JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JACQUELINE LELONG-FERRAND

Sur certaines classes de représentations d'un domaine plan variable

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 31 (1952), p. 245-252.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1952_9_31__245_0>

Sur certaines classes de représentations d'un domaine plan variable (*) ;

PAR JACQUELINE LELONG-FERRAND.

1. INTRODUCTION. — La notion de famille normale, due à M. Paul Montel (1) a notablement simplifié la démonstration du théorème fondamental concernant la représentation conforme d'un domaine plan sur le cercle (2) ; le même principe constructif trouve son application dans l'étude de certaines classes plus générales de représentations.

Rappelons tout d'abord un résultat classique :

Soit Δ_n une suite non décroissante (telle que $\Delta_{n+1} \supset \Delta_n$) de domaines plans simplement connexes épuisant un domaine Δ. Si ζ_0 désigne un point commun à tous ces domaines, et si la fonction $f_n(z)$ représente conformément sur Δ_n l'intérieur D du cercle unité, avec $f_n(0) = \zeta_0$, $f'_n(0) > 0$, on sait que la suite f_n converge uniformément vers la fonction f qui représente conformément D sur Δ et satisfait à $f(0) = \zeta_0$, $f'(0) > 0$.

On obtiendrait facilement un résultat analogue pour une suite non croissante de domaines Δ_n convergeant vers un domaine Δ.

Il revient à M. Carathéodory (3) d'avoir étendu cette propriété à une suite quelconque de domaines simplement connexes bornés Δ_n

(*) Une malencontreuse erreur typographique s'est glissée dans les premières pages du Mémoire de Mme J. Lelong-Ferrand, paru sous ce même titre, à la page 103 du présent Volume. Nous insérons ici même les pages 103 à 110 de ce Travail telles qu'elles doivent être lues.

(1) P. MONTEL, *Sur les familles normales analytiques* (*Ann. Ec. Norm. Sup.*, t. 33, 1916, p. 223-302).

(2) *Voir* par exemple : GOURSAT, *Traité d'Analyse*, Note à la fin du tome III.

(3) C. CARATHÉODORY, *Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten* (*Math. Ann.*, t. 72, 1912 p. 107-144).

contenant tous un même domaine circulaire de centre ζ_0, M. Carathéodory montre d'abord [propriété (a)] que si la suite f_n. déterminée comme précédemment, converge, sa limite $f(z)$ représente conformément sur D un domaine Δ bien déterminé, qu'il appelle le *noyau* de la suite Δ_n; et ce noyau Δ peut être défini directement comme le plus grand domaine connexe contenant ζ_0 et tel que tout compact contenu dans Δ soit contenu dans Δ_n pour n assez grand.

Du résultat (a) on déduit immédiatement la condition nécessaire et suffisante (b) de convergence de la suite f_n : c'est que toutes les suites partielles extraites de la suite Δ_n admettent le même noyau.

La démonstration du théorème de M. Carathéodory, comme celle de la propriété classique qu'il généralise, s'appuie sur le caractère analytique des fonctions f_n. Nous allons montrer que la propriété (a) s'étend à une classe très générale de transformations topologiques, l'hypothèse d'analyticité n'intervenant que dans l'établissement de la condition (b) pour assurer l'unicité de la limite f grâce aux conditions (c) : [$f(0)=0, f'(0)>0$]; et nous verrons aussi que les conditions (c) peuvent être remplacées par d'autres, convenablement choisies et associées. Nous étudierons d'autre part le cas, qui semble avoir été négligé par M. Carathéodory, des transformations limites dégénérées. Enfin nous montrerons rapidement les applications de ces résultats à l'étude asymptotique de certaines représentations conformes; certaines de ces applications feront l'objet d'un autre article.

Notre exposé sera divisé en deux parties. La première sera consacrée à la mise au point de notions utiles à l'étude de la représentation conforme envisagée ici d'un point de vue général, englobant en particulier les transformations quasi conformes et les transformations à intégrale de Dirichlet bornée. Dans la deuxième, nous étudierons aussi complètement que possible la convergence d'une suite de telles transformations et les propriétés de ses limites.

I. — Notions préliminaires à l'étude de la représentation conforme et de ses généralisations. Définition des classes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}'_k$.

2. Définitions relatives aux suites de domaines. — Nous rappellerons tout d'abord les notions introduites par M. Carathéodory en les étendant à des domaines généraux (domaines non bornés, d'ordre de connexion quelconque, pris dans un plan P). Nous utiliserons à cet effet la métrique sphérique, obtenue en projetant le plan P sur la sphère de Riemann, et la topologie associée à cette métrique (topologie sphérique); la distance sphérique de deux points ou de deux ensembles m, m' de P étant désignée par $[m, m']$, l'ensemble des points m de P satisfaisant à $[m_0, m] < R$ constituera le domaine circulaire de pôle m_0 et de rayon sphérique R.

Ceci étant posé, soit D_n une suite de domaines quelconques contenus dans le plan P. Nous désignerons par D_0 l'ensemble ouvert formé des points m du plan dont un voisinage V_m (nous prendrons en général un domaine circulaire de pôle m) appartient à tous les domaines de la suite à partir d'un certain rang; si D_0 n'est pas vide, nous choisirons dans D_0 un point m_0 et nous appellerons *noyau* de la suite D_n, relatif au point m_0, la plus grande composante connexe de D_0 qui contient le point m_0, soit $\Omega(m_0, D_n)$. Ce noyau peut aussi être défini comme l'ensemble des points du plan que l'on peut joindre à m_0 par un continu dont la distance sphérique à la frontière D_n^* de D_n reste bornée inférieurement, à partir d'un certain rang, par un nombre positif fixe.

Ces deux définitions coïncident entre elles et coïncident également avec celle de M. Carathéodory (dans les cas envisagés par cet auteur). Car si K désigne un compact contenu dans $\Omega(m_0, D_n)$, chaque point de K admet un voisinage contenu dans D_n pour n assez grand; K pouvant être recouvert au moyen d'un nombre fini de tels voisinage, K est lui-même contenu dans D_n pour n assez grand, et sa distance sphérique à la frontière de D_n reste bornée inférieurement, à partir d'un certain rang N_K, par un nombre positif fixe ε_K; inversement, si la propriété est vraie pour tout compact contenu dans Ω, elle est vraie en particulier pour chaque point m de Ω et pour tout continu joignant m à m_0 et contenu dans Ω.

La suite D_n sera dite *converger, autour du point* m_0, *vers le domaine* D, si toutes les suites partielles extraites de la suite D_n admettent D pour noyau relatif au point m_0. Si la suite D_n n'est pas convergente, notons que le noyau $\Omega(m_0, D_{p_n})$, relatif à une suite partielle D_{p_n}, contient le noyau $\Omega(m_0, D_n)$

Remarquons enfin que si m'_0 est un point de D_0 autre que m_0, on a ou bien

$$\Omega(m'_0, D_n) \equiv \Omega(m_0, D_n)$$

ou bien

$$\Omega(m'_0, D_n) \cap \Omega(m_0, D_n) = \emptyset.$$

Extensions. — Ces notions s'étendent à une famille quelconque de domaines D_t dépendant d'un paramètre t, et, plus généralement, à un filtre quelconque $\mathcal{F}$ défini sur un ensemble de domaines D. Nous dirons qu'un point m appartient à l'ensemble D_0 s'il existe un élément $\mathcal{E}$ de $\mathcal{F}$, et un voisinage de m contenu dans tous les domaines de $\mathcal{E}$; m_0 étant un point de D_0 (supposé non vide) nous dirons qu'un point m appartient au noyau $\Omega(m_0, \mathcal{F})$ s'il existe un élément $\mathcal{E}$ de $\mathcal{F}$, et un continu C joignant m_0 à m, tels que la distance sphérique de C à la frontière de D soit bornée inférieurement par un nombre positif fixe pour tout domaine de $\mathcal{E}$.

3. Définitions relatives aux suites de transformations. — *a*. Soit T_n une suite de transformations définies sur un même ensemble E. Nous dirons avec M. Carathéodory [4], que cette suite *converge continûment* sur E vers une transformation limite T, si, quelle que soit la suite m_n de points de E convergeant vers un point m de E, $T_n(m_n)$ tend vers $T(m)$.

Il est facile de voir que toute suite convergente de transformations également continues sur E est continûment convergente. On peut donc compléter ainsi un théorème bien connu de Vitali :

De toute famille infinie de transformations également et uniformément continues sur un compact, on peut extraire une suite convergeant uniformément et continûment sur ce compact.

b. Soit T_n une suite de transformations, T_n étant définie dans un domaine D_n. Si le domaine D_n dépend de l'indice n, il est nécessaire de préciser ce qu'on entend par « convergence de la suite T_n ».

---

[4] C. Carathéodory, *Conformal représentation*, Cambridge Tracts, 1932.

1° *Convergence simple.* — Soit D l'un des noyaux de la suite D_n (s'il en existe). Si m est un point de D, il existe un entier N_m tel que m appartienne à D_n pour $n > N_m$. Nous dirons que la suite T_n converge au point m si la suite $\mu_n = T_n(m)$ (définie pour $n > N_m$) a une limite μ. Si la suite T_n converge en tout point m de D, nous dirons qu'elle converge dans D, ou encore qu'elle converge autour de m_0, en désignant par m_0 un point de D. La transformation limite T est définie seulement dans D.

2° *Convergence uniforme ou continue.* — Nous avons déjà vu que si K est un compact contenu dans le noyau $D = \Omega(m_0, D_n)$, il existe un entier N_K tel que K soit contenu dans D_n pour $n > N_K$. Nous dirons que la suite T_n converge uniformément (resp. continûment) dans D vers une transformation T, définie dans D, si, quel que soit le compact K contenu dans D, la suite partielle T_n déterminée par $n < N_K$ converge uniformément (resp. continûment) vers T sur K.

Une légère modification du théorème cité de Vitali permet de montrer que si les transformations T forment une famille infinie et admettent toutes un même module de continuité $g(\varepsilon)$, on peut en extraire une suite T_n convergeant uniformément et continûment dans le domaine $D = \Omega(m_0, T_n)$.

4. Étude d'une classe de transformations. — Nous dirons qu'une transformation T définie par les équations $\xi_i = f_i(x, y)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ est de classe BL dans un domaine plan D si les fonctions f_i qui la définissent sont elles-mêmes de classe BL dans D [5]; et nous poserons

$$I_D(T) = \iint_D \sum_{i=1}^{p} \operatorname{grad}^2 f_i \, dx \, dy. \tag{4a}$$

Propriétés. — Soit C_r la portion de circonférence de centre $m_0(x_0, y_0)$ fixe et de rayon r variable, contenue dans D. Les fonctions $f_i(x_0 + r\cos\theta,\ y_0 + r\sin\theta)$ étant absolument continues en θ, pour

---

[5] Sur la définition de ces fonctions *voir* O. Nikodym, *Sur une classe de fonctions considérées dans l'étude du problème de Dirichlet* (*Fund Math.*, t. **21**, 1933, p. 129-150), et J. Deny, *Les potentiels d'énergie finie* (*Acta. Math.*, t. **82**, 1950, p. 107-183).

presque toute valeur de r, la mesure linéaire de $T(C_r)$ est finie pour presque toute valeur de r, et donnée par

$$\lambda(r) = \int_{C_r} \sqrt{E\,dx^2 + 2F\,dx\,dy + G\,dy^2}$$
$$= \int_{C_r} \sqrt{E\sin^2\theta + 2F\sin\theta\cos\theta + G\cos^2\theta}\, r\,d\theta,$$

où l'on a posé

$$E = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}\right)^2, \qquad F = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{\partial f_i}{\partial y}, \qquad G = \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{\partial f_i}{\partial y}\right)^2.$$

On en déduit l'inégalité fondamentale

$$(4b) \qquad \int_R^{R'} \lambda^2(r)\frac{dr}{r} < 2\pi \iint_D (E+G)\, r\,d\theta\,dr = 2\pi I_D(T).$$

En prenant $R' = \sqrt{\varepsilon}$, $R = \varepsilon\,(0 < \varepsilon < 1)$, l'inégalité (4b) entraîne l'existence d'une valeur ρ, dépendant de ε et de m_0, satisfaisant à

$$(4c) \qquad \varepsilon < \rho < \sqrt{\varepsilon}, \qquad \lambda(\rho) < \sqrt{\frac{4\pi I_D(T)}{-\log\varepsilon}}.$$

Application. — *Détermination d'un module de continuité* (6). — Rappelons qu'une fonction f, définie d'un domaine D est dite *monotone* au sens de Lebesgue (7) si ses bornes relatives à un ensemble quelconque E strictement intérieur à D, sont les mêmes que celles relatives à la frontière $E^\star$ de E(8). Si les fonctions $f_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ qui définissent une transformation T sont monotones, on voit faci-

(6) Le principe de la détermination du module de continuité $g_k(\varepsilon)$ est implicitement contenu dans Lebesgue, *Sur le principe de Dirichlet* (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. 24, 1907, p. 371-402). Il a été retrouvé indépendamment par Wolff dans le cas des transformations conformes. *Sur la représentation conforme des bandes* (*Composition Math.*, t. 1, 1934, p. 217-222) et souvent utilisé depuis dans l'étude de ces transformations. Il nous a paru intéressant de lui restituer ici la généralité prévue par H. Lebesgue.

(7) *Voir* Lebesgue, *loc. cit.*

(8) Dans tout cet article, la frontière d'un ensemble E sera toujours désignée par $E^\star$.

lement que le diamètre de T(E) est au plus égal au diamètre de T(E*) multiplié par $\sqrt{p}$. On a en effet

$$|\mathrm{T}(m)-\mathrm{T}(m')|^2=\sum_{i=1}^{p}|f_i(m)-f_i(m')|^2,$$

et chacune des quantités $|f_i(m)-f_i(m')|$ atteignant son maximum pour un couple de points situés sur E* est majorée par le diamètre de T(E*).

Définition 4 *d*. — Nous sommes maintenant conduits à la définition suivante : Nous dirons qu'une transformation T satisfait dans D à la condition $\mathcal{C}_h$ si, quel que soit l'ensemble E strictement intérieur à D, le rapport du diamètre de T(E) au diamètre de T(E*) est borné par $\sqrt{h}\,(h \geqq 1)$.

Supposons que la transformation T, de classe BL, satisfasse à la fois à la condition $\mathcal{C}_h$ et à l'inégalité $\mathrm{I_D}(\mathrm{T}) \leqq k$. Si le cercle de centre m_0 et de rayon $\sqrt{\varepsilon}\,(0<\varepsilon<1)$ est contenu dans D, nous pouvons prendre pour E le cercle de centre m_0 de et rayon $\rho(\varepsilon, m_0)$ précédemment défini; E* coïncide alors avec la circonférence C_ρ, et le diamètre de T(E) est majoré par $\sqrt{h}\,\lambda(\rho)$, donc par

$$g_{kh}(\varepsilon)=\sqrt{\frac{4\pi\, kh}{-\log\varepsilon}}.$$

Or si le point m est à distance de m_0 inférieure à ε, les points m et m_0 appartiennent tous deux à E. Donc l'inégalité $mm_0<\varepsilon<1$ entraîne l'inégalité $|\mathrm{T}(m)-\mathrm{T}(m_0)|<g_{kh}(\varepsilon)$ pourvu que le cercle de centre m_0 et de rayon $\sqrt{\varepsilon}$ soit contenu dans D. D'où le résultat :

Théorème 4 *e*. — *Toute transformation* T, *de classe* BL, *satisfaisant à la condition* $\mathcal{C}_h$ *et à l'inégalité* $\mathrm{I_D}(\mathrm{T}) \leqq k$, *possède en tout point* m_0 *de* D *le module de continuité uniforme* $g_{kh}(\varepsilon)=\sqrt{\frac{4\pi\, kh}{-\log\varepsilon}}$ *valable pour toute valeur de* ε *inférieure à la fois à l'unité et au carré de la distance de* m_0 *à* D*.

Remarquons que toute transformation intérieure, et en particulier toute transformation topologique satisfait à la condition $\mathcal{C}_h$ *avec* $h=1$.

Définition 4*f*. — Nous désignerons désormais par $\mathcal{C}_k$ la classe des transformations de classe BL satisfaisant à la condition $I_D(T) \leqq k$.

Cette classe $\mathcal{C}_k$ contient toutes les transformations conformes définies par une fonction holomorphe $f(z)$ décrivant une aire inférieure à $\frac{k}{2}$. Plus généralement toute transformation quasi conforme T définie par une inégalité de la forme $E + G < \rho\sqrt{EG - F^2}$ (notations déjà utilisées) appartient à la classe $\mathcal{C}_k$ si l'aire décrite par le point $T(m)$ est inférieure à $\frac{k}{\rho}$.

On remarque d'autre part que la classe $\mathcal{C}_k$ reste invariante dans une transformation conforme quelconque du domaine D; et la classe BL reste invariante dans une transformation quasi conforme quelconque de D.

5. Extensions. — *a. Correspondance entre les frontières.* — Le module de continuité que nous venons de déterminer peut être étendu à la frontière de D, dans le cas des transformations topologiques de classe BL, moyennant l'introduction de métriques appropriées dans les domaines D et $\Delta = T(D)$. Ayant choisi un couple de points correspondants m_0, μ_0 $[\mu_0 = T(m_0)]$, on définit la *distance relative* $e_D^{m_0}(m, m')$ [resp. $e_\Delta^{\mu_0}(\mu, \mu')$] de deux points m, m' de D (resp. $\mu\mu'$ de Δ) comme la borne inférieure des diamètres des frontières propres des sous-domaines simplement connexes de D (resp. Δ) qui contiennent les deux points mm' (resp. $\mu\mu'$) et ne contiennent pas le point m_0 (resp. μ_0). On peut montrer [9] qu'avec ces nouvelles métriques le module de continuité $g_k(\varepsilon)$ reste valable pour toute transformation topologique de classe $\mathcal{C}_k$ dans D, et pour toute valeur de ε assez petite, en tout point de D ou de sa frontière; les éléments frontières définis par ces nouvelles métriques

[9] La démonstration, qui généralise une étude faite par l'auteur pour la représentation conforme, (J. Ferrand, *Bull. Soc. Math. France*, t. **70**, 1942, p. 143-174) sera développée dans un Ouvrage destiné à paraître prochainement.

(*Pour la suite de ce Mémoire se reporter à la page* 111 *du présent volume.*)