JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JEAN-JACQUES MOREAU

Bilan dynamique d'un écoulement rotationnel

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 31 (1952), p. 355-375.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1952_9_31__355_0>

Bilan dynamique d'un écoulement rotationnel

PAR JEAN-JACQUES MOREAU.

INTRODUCTION.

Les théories tourbillonnaires de l'aile et de l'hélice, qui parviennent à éviter le paradoxe de d'Alembert en invoquant une structure tourbillonnaire du courant fluide, suggèrent la conception d'une sorte de responsabilité des éléments tourbillonnaires de l'écoulement à l'égard des efforts hydrodynamiques subis par les systèmes immergés. Mais, à ma connaissance, aucune relation générale directe n'avait été énoncée pour préciser cette idée. Le seul résultat classique vraiment significatif à cet égard est le théorème de Kutta-Joukowsky, qui, en Hydrodynamique bidimensionnelle, vient relier immédiatement la force de portance à la *circulation*, expression de nature tourbillonnaire.

Une forme locale, microscopique en quelque sorte, de ce même théorème concerne la dynamique d'un *tourbillon ponctuel* dans un fluide parfait bidimensionnel. On entend par là qu'au voisinage d'un point P, *a priori* mobile, le champ de vitesses est la somme d'un champ $\vec{v}$, régulier, et du champ

$$\vec{W} = \frac{\Gamma}{4\pi \mathrm{PM}^2} \vec{z} \wedge \overrightarrow{\mathrm{PM}}.$$

La différence vectorielle, soit $\vec{V}$, entre la vitesse de P et la valeur de $\vec{v}$ en P est envisagée comme vitesse de déplacement du tourbillon au sein du fluide : $\vec{V}$ diffère de zéro si, dans la portion matérielle infiniment petite que schématise le centre tourbillonnaire P, on applique des forces extérieures; leur résultante $\vec{R}$ s'exprime sous la même forme que la portance de Joukowsky :

$$\vec{R} = \rho\Gamma\vec{V} \wedge \vec{z}.$$

Il est intéressant de rapprocher ce résultat de deux théorèmes classiques concernant le mouvement d'un ensemble de tourbillons ponctuels libres dans un fluide parfait emplissant tout le plan. Si l'on interprète l'intensité de chaque tourbillon comme une masse, le centre de gravité de l'ensemble doit rester fixe et le moment d'inertie par rapport à un point fixe doit rester constant; de là trois *intégrales premières* de l'évolution. Lorsque, par contre, les tourbillons sont soumis à des forces, les quantités correspondantes ne sont plus constantes : je relie immédiatement leurs dérivées par rapport au temps *aux éléments de réduction, résultante et moment, du système de ces forces extérieures*. Ainsi se dessinent des théorèmes généraux d'une dynamique des tourbillons.

L'objet de la présente étude est d'établir, par diverses généralisations de ces points de vue, les relations directes entre les efforts extérieurs et les éléments tourbillonnaires pour un milieu incompressible quelconque, à deux ou trois dimensions. On dresse de la sorte des *bilans dynamiques* où n'interviennent ni les champs de forces dérivant d'un potentiel (pesanteur), ni la pression, laquelle, du point de vue mathématique, n'est dans ce cas qu'une variable auxiliaire : la *réaction* ou le *multiplicateur* corrélatif de la liaison d'incompressibilité. C'est ce que réalisent déjà, pour les écoulements bidimensionnels permanents, les formules de Blasius [1].

---

(1) M. J. Pérès (*C. R. Acad. Sc.*, t. **189**, 1929, p. 1246) et M. J. Leray (*Les Cahiers d'Aérodynamique*, n° 7, 1947) ont généralisé ces formules en envisageant des écoulements plans non permanents. En outre, M. Pérès (*Comptes rendus du IIIe Congrès International de Mécanique appliquée, Stockholm*, 1930, vol. **1**, p. 132) a donné des relations analogues pour les écoulements périodiques à trois dimensions (*cf.* § **18** *b*). Dans un esprit différent, *cf.* également un article de M. M. Roy, *Sur les écoulements tridimensionnels à structure à l'infini hélicoïdale* (*J. Math. pures et appl.*, t. **10**, 1931, p. 439).

Le chapitre I est consacré à quelques points préliminaires de technique analytique. J'y précise notamment le maniement d'un symbolisme très simple qui permet la collaboration de la notation tensorielle avec le calcul vectoriel orienté (multiplication vectorielle et opérations corrélatives). Employé depuis longtemps à d'autres fins par les géomètres, cet artifice se révèle capable de rendre en Mécanique les plus grands services.

Au cours de ce chapitre également, je donne des règles élémentaires pour l'exploitation des conditions intégrales indéfinies, lorsque la déficience de certaines dérivées empêche de les traduire par des équations locales; cette attitude, en pleine harmonie avec les principes de la mécanique des milieux continus, entraînerait à des développements qui ne trouvent pas leur place dans le présent mémoire. J'ai cru bon en effet, dans la suite de l'étude, de demeurer assez discret sur ce sujet, des généralisations trop encombrantes risquant de masquer les idées essentielles. Le stade de généralité auquel je cherche le plus souvent à me maintenir est celui du milieu continu à champ de vitesses différentiable au premier ordre (sauf sur certaines lignes ou surfaces et en certains points singuliers).

Le chapitre II aborde la théorie des tourbillons par diverses considérations nécessaires aux développements ultérieurs. Il était essentiel notamment, pour les applications, de faire entrer en ligne de compte à côté des régions tourbillonnaires propres, dans lesquelles le champ vectoriel tourbillon est fini et continu, *les éléments tourbillonaires impropres :* singularités ponctuelles ou curvilignes et surtout *surfaces de glissement*. L'équivalence de ces surfaces, du point de vue descriptif, à des répartitions tourbillonnaires superficielles est classique et intuitive. Mais la portée dynamique d'une telle assimilation ne me paraissait pas avoir été dégagée de façon précise : certains passages à la limite invoqués parfois dans ce domaine sont injustifiés, parce que les équations de l'hydrodynamique ne sont pas linéaires. De fait, l'adaptation à ce cas de la théorie des tourbillons de Helmoltz, que je réalise au § **8** *c*, est subordonnée à des conditions restrictives [1].

---

(1) Helmholtz (*Wissenschaftliche Abhandlungen*, t. 1, p. 151) invoque déjà un déplacement des filets tourbillonnaires de la surface de glissement avec

L'étude des singularités tourbillonnaires ponctuelles est menée, dans ce même chapitre, de front avec des considérations sur la structure asymptotique d'un écoulement s'étendant à l'infini. On y voit déjà s'y imposer la notion de *polarisation* de l'écoulement, qui joue dans la suite un rôle fondamental.

Le chapitre III résout le problème posé pour le cas d'un milieu incompressible quelconque (usuellement fluide parfait ou visqueux renfermant des systèmes immergés) emplissant l'espace entier et au repos à l'infini. $\vec{\omega}$ désignant le vecteur tourbillon, les quantités vectorielles

$$\vec{I} = \iiint \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\omega}\, d\tau, \qquad \vec{J} = -\iiint OM^2 \vec{\omega}\, d\tau,$$

dont l'introduction en hydrodynamique me paraît nouvelle (1), jouent un rôle analogue à celui des éléments cinétiques, non définis en l'occurence : leur dérivées par rapport au temps conduisent à la résultante et au moment résultant des actions extérieures non conservatives subies par le milieu. Pour les écoulements comportant des singularités ce résultat revêt des formes particulièrement significatives. Le cas bidimensionnel se traite d'une manière analogue qui généralise l'exemple initial des systèmes de tourbillons ponctuels en fluide parfait.

On trouve chez Kelvin (2) la première idée, pour le cas d'un fluide parfait illimité en mouvement irrotationnel, de grandeurs, construites alors à partir du potentiel des vitesses, qui jouent un rôle semblable dans le bilan dynamique de l'écoulement. Ce même auteur signale (3) l'équivalence à ce point de vue d'un anneau tourbillonnaire infiniment délié et d'un feuillet ayant l'anneau pour contour, mais la démonstra-

---

une vitesse égale à la demi-somme des vitesses de part et d'autre, mais élude toute justification. Il semble qu'on n'ait fait par la suite que s'appuyer sur son autorité.

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. **226**, 1948, p. 1 420.

(2) *Math. and physical papers*, vol. **4**, p. 13; *cf.* également : TH. THEODORSEN, *Impulse and momentum in an infinite fluid* (*Applied Mechanics, Th. von Karman Anniversary volume* 1941).

(3) *Ibid.*, p. 127.

tion annoncée semble n'avoir jamais été publiée. Une justification sommaire en est donnée par M. M. Roy (1), qui applique cette conception à la théorie de Prandtl.

Je traite ensuite dans le chapitre IV le cas d'une portion D de milieu incompressible quelconque baigné à sa périphérie par du fluide *helmholtzien* (fluide parfait soumis à des forces conservatives). Si la structure tourbillonnaire est fermée, c'est-à-dire si $\vec{\omega}$ est tangentiel ou nul à la frontière, le bilan dynamique s'établit comme ci-dessus, à partir des intégrales $\vec{I}$ et $\vec{J}$, mais en faisant intervenir, à côté de la résultante et du moment résultant des forces non conservatives exercées dans la masse, des termes d'influence tourbillonnaire extérieure : ces termes d'interaction entre la structure tourbillonnaire de D et *l'écoulement primitif* s'expriment comme des actions électromagnétiques. On peut voir là une généralisation large, mais directe, du théorème de Joukowsky. J'applique ce résultat à la dynamique des singularités ponctuelles : tourbillon ponctuel et doublet.

D'un point de vue différent, pour le cas général où la structure tourbillonnaire de D n'est pas fermée, j'étudie l'évolution des lignes tourbillons. Dans la région périphérique *helmholtzienne* ces lignes peuvent, ainsi qu'il est classique, être considérées comme matériellement transportées par le fluide. Mais en pénétrant dans D, qui est un *milieu non helmholtzien* s'il s'y manifeste des forces extérieures non conservatives et des tensions non hydrostatiques, les lignes tourbillons perdent cette propriété et acquièrent un *glissement* vis-à-vis du milieu matériel. A ce glissement je relie quantitativement la résultante et le moment résultant des forces extérieures non conservatives appliquées dans D, ainsi que la puissance développée par les actions non helmholtziennes (forces extérieures non conservatives et tensions non hydrostatiques).

Ce dernier aspect, énergétique, de la théorie des tourbillons me paraît particulièrement significatif : c'est dans cette voie sans doute qu'il faudra chercher les extensions au domaine des milieux compres-

(1) *Thèse*, Strasbourg 1923, p. 13 et *Sur l'aérodynamique des ailes sustentatrices et des hélices*, Paris, 1928.

sibles. J'ai pensé, malgré tout, que la présente étude, consacrée aux milieux incompressibles, réalisait dès maintenant une synthèse assez efficace pour apporter la réponse à de nombreuses questions. Elle devra notamment contribuer de façon sensible au progrès des théories tourbillonnaires de l'aile et de l'hélice.

Pour en revenir à l'exemple initial du mouvement d'un système de tourbillons ponctuels libres au sein d'un fluide parfait à deux dimensions, on sait l'existence dans ce problème d'une quatrième intégrale première. Elle joue le rôle de fonction de Hamilton pour la construction d'équations canoniques qui régissent l'évolution. C'est un point de vue que j'ai également pu généraliser, la fonction en question étant d'ailleurs en rapport étroit avec l'énergie cinétique. Cette dynamique tourbillonnaire développée selon l'esprit de la mécanique analytique fera l'objet d'un mémoire ultérieur.

Je ne veux pas clore cette introduction sans exprimer ma respectueuse gratitude à M. le Professeur Villat, qui m'a fait l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences plusieurs Notes sur mes études et qui a bien voulu accueillir ce mémoire au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

Que M. le Professeur Pérès, dont les profonds travaux ont souvent donné l'impulsion à mes diverses recherches et qui m'a témoigné le plus bienveillant intérêt, accepte le témoignage de ma déférente reconnaissance.

Je tiens enfin à rendre hommage à mon maître, M. le Professeur Poncin, qui a conduit mes pas dans la recherche scientifique, au sein de cette équipe qu'il a su constituer à l'Institut de Recherches de Poitiers et qu'il dirige avec une diligence si éclairée.

CHAPITRE I.

NOTES PRÉLIMINAIRES.

1. LES OPÉRATIONS DIFFÉRENTIELLES EN CALCUL VECTORIEL. — *a*. Nous faisons dans cette étude un très large usage du calcul vectoriel. Les opérations différentielles sur les champs seront alors notées par le moyen du vecteur symbolique ∇ de Hamilton.

Beaucoup d'auteurs ne considèrent ce mode de calcul que comme un auxilliaire sans valeur démonstrative rigoureuse. Nous l'invoquerons au contraire presque constamment, grâce aux précisions suivantes qui en rendent la pratique parfaitement concluante.

En premier lieu, nous renonçons à la convention selon laquelle un ∇ inclus dans un monome vectoriel (expression construite au moyen de multiplications des divers modes du calcul vectoriel) agit uniquement et en bloc sur les facteurs placés à sa droite. Cette convention oblige à des acrobaties d'écriture qui, lorsqu'elles manquent leur but, mettent la méthode en défaut; en outre, les non-commutativités ainsi introduites sont contraires à l'esprit du calcul vectoriel. Nous convenons donc de conserver à ces monomes différentiels les commutativités ordinaires du calcul vectoriel, mais *en signalant par un astérisque les facteurs dont le produit partiel est soumis à l'action de l'opérateur différentiel* ∇. Par exemple, si $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sont trois champs vectoriels, l'écriture

$$\left(\vec{a}.\underset{*}{\vec{b}}\right)\left(\vec{\nabla}.\underset{*}{\vec{c}}\right)$$

équivaudrait, en notation tensorielle, à

$$a_i \frac{\partial}{\partial x_k}(b_i c_k).$$

Nous énonçons d'autre part une règle de développement qui traduit la formule de dérivation d'un produit : *un monome vectoriel renfermant un* ∇ *qui agit sur plusieurs facteurs se développe en une somme de monomes de même structure, dans lesquels chacun successivement des facteurs intéressés est seul soumis à l'action du* ∇. Par exemple :

$$\left(\vec{a}.\underset{*}{\vec{b}}\right)\left(\vec{\nabla}.\underset{*}{\vec{c}}\right)=\left(\vec{a}.\underset{*}{\vec{b}}\right)\left(\vec{\nabla}.\vec{c}\right)+\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\left(\vec{\nabla}.\underset{*}{\vec{c}}\right).$$

Enfin, il est utile de savoir, si M est le point variable, O une origine fixe et $\vec{A}$ un vecteur, que

$$\left(\vec{A}.\underset{*}{\overrightarrow{OM}}\right)\vec{\nabla}=\left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right)\underset{*}{\overrightarrow{OM}}=\vec{A}, \qquad \vec{\nabla}\wedge\underset{*}{\overrightarrow{OM}}=0, \qquad \vec{\nabla}.\underset{*}{\overrightarrow{OM}}=3;$$

d'où

$$\underset{*}{\overrightarrow{\mathrm{OM}}} \wedge (\vec{\mathrm{A}} \wedge \vec{\nabla}) = (\underset{*}{\overrightarrow{\mathrm{OM}}} . \vec{\nabla}) \vec{\mathrm{A}} - (\underset{*}{\overrightarrow{\mathrm{OM}}} . \vec{\mathrm{A}}) \vec{\nabla} = 2\vec{\mathrm{A}}.$$

Ce mode de calcul pourrait même s'étendre à des monomes renfermant plusieurs ∇, à condition de les individualiser chacun par un indice distinctif (numérique par exemple) qui serait répété à la place de l'astérisque sous chacun des facteurs qui lui sont soumis. Mais il nous paraît plus commode, dès qu'apparaissent ainsi des dérivations multiples, d'abandonner le symbolisme vectoriel pour le symbolisme tensoriel.

Ont sait en effet que l'algorithme vectoriel ne parvient pas à englober la totalité des combinaisons analytiques douées d'une signification géométrique. Nous nous réservons donc de passer, à tout instant, de la notation vectorielle à la notation tensorielle par simple adjonction d'indices. Ce changement de notation sera facile en toutes circonstances grâce aux considérations qui vont suivre.

b. Les *problèmes plans* tiennent dans nos considérations une place assez large. A ce sujet il nous a paru plus économique — quoique sans doute moins élégant — d'éviter la formalisation d'un calcul vectoriel proprement bidimentionnel. Le plan est considéré comme une surface de l'espace et le vecteur unité normal $\vec{z}$ est invoqué explicitement. Un champ scalaire ou vectoriel, défini dans le plan, est supposé prolongé dans l'espace ambiant avec une valeur constante le long de chaque parallèle à $\vec{z}$.

2. Les opérations orientées. — *a*. Parmi les opérations classiques du calcul vectoriel il en est qu'on peut qualifier d'*orientées*, en ce sens que leur définition élémentaire requiert l'intervention d'une convention d'orientation de l'espace. Ce sont les opérations dérivant de la multiplication vectorielle : principalement la multiplication mixte de trois vecteurs et l'opération différentielle *rotationnel*.

Un caractère dominant de ces opérations est de ne pas se prêter immédiatement à une traduction tensorielle. Certains auteurs sont alors conduit à y renoncer systématiquement : des tenseurs antisymétriques du second ordre sont introduits à la place du vecteur produit vectoriel de deux vecteurs, du vecteur rotationnel d'un champ, du vecteur rotation instantanée d'un solide, du vecteur champ magnétique, etc. Il nous paraît préférable de concilier les deux points de vue par l'artifice suivant.

b. Soient $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ les vecteurs unitaires d'un système de coordonnées rectangulaires, ayant le sens conventionnellement désigné comme *direct*. Le déterminant

$$\begin{vmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \end{vmatrix},$$

dont on interprête chaque terme comme le produit tensoriel de trois vecteurs, définit un tenseur du troisième ordre ε. Remplacer le trièdre $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ par un autre, également orthonormal et direct, revient à effectuer sur chaque ligne du déterminant en question une substitution orthogonale directe. D'après la règle de multiplication, cela équivaut à multiplier le tenseur par le module de la substitution, soit $+1$ et le laisse donc invariant. Le tenseur ε est ainsi indépendant du trièdre de départ : *c'est un élément intrinsèque de l'espace orienté;* nous l'appelons le *tenseur d'orientation.*

D'une manière plus explicite, les composantes des vecteurs unitaires $\vec{x}_1$ étant de la forme δ_i^k (¹), les composantes du tenseur ε s'écrivent

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_1^i & \delta_2^i & \delta_3^i \\ \delta_1^j & \delta_2^j & \delta_3^j \\ \delta_1^k & \delta_2^k & \delta_3^k \end{vmatrix},$$

soit :

$\varepsilon_{ijk} = 0$ si les trois indices i, j, k ne sont pas tous distincts;

(¹) On sait que le *symbole de Kronecker* δ_i^k représente l'unité si $i = k$ et zéro si $i \neq k$.

$\varepsilon_{ijk} = (-1)^{\mathrm{I}}$ si ces trois indices sont distincts, en désignant alors par I le *nombre d'inversions* de la permutation ijk par rapport à la permutation 1, 2, 3;

ε_{ijk} change donc de signe lorqu'on permute deux indices : le tenseur est *complètement antisymétrique*.

Ce tenseur préside, par le simple jeu du calcul tensoriel, à la formation de toutes les opérations orientées.

Soient d'abord trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et le scalaire invariant

$$m = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \begin{vmatrix} \delta_1^i & \delta_2^i & \delta_3^i \\ \delta_1^j & \delta_2^j & \delta_3^j \\ \delta_1^k & \delta_2^k & \delta_3^k \end{vmatrix} a_i b_j c_k.$$

D'après les règles de calcul des déterminants

$$m = \begin{vmatrix} a_i\delta_1^i & a_i\delta_2^i & a_i\delta_3^i \\ b_j\delta_1^j & b_j\delta_2^j & b_j\delta_3^j \\ c_k\delta_1^k & c_k\delta_2^k & c_k\delta_3^k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

On reconnaît le *produit mixte* des trois vecteurs. Il en résulte que si

$$\vec{d} = \vec{b} \wedge \vec{c},$$

on a

$$m = a_i d_i = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k,$$

quel que soit $\vec{a}$, d'où

$$d_i = \varepsilon_{ijk} b_j c_k.$$

De même si l'on considère un champ vectoriel $\vec{u}\,(x_i)$ et son rotationnel

$$\vec{r} = \vec{\nabla} \wedge \vec{u},$$

on a

$$r_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}.$$

Plus généralement, à un tenseur du second ordre T_{jk} s'associe d'une manière absolue, en géométrie orientée, le vecteur

$$\mathrm{D}_i = \varepsilon_{ijk} \mathrm{T}_{jk},$$

appelé *vecteur dual* du tenseur. De l'antisymétrie de ε il résulte d'ailleurs que ce vecteur est nul lorsque le tenseur est symétrique, et ne dépend donc en fait que de la *partie antisymétrique* du tenseur T.

D'une manière générale, dans l'espace orienté à n dimensions, on invoquera un tenseur d'orientation ε, d'ordre n, qui préside à la définition des opérations orientées. Son introduction permet de saisir l'influence du nombre de dimensions sur le développement du calcul orienté.

c. Nous nous bornons ici au cas tridimensionnel. Les règles de calcul des opérations orientées se condensent en quelques résultats très simples concernant le tenseur ε.

Soit d'abord un produit tensoriel du tenseur ε par lui-même

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_1^i & \delta_2^i & \delta_3^i \\ \delta_1^j & \delta_2^j & \delta_3^j \\ \delta_1^k & \delta_2^k & \delta_3^k \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \delta_1^l & \delta_2^l & \delta_3^l \\ \delta_1^m & \delta_2^m & \delta_3^m \\ \delta_1^n & \delta_2^n & \delta_3^n \end{vmatrix}.$$

La multiplication ligne par ligne conduit à un déterminant dont chaque élément est de la forme

$$\delta_1^i\delta_1^l + \delta_2^i\delta_2^l + \delta_3^i\delta_3^l = \delta_i^l,$$

d'où

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_i^l & \delta_i^m & \delta_i^n \\ \delta_j^l & \delta_j^m & \delta_j^n \\ \delta_k^l & \delta_k^m & \delta_k^n \end{vmatrix} = \delta_{ijk}^{lmn}$$

en introduisant ce que nous appelons un *symbole de Kronecker généralisé*; d'une manière générale

$$\delta_{\lambda\mu\ldots\xi}^{\alpha\beta\ldots\zeta} = \begin{vmatrix} \delta_\alpha^\lambda & \delta_\alpha^\mu & \ldots & \delta_\alpha^\xi \\ \delta_\beta^\lambda & \delta_\beta^\mu & \ldots & \delta_\beta^\xi \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_\zeta^\lambda & \delta_\zeta^\mu & \ldots & \delta_\zeta^\xi \end{vmatrix}$$

n'est différent de zéro que si $\alpha\beta\ldots\zeta$ et $\lambda\mu\ldots\xi$ sont deux permutations d'un même groupe d'indices *tous distincts*; sa valeur est alors $(-1)^{\mathrm{I}}$: le nombre d'inversions faisant passer d'une permutation à l'autre [1].

Envisageons maintenant une contraction

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{ijk}^{imn}.$$

Après développement du déterminant, il reste

$$\delta_{ijk}^{imn} = \delta_{jk}^{mn} = \delta_j^m \delta_k^n - \delta_k^m \delta_j^n.$$

Ce résultat condense pratiquement toute la technique du calcul des opérations orientées.

Soient par exemple trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ et le double produit vectoriel

$$\vec{p} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c});$$

on écrit

$$p_i = \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} b_l c_m = \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm} a_j b_l c_m = (\delta_i^l \delta_j^m - \delta_j^l \delta_i^m) a_j b_l c_m = a_j b_i c_j - a_j b_j c_i,$$

ce qui donne la formule classique du *double produit vectoriel*

$$\vec{p} = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}.$$

Soit encore un tenseur du second ordre T_{jk} *antisymétrique* et son vecteur dual

$$D_i = \varepsilon_{ijk} T_{jk}.$$

Multiplions les deux membres par ε_{imn},

$$\varepsilon_{imn} D_i = \delta_{mn}^{jk} T_{jk} = T_{mn} - T_{nm} = 2T_{mn},$$

d'où l'expression du tenseur à partir de son vecteur dual

$$T_{mn} = \frac{1}{2}\varepsilon_{imn} D_i.$$

---

(1) De même que le symbole de Kronecker fournit les composantes du *tenseur unité*, ces symboles généralisés définissent en coordonnées orthonormales deux tenseurs d'ordres 4 et 6 : δ_{ij}^{lm} et δ_{ijk}^{lmn} (les symboles d'ordres supérieurs sont nuls dans le cas tridimensionnel), qui sont, en géométrie métrique non orientée, des *opérateurs absolus*. Ils président notamment à la construction des invariants d'une forme quadratique.

3. Sur les intégrales étendues a une surface fermée. — *a*. Étant donnée une portion de surface S, limitée par un contour C, une convention classique met l'orientation de la normale à S en chaque point, définie par un vecteur unitaire $\vec{\alpha}$, en corrélation avec celle de la courbe C. On écrit alors la formule de Stokes, pour un champ vectoriel $\vec{V}$ continu et dérivable,

$$\int_C \vec{V}.\, d\vec{M} = \iint_S \vec{\nabla} \wedge \underset{\star}{\vec{V}}.\, \vec{\alpha}\, d\sigma.$$

Le résultat s'étend à une portion de surface de connexité quelconque (1), le contour C pouvant alors se décomposer en plusieurs courbes fermées.

L'intégrale double s'écrit aussi bien

$$\iint_S \vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla}.\, \underset{\star}{\vec{V}}\, d\sigma,$$

ce qui permet d'énoncer, symboliquement, l'équivalence des opérateurs

$$\int_C d\vec{M} \qquad \text{et} \qquad \iint_S \vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla}\, d\sigma,$$

avec extension au cas d'un champ scalaire ou tensoriel d'ordre quelconque (2), soit, en notation tensorielle :

$$\int_C \varphi\, dx_i = \iint_S \varepsilon_{ikl} \alpha_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_l}\, d\sigma.$$

On note également d'après cela que l'opérateur symbolique $\vec{\alpha} \wedge \vec{\nabla}$

---

(1) A condition naturellement qu'on puisse en orienter la normale de manière uniforme.

(2) C'est ce que nous appellerons la *transformation de Stokes*. La *transformation d'Ostrogradsky* consiste dans l'équivalence des opérateurs $\iint_S \vec{\alpha}\, d\sigma$ et $\iiint_D \vec{\nabla}\, d\tau$, où S est une surface fermée limitant un domaine D ($\vec{\alpha}$ orienté vers l'extérieur).

peut être considéré comme *purement superficiel*, en ce sens que le résultat de son application à un champ scalaire ou tensoriel ne dépend que des valeurs du champ dans la surface S même.

b. Supposons alors que S soit *une surface fermée* de connexité quelconque; l'opérateur

$$\iint_S \vec{\alpha} \wedge \vec{\Delta}\, d\sigma$$

est *identiquement nul*, puisqu'il se ramène à une intégrale curviligne étendue à un contour évanouissant.

En notation tensorielle on écrira symboliquement

$$\iint_S \varepsilon_{ikl} \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_l} d\sigma = 0,$$

ou, en multipliant par ε_{imn}, ce qui conduit au tenseur antisymétrique dont le vecteur précédent est le dual,

$$\iint_S \left(\alpha_m \frac{\partial}{\partial x_n} - \alpha_n \frac{\partial}{\partial x_m} \right) d\sigma = 0.$$

Dans une intégrale

$$\iint_S \alpha_m \frac{\partial}{\partial x_n} d\sigma,$$

étendue à une surface fermée, les indices m et n sont permutables.

4. Sur les transformations d'intégrales de volume. — *a*. Soient définis, dans un domaine D et sur sa surface frontière S, un champ vectoriel $\vec{u}$ et un champ scalaire θ. Imaginons que pour toute portion Δ du domaine, soit Σ sa surface, on ait

$$\iint_\Sigma u_i \alpha_i d\sigma = \iiint_\Delta \theta\, d\tau. \tag{1}$$

Si l'on suppose l'existence de dérivées partielles continues pour le champ $\vec{u}$, cela implique, d'après le théorème d'Ostrogradsky, que

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \theta.$$

En appelant alors φ un scalaire pourvu de dérivées partielles continues, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi u_i) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u_i + \varphi\theta$$

et, par conséquent,

$$\iint_S \varphi u_i \alpha_i d\sigma = \iiint_D \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u_i + \varphi\theta \right) d\tau.$$

Ce résultat, comme la condition (1) auquel il est subordonné, ne concerne qne les fonctions u_i et non leurs dérivées. Il est facile de l'établir *sans invoquer l'existence de ces dérivées, mais seulement la continuité de u_i et de* θ. Le plus élémentaire est de recouvrir le domaine D par un pavage cubique dont on fait tendre le côté vers zéro. La relation (1) est appliquée à chacune des cellules, à l'intérieur de laquelle on développe d'autre part φ selon la formule des accroissements finis.

Par conséquent, sous notre hypothèse élargie, la condition intégrale indéfinie (1) conserve des applications tout analogues à celles de la condition locale

$$\vec{\nabla}.\vec{u} = \theta.$$

Convenons d'énoncer cette condition intégrale en disant que le scalaire θ est la *divergence large* du vecteur $\vec{u}$. Nous réservons pour ce cas la notation

$$\operatorname{div} \vec{u} = \theta,$$

alors que les divergences au sens classique, définies par l'intermédiaire des dérivées, s'écriront toujours au moyen du symbole ∇. Le résultat ci-dessus se traduit donc par

$$\operatorname{div}(\varphi \vec{u}) = \vec{u}.\vec{\nabla}\varphi + \varphi \operatorname{div} \vec{u},$$

stricte extension de l'identité différentielle classique.

Ces considérations s'appliquent tout aussi bien en dotant u_i d'autres indices, c'est-à-dire en partant d'un champ vectoriel d'ordre quelconque.

b. Remplaçons notamment u_i par $\varepsilon_{jki} v_j$ et θ par r_k, de sorte que la condition (1) s'écrit

$$\iint_\Sigma \varepsilon_{jki} v_j \alpha_i \, d\sigma = \iiint_\Delta r_k \, d\tau,$$

soit

$$\iint_\Sigma \vec{\alpha} \wedge \vec{v} \, d\sigma = \iiint_\Delta \vec{r} \, dr.$$

On dira en pareil cas que le champ vectoriel $\vec{r}$ est le *rotationnel large* de $\vec{v}$; cela s'écrira

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \vec{r},$$

en réservant la notation en ∇ pour le rotationnel classique.

Il apparaît alors que, si φ est un champ scalaire à dérivées continues,

$$\mathrm{rot}\,\varphi\vec{v} = \varphi\,\mathrm{rot}\,\vec{v} + \underset{\star}{\varphi}\vec{\nabla} \wedge \vec{v}$$

ou, si $\vec{w}$ est un champ vectoriel à dérivées continues,

$$\mathrm{div}\,\vec{v} \wedge \vec{w} = \vec{w}.\mathrm{rot}\,\vec{v} - \vec{v}.\vec{\nabla} \wedge \underset{\star}{\vec{w}}.$$

On étend facilement au rotationnel large la formule de Stokes

$$\int_C \vec{v}.\overrightarrow{dM} = \iint_S \vec{r}.\vec{\alpha}\, d\sigma ;$$

réciproquement, cette relation, vérifiée pour toute portion de surface, entraîne la condition (2). Ainsi pour que $v_i dx_i$ soit une différentielle exacte, v_i étant continu, il faut et il suffit que $\mathrm{rot}\,\vec{v}$ existe et soit identiquement nul (¹).

c. Dans le même esprit, considérons maintenant deux scalaires φ et ψ, fonctions des coordonnées x_1, x_2, x_3 et aussi d'une quatrième variable t, le temps pour ce qui nous intéresse. Ces fonctions étant

(¹) On voit également par là qu'un rotationnel possède une divergence et qu'elle est identiquement nulle.

supposées continues par rapport à l'ensemble des variables dans une certaine région de l'espace et un intervalle de variation de t, imaginons que

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Delta}\varphi\,d\tau = \iiint_{\Delta}\psi\,d\tau, \tag{3}$$

quel que soit le domaine fixe Δ. Alors φ possède en chaque point de la région considérée une dérivée partielle en t

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \psi.$$

En effet, de la relation (3), dont les deux membres sont continus, on tire

$$\iiint_{\Delta}\varphi(\mathrm{M},\, t_2)\,d\tau - \iiint_{\Delta}\varphi(\mathrm{M},\, t_1)\,d\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{\Delta}\psi(\mathrm{M},\, t)\,d\tau,$$

donc en permutant les intégrations

$$\iiint_{\Delta}[\varphi(\mathrm{M},\, t_2) - \varphi(\mathrm{M},\, t_1)]\,d\tau = \iiint_{\Delta}\left[\int_{t_1}^{t_2}\psi(\mathrm{M},\, t)\,dt\right]d\tau,$$

quel que soit Δ. Vu la continuité, cela implique

$$\varphi(\mathrm{M},\, t_2) - \varphi(\mathrm{M},\, t_1) = \int_{t_1}^{t_2}\psi(\mathrm{M},\, t)\,dt,$$

d'où le résultat annoncé.

La propriété s'étend au cas où les domaines considérés, au lieu d'être fixes dans l'espace repère, sont entraînés dans le mouvement d'un *milieu continu à champ de vitesses différentiable*. La dérivée qui s'introduit alors est une dérivée par rapport à t, prise en suivant un élément du milieu, soit, comme nous le dirons dans le paragraphe suivant, une *dérivée séquente*.

5. VECTEURS LIÉS A UN MILIEU COMTINU. — *a.* Nous considérons un milieu continu dont le mouvement est décrit relativement à un répère $\mathrm{O}x_1x_2x_3$ par les *variables d'Euler* $u_i(x_k,\, t)$, composantes de la vitesse en chaque point x_k, pour chaque instant t. Nous supposons l'existence des dérivées partielles $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$, *continues* en x_k et en t; on sera également amené au chapitre II à invoquer l'existence des dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial t}$, qui conditionnent l'expression de l'accélération.

Le mouvement d'un élément du milieu se définira par intégration du système de trois équations différentielles

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i(x_k, t),$$

justiciable de la théorie classique, puisque de l'existence et de la continuité des $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ on conclut que les u_i vérifient des conditions de Lipschitz.

b. Soit alors, dans l'espace de l'instant t_0, une suite de points $M_0(\lambda)$ ordonnée selon les valeurs d'un paramètre λ, avec un vecteur dérivée géométrique $\frac{d\overrightarrow{M_0}}{d\lambda}$. De la théorie générale des équations différentielles il résulte que la suite des points $M(\lambda)$, positions à tout autre instant t des éléments matériels qui occupaient les positions $M_0(\lambda)$ à l'instant t_0, présente aussi un vecteur dérivée géométrique $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}$. Pour telle valeur λ_0 de λ, on définit ainsi un vecteur, issu d'un élément déterminé du milieu et dont la grandeur vectorielle évolue dans le temps. D'après des calculs classiques concernant la dépendance des intégrales d'un système d'équations différentielles à l'égard des conditions initiales, cette évolution peut se définir par

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_i}{d\lambda}\right) = \frac{dx_k}{d\lambda}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

D'une manière générale, un vecteur mobile $\vec{l}$, issu d'un élément du milieu, dont la grandeur vectorielle évolue selon une semblable loi

$$\frac{dl_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} l_k$$

ou, en notation vectorielle,

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \underset{\star}{\vec{u}}(\vec{\nabla}.\vec{l}),$$

sera dit *lié au milieu*. Intuitivement on peut concevoir un tel vecteur comme demeurant dans un rapport constant avec un segment infinitésimal joignant deux éléments matériels voisins, segment qui apparaît ainsi transporté par le milieu. Il s'agit visiblement là d'une dépendance intrinsèque à l'égard du milieu, indépendante du choix du repère (x_i) invoqué pour décrire le mouvement.

Si l'on considère ensuite un vecteur $\vec{a}$, issu d'un élément du milieu et évoluant selon une loi quelconque, le vecteur

$$\frac{da_i}{dt} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} a_k,$$

différence entre la dérivée de $\vec{a}$, et la dérivée que présenterait ce vecteur si, à partir de sa position instantanée, il évoluait comme lié au milieu, sera appelée dérivée du vecteur mobile $\vec{a}$ par rapport au temps pour un *opérateur lié au milieu* ou, plus brièvement, *dérivée cinématique par rapport au milieu* ([1]). Nous représentons cette dérivée par le symbole $\mathcal{D}\,\vec{a}$.

6. Dérivée d'une intégrale de surface. — *a*. Considérons une *surface matérielle*, constituée par des éléments du milieu paramétrés en λ, μ. A une portion infinitésimale $d\sigma$ de cette surface s'associe le vecteur infinitésimal $\vec{\alpha}\,d\sigma$ $\big(\vec{\alpha}$, vecteur unité normal$\big)$, dont on peut préciser comme suit l'évolution dans le temps : on introduit un vecteur infinitésimal $\vec{l}$, *lié au milieu*, issu d'un point de $d\sigma$, de sorte que $\vec{l}\,.\vec{\alpha}\,d\sigma$ représente, à un ordre supérieur près, le volume d'une cellule matérielle en forme de cylindre oblique. On a alors l'équation des dilatations

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{l}.\vec{\alpha}\,d\sigma\right) = \left(\vec{\nabla}.\vec{u}_{\star}\right)\left(\vec{l}.\vec{\alpha}\,d\sigma\right).$$

([1]) Pour plus de détails, sur le contenu de cette notion et la transposition à la cinématique des milieux continus de certaines idées directrices de la cinématique des solides, *voir* J.-J. Moreau, *Sur la notion de système de référence fluide* (*Congrès national de l'Aviation française*, 1945, sous-section n° 31, rapport n° 368).

Or

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{l}.\vec{\alpha}\, d\sigma\right) = \frac{d\vec{l}}{dt}.\vec{\alpha}\, d\sigma + \vec{l}.\frac{d}{dt}\left(\vec{\alpha} d\sigma\right)$$
$$= \left(\vec{l}.\vec{\nabla}\right)\left(\underset{*}{\vec{u}}.\vec{\alpha}\, d\sigma\right) + \vec{l}.\frac{d}{dt}\left(\vec{\alpha}\, d\sigma\right).$$

En rapprochant les deux expressions, on obtient, puisque $\vec{l}$ est quelconque,

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\alpha}\, d\sigma\right) = \left[\left(\vec{\nabla}.\underset{*}{\vec{u}}\right)\vec{\alpha} - \left(\vec{\alpha}.\underset{*}{\vec{u}}\right)\vec{\nabla}\right] d\sigma$$
$$= \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{\alpha}\right) \wedge \underset{*}{\vec{u}}\, d\sigma.$$

Si le milieu est *incompressible*, il reste seulement

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\alpha}\, d\sigma\right) = -\vec{\nabla}\left(\underset{*}{\vec{u}}.\vec{\alpha}\right) d\sigma.$$

b. D'une manière plus rigoureuse, considérons maintenant, pour une portion finie S de surface matérielle, l'intégrale

$$\vec{\mathrm{I}} = \iint_{\mathrm{S}} \varphi\, \vec{\alpha}\, d\sigma,$$

où φ est un champ scalaire, évoluant dans le temps et défini dans la région de l'espace que balaie S. En se ramenant aux variables λ, μ, on écrit

$$\mathrm{I} = \iint_{\mathrm{S}} \varphi \frac{\partial \vec{\mathrm{M}}}{\partial \lambda} \wedge \frac{\partial \vec{\mathrm{M}}}{\partial \mu}\, d\lambda\, d\mu$$

et l'on peut dériver par rapport à t sous le signe $\iint$:

$$\frac{d\vec{\mathrm{I}}}{dt} = \iint_{\mathrm{S}} \frac{d\varphi}{dt} \frac{\partial \vec{\mathrm{M}}}{\partial \lambda} \wedge \frac{\partial \vec{\mathrm{M}}}{\partial \mu}\, d\lambda\, d\mu + \iint_{\mathrm{S}} \varphi \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{\mathrm{M}}}{\partial \lambda} \wedge \frac{\partial \vec{\mathrm{M}}}{\partial \mu}\right) d\lambda\, d\mu;$$

$\frac{d\varphi}{dt}$, dérivée prise à λ et μ constants, représente comme il est d'usage la dérivée de φ par rapport au temps en *suivant le mouvement de chaque élément matériel*, ce que nous appellerons une *dérivée séquente* (¹). En

(¹) *Cf.* notre communication citée.

remarquant d'autre part que $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \mu}$ sont des vecteurs liés au milieu, on obtient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial \mu}\right) = \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda} . \vec{\nabla}\right) \underset{\star}{\vec{u}} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial \mu} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda} \wedge \underset{\star}{\vec{u}} \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial \mu} . \vec{\nabla}\right)$$
$$= \underset{\star}{\vec{u}} \wedge \left[\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda} . \vec{\nabla}\right) \frac{\partial \vec{M}}{\partial \mu} - \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial \mu} . \vec{\nabla}\right) \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda}\right]$$
$$= \underset{\star}{\vec{u}} \wedge \left[\vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial \mu} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial \lambda}\right)\right].$$

D'où, en définitive,

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \iint_S \frac{d\varphi}{dt} \vec{\alpha}\, d\sigma + \iint_S \varphi (\vec{\nabla} \wedge \vec{\alpha}) \wedge \underset{\star}{\vec{u}}\, d\sigma.$$

Cela légitime l'écriture

$$\frac{d}{dt} \iint_S \varphi \alpha_i d\sigma = \iint_S \frac{d}{dt}(\varphi \alpha_i d\sigma) = \iint_S \left[\frac{d\varphi}{dt} \alpha_i d\sigma + \varphi \frac{d}{dt}(\alpha_i d\sigma)\right],$$

naturellement valable encore si φ est une quantité tensorielle d'ordre quelconque, avec une éventuelle contraction en i.

c. On établirait d'une manière semblable la règle de dérivation pour une intégrale curviligne étendue à un arc matériel AB

$$\frac{d}{dt} \int_{AB} \varphi\, d\vec{M} = \int_{AB} \frac{d}{dt}(\varphi\, d\vec{M}) = \int_{AB} \left[\frac{d\varphi}{dt} d\vec{M} + \varphi \frac{d}{dt}(d\vec{M})\right],$$

avec

$$\frac{d}{dt}(d\vec{M}) = \underset{\star}{\vec{u}} (\vec{\nabla} . d\vec{M}) \qquad (d\vec{M} \text{ est } \textit{lié} \text{ au milieu matériel})$$

et pour une intégrale de volume étendue à un domaine matériel D

$$\frac{d}{dt} \iiint_D \varphi\, d\tau = \iiint_D \frac{d}{dt}(\varphi\, d\tau) = \iiint \left[\frac{d}{dt} d\tau + \varphi \frac{d}{dt}(d\tau)\right],$$

avec

$$\frac{d}{dt}(d\tau) = \vec{\nabla} . \underset{\star}{\vec{u}}\, d\tau \quad \text{(nul pour un milieu incompressible).}$$

(*à suivre.*)