JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

FLORENT BUREAU

Sur les transformations engendrées par des systèmes de fonctions analytiques de plusieurs variables complexes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 31 (1952), p. 161-190.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1952_9_31__161_0>

Sur les transformations engendrées par des systèmes de fonctions analytiques de plusieurs variables complexes;

PAR FLORENT BUREAU.

(à Liége).

1. L'étude des valeurs prises par une fonction analytique uniforme d'une variable complexe au voisinage d'un point singulier essentiel isolé, est dominée par les théorèmes découverts en 1879 par E. Picard. Ces théorèmes qui apportaient une grande précision à un résultat de Weierstrass (1876), généralisation lui-même du théorème classique de Liouville, ont été l'origine d'un grand nombre de travaux et ont joué un rôle essentiel dans le développement de l'Analyse moderne.

Les théorèmes de Picard furent d'abord démontrés en utilisant la fonction modulaire; ultérieurement, on s'efforça de les déduire de propriétés générales des fonctions analytiques. Cependant, comme le fit remarquer Picard, il semble être dans la nature des choses de s'adresser, pour démontrer ces théorèmes, « à une fonction possédant précisément la propriété qu'on veut démontrer ne pouvoir appartenir aux fonctions entières ». D'ailleurs, les recherches de Carathéodory ont confirmé cette manière de voir et montré le rôle prépondérant de la fonction modulaire dans l'étude des valeurs prises par les fonctions entières.

Les propriétés découvertes par Landaù et Schottky, des fonctions holomorphes dans un domaine où elles ne prennent pas deux valeurs données distinctes, ont indiqué l'existence de propriétés communes à une famille de fonctions holomorphes admettant deux valeurs exceptionnelles dans un domaine. Les fonctions d'une telle famille sont liées entre elles par la propriété suivante : de toute suite infinie de fonctions de la famille, on peut extraire au moins une suite de fonctions convergeant uniformément dans le domaine. Pour rappeler cette dernière propriété, on dit que la famille est *normale*. Cette importante notion, due à M. P. Montel, s'est montrée très féconde; elle a donné lieu à de nombreuses applications et a permis d'obtenir de nouveaux résultats importants.

Malgré l'intérêt que semble présenter l'extension des résultats précédents aux systèmes de n fonctions analytiques de n variables complexes, peu de travaux ont été consacrés à cette question. Le premier résultat, d'ailleurs surprenant, a été obtenu par P. Fatou [11 *a, b*] (1) en 1922. En utilisant des couples de fonctions analytiques et uniformes de deux variables complexes, étudiés par E. Picard ([16, *e*], p. 75 et suiv.), Fatou a prouvé qu' « il existe des systèmes de fonctions entières (indépendantes) de deux variables complexes qui ne peuvent s'approcher simultanément et indéfiniment de certains systèmes de valeurs données ». Il en a déduit que les théorèmes de Weierstrass et de Picard sur l'indétermination d'une fonction uniforme d'une variable complexe au voisinage d'un point singulier essentiel isolé, n'avaient pas de correspondants pour les systèmes de deux fonctions entières de deux variables complexes. Ce résultat a été complété plus tard par L. Bieberbach [5] qui a montré que l'on pouvait choisir les couples de fonctions utilisées par Fatou de manière à réaliser une transformation univalente conservant les volumes.

Cependant, comme nous l'avons rappelé, les théorèmes de Picard, Landaù, Schottky peuvent être démontrés en utilisant la fonction modulaire. Dès lors, pour étudier les propriétés des valeurs prises par les couples de fonctions analytiques de deux variables complexes, il est naturel de chercher à utiliser les fonctions hyperfuchsiennes découvertes par E. Picard [16, *a*, *b*, *c*, *d*] en 1882 et généralisant en un certain sens, la fonction modulaire. C'est ce que nous avons montré succinctement en 1933 dans une Note [7] publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Nous nous proposons de développer cette question dans le présent Mémoire.

Dans le premier chapitre de notre travail, nous donnerons quelques

(1) Les chiffres entre crochets renvoient à l'index bibliographique.

compléments aux résultats déjà obtenus relativement aux couples de fonctions analytiques, bornées dans un domaine. Dans un second chapitre, nous rappellerons les propriétés essentielles des fonctions hyperfuchsiennes de Picard et nous les appliquerons à l'étude des transformations définies par deux fonction analytiques de deux variables complexes. D'une manière précise, nous montrerons que l'on a encore pour ces transformations, un théorème d'impossibilité analogue à celui de Picard, un théorème d'extension analogue à celui de Landaù et un théorème de limitation analogue à celui de Schottky. Enfin, dans un troisième chapitre, nous donnerons un théorème de normalité pour les familles de transformations engendrées par n fonctions analytiques de n variables complexes. Pour $n=2$, ce critère a été donné par H. Rutishaùser [17].

Je suis heureux de pouvoir m'associer à l'hommage collectif rendu à M. P. Montel; c'est pour moi un agréable devoir de lui exprimer, en même temps que ma reconnaissance et mon admiration, ma respectueuse et profonde affection.

CHAPITRE I.

LES TRANSFORMATIONS ENGENDRÉES PAR DES FONCTIONS HOLOMORPHES ET BORNÉES; EXTENSION DU THÉORÈME DE SCHWARZ.

2. Dans l'étude des valeurs prises par des fonctions holomorphes et bornées d'une variable complexe, le lemme de Schwarz constitue un outil essentiel. Complété par l'emploi de transformations conformes simples, il permet d'obtenir de nombreuses limitations du module de la fonction, de sa partie réelle ou de ses dérivées.

Le *lemme* de Schwarz s'énonce habituellement sous sa forme la plus simple, de la manière suivante :

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe de la variable complexe z dans le domaine $|z|<1$. Si l'on a $|f(z)|<1$ dans ce domaine et si $f(0)=0$, on a aussi

$$|f(z)|\leqq|z|$$

dans $|z| < 1$; *en outre, si l'égalité a lieu en* un *point intérieur, distinct de l'origine, elle a lieu partout et l'on a* $f(z) = e^{i\theta} z$, θ *étant un nombre réel.*

De ce résultat, on déduit aussitôt le *corollaire* suivant :

Si $f(z)$ *est une fonction holomorphe dans* $|z| < 1$, *de module inférieur à* 1 *et nulle à l'origine, on a*

$$|f'(0)| \leqq 1;$$

si l'égalité a lieu, on a nécessairement

$$f(z) \equiv f'(0)\, z.$$

Les résultats du corollaire précédent ont été étendus par H. Cartan [10] aux couples de fonctions holomorphes de deux variables complexes, bornées dans un domaine, puis par C. Carathéodory ([9], p. 782), aux systèmes de n fonctions analytiques, bornées, de n variables complexes.

Pour préciser, nous allons indiquer les notations que nous utiliserons.

3. Nous désignerons par $(z_1, \ldots, z_n)$, n variables complexes et nous considérerons des domaines situés dans un espace euclidien R_z^{2n} à $2n$ dimensions, engendré par les parties réelles et les parties imaginaires de ces n variables. Lorsqu'aucune ambiguïté n'est à craindre, nous représenterons par (z) ou z, le point ayant pour coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$; le conjugué de z_k sera représenté par $\bar{z}_k$.

Soient données n fonctions

$$f_k(z_1, \ldots, z_n) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

de $(z_1, \ldots, z_n)$, analytiques dans un domaine borné D de R_z^{2n}; les relations

$$Z_k = f_k(z_1, \ldots, z_n) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

définissent une transformation analytique du domaine D en un ensemble de points Δ d'un espace R_Z^{2n}. Pour abréger, nous représenterons cette transformation par T et nous écrirons au lieu de (1),

$$(Z) = T(z). \tag{2}$$

Lorsque le déterminant fonctionnel

$$J_T(z) = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)} \tag{3}$$

est différent de zéro en un point z^0 de D, on sait d'après le théorème des fonctions implicites que la transformation T est biunivoque et bicontinue au voisinage de z^0.

Cela étant, les résultats obtenus par H. Cartan et C. Carathéodory s'énoncent ainsi : Soit T une transformation analytique conservant un point fixe et transformant un domaine borné D en un domaine D′ intérieur à D. Alors, la valeur absolue du déterminant fonctionnel $J_T(z)$ est toujours inférieure à 1; elle est égale à 1 sous la condition nécessaire et suffisante que T soit une transformation biunivoque de D en soi.

Le lemme de Schwarz est susceptible d'une autre généralisation que nous allons indiquer :

Soient n fonctions

$$f_k(z_1, \ldots, z_n) \quad (k = 1, \ldots, n)$$

holomorphes dans l'hypersphère $\sum_{k=1}^{n} z_k \bar{z}_k \leq 1$ *et nulles à l'origine; si l'on a*

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\overline{f_k(z)} < 1,$$

on a aussi

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\overline{f_k(z)} \leq \sum_{k=1}^{n} z_k \bar{z}_k. \tag{4}$$

Une démontration très simple de ce théorème a été donnée par S. Bochner et W. T. Martin [6]; nous y renverrons le lecteur.

M. H. Cartan [10] a fait remarquer qu'il n'y avait rien d'analogue à la seconde partie du lemme de Schwarz et que dans la relation (4), l'égalité pouvait avoir lieu en *un* point z^0 distinct de l'origine, sans avoir lieu partout. Il en a donné l'exemple suivant : dans l'hypersphère-unité, prenons

$$f_1(z_1, z_2) \equiv z_1 + \frac{z_2^2}{4}, \qquad f_2(z_1, z_2) \equiv \frac{z_2}{2};$$

l'égalité

$$f_1 \bar{f}_1 + f_2 \bar{f}_2 = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2$$

a lieu chaque fois que z_2 est nul; cependant, si z_2 est différent de zéro, on a, en remarquant que $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$,

$$f_1 \bar{f}_1 + f_2 \bar{f}_2 \leq \left[|z_1| + \frac{|z_2|^2}{4} \right]^2 + \frac{|z_2|^2}{2} < |z_1|^2 + |z_2|^2,$$

l'égalité étant exclue.

Nous nous proposons de montrer que l'on peut compléter l'énoncé que nous venons d'indiquer de la généralisation du lemme de Schwarz, de la manière suivante :

Supposons que dans les conditions indiquées, l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(z) \overline{f_k(z)} = \sum_{k=1}^{n} z_k \bar{z}_k \tag{5}$$

ait lieu pour tous les points z appartenant à une hypersphère

$$\sum_{k=1}^{n} z_k \bar{z}_k = \rho, \tag{6}$$

ρ étant fixé et tel que $0 < \rho < 1$; alors, cette égalité a lieu partout et la transformation T *est linéaire et unitaire.*

En d'autre termes, nous avons

$$(f) = \mathrm{A}(z),$$

A étant une matrice unitaire; ou encore, la transformation T conserve la distance au centre quel que soit le point z.

4. Observons d'abord que le théorème est vrai pour une fonction

$f(z)$ de la variable z; nous avons vu que l'on a dans ce cas $f(z) = e^{i\theta} z$, θ étant réel.

Si $(f) = \mathrm{A}(z)$, A étant une matrice unitaire, la distance au centre est conservée quel que soit z.

Pour abréger l'écriture, nous nous bornerons à considérer deux fonctions f_1 et f_2 de deux variables complexes z_1 et z_2, holomorphes dans l'hypersphère unité

$$z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 \leqq 1;$$

la démonstration est cependant générale.

En posant

$$f_k(z_1, z_2) = \sum_{m_1, m_2 = 0}^{\infty} a^{(k)}_{m_1 m_2} z_1^{m_1} z_2^{m_2} \qquad (k = 1, 2),$$

$$z_k = r_k e^{i\theta_k} \qquad (k = 1, 2),$$

(7)
$$c_{m_1, m_2; n_1, n_2} = \sum_{k=1}^{2} a^{(k)}_{m_1 m_2} \bar{a}^{(k)}_{n_1 n_2},$$

il vient

$$\sum_{k=1}^{2} f_k(z) \overline{f_k(z)} = \sum_{(m;n)} c_{m_1 m_2; n_1 n_2} r_1^{m_1+n_1} r_2^{m_2+n_2} e^{i(m_1-n_1)\theta_1 + i(m_2-n_2)\theta_2} \leqq r_1^2 + r_2^2$$

d'après la relation (4); l'indice k prend les valeurs 1 et 2 et les indices m_1, m_2, n_1, n_2 varient de zéro à l'infini, les combinaisons $m_1 = m_2 = 0$, $n_1 = n_2 = 0$ étant exclues.

Intégrons les deux membres de cette dernière relation par rapport à θ_1 et θ_2 entre zéro et 2π; les termes pour lesquels on a $m_1 \neq n_1$ ou $m_2 \neq n_2$, donnent zéro et il vient

(8)
$$\sum_{(m_1 m_2)} c_{m_1 m_2; m_1 m_2} r_1^{2m_1} r_2^{2m_2} \leqq r_1^2 + r_2^2$$

pour tous les r_1, r_2 vérifiant la relation $r_1^2 + r_2^2 \leqq 1$. Il convient d'observer que $c_{m_1 m_2; m_1 m_2}$ est positif ou nul.

Supposons maintenant que l'égalité (5) ait lieu pour tous les points (z) appartenant à l'hypersphère (6), ρ étant fixé et tel que $0 < \rho < 1$. En considérant les points $(z_1, 0)$ tels que $z_1 \bar{z}_1 = \rho$, il vient

$$(9) \qquad \sum_{(m_1)} c_{m_10;\, m_10}\, \rho^{2(m_1-1)} = 1.$$

La relation (8) écrite pour $r_2 = 0$ et $\rho < r_1 < 1$, nous donne

$$(10) \qquad \sum_{(m_1)} c_{m_10;\, m_10}\, r_1^{2(m_1-1)} \leqq 1.$$

En retranchant (9) et (10), il vient

$$\sum_{(m_1)} c_{m_10;m_10} \left[\rho^{2(m_1-1)} - r_1^{2(m_1-1)} \right] \geqq 0,$$

l'indice m_1 variant maintenant de 1 à l'infini. Puisque $r_1 > \rho$, on déduit de cette dernière relation

$$c_{m_10;m_10} = 0 \qquad \text{pour} \quad m_1 > 1;$$

la relation (9) donne ensuite $e_{10;10} = 1$.

De la même manière, on obtient

$$c_{0m_2;0m_2} = 0 \qquad \text{pour} \quad m_2 > 1,$$
$$c_{01;01} = 1.$$

En tenant compte de ces résultats, la relation (8) s'écrit

$$\sum_{(m_1m_2)} c_{m_1m_2;m_1m_2}\, r_1^{2m_1}\, r_2^{2m_2} \leqq 0,$$

m_1 et m_2 étant différents de zéro; cette relation étant vérifiée quels que soient r_1 et r_2 satisfaisant à $r_1^2 + r_2^2 \leqq 1$, on déduit

$$c_{m_1m_2;\, m_1m_2} = 0.$$

Ainsi, l'égalité précédente est vérifiée, m_1 et m_2 prenant toutes les valeurs entières positives ou nulles, la combinaison $m_1 + m_2 = 1$ étant exclue; il vient donc d'après (7)

$$a^{(k)}_{m_1m_2} = 0 \qquad (k = 1, 2),$$

pour les mêmes valeurs des indices m_1 et m_2.

Dans les hypothèses indiquées, les fonctions f_k se réduisent à leurs termes linéaires et la transformation considérée conserve la longueur de tout vecteur z de longueur ρ (ρ fixé et $0<\rho<1$); par homothétie, elle conserve aussi la longueur de tout vecteur. Dès lors, cette transformation est une transformation unitaire.

5. Dans la suite de ce chapitre, nous nous bornerons à considérer des fonctions analytiques de *deux* variables complexes; nous désignerons ces variables par x et y.

Pour obtenir une transformation homographique

$$(X, Y) = T(x, y) \tag{11}$$

de l'hypersphère $x\bar{x}+y\bar{y} \leqq 1$ en elle-même, amenant le point intérieur (x_0, y_0) au centre, il suffit de poser

$$r_0 X = \frac{x\bar{x}_0 + y\bar{y}_0 - r_0^2}{1 - x\bar{x}_0 - y\bar{y}_0}, \qquad r_0 Y = \frac{(x_0 y - y_0 x)\sqrt{1-r_0^2}}{1 - x\bar{x}_0 - y\bar{y}_0}; \tag{12}$$

nous avons écrit pour abréger

$$r_0^2 = x_0\bar{x}_0 + y_0\bar{y}_0 < 1 \qquad (r_0 > 0).$$

Un calcul facile montre en effet que

$$X\bar{X} + Y\bar{Y} - 1 = \frac{1-r_0^2}{|1 - x\bar{x}_0 - y\bar{y}_0|^2}(x\bar{x} + y\bar{y} - 1).$$

Recherchons le domaine correspondant dans cette transformation à l'hypersphère

$$X\bar{X} + Y\bar{Y} \leqq \theta \qquad (0<\theta<1).$$

En posant

$$A = (x\bar{x} + y\bar{y} - 1)(1 - r_0^2) + (1-\theta)|1 - x\bar{x}_0 - y\bar{y}_0|^2,$$

nous avons

$$X\bar{X} + Y\bar{Y} - \theta = \frac{A}{|1 - x\bar{x}_0 - y\bar{y}_0|^2}.$$

Séparons les parties réelles et les parties imaginaires et écrivons

$$
\begin{aligned}
&x = x_1 + ix_2, \qquad y = y_1 + iy_2,\\
&x_0 = x_1^0 + ix_2^0, \qquad y_0 = y_1^0 + iy_2^0,\\
&a = 1 - r_0^2 + (1-\theta)(x_1^{0\,2} + x_2^{0\,2}),\\
&b = (1-\theta)(x_1^0 y_1^0 + x_2^0 y_2^0),\\
&c = (1-\theta)(x_2^0 y_1^0 - x_1^0 y_2^0),\\
&d = 1 - r_0^2 + (1-\theta)(y_1^{0\,2} + y_2^{0\,2});
\end{aligned}
$$

il vient

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} = {} & a(x_1^2 + x_2^2) + d(y_1^2 + y_2^2) + 2b(x_1 y_1 + x_2 y_2)\\
& + 2c(x_2 y_1 - x_1 y_2) - 2(1-\theta)(x_1 x_1^0 + x_2 x_2^0 + y_1 y_1^0 + y_2 y_2^0) + r_0^2 - \theta.
\end{aligned}
$$

L'hypersurface $\mathrm{A} = 0$ possède un centre C dont les coordonnées sont kx_1^0, kx_2^0, ky_1^0, ky_2^0 avec $k = \dfrac{1-\theta}{1-\theta r_0^2}$. En C, on a

$$
\mathrm{A} = -\frac{\theta(1-r_0^2)^2}{1-\theta r_0^2}.
$$

L'équation en λ correspondant à $\mathrm{A} = 0$ a ses racines doubles et positives ; elles valent respectivement

$$
\lambda_1 = 1 - \theta r_0^2, \qquad \lambda_2 = 1 - r_0^2.
$$

Il en résulte que l'hypersurface $\mathrm{A} = 0$ est un hyperellipsoïde de centre C dont les carrés des demi-axes sont donnés par

$$
\theta\frac{(1-r_0^2)^2}{(1-\theta r_0^2)^2}, \qquad \theta\frac{1-r_0^2}{1-\theta r_0^2}.
$$

Enfin, à un point (X, Y) intérieur à l'hypersphère $\mathrm{X}\overline{\mathrm{X}} + \mathrm{Y}\overline{\mathrm{Y}} = \theta$, correspond un point (x, y) intérieur à l'hyperellipsoïde $\mathrm{A} = 0$ et réciproquement.

6. A présent, considérons les transformés (x, y) des points (X, Y) appartenant à l'hypersphère

$$
\mathrm{X}\overline{\mathrm{X}} + \mathrm{Y}\overline{\mathrm{Y}} \leqq \theta < 1
$$

et recherchons une borne supérieure de

$$
|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2.
$$

En posant pour abréger

$$\alpha = x - x_0, \qquad \beta = y - y_0,$$

la transformation (12) s'écrit

$$r_0 X = \frac{\alpha \bar{x}_0 + \beta \bar{y}_0}{1 - x\bar{x}_0 - y\bar{y}_0}, \qquad r_0 Y = \frac{(\beta x_0 - \alpha y_0)\sqrt{1 - r_0^2}}{1 - x\bar{x}_0 - y\bar{y}_0};$$

on en déduit

$$(13) \qquad \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = (X\bar{X} + Y\bar{Y})\,|1 - x\bar{x}_0 - y\bar{y}_0|^2 + |\beta x_0 - \alpha y_0|^2.$$

L'identité générale de Lagrange

$$|u v_0 - u_0 v|^2 = (u\bar{u} + v\bar{v})(u_0\bar{u}_0 + v_0\bar{v}_0) - |u\bar{u}_0 + v\bar{v}_0|^2$$

nous donne immédiatement

$$|x\bar{x}_0 + y\bar{y}_0|^2 \leqq r_0^2(x\bar{x} + y\bar{y}) \leqq r_0^2,$$
$$|\beta x_0 - \alpha y_0|^2 \leqq r_0^2(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta})$$

et par suite

$$|1 - x\bar{x}_0 - y\bar{y}_0|^2 \leqq (1 + r_0)^2.$$

En rassemblant ces résultats, il vient de l'identité (13),

$$\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} \leqq \frac{1 + r_0}{1 - r_0}(X\bar{X} + Y\bar{Y});$$

par conséquent, aux points de l'hypersphère

$$X\bar{X} + Y\bar{Y} \leqq \theta < 1$$

correspondent des points de l'hypersphère

$$(14) \qquad |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 \leqq \frac{1 + r_0}{1 - r_0}\theta.$$

Remarque. — Puisque $r_0 < 1$, on a aussi

$$|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 \leqq \frac{2}{1 - r_0}\theta.$$

7. Considérons deux fonctions $f(x, y)$, $g(x, y)$ holomorphes dans $x\bar{x} + y\bar{y} \leqq 1$ et y vérifiant la relation $f\bar{f} + g\bar{g} \leqq 1$; supposons que l'on ait

$$f_0 = f(x_0, y_0), \qquad g_0 = g(x_0, y_0),$$

(x_0, y_0) étant un point intérieur à l'hypersphère-unité et posons

$$R_0^2 = f_0\bar{f}_0 + g_0\bar{g}_0 \quad (R_0 > 0).$$

La transformation (12) transforme l'hypersphère-unité en elle-même et fait correspondre le point (x_0, y_0) au centre $(0, 0)$; de même, la transformation $(F, G) = T(f, g)$ définie par

$$R_0 F = \frac{f\bar{f}_0 + g\bar{g}_0 - R_0^2}{1 - f\bar{f}_0 - g\bar{g}_0}, \qquad R_0 G = \frac{(f_0 g - g_0 f)\sqrt{1 - R_0^2}}{1 - f\bar{f}_0 - g\bar{g}_0}$$

transforme l'hypersphère $f\bar{f} + g\bar{g} \leqq 1$ en elle-même et fait correspondre le point (f_0, g_0) au centre $(0, 0)$.

Des relations (4) et (14), on déduit successivement

$$|f - f_0|^2 + |g - g_0|^2 \leqq \frac{1 + R_0}{1 - R_0}(F\bar{F} + G\bar{G}) \leqq \frac{1 + R_0}{1 - R_0}(X\bar{X} + Y\bar{Y}).$$

D'autre part, puisque $|\beta x_0 - \alpha y_0| \geqq 0$, nous avons d'après (13),

$$X\bar{X} + Y\bar{Y} \leqq \frac{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2}{|1 - x\bar{x}_0 - y\bar{y}^0|^2};$$

en posant

$$r^2 = x\bar{x} + y\bar{y} \quad (r > 0)$$

et puisque

$$|1 - x\bar{x}_0 - y\bar{y}_0| \geqq 1 - |x\bar{x}_0 + y\bar{y}_0| \geqq 1 - rr_0,$$

nous obtenons finalement

$$(15) \qquad |f - f_0|^2 + |g - g_0|^2 \leqq \frac{1 + R_0}{1 - R_0}\,\frac{|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2}{(1 - rr_0)^2}.$$

En supposant $(x_0, y_0) = (0, 0)$, cette relation montre que toute transformation $(x, y) \rightarrow (f, g)$ holomorphe et bornée dans l'hypersphère-unité, est telle que $f\bar{f} + g\bar{g}$ reste borné dans toute hypersphère $x\bar{x} + y\bar{y} \leqq \theta < 1$ par un nombre fixe ne dépendant que de (f_0, g_0) et de θ; c'est un théorème de limitation analogue à celui de Schottky.

8. Dans les conditions du paragraphe précédent, proposons-nous de calculer une borne supérieure en (x_0, y_0), du module du jacobien

$$J(x, y) = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}$$

de la transformation. D'après les résultats de H. Cartan et C. Carathéodory rappelés ci-dessus, nous avons en conservant les notations du paragraphe précédent,

$$\left|\frac{\partial(F, G)}{\partial(X, Y)}\right|_{X=Y=0} \leqq 1.$$

Des relations

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(X, Y)} = \frac{\partial(F, G)}{\partial(f, g)} \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(X, Y)},$$

$$\left|\frac{\partial(F, G)}{\partial(f, g)}\right|_{(f_0, g_0)} = (1 - f_0\bar{f}_0 - g_0\bar{g}_0)^{-\frac{3}{2}} = (1 - R_0^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$\left|\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}\right|_{(x_0, y_0)} = (1 - x_0\bar{x}_0 - y_0\bar{y}_0)^{-\frac{3}{2}} = (1 - r_0^2)^{-\frac{3}{2}},$$

on déduit aussitôt

$$|J(x_0, y_0)| \leqq \left(\frac{1 - R_0^2}{1 - r_0^2}\right)^{\frac{3}{2}} \leqq (1 - r_0^2)^{-\frac{3}{2}}. \tag{16}$$

Cette relation appliquée au point $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ et aux fonctions $f(Rx, Ry)$, $g(Rx, Ry)$, montre qu'il existe un nombre R ne dépendant que de la borne supérieure M du module des fonctions (f, g), de (f_0, g_0) et du jacobien $|J(0, 0)|$ et limitant supérieurement le rayon de l'hypersphère ayant pour centre $(0, 0)$ et dans laquelle peut exister la transformation $(x, y) \rightarrow (f, g)$. C'est un théorème d'extension analogue à celui de Landaù.

CHAPITRE II.

LES COUPLES DE FONCTIONS ANALYTIQUES DE DEUX VARIABLES COMPLEXES. APPLICATION DES FONCTIONS HYPERFUCHSIENNES DE E. PICARD.

9. Dans un Mémoire célèbre, Riemann a montré que les fonctions hypergéométriques d'une variable étaient déterminées par leurs trois points critiques et les exposants correspondants, ces exposants vérifiant d'ailleurs une relation convenable. En cherchant à étendre ce problème de Riemann aux fonctions de deux variables, E. Picard

[13, 16, *a*, *b*, *c*, *d*] a été conduit au système S d'équations aux dérivées partielles vérifié par la fonction hypergéométrique

$$F(x, y) \equiv \mathcal{F}_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$$

définie et étudiée par P. Appell.

Les trois équations composant ce système S ne peuvent avoir plus de trois solutions communes linéairement indépendantes et entre quatre déterminations de la fonction $F(x, y)$ existe toujours une relation linéaire et homogène à coefficients constants.

Posons

$$x = x_1 + ix_2, \qquad y = y_1 + iy_2,$$

x_1, x_2, y_1, y_2 étant des quantités réelles et considérons l'espace euclidien R^4 à quatre dimensions (x_1, x_2, y_1, y_2). La fonction $F(x, y)$ est multiforme et admet dans R^4 sept multiplicités singulières à deux dimensions

$$(1) \quad x = 0, \quad x = 1, \quad x = \infty; \quad y = 0, \quad y = 1, \quad y = \infty; \quad x = y;$$

en dehors de ces multiplicités, toute branche de $F(x, y)$ est holomorphe.

E. Picard s'est proposé ensuite d'étendre au système S, les recherches de Schwarz relatives au problème suivant : déterminer les cas où l'inversion du quotient de deux intégrales linéairement indépendantes de l'équation hypergéométrique de Gauss conduit à une fonction uniforme. D'une manière précise, considérons avec E. Picard, le système particulier S^* d'équations aux dérivées partielles correspondant à la fonction hypergéométrique $\mathcal{F}_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1; x, y\right)$. Pour obtenir des intégrales linéairement distinctes de ce système, il suffit, g et h désignant deux des quantités 0, 1, x, y, ∞, de considérer comme des fonctions de x, y, les intégrales $\int_g^h \frac{dt}{z}$ attachées à la courbe

$$(2) \qquad z^3 = t(t-1)(t-x)(t-y)$$

de genre 3. Ces intégrales permettent d'exprimer les périodes des intégrales abéliennes de première espèce correspondant à cette courbe.

Cela étant, désignons par ω_1, ω_2, ω_3, trois intégrales linéairement distinctes du système $S^\star$ et posons

$$\frac{\omega_2(x, y)}{\omega_1(x, y)} = u, \qquad \frac{\omega_3(x, y)}{\omega_1(x, y)} = v; \tag{3}$$

E. Picard a établi que ces relations donnent pour x et y des fonctions uniformes de u et v existant seulement dans le domaine $\mathcal{D}$ défini par

$$u + \bar{u} + v\bar{v} < 0. \tag{4}$$

Les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ peuvent être données explicitement à l'aide des fonctions θ attachées à la courbe (2). A un point (u, v) du domaine $\mathcal{D}$, les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ font correspondre un point (x, y) de R^4 non situé sur une des multiplicités singulières (1).

Les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ restent invariables lorsqu'on effectue sur u, v une infinité de transformations homographiques formant un groupe G dérivant des cinq transformations fondamentales, $\left(\lambda = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$,

$$\begin{aligned}
&U = u, && V = \lambda^2 v;\\
&U = u + (\lambda - \lambda^2)v + \lambda^2 - 1, && V = \lambda^2 v + 1 - \lambda;\\
&U = u + (1 - \lambda^2)v + \lambda^2 - 1, && V = \lambda^2 v + 1 - \lambda^2;\\
&U = \frac{\lambda u + \lambda^2 - 1}{(\lambda^2 - 1)u - 2\lambda}, && V = \frac{v}{(\lambda^2 - 1)u - 2\lambda};\\
&U = \frac{u}{(\lambda^2 - 1)u + (1 - \lambda)v + 1}, && V = \frac{(\lambda - \lambda^2)u + \lambda^2 v}{(\lambda^2 - 1)u + (1 - \lambda)v + 1}.
\end{aligned}$$

D'ailleurs, on déduit des relations (3), qu'à tout point de R^4 correspondent une infinité de points (u, v) se déduisant les uns des autres par les transformations du groupe G.

E. Picard a rattaché l'étude du groupe G à celle du groupe laissant invariante une forme ternaire hermitienne indéfinie. Il a montré que le polyèdre fondamental ou cellule d'univalence fondamentale P_0 de G est un domaine à quatre dimensions, intérieur à $\mathcal{D}$ et tel qu'il existe toujours dans P_0 un et un seul point congru à un point quelconque de $\mathcal{D}$ par une transformation de G. La frontière de cette cellule fondamentale contient dix faces à trois dimensions, les arêtes à deux dimensions correspondant aux multiplicités singulières (1), étant situées sur la frontière de $\mathcal{D}$. D'ailleurs, les dix faces frontières de P_0 correspondent aux cinq multiplicités à trois dimensions

$$(5) \qquad \begin{cases} +1 \leqq \mathcal{R}(x) < +\infty, & \mathcal{I}(x) = 0; \\ -\infty < \mathcal{R}(x) \leqq 0, & \mathcal{I}(x) = 0; \\ +1 \leqq \mathcal{R}(y) < +\infty, & \mathcal{I}(y) = 0; \\ -\infty < \mathcal{R}(y) \leqq 0, & \mathcal{I}(y) = 0; \\ 0 \leqq \mathcal{R}(y-x) < +\infty, & \mathcal{I}(y-x) = 0, \end{cases}$$

situées dans R^4; à chacune de ces multiplicités correspondent deux faces de P_0.

Les cellules P obtenues de P_0 par les transformations du groupe G remplissent $\mathcal{D}$ sans jamais se recouvrir; deux cellules contiguës ont en commun une de leurs faces à trois dimensions.

Les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$ réalisent une correspondance biunivoque entre les points intérieurs de chacune des cellules P et les points du domaine D obtenu de R^4 en y considérant les multiplicités (5) comme des coupures.

D'ailleurs, les éléments du groupe G transforment le domaine $\mathcal{D}$ en lui-même; par suite, toutes les images (u, v) d'un point (x, y) de R^4 non situé sur l'une des multiplicités singulières (1), sont à l'intérieur de $\mathcal{D}$. Lorsque (u, v) décrit une courbe fermée intérieure à $\mathcal{D}$, le point (x, y) correspondant décrit aussi une courbe fermée dans R^4. Cependant, la réciproque n'est pas exacte : lorsque (u, v) décrit une courbe non fermée dont l'origine et l'extrémité sont deux points congrus par une transformation de G, le point (x, y) correspondant décrit une courbe fermée. Ainsi, une courbe fermée de R^4 correspond à une courbe fermée de $\mathcal{D}$ ou à une courbe joignant deux points congrus, suivant qu'il est possible ou non de la réduire à un point sans traverser une des multiplicités singulières (1).

Les propriétés que nous venons de rappeler justifient le nom de fonctions hyperfuchsiennes donné à $x(u, v)$, $y(u, v)$; elles montrent aussi que ces fonctions ont de nombreuses analogies avec la fonction modulaire.

10. La transformation homographique

$$(6) \qquad U = \frac{1+u}{1-u}, \qquad V = \sqrt{2}\,\frac{v}{1-u},$$

fait correspondre le domaine $u+\bar{u}+v\bar{v}\leqq 0$ à l'hypersphère

$$U\bar{U}+V\bar{V}\leqq 1.$$

En effet, si θ est un nombre réel $(0<\theta\leqq 1)$, nous avons

$$U\bar{U}+V\bar{V}-\theta=\frac{(1-\theta)(1+u\bar{u})+(1+\theta)(u+\bar{u})+2v\bar{v}}{(1-u)(1-\bar{u})};$$

pour $\theta=1$, il vient

$$U\bar{U}+V\bar{V}-1=\frac{2}{|1-u|^2}(u+\bar{u}+v\bar{v}).$$

En posant $u=u_1+iu_2$, u_1 et u_2 étant réels, nous obtenons facilement

$$U\bar{U}+V\bar{V}-\theta=\frac{1-\theta}{|1-u|^2}\left[\left(u_1+\frac{1+\theta}{1-\theta}\right)^2+u_2^2+\frac{2v\bar{v}}{1-\theta}-\frac{4\theta}{(1-\theta)^2}\right].$$

Ainsi, aux points de l'hypersphère $U\bar{U}+V\bar{V}\leqq\theta<1$, correspondent les points de l'hyperellipsoïde

$$\left(u_1+\frac{1+\theta}{1-\theta}\right)^2+u_2^2+\frac{2v\bar{v}}{1-\theta}\leqq\frac{4\theta}{(1-\theta)^2}$$

intérieur à $u+\bar{u}+v\bar{v}<0$; dans ces deux relations, les signes d'égalité se correspondent.

11. Soient $f(z, t)$ et $g(z, t)$ deux fonctions indépendantes des variables complexes z, t, holomorphes dans l'hypersphère H ayant pour équation

$$z\bar{z}+t\bar{t}<R^2;$$

elles engendrent une transformation $(f, g)=T(z, t)$. Soient

$$(a, b)=T(0, 0)$$

l'image de l'origine dans cette transformation et $J_T(0, 0)$ la valeur du jacobien en ce point. On a le théorème (F. Bureau [7]) suivant :

Si l'image de l'hypersphère H *par la transformation* T *laisse à découvert les cinq multiplicités à deux dimensions*

$$f=0,\quad f=1,\quad g=0,\quad g=1,\quad f=g, \tag{7}$$

le rayon R *de* H *est borné par un nombre qui ne dépend que de* (a, b) *et de* $|J_T(0, 0)|$.

En effet, considérons les fonctions

$$\mathcal{F}(z, t) = u[f(z, t), g(z, t)], \qquad \mathcal{G}(z, t) = v[f(z, t), g(z, t)],$$

$u(x, y)$, $v(x, y)$ étant les inverses des fonctions hyperfuchsiennes de Picard, considérées dans les paragraphes précédents. Puisque (f, g) laisse à découvert les multiplicités

$$f=0, \quad f=1, \quad f=\infty; \quad g=0, \quad g=1, \quad g=\infty; \quad f=g$$

et que les fonctions $u(f, g)$, $v(f, g)$ sont holomorphes en tout point (f, g) n'appartenant pas à ces multiplicités, les fonctions $\mathcal{F}(z, t)$, $\mathcal{G}(z, t)$ sont holomorphes en tout point de l'hypersphère H.

Effectuons maintenant la substitution (5) transformant le domaine $u+\bar{u}+v\bar{v}<0$ en le domaine $U\bar{U}+V\bar{V}<1$. La fonction u ne prenant pas la valeur 1 dans $u+\bar{u}+v\bar{v}<0$, les fonctions

$$U(z, t) = \frac{1+\mathcal{F}(z, t)}{1-\mathcal{F}(z, t)}, \qquad V(z, t) = \sqrt{2}\,\frac{\mathcal{G}(z, t)}{1-\mathcal{F}(z, t)} \tag{8}$$

sont holomorphes dans l'hypersphère H qu'elles transforment en un domaine intérieur à $U\bar{U}+V\bar{V}<1$.

Ainsi, les fonctions $U(Rz', Rt')$, $V(Rz', Rt')$ transforment le domaine $z'\bar{z}'+t'\bar{t}'<1$ en un domaine intérieur. En écrivant

$$\left\{\begin{aligned} U(Rz', Rt') &= u_0 + u_1 Rz' + u_2 Rt' + \ldots, \\ V(Rz', Rt') &= v_0 + v_1 Rz' + v_2 Rt' + \ldots, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

nous avons d'après la relation (16) du chapitre I (*cf.* § **8**)

$$R^2 |u_1 v_2 - u_2 v_1| \leqq (1 - u_0\bar{u}_0 - v_0\bar{v}_0)^{\frac{3}{2}}.$$

En posant

$$\begin{aligned} f(z, t) &= a + a_1 z + a_2 t + \ldots, \\ g(z, t) &= b + b_1 z + b_2 t + \ldots, \end{aligned}$$

on obtient aisément

$$u_0 = \frac{1 + u(a, b)}{1 - u(a, b)}, \qquad v_0 = \sqrt{2}\,\frac{v(a, b)}{1 - u(a, b)},$$

$$1 - u_0\bar{u}_0 - v_0\bar{v}_0 = -2\left[\frac{u + \bar{u} + v\bar{v}}{(1-u)(1-\bar{u})}\right]_{x=a,\, y=b},$$

$$u_1 v_2 - u_2 v_1 = 2\sqrt{2}\,(a_1 b_2 - a_2 b_1)\left[\frac{\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}}{(1-u)^3}\right]_{x=a,\, y=b},$$

et par conséquent

$$(10) \qquad R^2 \leqq \frac{1}{|J_T(0, 0)|}\left[\frac{|u + \bar{u} + v\bar{v}|^{\frac{3}{2}}}{\left|\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right|}\right]_{x=a,\, y=b}.$$

Un calcul facile montre que la quantité $|u + \bar{u} + v\bar{v}|^{\frac{3}{2}}\left|\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right|^{-1}$ est invariante pour les transformations du groupe G et par suite que la limite du rayon R donnée par la formule précédente ne dépend pas des branches choisies pour les fonctions u et v.

D'ailleurs, il existe des fonctions pour lesquelles la limite indiquée est atteinte. En effet, on sait d'après les résultats de H. Cartan et C. Carathéodory rappelés au paragraphe 3, que si le signe d'égalité a lieu dans (10), c'est que T est une transformation biunivoque du domaine en soi. En supposant pour abréger $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$, on en déduit

$$U(Rz', Rt') \equiv z', \qquad V(Rz', Rt') \equiv t'$$

ou encore

$$U(z, t) \equiv \frac{z}{R}, \qquad V(z, t) \equiv \frac{t}{R}$$

et par conséquent

$$\mathcal{F}(z, t) \equiv \frac{z - R}{z + R}, \qquad \mathcal{G}(z, t) \equiv \sqrt{2}\,\frac{t}{z + R}.$$

En utilisant les fonctions hyperfuchsiennes $x(u, v)$, $y(u, v)$ de Picard, on voit que les fonctions cherchées s'écrivent

$$f(z, t) = x\left(\frac{z - R}{z + R}, \sqrt{2}\,\frac{t}{z + R}\right),$$
$$g(z, t) = y\left(\frac{z - R}{z + R}, \sqrt{2}\,\frac{t}{z + R}\right).$$

12. Les résultats obtenus au paragraphe précédent constituent pour les transformations étudiées, un théorème d'extension analogue à celui de Landaù.

On en déduit aussitôt un théorème d'impossibilité analogue à celui de Picard. Nous l'énoncerons ainsi :

Si les fonctions $f(z, t)$, $g(z, t)$ du paragraphe précédent sont régulières dans l'hypersphère H *de rayon* R; *si a, b sont différents de* o *et de* 1 *et sont distincts entre eux et si le Jacobien $a_1 b_2 - a_2 b_1$ n'est pas nul; si de plus,* R *est supérieur à une certaine quantité ne dépendant que de a, b, $a_1 b_2 - a_2 b_1$* (*cf.* form. 10); *alors la transformation $(f, g) = \mathrm{T}(z, t)$ ne peut laisser à découvert les cinq multiplicités* (7) *à deux dimensions.*

D'ailleurs, une transformation affine permet de remplacer les multiplicités (7) par la configuration formée dans le plan complexe (z, t) par les quatre côtés d'un parallélogramme et l'une de ses diagonales.

Enfin, un changement simple de variables permet de remplacer l'hypersphère $z\bar{z} + t\bar{t} = 1$ par la variété hermitienne $\frac{\bar{z}z}{\mathrm{A}} + \frac{t\bar{t}}{\mathrm{B}} = 1$, A et B étant des constantes positives.

13. Démontrons encore un théorème de limitation analogue à celui de Schottky.

Dans les conditions énoncées au début du paragraphe **11**, *on a nécessairement dans toute hypersphère*

$$z\bar{z} + t\bar{t} < \theta < 1, \tag{11}$$

la relation

$$f\bar{f} + g\bar{g} < \mathfrak{M}(a, b; \theta)$$

$\mathfrak{M}$ étant une quantité ne dépendant que de (a, b) et de θ.

Considérons de nouveau les fonctions $\mathrm{U}(z, t)$, $\mathrm{V}(z, t)$ [*cf.* form. (8), § **11**]; elles sont holomorphes dans l'hypersphère-unité qu'elles transforment en un domaine intérieur à $\mathrm{U}\bar{\mathrm{U}} + \mathrm{V}\bar{\mathrm{V}} < 1$. En posant

$R_0^2 = u_0\bar{u}_0 + v_0\bar{v}_0$ ($R_0 > 0$) [*cf.* form. (9), § **11**], la formule (15) (*cf* chap. I, § **7**) montre que $U\bar{U} + V\bar{V}$ est borné dans l'hypersphère (11) par un nombre $M(R_0^2, \theta)$ ne dependant que de R_0^2 et de θ.

D'après ce qui a été dit au paragraphe **10**, on voit que le point $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ se trouve dans un hyperellipsoïde strictement intérieur à $u + u + v\bar{v} < 0$ et dont la position et les axes ne dépendent que de $M(R_0^2, \theta)$. Le domaine décrit par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est donc tout entier à distance finie et n'a aucun point commun avec $u + \bar{u} + v\bar{v} = 0$. Il en résulte que les points $x(u, v)$, $y(u, v)$ ne peuvent appartenir qu'à un domaine Δ intérieur au domaine D obtenu de R^4 en y considérant les multiplicités (5) comme des coupures. Ainsi l'expression $f\bar{f} + g\bar{g}$ a nécessairement une borne supérieure ne dépendant que de (a, b), de θ et des fonctions hyperfuchsiennes $x(u, v)$, $y(u, v)$.

CHAPITRE III.

Les familles normales de transformations analytiques.

14. Considérons une transformation $T \equiv T(f)$ engendrée par les fonctions

$$Z_k = f_k(z_1, \ldots, z_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

analytiques dans un domaine borné D de R_z^{2n} qu'elles transforment en un ensemble de points Δ de R_Z^{2n}.

Les résultats obtenus au chapitre précédent suggèrent d'étendre à des familles de transformations T, la théorie des familles normales de fonctions analytiques d'une variable complexe, créée par M. P. Montel.

Pour interpréter les résultats obtenus par M. P. Montel, il convient de représenter sur la sphère de Riemann ou sur le plan projectif, les valeurs prises par une fonction analytique d'une variable complexe. De même, nous représenterons sur l'espace projectif complexe C_Z^n à n dimensions, les valeurs prises par l'ensemble des fonctions $(f_1, \ldots, f_n)$. Cet espace est compact en soi et tout point (resp. tout hyperplan) peut être transformé en un point (resp. hyperplan) donné par une transformation homographique convenable.

Nous dirons qu'une suite $\mathfrak{T}$ (dénombrable ou non) de transformation $T^{(j)}$ (en abrégé : $\mathfrak{T} = \{T^{(j)}\}$) définies par des fonctions

$$(2) \qquad Z_k^{(j)} = f_k^{(j)}(z_1, \ldots, z_n) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

analytiques dans D, converge en un point $P \in D$, si la suite des points $T^{(j)}(P)$ est convergente.

Soit alors $\{P_i\}$, $(P_i \in D)$, une suite quelconque de points convergeant vers un point P de D. Nous représenterons par $\mathfrak{T}(P)$ l'ensemble des points d'accumulation des suites $\{T^{(j)}(P_j)\}$ lorsque $\{P_j\}$ varie, le point P restant fixe. Quand P décrit un domaine U, les $\mathfrak{T}(P)$ correspondants forment un certain ensemble $\mathfrak{T}(U)$; si P reste fixe, $\mathfrak{T}(P)$ est l'ensemble des points d'accumulation de la suite $\{T^{(j)}(U)\}$ lorsque le voisinage U(P) de P tend vers P.

Nous dirons que la suite $\mathfrak{T}$ des transformations $T^{(j)}$ est *régulière en* P, si $\mathfrak{T}(P)$ se réduit à un seul point; $\mathfrak{T}$ sera dite régulière dans un domaine si elle est régulière en tous les points de ce domaine.

En particulier, supposons que les suites $\{f_k^{(j)}(P)\}$ soient uniformément convergentes pour chaque valeur de k, dans un domaine D_1 et soit $f_k(P)$ la limite de cette suite; nous dirons que $\{T^{(j)}\}$ converge uniformément dans D_1 vers la transformation [2] $T \equiv T(f)$. Dans ces conditions, si $\{P_i\}$, $(P_i \in D_1)$ est une suite quelconque de points convergeant vers un point P intérieur à D_1, on a toujours

$$\lim_{j \to \infty} T^{(j)}(P) = T(P)$$

et la suite $\mathfrak{T} \equiv \{T^{(j)}\}$ est régulière dans ce domaine.

Les fonctions f_k dont il vient d'être question pouvant se réduire à des constantes, la transformation T correspondante peut être dégénérée et l'image d'un domaine à n dimensions peut être une variété analytique à moins de n dimensions ou même se réduire à un point.

Le jacobien J_T de la transformation T est la limite des jacobiens $J_{T^{(j)}}$.

---

[2] Il y a lieu de distinguer la suite $\mathfrak{T} = \{T^{(j)}\}$ et la transformation limite T.

15. Les résultats obtenus dans la théorie des familles normales de fonctions analytiques ont le plus souvent, en raison même de leur généralité, une forme qualitative. Pour les démontrer, il est donc indiqué de n'utiliser que des propriétés générales des fonctions analytiques. On sait qu'il en est bien ainsi pour les familles normales de fonctions méromorphes d'une variable complexe.

Pour étendre ces derniers résultats aux familles de fonctions analytiques de plusieurs variables, il suffit d'utiliser le théorème de R. Cacciopoli [8] d'après lequel une famille de fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, normale par rapport à chacune de ces variables, est normale par rapport à l'ensemble des variables. Il en résulte aussitôt qu'une famille de fonctions de plusieurs variables, holomorphes dans un domaine D où elles ne prennent ni la valeur o, ni la valeur 1, est normale dans ce domaine; de toute suite infinie de fonctions de cette famille, on peut extraire une suite convergeant uniformément dans tout domaine D′ complètement intérieur à D, vers une fonction limite qui peut se réduire à une constante finie ou infinie. D'ailleurs, si cette fonction limite est nulle (resp. égale à 1 ou infinie), en un point, elle est identiquement nulle (resp. identique à 1 ou infinie).

Nous dirons qu'une famille de transformations $\{T^{(j)}\}$ engendrées par des fonctions holomorphes dans un domaine D est *normale* dans ce domaine, si de toute suite infinie de transformations extraites de cette famille, on peut déduire une suite de transformations convergeant uniformément dans tout domaine D′ complètement intérieur à D, vers une transformation limite engendrée par des fonctions holomorphes pouvant éventuellement se réduire à des constantes finies ou infinies. Dans ce dernier cas, la transformation limite est dégénérée.

16. Dans C_Z^n, considérons les $\frac{n(n+3)}{2}$ hyperplans

$$(3) \qquad Z_k = 0, \qquad Z_k = 1, \qquad Z_j = Z_k \qquad (k, j = 1, \ldots, n;\ k \neq j).$$

Le théorème que nous nous proposons de démontrer est le suivant :

Une famille (dénombrable ou non) de transformations $\{T^{(j)}\}$ *engendrées par des fonctions holomorphes dans un domaine* D *est* *normale dans ce domaine, si les ensembles de points* $\{T^{(j)}(D)\}$ *n'ont quel que soit* j, *aucun point commun avec les hyperplans* (3).

Remarquons d'abord que les suites $\{f_k^{(j)}\}$ et

$$\varphi_{kr}^{(j)}=\frac{f_r^{(j)}}{f_k^{(j)}}, \qquad (k,\ r=1,\ \ldots,\ n),$$

k et r étant fixés, sont normales dans D puisque les fonctions appartenant à ces suites sont holomorphes dans D et ne prennent aucune des valeurs 0 et 1. On peut donc trouver une suite de transformations que pour abréger, nous désignerons encore par $\{T^{(j)}\}$, telle que les suites $\{f_k^{(j)}\}$ et $\{\varphi_{k,r}^{(j)}\}$ (k et r étant fixés), convergent uniformément dans tout domaine D' intérieur à D, vers des fonctions holomorphes pouvant se réduire à des constantes finies ou infinies.

D'après un théorème de M. H. Rutishauser, toute transformation limite de la suite $\{T^{(j)}\}$ est holomorphe ou possède une image située dans l'hyperplan infini ([17], p. 300, th. 26). Il en résulte que pour établir le théorème énoncé, il suffit de montrer qu'en tout point P intérieur au domaine D, la suite $\{T^{(j)}(P)\}$ ne possède qu'un seul point d'accumulation T(P).

A cet effet, désignons par $a_k (k=1,\ \ldots,\ n)$ la limite de $\{f_k^{(j)}(P)\}$ et par a_{kr}, celle de $\{\varphi_{kr}^{(j)}(P)\} (k,\ r=1,\ \ldots,\ n)$, k et r étant fixés.

Si $a_1,\ \ldots,\ a_n$ sont finis, le théorème est démontré.

Si l'un des a_k, par exemple a_1, est infini, les autres restant finis, considérons les points

$$(4) \qquad 1,\quad \varphi_{12}^{(j)}(P),\quad \ldots,\quad \varphi_{1n}^{(j)}(P),\quad [f_1^{(j)}(P)]^{-1};$$

cette suite possède un point d'accumulation T(P) qui est le point à l'infini sur la droite

$$x_2=\ldots=x_n=0.$$

Si deux des a_k, par exemple a_1, a_2, sont infinis, les autres restant finis, considérons encore la suite (4). Si $\varphi_{12}^{(j)}(P)$ tend vers une limite finie c, T(P) est le point à l'infini situé sur la droite

$$x_2=cx_1, \qquad x_3=\ldots=x_n=0.$$

Si $\varphi_{12}^{(j)}(P)$ tend vers l'infini, on considère la suite

(5) $$\varphi_{21}^{(j)}(P),\quad 1,\quad \varphi_{23}^{(j)}(P),\quad \ldots,\quad \varphi_{2n}^{(j)}(P),\quad [f_2^{(j)}(P)]^{-1}$$

et l'on voit que $T(P)$ est le point à l'infini situé sur la droite

$$x_1 = x_3 = \ldots = x_n = 0.$$

Si trois des a_k, par exemple a_1, a_2, a_3, sont infinis, considérons de nouveau la suite (4). Si $\varphi_{21}^{(j)}(P)$ et $\varphi_{23}^{(j)}(P)$ tendent vers des limites finies c_1 et c_2, $T(P)$ est le point à l'infini situé sur la droite

$$x_2 = c_1 x_1,\qquad x_3 = c_2 x_1,\qquad x_4 = \ldots = x_n = 0.$$

Si l'une des quantités c_1, c_2, par exemple c_1, est infinie, considérons la suite (5). Si $\varphi_{23}^{(j)}(P)$ tend vers une limite finie d, $T(P)$ est le point à l'infini situé sur la droite

$$x_1 = 0,\qquad x_3 = d x_2,\qquad x_4 = \ldots = x_n = 0.$$

Si d est infini, considérons la suite

(6) $$\varphi_{31}^{(j)}(P),\quad \varphi_{32}^{(j)}(P),\quad 1,\quad \varphi_{34}^{(j)}(P),\quad \ldots,\quad \varphi_{3n}^{(j)}(P),\quad [f_3^{(j)}(P)]^{-1}.$$

Puisque

$$\varphi_{31}^{(j)}(P) = \varphi_{21}^{(j)}(P)\,\varphi_{32}^{(j)}(P)$$

tend vers zéro, $T(P)$ est le point à l'infini situé sur la droite

$$x_1 = x_2 = x_4 = \ldots = x_n = 0.$$

Le même raisonnement peut être appliqué de proche en proche A titre d'exemple, supposons encore que quatre des a_k, par exemple a_1, a_2, a_3, a_4, soient infinis. Considérons encore la suite (4) et admettons que $\varphi_{12}^{(j)}(P)$, $\varphi_{13}^{(j)}(P)$ et $\varphi_{14}^{(j)}(P)$ tendent vers des limites finies c'_1, c'_2, c'_3; $T(P)$ est alors le point à l'infini situé sur la droite

$$x_2 = c'_1 x_1,\qquad x_3 = c'_2 x_1,\qquad x_4 = c'_3 x_1,\qquad x_5 = \ldots = x_n = 0.$$

Si l'une des quantités c'_i, par exemple c'_1, est infinie, considérons la suite (5). Si $\varphi_{23}^{(j)}(P)$, $\varphi_{24}^{(j)}(P)$ tendent vers des limites finies d'_1, d'_2, $T(P)$ est le point à l'infini situé sur la droite

$$x_1 = 0,\qquad x_3 = d'_1 x_2,\qquad x_4 = d'_2 x_2,\qquad x_5 = \ldots = x_n = 0.$$

Si l'une des quantités d'_1, d'_2, par exemple d'_1, est infinie, considérons la suite (6). Puisque

$$\varphi_{31}^{(j)}(\mathrm{P}) = \varphi_{21}^{(j)}(\mathrm{P})\,\varphi_{32}^{(j)}(\mathrm{P})$$

tend vers zéro, $\mathrm{T}^{(j)}(\mathrm{P})$ tend vers le point $(0, 0, 1, a_{34}, 0, \ldots, 0)$; si a_{34} est fini, $\mathrm{T}(\mathrm{P})$ est le point à l'infini situé sur la droite

$$x_1 = x_2 = 0, \qquad x_4 = a_{34}x_3, \qquad x_5 = \ldots = x_n = 0.$$

Si a_{34} est infini, considérons la suite

$$\varphi_{41}^{(j)}(\mathrm{P}),\quad \varphi_{42}^{(j)}(\mathrm{P}),\quad \varphi_{43}^{(j)}(\mathrm{P}),\quad 1,\quad \varphi_{45}^{(j)}(\mathrm{P}),\quad \ldots,\quad \varphi_{4n}^{(j)}(\mathrm{P}),\quad [f_4^{(j)}(\mathrm{P})]^{-1}.$$

Puisque

$$\begin{aligned}
\varphi_{42}^{(j)}(\mathrm{P}) &= \varphi_{32}^{(j)}(\mathrm{P})\,\varphi_{43}^{(j)}(\mathrm{P}),\\
\varphi_{41}^{(j)}(\mathrm{P}) &= \varphi_{21}^{(j)}(\mathrm{P})\,\varphi_{32}^{(j)}(\mathrm{P})\,\varphi_{43}^{(j)}(\mathrm{P})
\end{aligned}$$

tendent vers zéro, $\mathrm{T}(\mathrm{P})$ est le point à l'infini situé sur la droite

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = \ldots = x_n = 0.$$

17. Du théorème précédent, on peut déduire pour les transformations holomorphes définies dans un domaine borné, des propositions analogues aux théorèmes de Landau et de Schottky.

Rappelons d'abord que des fonctions holomorphes dans un domaine borné D et appartenant à une famille normale sont bornées en module dans leur ensemble dans tout domaine D' strictement intérieur à D, si elles sont bornées en module en un point P_0 intérieur à D. En particulier, si toutes les fonctions de la famille prennent en P_0 la même valeur a, on a quelle que soit la fonction $f(z_1, \ldots, z_n)$ de la famille

$$|f(z_1, \ldots, z_n)| \leqq \mathfrak{M}(a; \mathrm{D}'),$$

$\mathfrak{M}$ étant une constante ne dépendant que de a et de D'.

Soient alors

$$f_k(z_1, \ldots, z_n) \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

n fonctions des variables complexes $z_1, \ldots, z_n$, holomorphes dans l'hypersphère H ayant pour équation

$$z_1\bar{z}_1 + \ldots + z_n\bar{z}_n < \mathrm{R}^2;$$

elles engendrent une transformation $(f)=T(z)$ dans laquelle l'origine $(z)=(0)$ a pour image $T(0)$. Dans ces conditions, *si l'image de l'hypersphère* H *dans la transformation* T *laisse à découvert les* $\frac{n(n+3)}{2}$ *hyperplans* (3), *on a nécessairement dans toute hypersphère*

$$z_1\bar{z}_1+\ldots+z_n\bar{z}_n \leqq \theta R \qquad (0<\theta<1),$$

la relation

$$f_1\bar{f}_1+\ldots+f_n\bar{f}_n \leqq \mathfrak{M}[T(0);\theta],$$

$\mathfrak{M}$ *étant un nombre ne dépendant que de* $T(0)$ *et de* θ.

Pour démontrer cette proposition, analogue au théorème de Schottky, il suffit de considérer la famille normale des transformations $T(R)$ définies par les fonctions

$$(7) \qquad g_k(z_1, \ldots, z_n) \equiv f_k(Rz_1, \ldots, Rz_n) \qquad (k=1, \ldots, n)$$

holomorphes dans l'hypersphère-unité. En appliquant le résultat rappelé ci-dessus et en remarquant que pour toutes les transformations de la famille, l'image de l'origine est $T(0)$, on obtient la proposition annoncée.

Remarque. — On obtient encore un théorème analogue au précédent, en remplaçant l'hypersphère H par un polycylindre.

18. Nous avons déjà remarqué que la transformation limite T d'une suite de transformations analytiques $\{T^{(j)}\}$ peut être dégénérée. Cependant, si en un point P_0 intérieur à leur domaine de définition D, les transformations $T^{(j)}$ ont un jacobien $J_{T^{(j)}}(P_0)$ supérieur en module à une quantité positive, $J_T(P)$ n'est pas identiquement nul et la transformation T n'est pas dégénérée.

Dans les conditions du théorème du paragraphe précédent, *si le jacobien* $J_T(0)$ *de la transformation n'est pas nul, le rayon* R *de l'hypersphère* H *est borné par un nombre qui ne dépend que de* $T(0)$ *et de* $|J_T(0)|$.

Pour démontrer cette proposition analogue au théorème de Landau, considérons la famille normale des transformations $T^{(R)}$ [*cf.* (7)]. Les jacobiens de $T^{(R)}$ et de T sont liés par la relation

$$R^n J_T = J_{T^{(R)}}.$$

Or dans le polycylindre $|z_k| \leq \frac{1}{\sqrt{2n}}$ $(k = 1, \ldots, n)$ intérieur à l'hypersphère de centre origine et de rayon $\frac{1}{2}$, on a

$$|g(z_1, \ldots, z_n)| < \mathfrak{M}[\mathrm{T}(0)],$$

$\mathfrak{M}$ ne dépendant que de $\mathrm{T}(0)$. D'après le théorème de Cauchy, on a aussi

$$\left|\frac{\partial g_k}{\partial z_j}\right| < \sqrt{2n}\,\mathfrak{M}[\mathrm{T}(0)].$$

Il résulte alors d'un théorème de Hadamard que

$$|\mathrm{J}_{\mathrm{T}(\mathrm{R})}| < 2^{\frac{n}{2}} n^n \{\mathfrak{M}[\mathrm{T}(0)]\}^n$$

et par suite

$$\mathrm{R} < \frac{\sqrt{2}\,n\,\mathfrak{M}[\mathrm{T}(0)]}{|\mathrm{J}_{\mathrm{T}}(0)|^{\frac{1}{n}}}. \tag{8}$$

Remarque. — Pour préciser la quantité $\mathfrak{M}$ intervenant dans (8), il faut utiliser des fonctions analogues aux fonctions hyperfuchsiennes de Picard (*cf.* chap. II du présent Mémoire). Ces fonctions paraissent liées aux fonctions hypergéométriques de n variables de G. Lauricella [14] et au problème de la représentation conforme d'un demi-plan sur un polygone de $n+3$ côtés étudié par Schläfli [18].

19. La représentation des valeurs prises par les fonctions $(f_1, \ldots, f_n)$ sur un espace projectif C^n à n dimensions permet d'étendre la notion de normalité à des familles de transformations engendrées par des fonctions méromorphes. Comme l'a fait remarquer M. H. Rutishaùser [17], si l'on applique à toutes les transformations de la famille, une transformation homographique arbitraire S, l'image d'un point P par une transformation limite T est évidemment ST(P).

Dès lors, pour obtenir des énoncés plus généraux, il suffit d'appliquer une transformation homographique convenable à l'ensemble formé par l'hyperplan à l'infini et les $\frac{n(n+3)}{2}$ hyperplans (3).

En particulier, pour $n=2$, les variétés linéaires que laissent à découvert les fonctions définissant les transformations, peuvent être représentées dans le plan complexe par les côtés d'un quadrilatère et deux de ses diagonales.

Enfin, si une famille de transformations holomorphes n'est pas normale dans un domaine, il existe au moins un point en lequel elle n'est pas normale. Par une division de l'espace C^n analogue au « pavage » imaginé par M. P. Montel dans l'étude des fonctions entières d'une variable, on montre qu'il existe pour les transformations engendrées par des fonctions entières indépendantes, des demi-droites analogues aux demi-droites J des fonctions entières.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. Alezais, *Sur une classe de fonctions hyperfuchsiennes et sur certaines substitutions linéaires qui s'y rapportent* (*Thèse*, Paris, 1901).

[2] P. Appell, *Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables* (*J. Math. pures et appl.*, 3ᵉ série, t. **8**, 1882, p. 173-216).

[3] P. Appell et J. Kampé de Fériet, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques*, Paris, Gauthier-Villars, 1926.

[4] H. Behnke und P. Thullen, *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen* (*Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Bd. **3**, 1934).

[5] L. Bieberbach, *Beispiel zweier ganzer Funktionen zweier komplexer Variabeln, welche eine schlicht volumtreue Abbildung des* R_4 *auf einen Teil seiner selbst vermitteln* (*Sitzb. Preuss. Akad. Wiss.*, 1933, p. 476-479).

[6] S. Bochner and W. T. Martin, *Several complex variables*, Princeton University Press, 1948.

[7] F. Bureau, *Sur les systèmes de deux fonctions uniformes de deux variables complexes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **197**, 1933, p. 1574-1576).

[8] R. Caccioppoli, *Sulle famiglie normali di funzioni analitiche di due variabili* (*Rendiconti del Seminario matematico della R. Università di Padova*, t. **4**, 1933, p. 111-121).

[9] C. Carathéodory, *Uber die Abbildungen, die durch Systeme von analytischen Funktionen von mehreren Veränderlichen erzeugt werden* (*Math, Z*, Bd. **34**, 1932, p. 758-792).

[10] H. Cartan, *Sur les fonctions de deux variables complexes. Les transformations d'un domaine borné* D *en un domaine intérieur à* D (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. **58**, 1930, p. 199-219).

[11] P. Fatou : *a. Sur les fonctions méromorphes de deux variables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **175**, 1922, p. 862-865).

b. Sur certaines fonctions uniformes de deux variables (*Ibid.*, p. 1030-1033).

[12] G. Julia, *Sur les familles de fonctions analytiques de plusieurs variables* (*Acta Math.*, t. **47**, 1926, p. 53-115).

[13] J. Kampé de Fériet, *Sur l'uniformisation des fonctions hypergéométriques de M. Appell au moyen des fonctions modulaires de M. Picard* (*J. Math. pures et appl.*, 9e série, t. **8**, 1929, p. 381-399).

[14] G. Lauricella, *Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili* (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. **7**, 1893, p. 111-158).

[15] P. Montel, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, Paris, Gauthier-Villars, 1927.

[16] É. Picard : *a. Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 2e série, t. **10**, 1881, p. 305-322).

b. Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables (*Ibid.*, 3e série, t. 2, 1885, p. 357-384).

c. Sur des fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires (*Acta Math.*, t. **2**, 1883, p. 114-135).

d. Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies à indéterminées conjuguées et sur les fonctions hyperfuchsiennes correspondantes (*Ibid.*, t. 5, 1884, p. 121-182).

e. Leçons sur quelques équations fonctionnelles, Paris, Gauthier-Villars, 1928.

[17] H. Rutishaüser, *Uber Folgen ùnd Scharen von analytischen ùnd meromorphen Funktionen mehrerer Variabeln, sowie von analytischen Abbildùngen* (*Acta Math.*, t. **83**, 1950, p. 249-325).

[18] Schäfli, *Uber die allgemeine Möglichkeit der konformen Abbildùng einer von Geraden begrenzten ebenen Figùr in eine Halbebene* (*J. reine angew. Math.*, t. **78**, 1874, p. 63-80).

[19] W. Saxer, *Uber die normalen Scharen meromorphen Funktionen mehrerer Variablen* (*Comment. Math. Helv.*, vol. **4**, 1932, p. 256-267).