JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

PIERRE LELONG

La convexité et les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 31 (1952), p. 191-219.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1952_9_31__191_0>

La convexité et les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes;

PAR PIERRE LELONG.

I. — Introduction. Généralités.

On sait l'intérêt que Paul Montel a porté à l'étude des fonctions convexes et à celle des fonctions sousharmoniques. Dans les travaux qu'il a consacrés à ces dernières, l'analogie entre fonctions convexes et fonctions sousharmoniques apparaît et conduit Paul Montel à donner, croyons-nous, les premières propriétés connues des fonctions de plusieurs variables réelles, convexes par rapport à certaines variables, sousharmoniques par rapport aux autres ([1]).

Le lien entre fonctions convexes d'une variable et fonctions sousharmoniques dans le plan $\mathcal{C}^1$ de la variable complexe $X = x + ix'$ apparaît de la manière suivante : si la fonction sousharmonique $V(X)$ ne dépend effectivement que de x, elle est fonction convexe, d'ailleurs quelconque de x; autrement dit : la classe des fonctions convexes sur un intervalle $a < x < b$ de la droite $\mathcal{R}^1$ est trace de l'ensemble des fonctions sousharmoniques définies dans la bande $a < x < b$ du plan $\mathcal{C}^1$, qui ne dépendent pas de la variable x' conjuguée de x.

Dans ce travail dédié à Paul Montel, je me placerai à un point de

([1]) Pour une bibliographie étendue, *voir* T. RADO, *Subharmonic functions*, *Ergebnisse*, 5, Berlin, 1937. Citons tout particulièrement la Note de PAUL MONTEL : *Sur les fonctions sousharmoniques et leurs rapports avec les fonctions convexes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 185, 1927, p. 633), le Mémoire du *Journal de Mathématiques* (1928) et le travail : *Sur les fonctions doublement convexes et doublement sousharmoniques* paru aux *Praktika de l'Académie d'Athènes*, t. 6, 1931, p. 374.

vue analogue, transposé toutefois à l'espace $\mathcal{C}^n$ des n variables complexes $X_k (1 \leq k \leq n)$; je considérerai donc non pas les fonctions sousharmoniques par rapport à certains groupes de variables, mais la classe (désignée par $\mathcal{L}_n$) des fonctions plurisousharmoniques, que j'ai étudiée antérieurement ([2]); les fonctions plurisousharmoniques sont liées à la structure de l'espace $\mathcal{C}^n$ comme le montre l'invariance de la classe $\mathcal{L}_n$ par les transformations dérivables (au sens de la dérivation complexe) : $Y_k = \varphi_k(X_j)$, de $\mathcal{C}^n$ (transformations analytiques complexes).

Dans la suite on utilisera la décomposition de $\mathcal{C}^n$ sous la forme $\mathcal{C}^n = \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}'^n$; on écrira $X = x + ix'$ au lieu des n égalités $X_k = x_k + ix'_k$; $\mathcal{R}^n$ est l'espace euclidien du point $x = (x_k)$, $\mathcal{R}'^n$ celui du point $x' = (x'_k)$.

La décomposition précédente ne subsiste évidemment que par les transformations linéaires $Y_k = \sum_{ik} a^i_k X_i$, ou $Y = A.X$, opérées avec une matrice A à coefficients réels. La transformation se décompose alors en $y = A.x$, $y' = A.x'$. On identifiera donc $\mathcal{R}^n$, $\mathcal{R}'^n$ à un même espace euclidien. De même parmi les plans analytiques de $\mathcal{C}^n$, c'est-à-dire les variétés linéaires définies par

$$X_k = X^0_k + A_k U \qquad (1 \leq k \leq n), \tag{1}$$

où U est un paramètre complexe, on distinguera ceux qui intersectent $\mathcal{R}^n$; ils sont donnés par des $A_k = a_k$ réels.

On appellera fonction convexe dans $\mathcal{R}^n$ une fonction convexe par rapport à l'ensemble des n variables x_k. Un domaine cylindrique de la forme $[x \in d]$ (x' quelconque) sera appelé tube de base d et désigné par $T(d)$. On obtiendra

La classe des fonctions convexes dans un domaine $[x \in d]$ de $\mathcal{R}^n$ est la trace de l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques dans le tube $T(d)$, qui sont indépendantes du point x' conjugué de x.

([2]) *Voir* P. Lelong, *C. R. Acad. Sc.*, t. **215**, 1942, p. 398 et 454 et t. **216**, 1943, p. 107 et le Mémoire : *Les fonctions plurisousharmonique* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. **62**, 1945, p. 301-345. Ce travail sera désigné par Mémoire B. Un précédent travail (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 58, 1941, p. 83-177) sera désigné par Mémoire A.

2. Le présent travail comprend deux parties : la première est un bref exposé de notions générales utiles dans la seconde partie; nous rappellerons certaines propriétés des fonctions plurisousharmoniques et préciserons à cette occasion l'énoncé d'un problème qui s'est posé à nous dès nos premiers travaux sur ces fonctions; malgré les recherches récentes, malgré un travail plus ancien, de K. Oka ([3]), il mérite toujours, croyons-nous, d'être étudié; il intéresse au premier chef la construction de la classe $\mathcal{L}_n$ à partir des fonctions analytiques; il concerne également l'étude du prolongement des fonctions plurisousharmoniques et des métriques kälheriennes. Dans la seconde partie de ce travail, on utilisera les notions précédentes dans le cas, beaucoup plus simple, où les fonctions plurisousharmoniques utilisées se ramènent à des fonctions convexes dans un espace euclidien; il en est ainsi en particulier quand on étudie des problèmes d'existence ou de majoration de fonctions analytiques dans des tubes. On obtient alors un procédé de démonstration de certains résultats déjà connus ([4]) et on les complète notablement en les rattachant à un énoncé général (théorème 2) dont on pourra varier l'application.

3. Rappelons sommairement quelques propriétés des fonctions plurisousharmoniques; V(X), fonction définie pour X appartenant à un domaine D de $\mathcal{C}^n$, prenant des valeurs réelles portées par la demi-droite fermée à gauche, est dite plurisousharmonique si elle possède l'un des groupes de propriétés suivants :

Définition A. — A_1. En tout point de D, V(X) a une valeur réelle, finie, ou $-\infty$. On n'a pas $V \equiv -\infty$ dans D.

A_2. V est borné supérieurement sur tout compact de D.

A_3. L'intersection de D avec un plan (π) défini par les équations (1)

([3]) K. Oka, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables*. VI. — Domaines pseudo-convexes, (*Tohoku Math. J.*, vol. 49, part 1, 1942, p. 15-52). Nous n'avons eu connaissance de ce travail qu'après la fin des hostilités et n'avons pu en faire état dans le Mémoire B.

([4]) *Voir* les chapitres 5, 6, 7 du livre : *Several complex variables* de S. Bochner et W. P. Martin, Princeton, 1948. Le premier résultat dans cette voie semble dû à K. Stein, *Math. Ann.*, t. 114, 1937, p. 557.

se compose de domaines plans ω_i : sur ω_i, on a $V \equiv -\infty$, ou bien V est sousharmonique du paramètre U (il importe de préciser que les deux éventualités sont permises, indépendamment, pour chaque valeur de i).

Définition B. — B_1. $V(X)$ est semi-continue supérieurement, à valeurs réelles ($-\infty \leqq V < \infty$); on a $V \not\equiv -\infty$).

B_2. $A(V, X, r_k)$ étant la moyenne de V sur le polycylindre $|Y_k - X_k| < r_k$, on a $V(X) \leqq A(V, X, r_k)$ pour $0 < r_k < \varepsilon$.

B_3. La propriété B_2 subsiste après toute transformation unitaire de $\mathcal{C}^n$.

Définition C. — C_1. Même condition que B_1.

C_2. La forme hermitienne

$$\Phi(X, A) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial X_i \partial \overline{X}_j} A_i \overline{A}_j \tag{2}$$

est positive ou nulle ([5]).

Dans l'énoncé de la condition C_2, on considérera $V^{i,\bar{j}} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial X_i \partial \overline{X}_i}$ comme une « distribution » au sens de L. Schwartz ; la condition $\Phi(X, A) \geqq 0$ entraîne que, en fait, $\Phi(X, A)$ est pour tout vecteur A de $\mathcal{C}^n$ une mesure, c'est-à-dire une fonction définie presque partout et localement sommable ([6]).

A condition qu'elles soient semi-continues supérieurement, les fonctions limites supérieures et maxima de suites de fonctions de $\mathcal{L}_n$ bornées supérieurement localement appartiennent à $\mathcal{L}_n$; sinon elles appartiennent à la classe (M) du Mémoire B. La trace de $\mathcal{L}_n$ sur un sous-espace $\mathcal{C}^{n-q}$ ou sur une variété analytique W^{n-q} est la classe $\mathcal{L}_{n-q}$, augmentée de la constante $-\infty$.

La classe $\mathcal{L}_n$ contient les classes particulières suivantes :

a. la classe l_n des fonctions $a(f) \log |f(X)|$, où $f(X)$ est analytique de $X = (X_1, \ldots, X_n)$ et $a(f)$ un coefficient réel positif ;

([5]) L'équivalence des définitions A, B, C est établie dans le Mémoire B; la définition C y est présentée à l'aide des moyennes dérivables de V.

([6]) Cela résulte d'un théorème fondamental de F. Riesz (*cf.* L. Schwartz, *Théorie des distributions*, t. 1, p. 25 et 29, Paris,, 1950).

b. les fonctions linéaires $\sum_i a_i x_i + \sum_i a'_i x'_j$; $\mathcal{L}_n$ contient donc les *fonctions convexes* de $\mathcal{R}^{2n}$.

Pour que $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ soit fonction convexe dans $\mathcal{R}^n$, il faut et il suffit que f soit sommable et que la forme-distribution

$$\varphi(x, a) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \, \partial x_j} a_i a_j. \tag{3}$$

soit positive ou nulle; l'analogie de (3) avec (2) conduit à considérer $\mathcal{L}_n$ comme la classe des fonctions *convexes dans la structure* $\mathcal{C}^n$.

4. La comparaison des définitions A et C met en évidence la mesure positive μ induite par V sur un plan (1) ou plus généralement sur une variété analytique complexe W^1 définie par $X_k = \varphi_k(U)$. On a sur W^1, en posant $U = u + iu'$:

$$\int_{W_1} d\mu = \frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial u'^2} \right) d\sigma = \frac{2}{\pi} \int \frac{\partial^2 V}{\partial U \, \partial \overline{U}} \, d\sigma.$$

A la forme hermitienne

$$\varphi(X, dX) = \sum_{i,j} V^{i,\bar{j}} \, dX_i \, d\overline{X}_j$$

définie par (2), faisons correspondre la forme différentielle extérieure

$$\Omega(X, dX) = \sum_{i,} V^{i,\bar{j}} \, dX_i \wedge d\overline{X}_j.$$

Désignons par $d\Omega$, $d_1\Omega$, $\bar{d}_1\Omega$ les formes dérivées de Ω soit par rapport à l'ensemble des X_i, $\overline{X}_i$, soit seulement par rapport aux X_i, ou aux $\overline{X}_i$. On a

$$d\Omega = d_1 \Omega + \bar{d}_1 \Omega \qquad \text{et} \qquad d_1 \bar{d}_1 \Omega + \bar{d}_1 d_1 \Omega = 0.$$

Avec cette notation, on a

$$\Omega(X, dX) = d_1 \bar{d}_1 V \tag{4}$$

et par suite

$$d\Omega = d(d_1 \bar{d}_1 V) = d_1 d_1 \bar{d}_1 V + \bar{d}_1 d_1 \bar{d}_1 V = \bar{d}_1 (d_1 d_1 V) - d_1 (\bar{d}_1 \bar{d}_1 V) = 0,$$

d'après

$$d_1 d_1 V = \bar{d}_1 \bar{d}_1 V = 0.$$

$\Omega(X, dX)$ est donc une forme fermée et la métrique définie par

$$\Phi(X, dX) = \sum V^{i,\bar{j}} dX_i d\bar{X}_j \tag{5}$$

est kählerienne : nous l'appellerons *la métrique kählerienne associée à la fonction plurisousharmonique* V.

Sur une variété analytique complexe W^1, d'élément d'aire $d\sigma$, on a d'après ce qui précède :

$$d\sigma = -\frac{1}{2i} dU \wedge d\bar{U},$$

$$\Omega(X, dX) = \Phi\left(X, \frac{\partial \varphi_k}{\partial U}\right) dU \wedge d\bar{U} = \frac{\partial^2 V}{\partial U \partial \bar{U}} dU \wedge d\bar{U}.$$

D'où

$$\int_{W^1} d\mu = i\pi \int_{W_1} d\Omega = i\pi \int \Phi\left(X, \frac{\partial X}{\partial U}\right) dU \wedge d\bar{U}. \tag{6}$$

Ainsi sur une variété W^1 où la fonction plurisousharmonique V n'est pas identiquement $-\infty$, la mesure positive μ induite par V et relative à la trace sousharmonique de V sur W^1 se calcule au moyen de la forme Ω; la métrique kählerienne (5) donne, à un coefficient numérique près, la densité de cette mesure [7].

3. Nous terminerons ces généralités en étudiant l'équivalence de divers problèmes relatifs à la construction de la classe $\mathcal{L}_n$ à partir de la sous-classe l_n définie plus haut, c'est-à-dire, en définitive à partir des fonctions analytiques de variables complexes.

Dans le Mémoire A est étudiée l'opération suivante [que nous appellerons opération $(\mathcal{O})$] : à partir d'une suite $V_p(X)$ de fonctions plurisousharmoniques, localement bornée supérieurement dans un domaine D, on construit successivement :

1° $W(X) = \limsup_{p} V_p(X)$;

2° $W^*(X) =$ régularisée supérieure de $W(X)$, autrement dit la plus petite majorante semi-continue supérieurement de $W(X)$.

---

(7) *Voir* Mémoire B, p. 323.

En effectuant l'opération ($\mathcal{O}$) à partir des suites

$$V_p(X) = a(f_p) \log |f_p(X)|,$$

de fonctions appartenant à la classe $l_n(D)$, $f_p(X)$ étant analytique dans D, on complète la classe $l_n(D)$ en une classe $\bar{l}_n(D)$ contenue elle-même dans $\mathcal{L}_n(D)$. A-t-on $\bar{l}_n(D) = \mathcal{L}_n(D)$? On notera $E_1(D)$ la réponse affirmative.

Dans le Mémoire A, l'assertion E_1 est établie pour $n = 1$. Autrement dit : l'*opération* ($\mathcal{O}$) *permet la construction des fonctions sousharmoniques à partir des fonctions analytiques d'une variable.*

Dans le cas $n \geq 2$ le même problème est en relation étroite avec l'étude des domaines d'holomorphie et plus particulièrement avec l'étude des cellules de régularité ([8]) d'un domaine, et demande encore des recherches ([9]).

Le problème de savoir si E_1 est vrai [nous dirons par abréviation le problème $E_1(D)$] concerne en fait les domaines D qui sont domaines d'holomorphie. Soit en effet R(D) la cellule de régularité de D. Je vais montrer que la résolution de $E_1(D)$ est donnée par celle de $E_1[R(D)]$, *en supposant* R(D) *univalent.*

Étant donné un domaine D′ contenant le domaine D et une fonction plurisousharmonique V(X) définie dans D, je dirai que la fonction $V_1(X)$ plurisousharmonique dans D′ est *un prolongement* de la fonction plurisousharmonique V(X) si l'on a $V_1(X) = V(X)$ pour $X \in D$.

Je vais montrer alors que *toute fonction plurisousharmonique de la*

([8]) D est dit « domaine d'holomorphie » s'il existe $f(X)$ holomorphe dans D sans que $f(X)$ soit holomorphe dans D′, plus grand que D. On se restreindra ici à des domaines univalents. La cellule de régularité (Regularitätshülle) R(D) est l'intersection des domaines d'holomorphie contenant D et coïncide avec D si D est lui-même domaine d'holomorphie.

([9]) En premier lieu un éclaircissement apporté au travail déjà cité de K. Oka serait souhaitable, ainsi qu'une extension des résultats au cas $n > 2$.

Dans l'Ouvrage cité, S. Bochner appelle « fonctions de Hartogs » (*cf.* chap. 7, § 6, p. 142 et suiv.) une classe de fonctions appartenant à la classe (M) du Mémoire B. L'assertion qui termine le paragraphe 6 du chapitre 7 de ce livre est demeurée sans justification à notre connaissance ; elle est essentiellement équivalente à celle que nous appelons ici E_1.

classe $\bar{l}_n(\mathrm{D})$ *est prolongeable dans la cellule* R(D). Autrement dit on a $\bar{l}_n(\mathrm{D}) = \bar{l}_n[\mathrm{R}(\mathrm{D})]$, si R(D) est univalent.

Soit K_q une suite croissante de domaines ayant D pour limite, K_q et sa frontière étant contenus dans D. Alors $\mathrm{R}(\mathrm{K}_q)$ est d'après un résultat de Behnke et Stein ([10]) une suite croissante de domaines d'holomorphie ayant R(D) pour limite. Si V(X) est une fonction obtenue dans D par l'opération $(\mathcal{O})$ à partir d'une suite $a(f_p) \log |f_p(\mathrm{X})|$ de fonctions de $l_n(\mathrm{D})$, ces fonctions sont encore holomorphes dans R(D). De plus $|f_p(\mathrm{X})|$ a sur $\mathrm{R}(\mathrm{K}_q)$ la même borne supérieure que sur K_q. Ainsi, la suite $\mathrm{V}_p(\mathrm{X}) = a(f_p) \log |(f_p(\mathrm{X})|$ localement bornée supérieurement dans D l'est encore dans R(D); l'opération $(\mathcal{O})$ s'étend à R(D); elle y définit un prolongement plurisousharmonique de V(X); $\mathrm{V} \in \bar{l}_n(\mathrm{D})$ entraîne $\mathrm{V}_1 \in \bar{l}_n[\mathrm{R}(\mathrm{D})]$, V_1 étant le prolongement de V. Une cellule de régularité étant un domaine d'holomorphie, le *problème* $\mathrm{E}_1(\mathrm{D})$, *si* R(D) *est univalent, est ramené au cas où* D *est domaine d'holomorphie.*

6. Le problème de la construction d'une fonction plurisousharmonique à partir des fonctions de la classe $\bar{l}_n$ peut être énoncé d'une manière plus précise ; j'appellerai $\mathrm{E}_2(\mathrm{D})$ l'énoncé suivant :

Dans le domaine D, *étant donnés une fonction plurisousharmonique* V, *un domaine compact* $\mathrm{K} \subset \mathrm{D}$, *enfin* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver une fonction* $\psi(\mathrm{X})$ *de la forme*

$$\psi(\mathrm{X}) = \max_i \left[a(f_i) \log |f_i(\mathrm{X})| \right] \tag{7}$$

enveloppe supérieure d'un nombre fini de fonctions de $\bar{l}_n(\mathrm{D})$, *de manière que l'on ait*

$$\int_{\mathrm{K}} |\,\mathrm{V}(\mathrm{X})| - \psi(\mathrm{X})\,|\, d\omega < \varepsilon, \tag{8}$$

$d\omega$ étant l'élément de volume de $\mathcal{C}^n$.

L'équivalence $\mathrm{E}_1(\mathrm{D}) \rightleftarrows \mathrm{E}_2(\mathrm{D})$ des deux assertions résulte de l'énoncé suivant :

([10]) *Math. Ann.*, vol. **116**, 1938, p. 204.

THÉORÈME 1. — *Il y a identité entre la classe des fonctions plurisousharmoniques qui sont approchées dans un domaine* D *par les enveloppes supérieures* (7) *d'un nombre fini de fonctions de la forme* $a(f_i) \log |f_i(X)|$, $f_i(X)$ *holomorphe dans* D, *au sens précisé par l'inégalité* (8), *et celles qui sont obtenues dans* D *par l'opération* ($\mathcal{O}$) *à partir d'une suite localement bornée supérieurement dans* D *de fonctions de la forme précédente.*

Montrons d'abord :

a. $E_2(D) \rightarrow E_1(D)$: soit $V(X)$ plurisousharmonique dans D, ε_p une suite de nombres positifs décroissants, tendant vers zéro, K_p une suite de domaines compacts tendant vers D en croissant; supposons qu'on connaisse pour chaque p une fonction

$$\psi_p(X) = \max_i [a(f_{i,p}) \log |f_{i,p}(X)|],$$

[$f_{i,p}(X)$ holomorphe dans D], qui approche $V(X)$ au sens de (8) :

$$\int_{K_p} |V(X) - \psi_p(X)| \, d\omega < \varepsilon_p. \tag{9}$$

L'indice i prend pour chaque p un nombre fini de valeurs. Formons une suite à un seul indice :

$$V_q(X) = a(f_{i,p}) \log |f_{i,p}(X)|$$

en prenant d'abord toutes les fonctions pour lesquelles $p = 1$, puis toutes celles pour lesquelles $p = 2$, etc. L'indice $p(q)$ augmente indéfiniment avec q.

Appliquons ($\mathcal{O}$) à la suite $V_q(X)$ ainsi formée : soit

$$W = \limsup V_q \qquad \text{et} \qquad W^* = \text{rég sup } W.$$

Montrons qu'on a $W^* = V$ sur tout compact $K \subset D$.

Les fonctions W^* et V étant des fonctions sousharmoniques dans R^{2n} trace de $\mathcal{C}^n$, il suffit de montrer

$$\int_K |V(X) - W^*(X)| \, d\omega = 0 \tag{10}$$

pour tout compact de D, ou encore

$$\int_K |V(X) - W(X)| \, d\omega = 0. \tag{11}$$

Posons

$$\chi_q(X) = \max_{q' \geq q} V_{q'}(X).$$

On a

$$W(X) = \lim_{q=\infty} \chi_q(X)$$

et par suite, ε'_q tendant vers zéro quand q augmente indéfiniment :

$$(12) \qquad \int_K |W(X) - \chi_q(X)|\, d\omega < \varepsilon'_q,$$

la suite χ_q étant non croissante. D'autre part, en se reportant à la définition de la suite V_q, et donnant à l'indice p la valeur $p(q)$, on obtient

$$\psi_{p+1} \leqq \chi_q \leqq \psi_p.$$

Si q est assez grand pour que K soit contenu dans K_q, on aura, d'après (9) :

$$(13) \quad \int_K |V - \chi_q|\, d\omega \leqq \int_K |V - \psi_p|\, d\omega + \int_K |\psi_p - \psi_{p+1}|\, d\omega \leqq \varepsilon_p + \varepsilon_p + \varepsilon_{p+1}.$$

Finalement d'après (12) et (13),

$$\int_K |V - W|\, d\omega \leqq \int_K |V - \chi_q|\, d\omega + \int_K |\chi_q - W|\, d\omega \leqq \varepsilon'_q + 2\varepsilon_p + \varepsilon_{p+1}$$

peut être rendu aussi petit qu'on veut, ce qui établit (11) et (10) et démontre que $E_2(D)$ entraîne $E_1(D)$.

b. Établissons la réciproque : $E_1(D) \rightarrow E_2(D)$. Soit $W(X)$ une fonction plurisousharmonique dans D avec

$$V \equiv W^* = \operatorname{reg\,sup} W, \qquad W = \lim_p \sup V_p,$$

les fonctions $V_p(X)$ étant de la forme $a(f_p) \log |f_p(X)|$, f_p holomorphe dans D. On posera encore

$$\chi_q(X) = \max_{q' \geq q} V_{q'}(X), \qquad \chi_{q,s}(X) = \max_{q \leq q' \leq s} V_{q'}(X).$$

On a $W = \lim_{q=\infty} \chi_q$, les fonctions χ_q sont fonctions non croissantes de l'indice q. On a donc si K est un compact de D :

$$\int_K V(X)\,d\omega = \int_K W^*(X)\,d\omega = \int_K W(X)\,d\omega = \lim_{q=\infty}\int_K \chi_q(X)\,d\omega.$$

et

$$(14) \qquad \int_K |V - \chi_q|\,d\omega = \int_K \chi_q\,d\omega - \int_K V\,d\omega < \frac{\varepsilon}{2},$$

dès que q surpasse $q_0(\varepsilon)$. D'autre part $\lim_{s=\infty}\chi_{q,s} = \chi_q$, $\chi_{q,s}$ étant fonction non décroissante de l'indice s. On a donc encore

$$(15) \qquad \int_K |\chi_q - \chi_{q,s}|\,d\omega = \int_K \chi_q\,d\omega - \int_K \chi_{q,s}\,d\omega < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour $s > s_0(q, \varepsilon)$. On fera choix d'un indice s répondant à cette condition, l'indice q ayant été choisi préalablement de manière que (14) soit vérifié; on posera

$$\psi_\varepsilon(X) = \chi_{q,s}(X) = \max_{q \leq q' \leq s} V_{q'}.$$

On a alors d'après (14) et (15)

$$\int_K |V - \psi_\varepsilon|\,d\omega < \varepsilon,$$

ψ_ε étant l'enveloppe supérieure d'*un nombre fini de fonctions de la forme* $a(f)\log|f(X)|$, f holomorphe dans D. La réciproque est alors établie.

7. Les problèmes $E_1(D)$, $E_2(D)$ dans $\mathcal{C}^n$ sont encore équivalents au problème suivant que pose l'étude des domaines de Hartogs dans $\mathcal{C}^{n+1}$. Choisissons $X = (X_1, \ldots, X_n)$ et Y comme coordonnées dans $\mathcal{C}^{n+1}$, et demandons-nous quels sont les domaines $[|Y| < R(X), X \in D]$ qui sont domaines d'holomorphie, *en nous limitant au cas où* D *est univalent*. Si un tel domaine, soit Δ, est domaine d'holomorphie, la « série de Hartogs » $\sum_q A_q(X)Y^q$ de la fonction a Δ comme domaine de convergence uniforme. En opérant comme dans le cas $n = 1$, on voit que $V(X) = -\log R(X)$ est construite par l'opération $(\mathcal{O})$ à partir de la suite $V_n = \frac{1}{n}\log|A_n(X)|$: $V(X)$ est non seulement plurisousharmonique, mais encore de la classe $\bar{l}_n(D)$. D'après ce qu'on a vu plus haut D est alors une cellule de régularité, donc un domaine d'holomorphie de $\mathcal{C}^n$. Ainsi les conditions nécessaires sur Δ sont : *a*. D est domaine d'holomorphie; *b*. $-\log R(X)$ est plurisousharmonique dans D, et de la classe $\bar{l}_n(D)$. On vérifie qu'elles sont suffisantes. Mais la question posée est de savoir si l'on peut remplacer *b* par b_1 : $-\log R(X)$ est plurisousharmonique dans D. Montrer que b_1 adjoint à *a* est *suffisant* revient au problème $E_1(D)$.

8. Un domaine d'holomorphie de Hartogs dans $\mathcal{C}^{n+1}$ est, d'après ce qui précède, défini par

$$V(X) + \log|Y| = \xi(X_1, \ldots, X_n; Y) < 0; \tag{16}$$

ξ est plurisousharmonique dans $\mathcal{C}^{n+1}$.

Introduisons la définition suivante :

Nous dirons qu'un domaine D univalent *est de la classe* (C) dans les deux cas suivants :

a. Il existe une fonction plurisousharmonique V définie dans un domaine D′ contenant à son intérieur D et sa frontière ; le domaine D est défini dans D′ comme étant une composante de l'ensemble ouvert $V < 0$.

b. D est encore dit de classe (C) si D est limite d'une suite croissante de domaines D_n, chacun d'eux répondant à la condition *a*.

On reconnaît encore que D est de classe (C) à l'existence d'une suite V_n de fonctions, plurisousharmoniques dans des domaines D'_n, et définissant par la condition $V_n < 0$ des domaines D_n, strictement intérieurs au D'_n, croissants et ayant D pour limite.

Tout domaine limite d'une suite croissante de domaines de classe (C) est aussi de classe (C) s'il est univalent.

Une condition de pseudoconvexité donnée par E. E. Levi comme condition nécessaire pour que D, définie par $V < 0$, soit domaine d'holomorphie s'écrit [11]

$$\sum_{i,j} V^{i,\bar{j}}\, dX_i\, d\overline{X}_j \geq 0,$$

sous la condition

$$\sum_i V^i\, dX_i = 0.$$

Elle exprime qu'au point frontière considéré, la trace de V sur la variété W^{n-1} linéaire analytique tangente satisfait à la condition de plurisousharmonicité : les domaines satisfaisant à *a* sont évidemment pseudoconvexes au sens de E. E. Levi.

Rappelons la *propriété* (P_1) d'un domaine d'holomorphie D établie [12] dans le Mémoire B : si par le point X intérieur à D, on fait passer un plan analytique (π) défini par les équations (1) dont la direction est $(A_k) = A$, le plus grand cercle $|U| < \delta(X, A)$ de centre X, porté par (π), et contenu dans D a la propriété suivante : $-\log \delta(X, A)$ est plurisousharmonique.

Il en est de même [*propriété* (P)] de la distance euclidienne $\delta(X)$ du point X intérieur à D à la frontière de D. Nous utiliserons systématiquement la propriété (P) dans la seconde partie de ce travail.

Appelons (Γ) la classe des domaines univalents de $\mathcal{C}^n$ ayant la propriété (P).

Nous énoncerons le résultat suivant qui sera établi dans un autre travail [13] :

Les classes (C) *et* (Γ) *de domaines univalents sont identiques.*

9. Soit (H) la classe des domaines d'holomorphie univalents. On a $(H) \in (\Gamma) = (C)$. A-t-on $(H) = (\Gamma) = (C)$?

Soit un domaine de Hartogs Δ défini par $\log |Y| + V(X_i, \ldots, X_n) < 0$ dans $\mathcal{C}^{n+1}$, V étant plurisousharmonique dans un domaine D que nous supposons domaine d'holomorphie univalent dans $\mathcal{C}^n$, ou, au

(11) *Voir* BEHNKE et THULLEN, Ergebnisse 3, Berlin 1934, p. 54.

(12) *Voir théorème* 13, p. 137.

(13) *Journal d'Analyse Mathématique.*

moins, de classe (Γ). Dans ces conditions je dis que Δ est de classe (C) dans $\mathcal{C}^{n+1}$.

En effet soit E_q l'ouvert défini dans D par la condition $\delta(X) > \varepsilon_q$, où ε_q est une suite de nombres positifs décroissants tendant vers zéro. Soit E_k le premier ensemble E_q non vide, $[E_k]$ une composante de E_k; on appelle $[E_{k+1}]$ la composante de E_{k+1} qui contient $[E_k]$, et l'on procède ainsi de suite, $[E_q]$ étant la composante de E_q qui contient $[E_{q-1}]$. Un domaine compact contenu dans D et contenant un point donné de E_k appartient à E_q pour q suffisamment grand, donc à $[E_q]$; on a donc $\lim [E_q] = D$.

Ceci posé, soit $W_q(X, Y)$ la fonction plurisousharmonique enveloppe supérieure des trois fonctions $[\log|Y| + V(X)]$, $[-\log \delta(X) + \varepsilon_q]$ et $[\log|Y| - \log q]$; $W_q(X, Y)$ est définie dans le cylindre de $\mathcal{C}^{n+1}$: $[X \in D]$ (Y quelconque). La condition $W_q < 0$ définit le domaine

$$\Delta_q = [X \subset [E_q],\ \log|Y| + V(X) < 0,\ |Y| < q];$$

Δ_q est en effet une composante de l'ensemble $W_q < 0$; W_q est plurisousharmonique sur le domaine cylindrique $[X \in D]$ dont Δ_q est domaine strictement intérieur; donc Δ_q est de classe (C); il en est alors de même de $\Delta = \lim \Delta_q$.

Ainsi un domaine de Hartogs défini par (16) où $V(X)$ est plurisousharmonique et est défini dans un domaine de classe (C) est aussi de classe (C). Dans ces conditions si l'on a $(H) = (C) = (\Gamma)$ pour les domaines univalents, le domaine de Hartogs défini par

$$\log|Y| + V(X) < 0,$$

où V est plurisousharmonique dans un domaine d'holomorphie D univalent de $\mathcal{C}^n(X)$, est un domaine d'holomorphie, et par suite $E_1(D)$ est vrai.

Réciproquement D étant un domaine de $\mathcal{C}^n$ pour lequel $R(D)$ est univalent, la solution de $E_1(D)$ pour V nous amène à la construction d'une série de Hartogs, $F(X, Y)$ ayant comme domaine de convergence uniforme $[X \in R(D),\ \log|Y| + V(X) < 0]$. En conclusion : le problème de savoir si l'on a $(H) = (C) = (\Gamma)$ pour les domaines de Hartogs univalents de $\mathcal{C}^{n+1}$ est équivalent à la résolution de $E_1(D)$ [ou de $E_2(D)$] dans $\mathcal{C}^n$ pour les domaines D dont la cellule de régularité est univalente.

II. — Fonctions convexes dans R^n et fonctions plurisousharmoniques.

10. Je démontrerai d'abord l'énoncé suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit* $V(X) = V(x + ix')$ *une fonction plurisousharmonique dans un domaine* Δ *de* $\mathcal{C}^n$: soit *d un domaine de* R^n *appartenant à l'intersection, supposée non vide, de l'espace* $\mathcal{R}^n$ *défini par* $x' \equiv 0$ *et de* Δ.

Si l'on a $V(x + ix') \leqq V(x)$ *pour* $x + ix' \in \Delta$ *et* $x \in d$, *alors :*

a. $V(x)$ *est fonction convexe de* x *dans* d;

b. la forme hermitienne $\Phi(X, A)$ *asssociée à* V *est à coefficients réels pour* $X = x \in d$. *De plus on a pour tout vecteur unitaire* A *de* $\mathcal{C}^n$, *et* $x \in d$:

$$0 \leqq \Phi(x, A) \leqq \varphi(x, A),$$

$\varphi(x, A)$ *étant la forme* $\sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} A_i \bar{A}_j$ *associée à la fonction convexe* $V(x)$.

Pour la démonstration distinguons plusieurs cas :

a. $V(X)$ a des dérivées secondes continues par rapport aux x_k, x'_k. On a alors

$$(17)\quad V^{i,\bar{j}} = \frac{\partial^2 V}{\partial X_i \partial \bar{X}_j} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 V}{\partial x'_i \partial x'} + i\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x'_j} - \frac{\partial^2 V}{\partial x'_i \partial x_j}\right)\right].$$

Les hypothèses faites entraînent $\frac{\partial V}{\partial x'_k} = 0 \; (1 \leqq k \leqq n)$, pour $X = x \in d$, On a donc pour $X \in d$:

$$\Phi(x, A) = \frac{1}{4}\varphi(x, A) + \frac{1}{4}\varphi'(x, A) \qquad \text{où} \quad \varphi'(x, A) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial x'_i \partial x'_j} A_i \bar{A}_j;$$

$\varphi'(x, A)$ est une forme à coefficients réels, ainsi que $\varphi(x, A)$. On a $\varphi'(x, A) \leqq 0$ pour tout vecteur A. On a donc

$$0 \leqq \Phi(x, A) = \frac{1}{4}\varphi(x, A) + \frac{1}{4}\varphi'(x, A) \leqq \frac{1}{4}\varphi(x, A).$$

L'inégalité $\varphi(x, A) \geqq 0$ établit la convexité de $V(x)$.

b. Si V n'est plus dérivable, le calcul précédent tombe en défaut, même opéré entre « distributions », sauf dans le cas où l'on a

$$V(x + ix') = V(x)$$

dans Δ identiquement au voisinage de d; alors la distribution V, *indépendante de x'*, y satisfait à $\frac{\partial V}{\partial x'_k} = 0$ et l'on a

$$0 \leqq \Phi(x, A) = \frac{1}{4} \varphi(x, A),$$

ce qui établit l'énoncé.

c. Dans le cas général posons

$$V_\lambda(X) = \max_{Y \in E} V(X + Y),$$

où E est le « cube » $|y_k| \leqq \lambda$, $|y'_k| \leqq \lambda$. Soit d_1 un domaine strictement intérieur à d; choisissons λ assez petit pour qu'on ait $X + Y \in \Delta_1 \subset \Delta$ pour $X = x \in d_1$ et tout $Y \in E$, Δ_1 étant strictement intérieur à Δ. Alors $V_\lambda(X)$ est définie dans $\mathcal{C}^n$ au voisinage de d_1 et y satisfait à $V_\lambda(x + ix') = V_\lambda(x)$. De plus $V_\lambda(X)$ est plurisousharmonique ([14]). D'après *b*, $V_\lambda(x)$ est convexe; on a de plus

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} V_\lambda(x) = V(x);$$

donc $V(x)$ est convexe ([15]).

Remarques. — *a*. On pourra remplacer l'hypothèse que V est plurisousharmonique par celle qu'elle est seulement de la classe (M) du Mémoire B : en appliquant une propriété donnée dans ce travail ([16]),

---

([14]) *Cf.* Mémoire B, p. 320 ; $V_\lambda(X)$ est même une fonction continue en vertu de l'énoncé suivant que le lecteur démontrera sans peine : *si* V *est sousharmonique* et si E *est un ensemble qui n'est effilé en aucun de ses points frontières* $W(M) = \max_{P \in E} V(M + P)$ *est fonction continue de* M.

([15]) Un cas particulier ($n = 1$, $V = \log|f(X)|$, f analytique) du théorème **1** a été donné par M. D. Dugué, *Ann. Instit. Poincaré*, t. **12**, 1951, p. 45.

([16]) *Cf.* le lemme, p. 337.

on a, si V^* est la régularisée supérieure de V :

$$V^*(x) = V(x) \quad \text{et} \quad V(x+ix') \leqq V^*(x+ix') \leqq V^*(x);$$

on est ramené au théorème précédent.

b. Soit $V(x)$ une fonction convexe quelconque dans d; on a

$$V(x) = \max_i \left[\sum_k a_i^k x_k - \lambda^i\right] = \max_i \log\left|\exp\left[\sum a_i^k X_k - \lambda_i\right]\right| = V(x+ix');$$

toute fonction convexe $V(x)$ est donc la trace d'une fonction plurisousharmonique dans le tube $T(d)$.

c. Soit c la courbure maxima de la section par $x_k = a_k t$, [t réel, $(a_k) = a$ vecteur unitaire de $\mathcal{R}^n$] de la surface convexe $x_{p+1} = V(x_1, \ldots, x_p)$. La forme $\varphi(x, A)$ étant réelle, on a, A étant un vecteur unitaire de $\mathcal{C}^n$.

$$0 < \Phi(x, A) \leqq \varphi(x, A) \leqq \max_a \varphi(x, a) = c.2^{\frac{3}{2}}.$$

11. Si $h(t)$ est une fonction non décroissante, convexe de t, $h[V(X)]$ est plurisousharmonique si $V(X)$ l'est : la démonstration résulte de la propriété connue pour $n = 1$ et de la définition A. Nous établirons en vue d'applications l'extension suivante d'un théorème de Paul Montel :

THÉORÈME 3. — *Soit* $V(x)$ *une fonction positive ou nulle, dans un domaine* D. *Pour que* $\log(VX)$ *soit plurisousharmonique dans* D *il faut et il suffit :*

a. que $\log V$ *soit sommable sur tout domaine compact de* D;

b. que pour tout vecteur A *de* $\mathcal{C}^n$, *la fonction* $|e^{(AX)}|\,V(X)$, *où*

$$(AX) = \sum_i A_i X_i,$$

soit plurisousharmonique dans D.

Les conditions sont évidemment nécessaires, car si $\log V(X)$ est plurisousharmonique il en est de même de $\log V(X) + \log|e^{(AX)}|$ donc de $V(X)|e^{(AX)}|$.

Elles sont suffisantes : supposons $V(X)$ positive et dérivable et calculons la forme $\Phi_1(X, dX)$ associée à $|e^{(AX)}|V(X)$. On a

$$e^{-(AX)}|\Phi_1(X, dX) = \Phi(X, dX) + \sum_{i,j}\left(A_i\frac{\partial V}{\partial \overline{X}_j} + \overline{A}_j\frac{\partial V}{\partial X_i}\right)dX_i\, d\overline{X}_j + V\sum_{i,j} A_i\overline{A}_j\, dX_i\, d\overline{X}_j \geqq 0.$$

Choisissons $A_i = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial X_i}$: on constate alors que le second membre prend la valeur $V\Psi$, où Ψ est la forme associée à $\log V$. L'énoncé est ainsi établi quand V est dérivable et positive. Pour passer au cas général on remarquera, en utilisant une idée de T. Radó ([17]), que si $W(X)$ est une moyenne de translatées de $V(X)$, $|e^{(AX)}|W(X)$ est plurisousharmonique en même temps que $|e^{(AX)}|V(X)$. On prendra pour W la moyenne V^r de V, itérée deux fois, sur une boule de centre X, de rayon r; il résulte de ce qui précède que $\log V^r$ est plurisousharmonique; il en est encore ainsi de $\log V = \lim_{r=0} \log V^r$, V^r étant fonction non croissante de r; l'énoncé est alors établi.

12. Un domaine d de $\mathcal{R}^n$ est convexe si $x \in d$, $y \in d$, entraîne que tout le segment xy appartienne à d; il sera dit convexe en un de ses points frontières x_0 si l'intersection de d avec une boule de centre x_0 suffisamment petite, se compose de domaines convexes.

Nous désignerons par $\delta_1(x)$ la distance euclidienne de $x \in d$ à la frontière $F(d)$, et considérerons la fonction $-\log \delta_1(x)$, comme dans la première partie de ce travail.

Lemme. — *S'il existe $\lambda > 0$ tel que la fonction $-\log \delta_1(x)$ soit fonction convexe de x sur toute boule située dans d, sur laquelle $\delta_1(x) < \lambda$, alors d est convexe.*

En effet soit ε_n une suite de nombres positifs, décroissants, tendant vers zéro, et e_n l'ensemble ouvert défini dans d par $\delta_1(x) > \varepsilon_n$. Supposons que e_k soit le premier ensemble non vide de la suite e_n; choisissons une composante $[e_k]$ de e_k; on choisira alors dans e_{k+1} la

---

([17]) T. Radó, *Remarques sur les fonctions subharmoniques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **186**, 1928, p. 346).

composante $[e_{k+1}]$ qui contient $[e_k]$. On procédera ainsi pour tout $n > k$, en choisissant pour $[e_{n+1}]$ la composante de e_{n+1} qui contient $[e_n]$. On a alors $[e_n] \subset [e_{n+1}]$. De plus $\lim_n [e_n] = d$, car un sous-domaine compact de d contenant un point donné de $[e_k]$ appartient à e_n, donc à $[e_n]$ à partir d'un certain rang.

Les $[e_n]$ sont convexes dès que $\varepsilon_n < \frac{\lambda}{3}$: soit en effet x_0 un point frontière de $[e_n]$; on a $\delta_1(x_0) = \varepsilon_n < \frac{\lambda}{3}$; $\delta_1(x)$ est défini, et concave sur la boule (b) de centre x_0, de rayon $\frac{\lambda}{6}$, boule qui est entièrement contenue dans d. L'intersection $(b) \cap d$ est définie dans (b) par $\delta_1(x) > \varepsilon$; elle constitue donc un domaine convexe; $[e_n]$ est donc localement convexe en chaque point de sa frontière; d'après un résultat connu, $[e_n]$ est convexe. Le domaine $d = \lim [e_n]$ est donc convexe.

13. Nous démontrerons maintenant :

THÉORÈME 4_a (propriété globale). — *Si $f(x)$ est analytique dans le domaine D défini par $[x \in d,\ |x'| < \rho(x)]$, avec $\rho(x) \geqq a' > 0$ pour $x \in d$, et si les points frontières de d sont des points singuliers de $f(X)$ pour $x' = 0$, alors d est convexe.*

THÉORÈME 4_b (propriété locale). — *Si $f(x)$ est analytique dans un domaine D défini par $[x \in d,\ x' \in d'(x)]$, mais singulière aux points $X = x + ix'_0$, pour x voisin de x_0 et appartenant ainsi que x_0 à la frontière de d; si de plus $d'(x)$ contient le domaine $|x' - x'_0| < \rho(x)$ avec*

$$(18) \qquad \liminf \rho(x) > 0 \qquad \text{pour} \quad x \to x_0, \qquad x \in d,$$

alors la section de d par une boule de centre x_0 tracée dans $\mathcal{R}^n$ avec un rayon suffisamment petit, se compose de domaines convexes.

La démonstration s'appuie sur la propriété (P). Soit X un point en lequel $f(x)$ est régulière; nous dirons qu'un point Y singulier pour $f(x)$ est *associé* au point régulier X s'il est le point, ou l'un des points singuliers, le plus proche de X; on a alors $|Y - X| = \delta(X)$.

Établissons d'abord le premier énoncé. Si $X = x + ix'$ satisfait aux conditions suivantes :

a. la distance $\delta_1(x)$ de x à la frontière de d est inférieure à $\frac{a'}{3}$;

b. $|x'| < \frac{a'}{3}$, alors on a évidemment

$$\delta(X) \leqq \left[\delta_1^2(x) + \left(\frac{a'}{3}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{a'}{3}\sqrt{2}.$$

Alors un point singulier $Y = y + iy'$ associé à un tel point régulier X ne peut avoir sa projection y sur $\mathcal{R}^n$ à l'intérieur de d; les points singuliers Y intérieurs au tube $T(d)$ satisfont en effet d'après l'hypothèse $4a$ à $|y'| \geqq a'$, donc à $|Y - X| > \frac{2a'}{3} > \frac{a'\sqrt{2}}{3}$ quand X satisfait aux conditions a et b.

En résumé les conditions de l'énoncé $4a$ assurent l'existence d'un ensemble cylindrique E de points X définis par les conditions a et b, c'est-à-dire $\left[x \in d \text{ et } \delta_1(x) < \frac{a'}{3}, |x'| < \frac{a'}{3}\right]$ en lequels on a

$$\delta(x + ix') \geqq \delta_1(x).$$

D'autre part, si $x' = 0$, on obtient

$$\delta(x) = \delta_1(x).$$

D'où résulte

$$\delta(x + ix') \geqq \delta(x) = \delta_1(x),$$

$$V(x + ix') = -\log \delta(x + ix') \leqq -\log \delta(x) = V(x). \tag{19}$$

Ces inégalités sont vérifiées sur E, donc sur tout cylindre Γ de la forme $\left[x \in (b), |x'| < \frac{a'}{3}\right]$, (b) étant une boule quelconque contenue dans d, sur laquelle $\delta_1(x) < \frac{a'}{3}$. Sur Γ, $V(X)$ est plurisousharmonique. D'après le théorème 2, (19) entraîne que $-\log \delta(x) = -\log \delta_1(x)$ soit convexe. Le lemme du n° **12** montre alors que d est convexe.

La propriété $4b$ peut s'établir directement, mais résulte aussi de $4a$ et de la remarque : si d^c est un domaine convexe de $\mathcal{R}^n$, le tube $T(d^c)$ est un domaine d'holomorphie [le lecteur remarquera que $T(d^c)$ est convexe par rapport à une classe d'exponentielles

$$f_{(i)}(X) = \exp[(A^{(i)}X) - \lambda_{(i)}]$$

et appliquera un résultat connu ([18])]. Les hypothèses $4b$ assurent l'existence d'un nombre $a > 0$, tel que pour $|x - x_0| < a$, et $x \in d$, on ait $\rho(x) > a' > 0$, et que de plus, les points $[x \in F(d), x' = x'_0, |x - x_0| < a]$ soient des points singuliers de la fonction $f(X)$ considérée. Désignons par (b) la boule $|x - x_0| < a$, par $g(X)$ une fonction ayant $T[(b)]$ comme domaine d'holomorphie. Soit d_1 une composante de l'intersection de d avec (b) : montrons que d_1 est convexe : $f(X) + g(X)$ est singulière en tout point $X = x + ix'$ avec $x' = x'_0$, x appartenant à la frontière de d_1. D'autre part, cette somme est régulière aux points X pour lesquels $x \in d_1$, $|x'| < a'$. En prenant $x'_0 = 0$, on est alors ramené au théorème $4a$.

L'énoncé $4b$ est applicable à l'étude d'une branche de fonction ayant un point singulier en $x_0 + ix'_0$, et est utilisable pour l'étude des domaines non univalents; on pourra ne faire l'hypothèse (18) que pour x appartenant à une des composantes, découpée par (b) sur d, et montrer sa convexité au point x_0.

Corollaires. — 1° *Soit d une composante de l'intersection d'un domaine d'holomorphie Δ avec $\mathcal{R}^n(x' = 0)$: si au voisinage de $\mathcal{R}^n$ Δ contient le cylindre tubulaire de base $d[x \in d, |x'| < a]$, d est convexe.*

2° *Pour qu'un produit de la forme $[x \in d, x' \in d']$ soit domaine d'holomorphie, il faut et il suffit que d et d' soient convexes.*

La propriété subsiste avec l'hypothèse, moins restrictive, que d et d' désignent des domaines non univalents; elle entraîne alors qu'en fait d et d' soient univalents.

3° *Si $f(X)$ est analytique dans $[x \in d, |x'| < \lambda]$, elle est prolongeable en tout point $[x_0 \in F(d), x' = 0]$ en lequel d n'est pas convexe.*

14. Soit $f(X)$ une fonction analytique « de variables réelles », c'est-à-dire une fonction analytique connue pour $X = x \in d$, d étant un domaine de $\mathcal{R}^n$. A $x \in d$, associons $\rho(x)$ rayon de la plus grande

---

([18]) H. Cartan et P. Thullen, *Math. Ann.*, t. 106, 1932, p. 617. *Voir* aussi S. Bochner et W. T. Martin, *loc. cit.*, chap. 5.

sphère $|x'| < \rho(x)$ de $\mathcal{R}'^n$ telle que f soit régulière sur l'ensemble $[x, |x'| < \rho(x)]$.

En général l'ensemble des $x \in d$ défini par $\rho(x) > a$ n'est pas convexe. On le constate en partant d'un domaine d simplement connexe, non convexe de $\mathcal{R}^n$ et considérant la cellule d'harmonicité ([19]) $H(d)$ laquelle est le domaine d'holomorphie d'une fonction harmonique dans d.

L'ensemble e_a où l'on a $\rho(x) > a$ coïncide dans ce cas avec l'ensemble $\delta_1(x) > a$ et n'est pas convexe si a est suffisamment petit.

On sait par contre ([20]) que l'ensemble e_∞ possède la propriété suivante : s'il contient un domaine g, il contient le plus petit ensemble convexe g^c contenant g.

Ce résultat de K. Stein s'obtient aisément à partir de la propriété suivante : si l'ensemble e_∞ contient une composante ouverte γ, celle-ci est convexe. En effet dans le tube $T(\gamma)$, $\delta(x+ix')$ est définie; appelons d'autre part $\delta_1(x)$ la distance de $x \in \gamma$ à la frontière $F(\gamma)$. On a

$$\delta_1(x) = \min_{x'} \delta(x+ix'),$$

x' parcourant $\mathcal{R}'^n$; on posera encore

$$V(x+ix') = -\log \delta(x+ix').$$

On a alors

$$-\log \delta_1(x) = \max_{t'} V(x+ix'+it') = \chi(x+ix'),$$

$\delta_1(x)$ est continue; $\chi(x+ix')$ est plurisousharmonique, indépendant de x'; le théorème 1 nous dit alors que $-\log \delta_1(x)$ est fonction convexe pour $x \in \gamma$, le lemme du nº **12** montre ensuite que γ est convexe. On en déduit : si $g \in e_\infty$, on a aussi $g^c \in e_\infty$. Il en résulte : la « cellule de régularité ([21]) » $R[T(d)]$ intersection des domaines

---

([19]) *Voir* nos Notes (*C. R. Acad. Sc.*, t. **223**, 1946, p. 372, et t. **232**, 1951, p. 1895, ainsi que *Duke Math. J.*, t. **14**, 1947, p. 143).

([20]) *Cf.* S. Bochner et W. T. Martin, *loc. cit.*, théorème **9**, p. 92 et suiv.; l'utilisation de la propriété (P) abrège notablement la démonstration donnée dans cet ouvrage; elle permettrait également d'obtenir les lemmes utilisés par les auteurs.

([21]) « Regularitätshülle » dans l'Ouvrage cité de Behnke et Thullen; « Analytic Completion » dans celui de S. Bochmer et W. T. Martin.

d'holomorphie contenant un tube $T(d)$ est le tube $T(d^c)$ où d^c est le plus petit domaine convexe contenant d; les valeurs prises par une fonction analytique dans $T(d^c)$ sont alors celles prises dans $T(d)$. En particulier si $|f(X)|$ est borné dans $T(d)$, $|f(X)|$ a la même borne dans $T(d^c)$. La fonction

$$M(x) = \max_{t'} \log |f(x + ix' + it')| \tag{20}$$

est une fonction de classe (M), ne dépendant que de x, donc $M(x)$ est convexe d'après le théorème 2. Il en est de même de la fonction $M'(x)$ définie par (20) avec la restriction $\varepsilon_i t'_i \geqq 0$, les ε_i étant des signes donnés pour chaque i.

Il en est encore de même de

$$M_s(x) = \lim_{t} \sup \log |f(x + ix' + it')|, \qquad |t'| \to \infty$$

et des limites supérieures quand $|t'| \to \infty$, les t'_i ayant des signes donnés.

15. Parmi les propriétés précédentes, quelles sont celles qui s'étendent aux fonctions plurisousharmoniques? Une fonction plurisousharmonique dans un tube $T(d)$ est-elle toujours prolongeable dans $T(d^c)$? Cet énoncé, on l'a vu au n° 5, est une conséquence de l'assertion E_1. En l'absence d'une démonstration de E_1 il serait souhaitable d'en faire une étude directe. La construction d'une fonction plurisousharmonique dans $T(d)$, non prolongeable dans $T(d^c)$ mettrait en échec l'hypothèse E_1.

De même, $V(X)$ étant plurisousharmonique dans un domaine contenant à son intérieur le domaine D et sa cellule de régularité R(D), le problème de déterminer si le maximum de V sur D et sur R(D) est toujours le même, pour toute fonction plurisousharmonique, est lié à l'étude de E_1.

Toutefois certains résultats peuvent s'obtenir directement : dans un tube T(D) où $V(X) = V(x + ix')$ est définie et bornée supérieurement les maxima et les limites supérieures étudiées pour $|x'| \to \infty$, sont des fonctions [22] de classe (M), indépendantes de x'; ce sont d'après le théorème 2 des fonctions convexes de x.

---

[22] *Cf.* Mémoire B, p. 334.

16. Revenons au cas où $f(X)$ est analytique et bornée dans le tube $T(d)$, donc aussi dans le tube $T(d^c)$. On établit aisément une expression effective du prolongement de $f(X)$ dans $T(d^c)$. Soit a et b deux points appartenant à d; les valeurs $f(a+ix')$, $f(b+ix')$ sont connues. Posons

$$X_k = a_k + ia'_k + \alpha_k(u+iu') = X_k(u), \tag{21}$$

a_k, a'_k, α_k réels, $\sum \alpha_k^2 = 1$, et $\lambda = |b-a|$.

Considérons la fonction $f(X)$ dans un plan d'équations (21) à coefficients α_k réels. Dans ce plan appelons B_λ la bande $0 < u < \lambda$, $L_1(u=0)$, $L_2(u=\lambda)$ les deux droites composant la frontière de B_λ. Pour $U = u + iu' \in B_\lambda$, on a

$$f[X(U)] = \int_{L_1} f[X(it)]\, dh_1(U, t) + \int_{L_2} f[X(\lambda+it)]\, dh_2(U, t), \tag{22}$$

où dh_1 et dh_2 sont respectivement les mesures harmoniques au point $U \in B_\lambda$ d'un élément pris sur L_1 ou L_2, par rapport au domaine B_λ. En représentant conformément B_λ sur le demi-plan $0 < \arg Z < \pi$, par la transformation

$$Z = \exp\left(\frac{i\pi U}{\lambda}\right) = z + iz' \tag{23}$$

on trouve

$$dh_1 = \frac{1}{\pi} d \operatorname{arctg} \frac{\tau - z}{z'}, \qquad \tau = \exp\left(-\frac{\pi}{\lambda}t\right) \quad \text{sur } L_1;$$

$$dh_2 = \frac{1}{\pi} d \operatorname{arctg} \frac{\tau - z}{z'}, \qquad \tau = \exp\left(-\frac{\pi}{\lambda}t\right) \quad \text{sur } L_2.$$

(22) permet le calcul de $f(c+ix)$, pour tout point $c=(c_k)$ appartenant au segment ab. On a en effet d'après (21) :

$$c_k = a_k + \alpha_k u, \qquad x'_k = a'_k + \alpha_k u',$$

relations qui déterminent la partie réelle u, et les a'_k si l'on se fixe arbitrairement u', $u+iu'$ étant le paramètre du point considéré $(c_k + ix')$.

Mais l'expression (22) est valable même si $f[X(u)]$ n'est pas bornée :

il suffit que sur la bande B_λ et sa frontière la fonction

$$\varphi(u+iu') = f[X(u+iu')]$$

satisfasse à

$$(24) \qquad |\varphi(u+iu')| < k \exp(s|u'|),$$

avec $s < \frac{\pi}{\lambda}$. Choisissons dans la décomposition $x'_k = a'_k + \alpha_k u'$ le vecteur (a'_k) orthogonal à la direction (α_k). On a alors $|x'|^2 = |a'|^2 + u'^2$, de sorte que (24) sera vérifié sous la condition

$$(25) \qquad |f(x+ix')| < k \exp(s|x'|) \quad \text{pour} \quad x \in ab,$$

avec $s < \frac{\pi}{|b-a|}$ et permettra le calcul de $f(x+ix')$ quel que soit x, à condition que x appartienne au segment ab et qu'on soit assuré que f est analytique sur l'ensemble $T(ab)$.

17. A l'égalité (22) correspond une *inégalité* pour une fonction plurisousharmonique $V(X)$; la trace $V[X(U)]$ est sousharmonique (si elle n'est pas $-\infty$). On a

$$(26) \qquad \begin{aligned} V(x+ix') \leq & \int_{L_1} V(a_k + ia'_k + i\alpha_k t)\, dh_1(U, t) \\ & + \int_{L_2} V(b_k + (b_k + ia'_k + i\alpha_k t)\, dh_2(U, t) \end{aligned}$$

pour tout $x+ix'$, x appartenant à ab; les conditions de validité sont que $V(X)$ soit plurisousharmonique sur $T(ab)$ et qu'on ait pour tout x appartenant au segment ab fermé

$$V(x+ix') < k \exp(s|x'|), \qquad \text{avec} \quad s < \frac{\pi}{|b-a|}.$$

De (26) on déduit :

1° *Soit* $V(x+ix')$ *une fonction plurisousharmonique dans un tube* $T(d)$, *de base le domaine d. Si pour* $x \in d$, *on a*

$$(27) \qquad V(x+ix') < k \exp(s|x'|),$$

et si $V(a+ix')$ *et* $V(b+ix')$ *sont bornés, a et b étant deux points de d pour lesquels* $|b-a| < \frac{\pi}{s}$, *alors* $V(x+ix')$ *est borné pour x apparte-*

nant au segment ab et

$$\mathrm{M}(x) = \max_{x'} \mathrm{V}(x + ix')$$

est convexe de x sur ab.

2° *Si $f(x+ix')$ est analytique dans le tube $\mathrm{T}(d^c)$ où d^c est un domaine convexe, et y satisfait à une inégalité*

$$(28) \qquad \log|f(x+ix')| < k \exp(s|x'|)$$

avec s fini, s'il existe plusieurs régions disjointes de $\mathcal{R}^n$, d_1^c, d_2^c, ..., telles que $f(x+ix')$ soit borné pour x appartenant à l'une d'entre elles, elles sont nécessairement convexes et la plus courte distance de deux d'entre elles est au moins $\frac{\pi}{s}$.

En particulier, si f est une fonction entière, elle ne peut posséder deux telles régions d_1^c, d_2^c, si elle satisfait à la condition

$$(29) \qquad \limsup_{\mathrm{R}\to\infty} \frac{\log_2 \mathrm{M}(\mathrm{R})}{\mathrm{R}} = 0,$$

où

$$\mathrm{M}(\mathrm{R}) = \max|f(\mathrm{X})| \qquad \text{pour} \quad |\mathrm{X}| = \mathrm{R}.$$

La condition (29) est vérifiée pour les fonctions de type exponentiel, mais aussi pour des fonctions plus rapidement croissantes. Pour les fonctions entières satisfaisant à (29) le noyau ouvert de l'ensemble des x pour lesquels $|f(x+ix')|$ est borné ne peut comprendre qu'une composante au plus.

18. Dans la demi-bande B'_λ, $0 < u < 1$, $u' > 0$, on peut établir une égalité analogue à (22) et une inégalité analogue à (26), valables sous les conditions respectivement (25) et (27) avec $s < \frac{\pi}{|b-a|}$. En remarquant que si $\varphi(u+iu')$ est sousharmonique dans B_λ,

$$\varphi(u+iu') - \frac{\mathrm{A}uu'}{\lambda}, \qquad \lambda = |b-a|,$$

est sousharmonique aussi dans B'_λ, on démontre aisément :

a. Si $\varphi(u+iu')$ est sousharmonique dans B'_λ et y satisfait à

$$\varphi(u+iu') < k \exp(s\,|u'|), \qquad s < \frac{\pi}{\lambda} \qquad \text{pour} \quad 0 < u < 1,$$

si, de plus, on a

$$\varphi(iu') \leqq 0, \qquad \varphi(\lambda + iu') < A\,|u'|, \qquad A > 0,$$

alors on a

$$\varphi(u+iu') < \frac{A\,u\,|u'|}{\lambda} \quad \text{sur } B'_\lambda.$$

b. En opérant de même dans la demi-bande symétrique ($u' < 0$) et réunissant les deux résultats, on aura :

Si dans B_λ, $\varphi(u+iu')$ est sousharmonique et vérifie

$$\varphi(u+iu') < k \exp(s\,|u'|, \qquad s < \frac{\pi}{\lambda}, \qquad 0 < u < 1,$$

et satisfait de plus à

$$\varphi(iu') \leqq 0, \qquad \varphi(\lambda + iu') < A\,|u'|, \qquad A > 0,$$

on a

$$\varphi(u+iu') < \frac{A\,u\,|u'|}{\lambda} \quad \text{dans } B_\lambda.$$

c. Si $\varphi(u+iu')$ est sousharmonique dans le demi-plan $u > 0$ et y satisfait $\varphi(u+iu') < A\,|u'| + A_0$, si de plus on a $\varphi(iu') \leqq 0$, alors on a $\varphi(u+iu') < 0$ pour $u > 0$. On appliquera la méthode de démonstration dans une bande $0 < u < \lambda$; on a d'abord

$$\varphi(u+iu') < \frac{u}{\lambda}(A\,|u'| + A_0)$$

on fait tendre ensuite $\frac{1}{\lambda}$ vers zéro.

En conséquence :

1° *Si* $V(x+ix')$ *est plurisousharmonique dans le tube* $T(d)$ *et sur sa frontière, d étant un domaine borné, de diamètre m ; si l'on a*

$$V(x+ix') < k \exp(s\,|x'|), \qquad \textit{avec} \quad s < \frac{\pi}{m},$$

et si $V(x+ix')$ *est borné pour x appartenant à la frontière de d, alors* V *est borné dans* $T(d)$.

2° *Si l'on a*

$$V(x+ix') < \sum_i A_i |x'_i|, \qquad A_i > 0$$

pour x appartenant à la frontière de d, on a la même majoration dans $T(d)$.

3° *Si d est un cône de sommet, l'origine dans $\mathcal{R}^n$, si $V(x+ix)$ est plurisousharmonique dans $T(d)$ et si l'on a*

$$V(ix') \leqq 0, \qquad V(x+ix') < A_0 + A|x'|, \qquad A > 0,$$

pour $x \in d$, on a pour tout $x \in d$,

$$V(x+ix') \leqq 0.$$

En conséquence : si pour x pris dans un cône d de sommet l'origine, on a

$$V(x+ix') < A_0 + \sum_i A_i |x'_i| + \sum_i B_j |x_j| \qquad (A_i,\ B_j \text{ positifs}),$$

et si l'on a $V(ix') \leqq 0$, on a simplement

$$V(x+ix') < \sum_j B_j |x_j|.$$

On considérera pour la démonstration la fonction $V - \sum_j B_j x_j \varepsilon_j$ dans les différents domaines de $\mathcal{R}^n$ obtenus en fixant les signes des x_j; on choisira $\varepsilon_j x_j > 0$, on remarquera que dans de tels domaines la différence ainsi formée est encore plurisousharmonique. Il suffit alors d'appliquer le résultat du 2°.

On étend ainsi un résultat donné ([23]) par S. Bochner dans le cas où $V = \log|f(X)$, $f(X)$ étant fonction entière.

19. Quand $f(X)$ est une fonction analytique, la fonction

$$V(X) = \int |f(X+T)|^\alpha d\mu(T)$$

([23]) *Loc. cit.*, p. 126.

où $d\mu$ est une mesure positive, portée par un compact, α un nombre positif, est une fonction plurisousharmonique dans tout domaine où elle est définie. Mais on a la propriété plus précise : $\log V(X)$ *est plurisousharmonique*. En effet le théorème 3 obtenu comme extension du théorème de Paul Montel s'applique ici, la fonction

$$V(X)\,|e^{(AX)}| = \int |f(X+T)|^{\alpha}\,|e^{(AX)}|\,d\mu(T)$$

étant évidemment plurisousharmonique quel que soit A.

En particulier si E est un domaine borné de $\mathcal{R}'^{n}$, la fonction

$$V_E(x+ix') = \int_E |f(x+ix'+it')|^{\alpha}\,d\omega(t'),$$

où l'on intègre sur le volume E a son logarithme plurisousharmonique dans toute région où elle est finie. Si E est l'espace $\mathcal{R}'^{n}$ et si $|f(x+ix')|$ appartient à la classe des fonctions de puissances $\alpha^{\text{ièmes}}$ sommables sur $\mathcal{R}'^{n}$, pour x appartenant à un domaine d de $\mathcal{R}^{n}$, alors on a le résultat suivant : la norme

$$N_{\alpha}(x) = \int_R |f(x+ix'+it')|^{\alpha}\,d\omega(t')$$

est telle que $\log N_{\alpha}(x)$ *soit fonction convexe de x dans d* : c'est en effet une fonction plurisousharmonique qui ne dépend pas de x' dans le tube $T(d)$.