JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

D. DUGUÉ

# Fonctions fuchsiennes et familles normales

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série*, tome 31 (1952), p. 19-35.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1952_9_31__19_0>

# *Fonctions fuchsiennes et familles normales;*

PAR D. DUGUÉ.

En 1916, les *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* publiaient un Mémoire fondamental de M. Montel intitulé : *Sur les familles normales de fonctions analytiques*. J'ai voulu, dans le travail qui va suivre, et dont je prie le Maître à qui est dédié ce volume de bien vouloir accepter l'hommage, utiliser certaines de ses méthodes dans lesquelles j'ai remplacé la fonction de Schwarz par des fonctions fuchsiennes plus générales. Les résultats auxquels je suis arrivé ont été exposés cette année dans mon cours d'Analyse Supérieure de la Faculté des Sciences de Caen. Je les ai résumés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts, de Caen, à l'occasion du soixante-dixième anniversaire de la découverte dans cette ville des fonctions fuchsiennes et publiée dans les Mémoires de cette Compagnie. Certains énoncés sont déjà connus. Je crois nouveaux les procédés employés suggérés par les méthodes de M. Montel.

Je commencerai par établir l'existence de trois fonctions fuchsiennes dont nous nous servirons dans la suite et par donner les propriétés que nous utiliserons.

**1.** Ces fonctions seront définies dans le demi-plan supérieur.

FONCTION I ($F_1$). — Cette fonction sera la fonction de Schwarz suivante : Le polygone fondamental va être un quadrilatère dont les quatre côtés seront les droites $\mathcal{R}(z) = -1$, $\mathcal{R}(z) = +1$ et deux côtés portés par le demi-cercle du demi-plan supérieur $|z| = 1$. Le premier côté étant l'arc joignant le point $-1$ au point $i$, le second le point $i$ au point $+1$ (*fig.* 1).

Les quatre sommets seront $A(\infty)$, $B(-1)$, $C(i)$, $D(+1)$; AB et DA se correspondent, ainsi que BC et CD. Le polygone est du système (1, 4; 2, 3) selon la terminologie de Poincaré (*voir Théorie des groupes fuchsiens*, § 7). Les deux transformations de base seront les suivantes :

$$z' = z + 2 \quad \text{et} \quad z' = -\frac{1}{z}.$$

Toutes les transformations du groupe seront toutes les transformations de la forme $z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d$ entiers tels que $ad - bc = 1$ et *a et d*

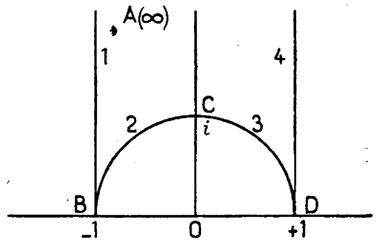


Fig. 1.

*ou b et c pairs*. Il s'agit là d'un sous-groupe du groupe modulaire. Le polygone fondamental est symétrique par rapport à une diagonale (AC). $F_1$ sera obtenue en représentant conformément le demi-plan supérieur sur le triangle curviligne ABC, par exemple, l'infini correspondant à A, 0 à B, et 1 à C et en prolongeant par les symétries de Schwarz. $Z_1 = F_1(z)$ aura alors 0 et $\infty$ comme valeurs exceptionnelles et prendra une fois et une seule les valeurs qu'elle prend à l'*intérieur* d'un domaine fondamental, ainsi que sur les côtés, les sommets étant exceptés.

La valeur prise en C, soit 1, sera double et ce sera la seule valeur double. Donc la surface de Riemann uniformisant $z = z(Z_1) = F_1^{(-)}(Z_1)$ aura comme ramifications logarithmiques $Z_1 = 0$ et $Z_1 = \infty$ et tous les feuillets auront pour $Z_1 = 1$ un point critique algébrique d'ordre 2.

Fonction II ($F_2$). — Le polygone fondamental pourra, par exemple, être ici un octogone borné par les droites $\mathcal{R}(z) = -2$, $\mathcal{R}(z) = +2$. Les six autres côtés seront deux à deux portés par les mêmes cercles et seront congruents (*fig.* 2). Ce seront les trois cercles

$$|z| = 1, \quad |z-2| = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad |z+2| = \sqrt{3}.$$

Ainsi BC est congruent à CD, DE à EF, FG à GH.

Les transformations de base seront ici :

$$T_1: \ z' = z + 4; \qquad T_2: \ z' = -\frac{1}{z}; \qquad T_3: \ z' = \frac{z-3}{z-1}; \qquad T_4: \ z' = -\frac{z+3}{z+1}.$$

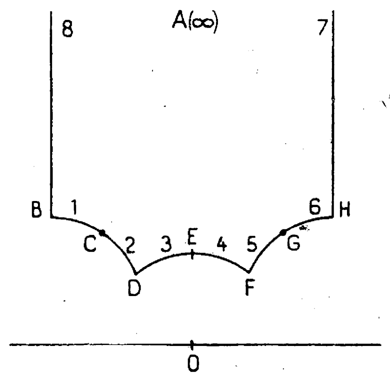


Fig. 2.

L'octogone aura ainsi un angle nul en A; trois angles égaux à $\pi$ en C, E, G; quatre angles égaux à $\frac{\pi}{2}$ en B, D, F, H. Il sera du système (1, 2; 3, 4; 5, 6; 7, 8) et aura cinq cycles de sommets. A, C, E, G constituant un cycle à eux seuls et le cycle BDFH. Les deux conditions nécessaires et suffisantes de Poincaré sont remplies $\left[1^\circ\right.$ congruence des côtés correspondants; $2^\circ$ somme des angles d'un même cycle égale à $\frac{2\pi}{K}$ (K entier)$\left.\right]$. Toute fonction fuchsienne admettant ce domaine fondamental aura une valeur d'ordre au moins 2 en C, E et G. Cela résulte des théorèmes généraux établis par Poincaré sur les fonctions thêtafuchsiennes. Mais il est facile de le vérifier.

En effet, soit $C_1(\xi_1)$ un point très voisin de C dans le polygone construit. Si $C_2(\xi_2)$ est le symétrique lobatchewskien de $C_1$ par rapport à C, $C_2$ sera aussi très voisin de $C_1$ et l'on aura $F_2(\xi_1) = F_2(\xi_2)$. Donc, dans le voisinage de C, $F_2$ prendra au moins deux fois la même valeur. Cela suffit pour faire de la valeur prise en C une valeur d'ordre au moins 2. Et il en est de même en E et G.

Nous allons construire une fonction $F_2$ ayant pour *seules* valeurs multiples les valeurs prises en C, E et G et ces valeurs seront doubles.

Comme toute fonction fuchsienne, $F_2$ sera donnée comme quotient de deux fonctions thêtafuchsiennes $\Theta_1$ et $\Theta_2$. On sait qu'une fonction thêtafuchsienne est définie comme somme d'une série de fractions rationnelles $\Sigma H[f_i(z)]\left(\frac{df_i}{dz}\right)^m$, $H(u)$ étant une fraction rationnelle sans pôles réels, le $\Sigma$ étant étendu à toutes les transformations $z' = f_i(z)$ du groupe fuchsien et $m$ étant pour la convergence de la série un entier supérieur ou égal à 2. Pour que le quotient de deux fonctions thêtafuchsiennes soit une fonction fuchsienne, il suffit que les deux fonctions soient définies avec la même valeur de $m$. Nous prendrons ici $m = 2$. D'après une formule due à Poincaré, l'excès du nombre de zéros sur le nombre de pôles d'une fonction thêtafuchsienne est égal à $m\left(n - 1 - \frac{S}{2\pi}\right)$ ($m$ sera ici 2, $n$ égal à la moitié du nombre de côtès est 4 et S somme des angles du polygone fondamental $5\pi$). Cet excès est donc $2\left(4 - 1 - \frac{5}{2}\right) = 1$. On s'arrangera pour que $\Theta_1$ ait un seul pôle [il suffit de prendre $H_1(z)$ ayant un seul pôle dans le demi-plan supérieur] et pour que $\Theta_2$ n'ait pas de pôle [$H_2(z)$ n'ayant pas de pôle dans la même région]. Dans ces conditions $\frac{\Theta_1}{\Theta_2} = a$ a une racine et une seule à l'intérieur du polygone pour toute valeur de $a$ (infini compris), sauf une. En effet, $\Theta_1 - a\Theta_2$ est une fonction thêtafuchsienne qui aura un zéro de plus que de pôles, donc 2. D'après la théorie de Poincaré, le point $z = 0$ $\left[\text{homologue du sommet } A(\infty) \text{ dans la transformation } z' = -\frac{1}{z}\right]$ compte pour un zéro de $\Theta_1$ et de $\Theta_2$, car on peut les mettre sous la forme $\Theta = \frac{1}{z^4}\Phi\left(e^{-\frac{2\pi i}{4z}}\right)$, $\Phi(u)$ étant le symbole d'une fonction holomorphe au voisinage de $u=0$ et ayant un zéro simple en $u=0$. Il reste donc un zéro pour $\Theta_1 - a\Theta_2$ à l'intérieur du polygone [excepté le cas où $a$ serait tel que le zéro de $\Theta_1 - a\Theta_2$ en o compte pour 2 : zéro double de $\Phi_1(u) - a\Phi_2(u)$]. Donc $F_2$ est univalente.

$F'_2$ ne sera pas une fonction thêtafuchsienne, mais comme dérivée de fonction fuchsienne, elle satisfaira à l'égalité

$$F'_2(f_i) = F'_2(z)(c_i z + d_i)^2.$$

On pourra calculer l'excès du nombre de zéros sur le nombre de pôles exactement comme dans le cas d'une fonction thêtafuchsienne dans laquelle $m$ serait égal à 1. Ce calcul est fondé, en effet, sur la seule égalité $\Theta(f_i) = \Theta(z)\,(c_i z + d_i)^{2m}$ à laquelle satisfait toute fonction thêtafuchsienne. Dans le cas où nous nous sommes placés, $n - 1 - \frac{S}{2\pi}$ étant égal à $\frac{1}{2}$, cet excès sera $\frac{1}{2}$ et $F'_2$ ayant un pôle et un seul d'ordre 2 à l'intérieur du polygone aura deux zéros et demi. C, E, G comptent pour un demi-zéro chacun, d'après les conventions usuelles, puisque ces zéros appartiennent à deux polygones contigus. Il reste un zéro en O. En effet,

$$F_2 = \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \frac{\Phi_1\left(e^{-\frac{2\pi i}{4z}}\right)}{\Phi_2\left(e^{-\frac{2\pi i}{4z}}\right)},$$

$\Phi_1(u)$ et $\Phi_2(u)$ étant holomorphes et ayant un zéro d'ordre 1 en $u=0$. Donc

$$F_2 = \frac{a_1 + a_2 e^{-\frac{2\pi i}{4z}} + \ldots}{b_1 + b_2 e^{-\frac{2\pi i}{4z}} + \ldots} \qquad \text{et} \qquad F'_2(z) = \frac{2\pi i}{4z^2} e^{-\frac{2\pi i}{4z}} \frac{(a_2 b_1 - a_1 b_2) + \ldots)}{\left(b_1 + b_2 e^{-\frac{2\pi i}{4z}} + \ldots\right)^2}.$$

Donc $F'_2$, au voisinage du point zéro, va bien être de la forme $\frac{1}{z^{2m}}\Phi\left(e^{-\frac{2\pi i}{4z}}\right)$, $m$ étant ici égal à 1 et $\Phi$ ayant un zéro d'ordre 1 pour $u=0$.

Il y a donc comme seules valeurs multiples, les valeurs doubles prises en C, E, G et une valeur exceptionnelle en O, $\frac{a_1}{b_1}$ vers laquelle $F_2$

tend quand $z$ tend vers zéro non tangentiellement à l'axe réel. (Une homographie sur $F_2$ rendra cette valeur infinie.) Du fait de l'univalence, ces quatre valeurs sont différentes. $Z_2 = F_2(z)$ est donc définie telle que nous nous la sommes imposée. Si l'on prend maintenant la surface de Riemann sur laquelle $z = z(Z_2) = F_2^{(-)}(Z_2)$ est uniforme, les seules ramifications vont être une ramification logarithmique pour tous les feuillets à l'infini et des points critiques algébriques d'ordre 2 pour tous les feuillets pour les valeurs correspondant à C, E, G. C'est l'univalence de $F_2$ qui entraîne que ces singularités figurent sur tout les feuillets. L'arbitraire avec lequel les fonctions $H_1$ et $H_2$ peuvent être choisies, permet de prendre trois quantités quelconques pour valeurs prises en C, E, G.

Fonction III ($F_3$). — La fonction $F_3$ aura pour polygone fondamental un octogone dont les côtés seront portés deux à deux par les mêmes cercles, chaque côté étant congruent du côté porté par le même cercle que lui (*fig.* 3).

Les quatre cercles seront ceux définis par les équations

$$|z| = 1, \qquad |z| = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{5+9\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right]$$

et

$$|z-2| = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5}-1), \qquad |z+2| = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Les rayons et les centres ont été choisis de telle sorte que l'angle en C soit égal à $\frac{\pi}{6}$ et l'angle en E à $\frac{\pi}{3}$. Les points B, D, F, H sont les milieux lobatchewskiens des côtés AC, CE, EG, GA. Le système de l'octogone sera (1, 2; 3, 4; 5, 6; 7, 8). La somme des angles AC EG est donc égale à $\pi$ [on ne pourrait construire un quadrilatère dont la somme des angles soit égale à $2\pi$, puisque dans la géométrie de Lobatchewsky la somme des angles d'un polygone est *inférieure* à $(n-2)\pi$]. Ici encore, il y aura cinq cycles : le cycle A, C, E, G (somme des angles égale à $\pi$) et les sommets B, D, F, H qui, à eux seuls, constitueront un cycle dont l'angle au sommet est $\pi$. Les conditions de Poincaré sont satisfaites. Toute fonction fuchsienne admettant ce polygone fondamental aura une valeur au moins double en B, D, F, H et la valeur prise en A, C, E, G sera au moins double en chacun de ses points. Montrons qu'on peut construire $F_3$ où ces valeurs seront effectivement doubles et qui n'aura pas d'autres valeurs multiples à l'intérieur du polygone fondamental. Ce sera plus simple que tout à l'heure, car ici il n'y a plus de sommets sur l'axe réel. $F_3$, sera le quotient $\frac{\Theta_1}{\Theta_2}$ de deux fonctions thêtafuchsiennes qu'on choisira sans pôles, la fraction rationnelle qui les engendre étant prise sans pôle dans le demi-plan supérieur et l'exposant $m$ étant égal à 2. Les

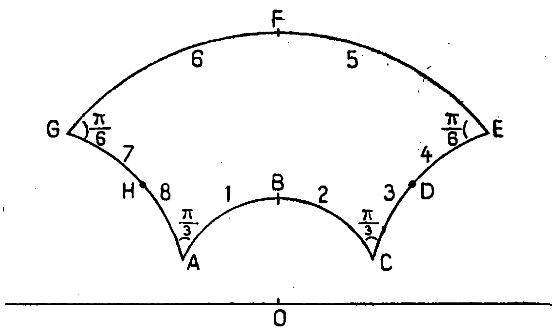


Fig. 3.

pôles de $F_3$ seront donc seulement les zéros de $\Theta_2$. L'excès du nombre de zéros sur le nombre des pôles est ici encore $2\left(4-1-\frac{5}{2}\right)=1$. $\Theta_2$ n'a donc qu'un zéro, $F_3$ qu'un pôle et elle prendra une fois et une seule toute valeur sans exception cette fois. Elle sera univalente.

$F'_3$ aura un pôle double et, par conséquent, le nombre de ses zéros sera $2+1\times\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$ (le coefficient $m$ devenant ici, comme pour $F_2$, égal à 1). Ces points représentant une valeur double pour $F_3$ seront B, D, F, H, où $F_3$ prend des valeurs différentes à cause de son univalence et les points C, E, G, A, où $F_3$ prend la même valeur. B, D, F, H comptent pour un demi-zéro chacun. Chacun des points C, E, G, A appartient à huit polygones. Ils comptent donc pour $1/8^e$ de zéro chacun et à eux quatre ils donnent en tout un demi-zéro. On retrouve donc bien uniquement les points indiqués pour seules valeurs multiples de $F_3$ et ces valeurs toutes différentes sont doubles. Étant donné l'arbitraire laissé dans le choix de $H_1$ et $H_2$ définissant $\Theta_1$ et $\Theta_2$, on peut encore s'arranger pour que ces cinq valeurs soient cinq valeurs données d'avance. Si maintenant on construit la surface de Riemann attachée à $z(Z_3) = F_3^{(-)}(Z_3)$, ses seules singularités seront des singularités critiques algébriques sur tous les feuillets, deux déterminations se permutant au voisinage des points $Z_3$ correspondant aux cinq valeurs prises en C, E, G, A et B et D et F et H.

**2.** Ces fonctions fuchsiennes vont donner, en utilisant le même mode de démonstration que le théorème de Picard et en se servant des remarques sur les points critiques algébriques analogues à celles sur les ramifications logarithmiques, des théorèmes dont la démonstration était déjà obtenue par d'autres procédés.

Supposons que $\varphi(z)$ méromorphe dans tout le plan soit telle que toutes les racines de $\varphi(z) - a = 0$ soient régulières par rapport à 2 (c'est-à-dire que toutes les racines de l'équation soient doubles). Quand $z$ décrit un lacet entourant une racine $z_0$, de cette équation le point $Z = \varphi(z)$ va décrire un lacet entourant deux fois le point $a$. Si donc, $a$ étant une des valeurs doubles de $F_1(z)$, $F_2(z)$, $F_3(z)$, on effectue la substitution $F_1^{(-)}[\varphi(z)]$ ou $F_2^{(-)}[\varphi(z)]$ ou $F_3^{(-)}[\varphi(z)]$ sur la fonction inverse, on obtiendra une fonction uniforme au voisinage de $z_0$.

Si donc $\varphi$ a deux valeurs exceptionnelles et une régulière par rapport à 2, on pourra s'arranger par une homographie pour que les valeurs exceptionnelles soient zéro et l'infini et la valeur régulière un; $F_1^{(-)}(\varphi)$ sera uniforme dans tout le plan. Si $\varphi$ a une valeur exceptionnelle que l'on peut prendre infinie et trois valeurs régulières par rapport à 2, on prendra $F_2$ ayant comme valeurs doubles ces trois valeurs régulières, ce que l'on peut faire et $F_2^{(-)}(\varphi)$ sera uniforme. Si $\varphi$ a cinq valeurs régulières par rapport à 2, on prendra $F_3$ les ayant comme valeurs doubles et ce sera ici $F_3^{(-)}(\varphi)$ qui sera uniforme. Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème de Liouville : ces fonctions uniformes dans tout le plan ont leur partie imaginaire positive, ce qui est impossible.

Donc :

THÉORÈME 1. — *Si $\varphi$ méromorphe dans tout le plan a deux valeurs exceptionnelles, elle ne peut avoir une valeur régulière d'ordre* 2.

THÉORÈME 2. — *Si $\varphi$ méromorphe dans tout le plan a une valeur exceptionnelle, elle ne peut avoir trois valeurs régulières d'ordre* 2.

THÉORÈME 3. — *Si $\varphi$ est méromorphe dans tout le plan, elle ne peut avoir cinq valeurs régulières d'ordre* 2.

Ces trois énoncés étaient déjà connus : le premier est contenu dans le Mémoire cité de M. Montel. Bien entendu, les trois théorèmes peuvent s'étendre de la façon classique en remplaçant *dans tout le plan* par *au voisinage d'une singularité essentielle*. Dans ce cas, on ferait la substitution au voisinage de la singularité et l'on aboutirait à une fonction uniforme dans ce voisinage ayant une singularité essentielle et dont la partie imaginaire est positive.

On énonce immédiatement les critères de normalité correspondants. On ne peut pas, pour les théorèmes 2 et 3, diminuer le nombre de valeurs régulières par rapport à 2. Car $\sin z$ et $p(z)$ sont deux fonctions, l'une entière ayant deux valeurs ($-1$ et $+1$) régulières par rapport à 2 et l'autre méromorphe ayant quatre valeurs ($\infty, e_1, e_2, e_3$) régulières par rapport à 2. De cette constatation, on tire des résultats concernant les valeurs doubles des fonctions fuchsiennes.

THÉORÈME 1 *bis*. — *Si une fonction fuchsienne a seulement deux valeurs exceptionnelles, elle a au moins une valeur multiple.*

Dans le cas contraire, la surface de Riemann de l'inverse n'aurait que deux ramifications logarithmiques et l'on en déduirait qu'une fonction entière ne peut pas avoir *une* valeur exceptionnelle.

THÉORÈME 2 *bis*. — *Si une fonction fuchsienne a une seule valeur exceptionnelle et n'a pas de points multiples d'ordre supérieur à* 2, *elle en a au moins trois d'ordre* 2.

Dans le cas contraire, on établirait l'impossibilité de l'existence d'une fonction entière à deux valeurs régulières par rapport à 2.

THÉORÈME 3 *bis*. — *Si une fonction fuchsienne n'a pas de valeurs* *exceptionnelles et pas de points multiples d'ordre supérieur à 2, elle en a au moins cinq d'ordre 2.*

Ici ce serait l'impossibilité de l'existence d'une fonction méromorphe à quatre valeurs régulières par rapport à 2 qui serait établie.

A ces résultats, je joindrai le théorème suivant, que j'ai énoncé récemment :

THÉORÈME 4. — *Si $Z = \varphi(z)$ est une fonction analytique et uniforme dans le plan ou une portion du plan, prenant une infinité de fois toute valeur sans valeurs asymptotiques, sans valeurs d'ordre de multiplicité supérieure à 2, il y a au moins quatre valeurs a telles que $\varphi(z) = a$ ait des racines doubles.*

Je précise que, dans l'énoncé, ces valeurs ne sont pas forcément régulières. Il se peut que, parmi les racines de $\varphi(z) = a$, il y en ait qui soient simples.

Supposons, en effet, l'existence d'une telle fonction ayant seulement trois valeurs doubles que nous prendrons égales à l'infini, $-1$ et $+1$. La fonction inverse de $\varphi(z)$, $\varphi^{(-)}(Z)$ n'aura que des points critiques algébriques et pas de ramifications logarithmiques. $\varphi^{(-)}(\sin\xi)$ sera uniforme, définie quel que soit $\xi$ et cela va conduire à une contradiction. Si $\varphi(z)$ n'est pas définie dans tout le plan, mais a un espace lacunaire comprenant au moins trois points (fonctions ayant une ligne singulière, ne pouvant être prolongée dans certaines régions ou ayant plus de deux singularités essentielles), $\varphi^{(-)}(\sin\xi)$ va être une fonction analytique dans tout le plan et ayant trois valeurs exceptionnelles, ce qui est impossible.

Si $\varphi(z)$ est analytique dans tout le plan, sauf en deux singularités essentielles que l'on peut choisir en zéro et $\infty$, $\varphi^{(-)}(\sin\xi)$ est égal à une fonction entière ne prenant pas la valeur zéro; donc, en revenant à la fonction $\varphi$, $\sin\xi = \varphi[e^{E_1(\xi)}]$, $E_1(\xi)$ étant une fonction entière. S'il n'y avait pour $\varphi$ qu'une singularité essentielle, l'infini, on aurait $\sin\xi = \varphi[E_2(\xi)]$. De toute façon, la chose est impossible, car $\sin\xi$ étant une fonction entière, $e^{E_1(\xi)}$ ou $E_2(\xi)$ devraient ne prendre aucune valeur $z$ (en nombre infini) telles que $e^{E_1(\xi)}$ ou $E_2(\xi)$ soit égal à un pôle de $\varphi(z)$. Du fait de notre hypothèse sur $\varphi(z)$, cette fonction a une infinité de pôles.

M. Valiron m'a fait remarquer que le théorème deviendrait faux si l'on renonçait à la condition *sans valeurs d'ordre de multiplicité supérieure à deux*. En effet, prenons une fonction elliptique où $g_2 = 0$. On a

$$p'^2 = 4p^3 - g_3.$$

Considérons la fonction $p'$. L'infini est valeur triple. Les autres valeurs multiples sont celles pour lesquelles $p'' = 0$. Or $p'' = 6p^2$. Par conséquent, pour ces valeurs multiples, on aura

$$p'^2 = -g_3 \qquad \text{et} \qquad p' = \pm\sqrt{-g_3}.$$

Donc $p'$ n'a que trois valeurs multiples différentes. En fait, ces valeurs seront toutes triples.

Comme cas particulier du théorème 4, on retrouve le fait que les fonctions elliptiques ont au moins quatre valeurs doubles si elles n'ont pas de valeurs multiples d'ordre plus élevé.

Analogue au théoréme 1 *bis*, je signale le théorème suivant :

Théorème 5. — *En dehors des cas de* $\varphi(z) = \dfrac{a e^z + b}{c e^z + d}$, *et de la transformée en* $\dfrac{1}{z - z_0}$ *si* $\varphi(z)$ *est une fonction analytique et uniforme dans le plan ou une portion du plan prenant une infinité de fois toute valeur et n'ayant pas de valeurs multiples,* $\varphi(z)$ *a au moins trois valeurs asymptotiques.*

En effet, la surface de Riemann de la fonction inverse n'aura que des ramifications logarithmiques. Il y en a aura au moins deux qu'une homographie sur $Z = \varphi(z)$ rendra égales à zéro et l'infini. Si $\varphi(z)$ est définie dans un domaine comprenant tout le plan, moins un espace lacunaire d'au moins trois points et si $\varphi(z)$ n'avait que deux valeurs asymptotiques, on établirait ainsi l'impossibilité de l'existence d'une fonction entière à une valeur exceptionnelle. Par conséquent, dans ce cas, il y a au moins trois valeurs asymptotiques. La question ne se pose que si $\varphi(z)$ a une ou deux singularités essentielles que l'on peut supposer après une homographie sur $z$ en zéro et l'infini.

Prenons dans ce cas la surface de Riemann uniformisant $z(Z)$. Si les deux ramifications logarithmiques intéressent tous les feuillets, zéro et l'infini seront exceptionnels et $\varphi(z)$ sera de la forme $e^{H_1(z)+H_2\left(\frac{1}{z}\right)}$, $H_1(u)$ et $H_2(u)$ étant holomorphes dans tout le plan. Sans quoi, $\varphi(z)$ aurait d'autres singularités essentielles que l'infini et l'origine. $H_1(z)+H_2\left(\frac{1}{z}\right)=\varphi_1(z)$ est une fonction analytique dans tout le plan, sauf en zéro et l'infini. Ou bien elle ne prend qu'une seule fois la même valeur et sera $az+b$ ou $a+\frac{b}{z}$ : $\varphi(z)$ sous son expression générale sera de l'une des deux formes exceptionnelles indiquées. Ou bien $\varphi_1(z)$ prend plusieurs fois la même valeur; $\varphi_1(z)$ ne peut avoir de valeurs multiples, sans quoi $e^{\varphi_1(z)}$ en aurait. Donc $\varphi_1(z)$ prend une infinité de fois toute valeur sans valeurs multiples. On peut lui appliquer la remarque faite dès le début : la surface de Riemann de la fonction inverse de $\varphi_1$ a au moins deux ramifications logarithmiques et $\varphi_1$ a, de ce fait, au moins deux valeurs asymptotiques (l'une pouvant être l'infini, l'autre étant $a$) et finalement $\varphi(z)$ a les trois valeurs asymptotiques o, $\infty$ et $e^a$. Le dernier cas à examiner est celui où la ramification en zéro et l'infini n'intéresserait pas tous les feuillets. Il y aurait, par suite, des feuillets n'ayant qu'un ou zéro point de ramification s'il n'en existait pas d'autre. C'est impossible et, par conséquent, il y a une troisième ramification, donc une troisième valeur asymptotique dans ce cas également. On voit donc que la seule fonction inverse de fonction uniforme, dont la surface de Riemann, n'admet comme seules ramifications que des ramifications logarithmiques en zéro et l'infini et $a \log z + b$.

M. Nevanlinna a présenté des remarques analogues dans son livre *Eindeutige Analytische Funktionen.*

**3.** Les théorèmes 2 et 3 vont permettre de donner très aisément la démonstration des résultats concernant l'uniformisation des courbes algébriques : en particulier, le résultat célèbre connu quelquefois sous le nom de second théorème de Picard. Il est d'ailleurs curieux d'observer que ce second théorème, qui est une conséquence toute naturelle du théorème 3, extension assez simple du premier théorème de Picard, n'a été obtenu que par un procédé très détourné et que, jusqu'à une date relativement récente, ce théorème 3 était inconnu.

Nous allons donc montrer que le théorème suivant :

*Si* $F(x, y)$ *est algébrique, et si l'on peut trouver deux fonctions uniformes* $\varphi_1(z)$ *et* $\varphi_2(z)$ *telles que* $F[\varphi_1(z), \varphi_2(z)]$ *soit identiquement nulle,* $\varphi_1$ *ayant une singularité essentielle isolée,* F *ne peut être de genre supérieur à* 1,

est une conséquence du théorème 3.

Tout d'abord, $\varphi_2$ aura également une singularité isolée. Car si l'on considère la fonction $y(x)$ multiforme telle que $F[x, y(x)] = 0$, on aura $\varphi_2(z) = y[\varphi_1(z)]$. $\varphi_1(z)$ uniformisera donc $y(x)$ et la singularité isolée de $\varphi_1(z)$ sera aussi singularité isolée de $\varphi_2$.

On peut mettre les points de la courbe $F(x, y) = 0$ en correspondance biunivoque avec les points d'une courbe de genre $g$ ayant comme seuls points multiples des points doubles en appliquant d'abord le théorème de Nöther, puis celui de Bertini. Cette transformation changera la relation $F(x, y)$ en une autre $G(x, y)$ de degré $m$ de même genre $g$ et les fonctions $\varphi_1$ et $\varphi_2$ en fonction $\psi_1$ et $\psi_2$ uniformes ayant une singularité isolée. Les points doubles seront au nombre de $\frac{(m-1)(m-2)}{2} - g$. On pourra s'arranger pour qu'aucune de leurs tangentes ne soient parallèles à $Oy$.

Les points de ramification algébrique de la fonction multiforme solution en $y$ de $G(x, y) = 0$ sont les points à tangentes parallèles à l'axe $Oy$ pour parler un langage géométrique. On peut s'arranger pour que ce soient uniquement des points critiques d'ordre 2. Il suffit d'éviter de prendre $Oy$ parmi les parallèles aux tangentes aux points d'inflexion en nombre limité de la courbe. Pour dénombrer ces points de ramification, on prendra l'intersection de $G(x, y) = 0$ avec $G'_y = 0$ après avoir retranché les points doubles de la courbe $G(x, y)$ qui ne sont pas points de ramification, mais figurent dans cette intersection où chacun compte pour 2. Le degré de $G(x, y)$ étant $m$, celui de $G'_y$, $m-1$, cela donnera

$$m(m-1) - (m-1)(m-2) + 2g = 2(m-1) + 2g = 2m + 2(g-1).$$

Par conséquent, $\psi_1$ qui, dans ce cas, uniformisera $y(x)$ devra avoir des valeurs régulières en nombre suffisant pour que le résultat de la substitution $y[\psi_1(z)]$ soit uniforme.

Le cas le plus favorable serait celui où les $2m+2(g-1)$ points de ramification seraient le plus possible empilés les uns au-dessous des autres (*fig.* 4) [dans ce cas, à une même valeur de $x$ correspondent plusieurs points de ramification de $y(x)$ et cela réduirait d'autant le nombre de valeurs différentes qui doivent être régulières]. A une seule valeur de $x$ dans ce cas correspond au plus $\frac{m}{2}$ ou $\frac{m-1}{2}$ points de ramification de la surface de Riemann de $y(x)$ suivant la parité de $m$ nombre maximum de feuillets.

Le nombre de ces « colonnes » de points doubles qui sera le nombre

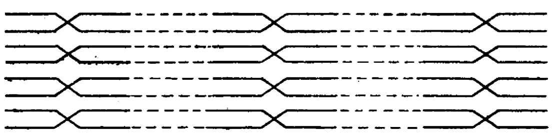

Fig. 4.

minimum de valeurs régulières par rapport à 2 à imposer à $\psi_1(z)$ sera donc le plus petit entier supérieur ou égal à $\dfrac{2m+2(g-1)}{\frac{m}{2}}$ ou $\dfrac{2m+2(g-1)}{\frac{m-1}{2}}$ suivant la partie de $m$. Dans un cas $4+\dfrac{4(g-1)}{m}$, dans l'autre $4\dfrac{m}{m-1}+\dfrac{4(g-1)}{m-1}$. Si $g$ est supérieur à 1, ce nombre est donc au moins 5. En vertu du théorème 3, $\psi_1$ ne peut donc avoir une singularité essentielle isolée et nous sommes conduits à une contradiction. On voit, au contraire, que dès que $g=1$, comme on peut s'arranger pour que le degré de G soit pair, il peut y avoir uniformisation dans les conditions indiquées, puisqu'on peut ne plus trouver que quatre valeurs qui doivent être régulières.

Les théorèmes 1 et 2 conduisent à la précision suivante du second thérème de Picard.

*Si* $F(x, y)$ *est algébrique, si* $\varphi_1(z)$ *et* $\varphi_2(z)$ *sont deux fonctions* *uniformes, telles que* $F[\varphi_1(z), \varphi_2(z)]$ *soit identiquement nulle et si* $\varphi_1(z)$ *a une singularité essentielle isolée* au voisinage de laquelle il y a une valeur exceptionnelle, $F(x, y)$ *ne peut être que de genre zéro; la courbe est unicursale* (¹).

Des énoncés analogues avaient été donnés par MM. Montel et Valiron en supposant $\varphi_1$ *et* $\varphi_2$ holomorphes (²).

En effet, d'après ce qui précède, F ne peut être de genre supérieur à 1. Si elle est de genre 1 et de degré $m$ (supérieur ou égal à 3), on peut trouver une relation birationnelle entre les points de $F(x, y) = 0$ et ceux d'une cubique $C(x_1, y_1)$

$$y_1^2 = a(x_1 - \alpha)(x_1 - \beta)(x_1 - \gamma), \qquad x_1 = R(x, y), \qquad y_1 = S(x, y).$$

A un point de C correspond un point de F et réciproquement. Supposons que l'on ait paramètré F avec $\varphi_1$ et $\varphi_2$. $\varphi_1$ ayant une valeur exceptionnelle, un point au moins de F ne sera pas représenté [intersection de $F(x, y) = 0$ avec la droite $x = a$, valeur exceptionnelle de $\varphi_1(z)$; on n'aura qu'un seul point dans le cas où cette droite aurait un contact d'ordre $m - 1$, les $m$ points étant confondus en un seul]. Si donc, on paramètre C en écrivant $x_1 = R(x, y)$, $y_1 = S(x, y)$ et en remplaçant $x$ et $y$ par $\varphi_1$ et $\varphi_2$, un point au moins de C ne sera pas représenté. $x_1 = R[\varphi_1(z), \varphi_2(z)]$ doit donc avoir une valeur exceptionnelle, sans quoi toutes les valeurs de $x_1$ seraient prises et tous les points seraient représentés et $R[\varphi_1(z), \varphi_2(z)]$ devant uniformiser $y_1 = \pm\sqrt{a(x_1 - \alpha)(x_1 - \beta)(x_1 - \gamma)}$ devra avoir $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ l'infini pour

(¹) D'une manière plus générale :

*Si* $F(x, y)$ *est algébrique, si* $\varphi_1(z)$ *et* $\varphi_2(z)$ *sont deux fonctions uniformes telles que* $F(\varphi_1, \varphi_2)$ *sont identiquement nulle,* $\varphi_1$ *étant méromorphe dans tout le plan* et telle qu'il existe une valeur défectueuse par rapport à un point au sens de Nevanlinna. $F(x, y)$ *ne peut être que de genre zéro.*

Car dans ce cas également $\varphi_1$ ne peut avoir quatre valeurs régulières par rapport à 2. Pour la démonstration *voir* par exemple Paul Montel, *Leçons sur les Fonctions entières ou méromorphes* (*Publications du Séminaire Mathématique de l'Université de Cluj*, p. 73).

(²) P. Montel, *Acta Mathematica*, t. 49; G. Valiron, *Comptes rendus du Congrès de l'A.F.A.S. de La Rochelle* (1928).

valeurs régulières par rapport à 2 ou exceptionnelles. Si deux valeurs exceptionnelles existaient, il resterait deux valeurs qui devraient être régulières, ce qu'interdit le théorème 1.

Si la valeur exceptionnelle que doit avoir $R[\varphi_1(z), \varphi_2(z)]$ était confondue avec l'une des quatre : $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\infty$, il y aurait malgré tout trois valeurs devant être régulières, ce qu'exclut le théorème 2. De toute façon, nous aboutissons à une contradiction.

La paramétrisation par deux fonctions, dont l'une a une valeur exceptionnelle, est bien entendu possible dans certains cas. On peut naturellement paramétrer aussi des courbes de genre zéro avec des fonctions sans valeurs exceptionnelles. En particulier, dans la représentation paramétrique du cercle $x^2+y^2=1$, on peut poser $y=p(z)$, $p(z)$ étant choisie telle que $-1$ et $+1$ soient deux valeurs régulières; $x$ sera uniforme et sans valeurs exceptionnelles comme $y$.

On pourrait se demander si, comme suite au second théorème de Picard et à son complément, on n'a pas un théorème analogue concernant la paramétrisation des courbes avec des fonctions dont l'une a deux valeurs exceptionnelles. Ce théorème conclurait à l'impossibilité d'uniformiser de cette façon. Il n'en est rien. Cela tient au fait qu'il existe des courbes unicursales n'ayant que deux ramifications algébriques (les coniques en particulier) et l'on peut prendre comme fonction paramétrante une fonction méromorphe dans tout le plan ayant ces deux valeurs comme valeurs exceptionnelles. En particulier pour le cercle $x^2+y^2=1$, on peut poser $x=\operatorname{Th}\varphi$ ($-1$ et $+1$ exceptionnels) et $y=\frac{1}{\operatorname{Ch}\varphi}$.

Recherchons toutes les courbes susceptibles d'une paramétrisation au moyen de deux fonctions dont l'une a zéro et l'infini comme valeurs exceptionnelles (on se ramènera au cas général par une homographie sur $x$).

Ces courbes de genre zéro $F(x, y)$ peuvent être mises en correspondance birationnelle avec une droite $y_1=x_1$, les points de la droite d'abscisse zéro et l'infini correspondant à un point de la courbe d'abscisse zéro et à un point d'abscisse infini. On a donc

$$y=R(x_1) \quad \text{et} \quad x=S(x_1),$$

R et S étant deux fractions rationnelles. $x_1$ ne prend évidemment ni zéro, ni l'infini (comme dans le cas de l'extension du théorème de Picard). Donc

$$x_1 = e^{H(z)} \quad \text{et} \quad x = S[e^{H(z)}], \quad y = R[e^{H(z)}];$$

$x$ ne peut prendre ni la valeur zéro ni la valeur infinie, par conséquent. $S[e^{H(z)}]$ ne peut être que de la forme $e^{mH(z)}$. Car, si $S(u)$ avait d'autres racines ou pôles que $u = 0$, soit $u_0$, il suffirait de prendre $e^{H(z)} = u_0 \neq 0$, ce qui est possible pour que $S[e^{H(z)}]$ devienne ou nul ou infini. La courbe cherchée sera donc obtenue en éliminant $u$ entre

$$y = R(u) \quad (\text{R rationnel}) \quad \text{et} \quad x = u^m \quad (m \text{ entier positif ou négatif})$$

(on retrouve les coniques comme cas particuliers).

Si l'on imposait à $y$ d'avoir aussi zéro et l'infini comme valeurs exceptionnelles, $Q(u)$ devrait être égal à $u^n$ et l'on aurait les courbes $x^n = y^m$.

Ce résultat montre quelles sont les seules relations algébriques possibles entre deux fonctions ayant zéro et l'infini comme valeurs exceptionnelles. C'est au fond un cas particulier des théorèmes plus généraux et bien connus de M. Borel, sur l'impossibilité de relations linéaires entre $n$ fonctions de cette nature.