JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. PÓLYA

Remarques sur un problème d'algèbre étudié par Laguerre

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 31 (1952), p. 37-47.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1952_9_31__37_0>

Remarques sur un problème d'algèbre étudié par Laguerre;

Par G. PÓLYA.

Les travaux de Laguerre sur les équations algébriques constituent la partie la plus remarquable de son œuvre, d'après Poincaré. Le problème qui sera discuté ici est un peu à l'écart du courant principal de ces travaux et les remarques suivantes sont bien élémentaires. Toutefois j'ai tenu à ce que le nom de Laguerre figure dans ce volume dédié à M. Montel dont les travaux ont influencé si profondément les recherches contemporaines sur la situation des racines des équations algébriques.

INTRODUCTION.

1. Dans ce qui suit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ désignent n variables indépendantes. En introduisant une variable auxiliaire z, posons

$$(1)\qquad f(z)=(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n)=z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\ldots+a_n.$$

Ainsi

$$-a_1,\quad a_2,\quad -a_3,\quad \ldots,\quad (-1)^n a_n$$

sont les fonctions symétriques élémentaires de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Posons

$$(2)\qquad x_1^k+x_2^k+\ldots+x_n^k=s_k.$$

On sait que $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ sont des polynomes en $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$. Ce résultat classique est bien différent du théorème suivant dû à Laguerre (¹) :

Théorème 1. — *Les fonctions symétriques élémentaires a_1, $-a_2$, a_3, $\ldots$, $(-1)^n a_n$ s'expriment rationnellement en fonction de s_1, s_3, s_5, $\ldots$, s_{2n-1}.*

La méthode élégante que Laguerre a employée pour démontrer le théorème 1 peut être appliquée à un cas plus général. Considérons $2n$ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n$ et posons

$$g(z) = (z-y_1)(z-y_2)\ldots(z-y_n) = z^n + b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} + \ldots + b_n, \tag{3}$$

$$y_1^k + y_2^k + \ldots + y_n^k = t_k, \tag{4}$$

$$s_k - t_k = u_k, \tag{5}$$

$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} (x_i - y_j) = \mathrm{R}. \tag{6}$$

Avec ces définitions nous avons le théorème suivant :

Théorème 2. — *Les $2n+1$ quantités*

$$\mathrm{R}, \quad \mathrm{R}a_1, \quad \mathrm{R}a_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{R}a_n; \quad \mathrm{R}b_1, \quad \mathrm{R}b_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{R}b_n$$

sont des polynomes en u_1, u_2, $\ldots$, u_{2n} et l'expression de R *ne contient pas u_{2n}.*

Le théorème 2 affirme que les deux suites de fonctions symétriques élémentaires $-a_1, a_2, -a_3, \ldots, (-1)^n a_n; -b_1, b_2, -b_3, \ldots, (-1)^n b_n$ s'expriment rationnellement en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$. Mais le théorème 2 dit davantage. Il désigne précisément le dénominateur commun de ces $2n$ fonctions rationnelles qui est la résultante (6) des polynomes (1) et (3) et s'exprime comme un polynome en u_1, $u_2, \ldots, u_{2n-1}$. Il est facile à voir (*cf.* n° 3) qu'on ne peut pas remplacer ce dénominateur commun par un autre de degré moins élevé.

(¹) *Œuvres*, t. 1, p. 119-122. Malheureusement, le texte est défiguré par quelques fautes d'impression ou d'écriture.

Le théorème 2 contient le théorème 1. En effet dans le cas particulier où $y_i = -x_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, on a

$$u_{2m-1} = 2s_{2m-1}, \qquad u_{2m} = 0$$

pour $m = 1, 2, 3, \ldots$ et 2 se réduit à 1, le résultat trouvé par Laguerre. En dérivant 1 de 2 par la spécialisation indiquée, nous obtenons pour $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un dénominateur commun d'un degré trop élevé, d'ailleurs le même dénominateur auquel la méthode de Laguerre nous conduirait. Pour obtenir le meilleur dénominateur commun (celui du degré le moins élevé), posons

$$(7) \qquad \prod_{i<j}^{1,\ldots,n} (x_i + x_j) = \mathrm{P};$$

le produit est étendu aux valeurs $1, 2, \ldots, n$ de i et de j qui satisfont à l'inégalité $i < j$, et ainsi P est de degré $\frac{n(n-1)}{2}$. Avec cette définition nous avons le théorème suivant :

Théorème 3. — *Les $n+1$ quantités*

$$\mathrm{P}, \quad \mathrm{P}a_1, \quad \mathrm{P}a_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{P}a_n,$$

sont des polynomes en $s_1, s_3, s_5, \ldots, s_{2n-1}$ et l'expression de P *ne contient pas s_{2n-1}.*

L'expression de P indiquée par le théorème 3 est fondamentale dans cette recherche; je la donne explicitement pour quelques petites valeurs de n. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} &= s_1, \\
3\mathrm{P} &= s_1^3 - s_3, \\
45\mathrm{P} &= s_1^6 - 5s_1^3 s_3 + 9s_1 s_5 - 5s_3^2, \\
4725\mathrm{P} &= s_1^{10} - 15s_1^7 s_3 + 63s_1^5 s_5 - 225s_1^3 s_7 \\
&\quad + 315s_1^2 s_3 s_5 - 175s_1 s_3^3 + 225s_3 s_7 - 189s_5^2
\end{aligned}$$

pour $n = 2, 3, 4, 5$, respectivement.

Nous démontrerons d'abord le théorème 2 puis le théorème 3. Nous n'avons pas à nous occuper de 1 qui découle immédiatement de 2 ou de 3.

Démonstration du théorème 2.

2. Si z est suffisamment grand, nous avons

$$\log\frac{g(z)}{f(z)}=\sum_{i=1}^{n}\log\frac{z-y_i}{z-x_i}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-y_i}{z}+\frac{x_i^2-y_i^2}{2z^2}+\frac{x_i^3-y_i^3}{3z^3}+\ldots\right)$$
$$=\frac{s_1-t_1}{z}+\frac{s_2-t_2}{2z^2}+\frac{s_3-t_3}{3z^3}+\ldots=\frac{u_1}{z}+\frac{u_2}{2z^2}+\frac{u_3}{3z^2}+\ldots;$$

nous avons utilisé (1), (2), (3), (4) et (5). Posons

$$\frac{u_1}{z}+\frac{u_2}{2z^2}+\frac{u_3}{3z^3}+\ldots+\frac{u_{2n}}{2nz^{2n}}=\mathrm{U}(z), \tag{8}$$

et convenons de représenter par $((z^{-m}))$ une série quelconque de la forme

$$\frac{c_m}{z^m}+\frac{c_{m+1}}{z^{m+1}}+\ldots$$

convergente pour des valeurs z de module suffisamment grand. Avec cette notation nous avons

$$\log\frac{g(z)}{f(z)}=\mathrm{U}(z)+((z^{-2n-1}))$$

ou

$$\frac{g(z)}{f(z)}=e^{\mathrm{U}(z)}+((z^{-2n-1}))$$

ou

$$f(z)\,e^{\mathrm{U}(z)}=g(z)+((z^{-n-1})). \tag{9}$$

Posons encore

$$e^{\mathrm{U}(z)}=1+\frac{v_1}{z}+\frac{v_2}{z^2}+\frac{v_3}{z^3}+\ldots, \tag{10}$$

où

$$\begin{aligned}
v_1&=u_1,\\
2v_2&=u_1^2+u_2,\\
6v_3&=u_1^3+2u_3+3u_1u_2,\\
24v_4&=u_1^4+3u_2^2+8u_1u_3+6u_1^2u_2+6u_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En vertu de (2), (4) et (5), v_m est un polynome en $x_1, \ldots, x_n$;

$y_1, \ldots, y_n$, homogène de degré m. L'équation (9) exprime que, dans le développement du premier membre les coefficients de z^{-1}, $z^{-2}, \ldots, z^{-n}$ s'annulent. En vertu de (1) et (10), nous avons donc

$$(11) \quad \begin{cases} v_1 a_n + v_2 \; a_{n-1} + v_3 \; a_{n-2} + \ldots + v_n \; a_1 = - v_{n+1}, \\ v_2 a_n + v_3 \; a_{n-1} + v_4 \; a_{n-2} + \ldots + v_{n+1} \; a_1 = - v_{n+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v_n a_n + v_{n+1} a_{n-1} + v_{n+2} a_{n-2} + \ldots + v_{2n-1} a_1 = - v_{2n}. \end{cases}$$

Le déterminant du système (11) de n équations linéaires aux inconnues $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1$ est

$$(12) \quad \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \\ v_2 & v_3 & \ldots & v_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_n & v_{n+1} & \ldots & v_{2n-1} \end{vmatrix} = V_n,$$

polynome homogène en $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$, de degré n^2, symétrique en $x_1, \ldots, x_n$ et symétrique aussi en $y_1, \ldots, y_n$.

3. Si le système (11) a plus d'une solution, son déterminant V_n doit s'annuler. Voici un cas où cela arrive. Si $x_1 = y_1 = \lambda$ et λ varie, $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$ ne changent pas, en vertu de (2), (4) et (5); $v_1, v_2, \ldots, v_{2n}$ ne changent pas non plus, en vertu de la définition par (8) et (10). Mais quelques-uns des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ doivent changer avec λ. Donc le déterminant V_n s'annule si $x_1 = y_1$. Ainsi V_n est divisible par $x_1 - y_1$. Mais V_n est symétrique en $x_1, \ldots, x_n$ et l'est aussi en $y_1, \ldots, y_n$, donc V_n doit être divisible aussi par $x_i - y_j$ pour $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Finalement, V_n doit être divisible par R [*cf.* (6)]. Mais V_n et R sont du même degré n^2 et ainsi $\frac{V_n}{R}$ est une constante. Un cas particulier suffit de déterminer la valeur de cette constante; il est commode de choisir

$$x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0, \qquad y_1 = y_2 = \ldots = y_n = -1.$$

Nous obtenons finalement [*cf.* (12)]

$$(13) \quad \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \\ v_2 & v_3 & \ldots & v_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_n & v_{n+1} & \ldots & v_{2n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R.$$

Le premier membre de (13) est un polynome en $u_1, u_2, \ldots, u_{2n-1}$ à coefficients rationnels.

En vertu de (13) le système (11) nous permet d'exprimer $\mathrm{R}a_1$, $\mathrm{R}a_2, \ldots, \mathrm{R}a_n$ comme certains déterminants, polynomes en u_1, $u_2, \ldots, u_{2n}$. Mais les rôles de $a_1, \ldots, a_n$ et de $b_1, \ldots, b_n$ sont interchangeables et ainsi nous avons obtenu une démonstration complète du théorème 2.

Notre procédé de démonstration nous fournit $a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots,$ b_n comme fractions rationnelles en $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$ dont le dénominateur est le déterminant (13). La question se pose si un autre procédé pourrait fournir un dénominateur d'un degré moins élevé. La réponse est non. En effet, si $x_1 = y_1$, les quantités $a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$ ne peuvent pas être déterminées par $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$, donc certaines fractions deviennent indéterminées, le dénominateur commun s'annule, il est divisible par $x_1 - y_1$, donc par $x_i - y_j$, et finalement par R. Notre raisonnement montre aussi que le polynome en $u_1, u_2, \ldots, u_{2n-1}$ qui exprime R est absolument irréductible, c'est-à-dire irréductible dans un domaine de rationalité quelconque.

Démonstration du théorème 3.

4. En posant $y_i = -x_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, nous changeons

$$g(z), \quad u_{2m-1}, \quad u_{2m}, \quad \mathrm{U}(z), \quad v_m, \quad \mathrm{R}$$

en

$$(-1)^n f(-z), \quad 2s_{2m-1}, \quad 0, \quad 2\mathrm{W}(z), \quad w_m, \quad 2^n x_1 x_2 \ldots x_n \mathrm{P}^2$$

respectivement. Nous avons posé

$$\frac{s_1}{z} + \frac{s_3}{3z^3} + \frac{s_5}{5z^5} + \ldots + \frac{s_{2n-1}}{(2n-1)z^{2n-1}} = \mathrm{W}(z), \tag{14}$$

$$e^{2\mathrm{W}(z)} = 1 + \frac{w_1}{z} + \frac{w_2}{z^2} + \frac{w_3}{z^3} + \ldots; \tag{15}$$

w_m est un polynome en $s_1, s_3, \ldots, s_{2h-1}$ ou $2h - 1 \leqq m$. Par exemple,

$$\begin{aligned} w_1 &= 2s_1, \\ w_2 &= 2s_1^2, \\ 3w_3 &= 4s_1^3 + 2s_3, \\ 3w_4 &= 2s_1^4 + 4s_1 s_3. \end{aligned}$$

Les équations (14) et (15) proviennent de (8) et (10), respectivement. Nous déduisons de (11) et (13) que

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} w_1 a_n + w_2\, a_{n-1} + w_3\, a_{n-2} + \ldots + w_n\, a_1 = - w_{n+1}, \\ w_2 a_n + w_3\, a_{n-1} + w_4\, a_{n-2} + \ldots + w_{n+1}\, a_1 = - w_{n+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_n a_n + w_{n+1} a_{n-1} + w_{n+2} a_{n-2} + \ldots + w_{2n-1} a_1 = - w_{2n}, \end{array}\right.$$

$$(17)\quad \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & \ldots & w_n \\ w_2 & w_3 & \ldots & w_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_n & w_{n+1} & \ldots & w_{2n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 2^n x_1 x_2 \ldots x_n \mathrm{P}^2,$$

où P est défini par (7). Nous aurions pu obtenir (16) sans difficulté, directement des définitions (14) et (15), mais pour obtenir (17), il est préférable de passer, comme nous l'avons fait, par les développements des n^{os} **2** et **3**.

5. Si le déterminant (17) du système (16) est différent de o, la solution a_n, a_{n-1}, $\ldots$, a_1 est uniquement déterminée. Donc nous avons

$$(18)\quad a_1 = - s_1$$

et les $n-1$ premières équations du système (16) donnent

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} w_1\, a_n + w_2 a_{n-1} + \ldots + w_{n-1}\, a_2 = s_1 w_n - w_{n+1}, \\ w_2\, a_n + w_3 a_{n-1} + \ldots + w_n\, a_2 = s_1 w_{n+1} - w_{n+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_{n-1} a_n + w_n a_{n-1} + \ldots + w_{2n-3} a_2 = s_1 w_{2n-2} - w_{2n-1}. \end{array}\right.$$

6. Dans ce qui précède nous avons réuni les formules dont nous nous servirons en démontrant le théorème 3.

Commencons par observer que la formule simple (18) paraît exceptionnelle à cause du fait suivant :

LEMME. — *Aucune des fonctions symétriques élémentaires* a_2, $-a_3$, a_4, $\ldots$, $(-1)^n a_n$ *n'est un polynome en* s_1, s_3, s_5, $\ldots$, s_{2n-1}.

Considérons a_2 et posons

$$x_1 = - x_2 = \lambda, \qquad x_3 = x_4 = \ldots = x_n = 1.$$

Alors $a_2 = -\lambda^2 + \ldots$ est un polynome de second degré en λ qui dépend effectivement de λ, mais $s_1, s_3, s_5, \ldots$ sont des constantes ($s_1 = s_3 = \ldots = n-2$). Ceci suffit à démontrer notre affirmation concernant a_2; $a_3, a_4, \ldots, a_n$ se traitent de la même manière.

Nous savons que a_2 s'exprime rationnellement en fonction de $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}$. Nous pouvons en conclure que les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que nous venons de choisir annulent le dénominateur de a_2.

7. En vertu de (14) et (15), $w_1, w_2, w_3, \ldots$ sont des polynomes en $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}$. Par conséquent, le déterminant (17) est aussi un polynome en $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}$; nous allons le représenter par le symbole $W_n[s_h]$. Ainsi $W_n[s_h]$ est le déterminant du système (16) et $W_{n-1}[s_h]$ le déterminant du système (19). Supposons que $W_n[s_h]$ et $W_{n-1}[s_h]$ soient différents de 0. Alors on tire de (16) et de (19) que

$$a_2 = \frac{H}{W_n[s_h]} = \frac{H'}{W_{n-1}[s_h]}; \tag{20}$$

H et H′ sont certains polynomes en $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}$, donc a_2 est une fonction rationnelle de ces quantités. Réduite à sa plus simple expression, cette fonction rationnelle aura un dénominateur qui est un commun diviseur de $W_n[s_h]$ et $W_{n-1}[s_h]$. En vertu du lemme du n° **6**, ce commun diviseur ne peut pas être une simple constante. Il ne peut pas être $W_n[s_h]$ qui est du « poids » n^2, supérieur au poids de $W_{n-1}[s_h]$ qui n'est que $(n-1)^2$ (²). Il suit de là que $W_n[s_h]$ *est décomposable en un produit de deux facteurs*

$$W_n[s_h] = D[s_h]\,D'[s_h], \tag{21}$$

où $D[s_h]$ et $D'[s_h]$ sont des polynomes en $s_1, s_3, s_5, \ldots, s_{2n-1}$ et *ni* $D[s_h]$, *ni* $D'[s_h]$ *ne sont constantes*.

(²) D'après la terminologie usuelle de la théorie des fonctions symétriques, $k + l + \ldots + p$ est le poids de $c s_k s_l \ldots s_p$ si c est un coefficient numérique. Un polynome possède un poids si chacun de ses termes a le même poids qu'on appelle justement le poids du polynome. Le poids d'un produit est la somme des poids des facteurs; le poids de w_m est m, etc.

En combinant (17) et (21), nous obtenons

$$(22)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{D}[x_1^h+\ldots+x_n^h]\,\mathrm{D}'[x_1^h+\ldots+x_n^h] \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}2^n x_1x_2\ldots x_n.\mathrm{P}^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}2^n x_1x_2\ldots x_n\mathrm{P}.\mathrm{P}. \end{aligned}$$

Dans la seconde ligne de (22), nous avons mis en évidence toutes les *décompositions* essentiellement différentes du second membre de (17) en deux facteurs *symétriques non constants* : évidemment *il n'y en a que deux*. (Nous considérons les facteurs constants comme non essentiels.) La décomposition dans la première ligne de (22) doit être essentiellement la même qu'une des deux décompositions dans la seconde ligne de (22). Mais, vu le lemme du n° **6**, il n'y a qu'un choix possible : $a_n = x_1x_2\ldots x_n$ n'est pas un polynome en $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}$ et, par conséquent, en négligeant un facteur non essentiel (constant) et en changeant la notation s'il le faut nous devons avoir

$$(23)\qquad \mathrm{D}[x_1^h+\ldots+x_n^h] = x_1x_2\ldots x_n\mathrm{P}.$$

En changeant la notation encore une fois nous obtenons le théorème suivant :

THÉORÈME 4. — *Le déterminant* (17) *formé des coefficients du développement* (15) *se décompose en facteurs comme suit :*

$$(24)\qquad \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & \ldots & w_n \\ w_2 & w_3 & \ldots & w_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_n & w_{n+1} & \ldots & w_{2n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}2^n\mathrm{D}_n[s_h]\,\mathrm{D}_{n-1}[s_h],$$

où $\mathrm{D}_n[s_h]$ *et* $\mathrm{D}_{n-1}[s_h]$ *sont des polynomes à coefficients rationnels caractérisés par les relations*

$$(25)\qquad \mathrm{D}_n\;[x_1^h+\ldots+x_n^h] = x_1\ldots x_n\prod_{i<j}^{1,\ldots,n}(x_i+x_j),$$

$$(26)\qquad \mathrm{D}_{n-1}[x_1^h+\ldots+x_n^h] = \prod_{i<j}^{1,\ldots,n}(x_i+x_j).$$

8. Le théorème 4 affirme un peu plus que nous n'avons démontré, mais quelques indications suffiront pour combler les lacunes qui restent.

En posant $x_n = 0$ dans l'équation (26), nous obtenons

$$D_{n-1}[x_1^h + \ldots + x_{n-1}^h] = x_1 \ldots x_{n-1} \prod_{i<j}^{1,\ldots,n-1} (x_i + x_j).$$

Ainsi $D_{n-1}[s_h]$ joue le même rôle dans la décomposition de $W_{n-1}[s_h]$ que $D_n[s_h]$ joue dans celle de $W_n[s_h]$, ce qui justifie la notation employée.

Le raisonnement du n° **7** montre que $D[s_h]$ et $D'[s_h]$ sont des polynomes absolument irréductibles en $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}$. Dans le cas contraire, $x_1 \ldots x_n P^2$ pourrait être décomposé en produit de trois fonctions symétriques non constantes, chacune exprimable comme un polynome en $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-1}$; ce qui est impossible en vue du lemme du n° **6**. Nous pouvons donc obtenir $D_{n-1}[s_h]$ comme le plus grand commun diviseur de $W_{n-1}[s_h]$ et de $W_n[s_h]$ par des opérations rationnelles et ainsi $D_{n-1}[s_h]$ aura des coefficients rationnels.

L'expression de $D_n[s_h]$ est donnée pour $n = 1, 2, 3, 4$ à la fin du n° **1**. Voici un exemple du théorème 4 :

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_1 & w_3 \\ w_2 & w_3 & w_4 \\ w_3 & w_4 & w_5 \end{vmatrix} = -8 \frac{s_1^3 - s_3}{3} \frac{s_1^6 - 5s_1^3 s_3 + 9 s_1 s_5 - 5 s_3^2}{45}.$$

9. Le théorème 3 découle immédiatement de (26). En effet, remplaçons-y $n - 1$ par n, puis x_{n+1} par $-z$. Il vient

$$(27) \quad \begin{aligned} D_n[x_1^h + \ldots + x_n^n - z^h] &= D_n[s_h - z^h] \\ &= (x_1 - z) \ldots (x_n - z) \prod_{i<j}^{1,\ldots,n} (x_i + x_j) \\ &= (-1)^n f(z)\, D_{n-1}[s_h] \\ &= (-1)^n D_{n-1}[s_h] (z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n) \end{aligned}$$

et nous n'avons qu'à comparer les coefficients des différentes puissances de z.

Observons que $D_{n-1}[s_h]$ est un polynome en $s_1, s_3, \ldots, s_{2n-3}$. Par exemple, si $n = 3$, nous avons

$$-\frac{s_1^3 - s_3}{3}(x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3)$$
$$= \frac{(s_1 - x)^6 - 5(s_1 - x)^3(s_3 - x^3) + 9(s_1 - x)(s_5 - x^5) - 5(s_3 - x^3)^2}{45},$$

ce qui donne, après réductions faciles,

$$-a_1 = s_1,$$
$$a_2 = \frac{2s_1^5 - 5s_1^2 s_3 + 3s_5}{5(s_1^3 - s_3)},$$
$$-a_3 = \frac{s_1^6 - 5s_1^3 s_3 + 9s_1 s_5 - 5s_3^2}{15(s_1^3 - s_3)}.$$

Le calcul explicite dépend donc de l'expression de $D_n[s_h]$. La loi générale des termes de $D_n[s_h]$ ne paraît pas tout à fait simple, mais, à partir de (24), nous pouvons en obtenir le terme principal

$$(28) \qquad D_n[s_h] = \frac{s_1^{\frac{n(n+1)}{2}}}{1^n . 3^{n-1} . 5^{n-2} \ldots (2n-3)^2 . (2n-1)} + \ldots .$$