i\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{t^\omega}{t^{p+1}(re^{i\varphi}+t)}\, dt = \frac{\pi}{\sin \pi\omega} r^\omega e^{\omega i\varphi}.$$

Par soustraction, on trouve

$$\operatorname{Log} f_\omega(re^{i\varphi}) - \frac{\pi}{\sin \pi\omega} r^\omega e^{\omega i\varphi} = (-1)^{p+1} r^{p+1} e^{(p+1)i\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{t^\omega - \mathrm{E}[t^\omega]}{t^{p+1}(re^{i\varphi}+t)}\, dt,$$

d'où

$$\left| \operatorname{Log} f_\omega(re^{i\varphi}) - \frac{\pi}{\sin \pi\omega} r^\omega e^{\omega i\varphi} \right| \leq r^{p+1} \left| \int_0^{+\infty} \frac{t^\omega - \mathrm{E}[t^\omega]}{t^{p+1}(re^{i\varphi}+t)}\, dt \right|.$$

En tenant compte du fait, déjà observé, que

$$|r e^{i\varphi} + t| \geqq (r+t) \cos\frac{\varphi}{2},$$

on obtient finalement

$$(22) \qquad \left| \operatorname{Log} f_\omega(r e^{i\varphi}) - \frac{\pi}{\sin \pi\omega} r^\omega e^{\omega i \varphi} \right| \leqq \frac{r^{p+1}}{\cos\frac{\varphi}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{t^\omega - \mathrm{E}[t^\omega]}{t^{p+1}(r+t)} dt.$$

5.1.2. Nous allons voir maintenant que, quand r tend vers $+\infty$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\omega - \mathrm{E}[t^\omega]}{t^{p+1}(r+t)} dt = \mathrm{O}\left[\frac{\log r}{r}\right] \quad (^8).$$

En effet, on peut écrire :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\omega - \mathrm{E}[t^\omega]}{t^{p+1}(r+t)} dt = \int_0^1 \frac{t^{\omega-p-1}}{r+t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^\omega - \mathrm{E}[t^\omega]}{t^{p+1}(r+t)} dt.$$

On a évidemment

$$\int_0^1 \frac{t^{\omega-p-1}}{r+t} dt < \frac{1}{r} \int_0^1 t^{\omega-p-1} dt = \frac{1}{r} \frac{1}{\omega - p}.$$

D'autre part, si $r > 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^\omega - \mathrm{E}[t^\omega]}{t^{p+1}(r+t)} dt < \int_1^r \frac{dt}{t^{p+1}(r+t)} + \int_r^{+\infty} \frac{dt}{t^{p+1}(r+t)}.$$

Mais

$$\int_1^r \frac{dt}{t^{p+1}(r+t)} < \frac{1}{r} \int_1^r \frac{dt}{t^{p+1}} \leqq \frac{1}{r} \int_1^r \frac{dt}{t} = \frac{\log r}{r},$$

et

$$\int_r^{+\infty} \frac{dt}{t^{p+1}(r+t)} < \int_r^{+\infty} \frac{dt}{t^{p+2}} \leqq \int_r^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{r}.$$

5.1.3. D'après cela, l'inégalité (22) montre que, pour φ fixé de module inférieur à π, on a, quand r tend vers $+\infty$,

$$\operatorname{Log} f_\omega(r e^{i\varphi}) = \frac{\pi}{\sin \pi\omega} r^\omega e^{\omega i \varphi} + \mathrm{O}[r^p \log r],$$

(8) En fait, si $p \geqq 1$, on a même $\mathrm{O}\left[\frac{1}{r}\right]$.

et par suite

$$(23) \qquad \log|f_\omega(re^{i\varphi})| = \frac{\pi}{\sin\pi\omega} r^\omega \cos\omega\varphi + O[r^p \log r].$$

5.2. Ceci étant, soient p entier $\geqq 0$, ρ satisfaisant à $p < \rho < p+1$, et A positif quelconque.

Soit, d'autre part, un θ de module inférieur à π et tel que

$$m\frac{\pi}{2(p+1)} < |\theta| < m\frac{\pi}{2\rho}, \quad \text{avec } m \text{ entier impair.}$$

Déterminons un $a > 0$ par $\frac{\pi}{|\sin\pi\rho|} a^\rho = A$ et prenons $\omega = \frac{m\pi}{2|\theta|}$ (de sorte que $\rho < \omega < p+1$). Puis, prenons $f(z) = f_\omega(z) f_\rho(az)$.

$f(z)$ est encore une fonction entière du type considéré dans tout ce qui précède.

On a

$$\log|f(z)| = \log|f_\omega(z)| + \log|f_\rho(az)|.$$

En utilisant la formule (23), on voit que, pour φ fixé de module inférieur à π, on a, quand r tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}\log|f(re^{i\varphi})| &= \frac{\pi}{\sin\pi\omega} r^\omega\cos\omega\varphi + \frac{\pi}{\sin\pi\rho} a^\rho r^\rho \cos\rho\varphi + O[r^p\log r] \\ &= \frac{\pi}{\sin\pi\omega} r^\omega \cos\omega\varphi + (-1)^p A r^\rho \cos\rho\varphi + O[r^p \log r].\end{aligned}$$

En particulier, puisque $\omega\theta = \pm m\frac{\pi}{2}$, on a pour r infini

$$\log|f(re^{i\theta})| = (-1)^p A r^\rho \cos\rho\theta + O[r^p\log r].$$

On a donc bien (3), mais on n'a pas (2), car

$$n(t) = E[t^\omega] + E[a^\rho t^\rho] \sim t^\omega.$$