

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES BOULIGAND

Sur les parallélismes généralisés

Journal de mathématiques pures et appliquées 9^e série, tome 31 (1952), p. 141-159.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1952_9_31__141_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Sur les parallélismes généralisés;

PAR GEORGES BOULIGAND.

Les principes généraux dont s'inspire l'œuvre de Paul Montel avoisinent ceux de la méthode directe en Calcul des variations et ceux que requiert l'étude générale des correspondances. Visant surtout à en projeter la lumière sur les objectifs les plus concrets, l'auteur des *Leçons sur les familles normales* ne pouvait manquer de témoigner sa ferveur à des recherches, telles que les études de C. Juel sur la *Géométrie finie*, par lesquelles se préparait l'avènement de méthodes directes en théorie des surfaces.

Je voudrais reprendre ici comme introduction à d'autres travaux, certains cas particuliers de la théorie des TC (transformations de contact) pour montrer leur aptitude à poser des questions voisines de celles que je viens de citer.

1. Depuis un temps appréciable, cette dernière théorie a plus affermi ses liens avec d'autres problèmes que clarifié ses principes. Pour voir qu'il est opportun d'y revenir, raisonnons par exemple dans l'espace ordinaire, que décrit un point de coordonnées rectangulaires (x, y, z) . Si le nombre des équations directrices donne un partage objectif en *classes* pour les TC qui sont analytiques, ce chef de distinction devient caduc si l'on veut aligner la théorie sur celle des fonctions de variables réelles. On peut prendre la relation

$$[(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 - \rho^2(x, y, z)] \\ + \varphi^2(x, y, z) [A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z)]^2 = \psi^2(x, y, z).$$

pour équation directrice, unique pour $\psi \neq 0$, d'une TC. Supposons

que ψ et ρ puissent s'annuler sur certains *ouverts*. Là où ψ et ρ s'annulent ensemble, la transformation se réduit à l'identité. De plus, on peut faire en sorte que ψ , ρ , φ aient partout des dérivées partielles continues jusqu'à un ordre arbitrairement élevé, fixé d'avance. On varie facilement cet exemple (remplacer chaque somme de carrés par une fonction ≥ 0 , ne s'annulant qu'avec *tous* ses arguments; composer avec une transformation ponctuelle la TC précédente, etc.). Cela montre bien qu'il y a des TC définies par des fonctions dérivables jusqu'à un ordre quelconque et pour lesquelles la classe *ne reste pas partout la même*. Cet exemple ne donne d'ailleurs qu'une idée sommaire des possibilités s'offrant ici; ce que montrera la fin de notre exposé.

Sans donner la première place à ce genre de difficultés, le présent travail s'inspirera de la technique par laquelle on pourrait les surmonter; cette technique se présente si l'on définit une TC indépendamment des équations directrices par un procédé général qui m'a permis (*voir* le n° 6) de distinguer certains éléments de contact du second ordre, sous le nom d'*éléments critiques* de cette TC. Rappelons encore qu'en théorie des surfaces, dès le départ, les TC sont impliquées par le recours plus ou moins explicite à l'idée des *surfaces parallèles*. Le parallélisme des plans tangents aux surfaces S , S_l décrites par les extrémités M et M_l d'un segment de longueur constante l , lequel reste normal en M à S , est une propriété valable moyennant des hypothèses à bien préciser: à cet égard, la voie de recherche la plus naturelle consiste à déterminer la différentielle géométrique, lorsqu'elle existe, du vecteur unitaire de la normale en M à S ; d'où l'idée de faire intervenir la représentation sphérique.

Nous prendrons ici le *parallélisme* sous la forme plus générale qu'introduit une géométrie de Minkowski, soit au sens strict, c'est-à-dire avec indicatrice convexe, soit au sens large, c'est-à-dire sans supposer cette convexité (*voir* n° 2). Ce type de TC est inclu dans la classe plus étendue des TC *faisant passer d'un plan à un plan parallèle*, soit, en bref, la classe des TCP. Pour expliciter celle-ci, partons d'un de ses éléments, soit τ : les pôles d'un plan antécédent et du plan parallèle conséquent par rapport à la quadrique

$$2z = x^2 + y^2,$$

sont deux points d'une même parallèle à Oz ; et ainsi, comme l'entraînera d'une manière immédiate le procédé général pour caractériser les TC, l'élément τ se réduit à une transformation ponctuelle, du type

$$X_1 = x_1, \quad Y_1 = y_1, \quad Z_1 = f(x_1, y_1, z_1),$$

d'où

$$P_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z_1}, \quad Q_1 = \frac{\partial f}{\partial y_1} + q_1 \frac{\partial f}{\partial z_1}.$$

Les équations de τ sont donc (outre $P = p$ et $Q = q$) les suivantes :

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{\partial f}{\partial p}(p, q, u) + x \frac{\partial f}{\partial u}(p, q, u) \\ Y &= \frac{\partial f}{\partial q}(p, q, u) + y \frac{\partial f}{\partial u}(p, q, u) \\ Z &= pX + qY - f(p, q, u) \end{aligned} \right\} \text{ avec } u = px + qy - z.$$

2. La classe des TCP est plus générale que celle des parallélismes dans les diverses géométries de Minkowski. En effet, soit (\mathcal{C}) une surface coupée en un seul point par chaque demi-droite issue d'une origine fixe O . Dans la géométrie de Minkowski d'indicatrice (\mathcal{C}) , une surface parallèle à une autre surface (S) s'obtient ainsi : faisons correspondre à chaque point M de (S) un point m de (\mathcal{C}) où le plan tangent à cette dernière surface soit parallèle à celui de (S) en M . Menons alors par M un vecteur $\overrightarrow{MM_l}$ soumis à la condition d'égalité géométrique

$$(E) \quad \overrightarrow{MM_l} = l \overrightarrow{Om},$$

où l désigne une constante. L'extrémité M_l décrit une nouvelle surface (S_l) , pour laquelle, moyennant hypothèses de dérivabilité, on montre que le plan tangent en M_l est parallèle à celui de (S) en M . C'est le passage d'un élément de contact de (S) en M à celui de (S_l) en M_l qui constitue le parallélisme en question. On a bien ainsi une TCP, mais elle se particularise du fait suivant : *de deux plans parallèles, pris comme surfaces antécédentes, on déduit par cette TCP un nouveau couple de plans parallèles, lequel équivaut, à une translation près, au premier couple.* Noter, que dans (E) , \overrightarrow{Om} est une fonction

vectorielle de l'élément de contact de (\mathcal{C}) au point M ; noter aussi que le second membre de E est linéaire en l .

3. Il est alors naturel de rechercher les TC définies par une égalité géométrique du type

$$\overrightarrow{OM} = \vec{\tau}_0(x, y, z, p, q) + l \vec{\tau}_1(x, y, z, p, q),$$

où $\vec{\tau}_0, \vec{\tau}_1$ sont deux fonctions vectorielles bien déterminées de l'élément (x, y, z, p, q) et où l est un paramètre. Ces TC peuvent évidemment s'obtenir en composant avec une TC quelconque, mais indépendante de l , qui sera faite d'abord, l'une des TC définies par une égalité géométrique du type

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + l \vec{\tau}(x, y, z, p, q),$$

où m désigne maintenant le point (x, y, z) . Cette nouvelle famille de TC contient la transformation identique, obtenue pour $l=0$. Cherchons à la déterminer. A cette fin, donnons d'abord le procédé annoncé par lequel on peut caractériser une TC quelconque. Ce problème sera traité dans un espace linéaire à $n+1$ dimensions, soit L_{n+1} , auquel s'étendent, quel que soit n , toutes les remarques précédentes.

4. Soit donc à préciser le type des relations vectorielles

$$(1) \quad \overrightarrow{OM} = \vec{\Theta}(x_1, \dots, x_n, z; p_1, \dots, p_n)$$

qui, dans un L_{n+1} , conduisent à une TC. L'opérateur $\vec{\Theta}$ sera supposé tel que ses composantes soient des fonctions ayant des dérivées partielles du premier ordre, en dépendance continue de l'élément de contact. La méthode suivie fera retrouver, par voie géométrique, une forme de condition déjà rencontrée par A. Ostrowski ⁽¹⁾.

Lorsque m décrit une variété $z = z(x_1, \dots, x_n)$, variété qui sera dite une n -surface, car sa dimension est n , la relation (1) impose à M

(1) *Bull. Amer. Math. Soc.*, 47, 1941, p. 760-763.

d'en décrire une autre dont le n -plan tangent est, sous réserve, celui que déterminent les vecteurs

$$\vec{V}_i = \frac{\partial M}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial M}{\partial z} + p_{i1} \frac{\partial M}{\partial p_1} + \dots + p_{in} \frac{\partial M}{\partial p_n},$$

avec

$$i = 1, 2, \dots, n \quad \text{et} \quad p_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial x_j},$$

On peut introduire les $2n$ vecteurs *primaires* (c'est-à-dire ne contenant que des dérivées premières) qui sont respectivement

pour le lot n° I :

$$\frac{\partial M}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial M}{\partial z}, \quad \dots, \quad \frac{\partial M}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial M}{\partial z};$$

pour le lot n° II :

$$\frac{\partial M}{\partial p_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial M}{\partial p_n}.$$

Fixant m et laissant arbitraires les p_1, \dots, p_n , on aurait une variété image dont le n -plan tangent serait déterminé par les primaires du lot n° II. De même, déplaçant m dans un n -plan où p_1, \dots, p_n restent constants, on aurait une variété image dont le n -plan tangent serait déterminé par les primaires du lot n° I. D'après quoi, pour obtenir par $\vec{\Theta}$ une TC, il *faut* que les $2n$ vecteurs primaires soient dans un n -plan. Et cela *suffit*, car ainsi, le n -plan contenant les \vec{V}_i ne dépendra pas des p_{ij} , sous réserve que ce n -plan soit déterminé, et que par exemple, pour le cas $n = 2$, soient de ce fait écartées les circonstances provoquant l'apparition de points-pinces, arêtes de rebroussement, points coniques, etc.

En définitive, la condition obtenue, d'après laquelle la matrice des composantes pour les $2n$ vecteurs des lots I et II doit être de rang n , rentre bien dans la ligne des préoccupations formulées au n° 1. Peu importe à cet égard qu'on sache ou non si la transformation considérée provient ou non d'un nombre assigné *a priori* d'équations directrices.

5. Appliquons maintenant cette condition à la recherche des TC définies (cf. n° 3) par une égalité géométrique du type

$$(2) \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + l \vec{\tau}(x_1, \dots, x_n, z; p_1, \dots, p_n).$$

Dans ce cas, l'opérateur $\vec{\Theta}$ du n° 4 dépend de l . Il faudra donc écrire que la condition du n° 4 est vérifiée quel que soit l : à savoir, qu'il y a dépendance pour tout l , des primaires d'un des lots vis-à-vis de ceux de l'autre. Or, pour $l=0$, on n'a ainsi que n vecteurs $\neq 0$, provenant des opérateurs $\frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial z}$. Pour $i=1$, par exemple, on trouve les composantes

$$1, 0, \dots, 0, p_1.$$

Tous ces vecteurs sont donc orthogonaux à \vec{H} , de composantes $(p_1, \dots, p_n, -1)$ d'où les conditions

$$\Phi_i = 0, \quad F_j = 0 \quad (i, j, 1, 2, \dots, n),$$

obtenues en annulant les produits scalaires

$$\Phi_i = \vec{H} \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial p_i}, \quad F_j = \vec{H} \left(\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial x_j} + p_j \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z} \right).$$

Ces conditions expriment que le n -plan tangent au lieu du point m a même direction que celui au lieu du point N défini par

$$(3) \quad \overrightarrow{ON} = \vec{\tau}(x_1, \dots, x_n, z; p_1, \dots, p_n).$$

Elles entraînent en outre que le passage de l'élément de contact $(x_1, \dots, x_n, z; p_1, \dots, p_n)$ au point N introduit une TC qui est une TCP, car elle conserve l'orthogonalité d'un n -plan au vecteur \vec{H} . On trouvera, comme au n° 1 que $\vec{\tau}$ a des composantes de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial p_i}(p_1, \dots, p_n, u) + x_i \frac{\partial f}{\partial u} \quad (\text{avec } i=1, 2, \dots, n)$$

et

$$p_1 \left(\frac{\partial f}{\partial p_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial u} \right) + \dots + p_n \left(\frac{\partial f}{\partial p_n} + x_n \frac{\partial f}{\partial u} \right) - f.$$

En projetant la relation (2) sur les $n + 1$ axes, on aura donc

$$\begin{aligned} X_i &= x_i \left(1 + l \frac{\partial f}{\partial u} \right) + l \frac{\partial f}{\partial p_i}, \\ Z &= z \left(1 + l \frac{\partial f}{\partial u} \right) + l \left(u \frac{\partial f}{\partial u} - f + p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \dots + p_n \frac{\partial f}{\partial p_n} \right). \end{aligned}$$

On tire de ces $n + 1$ équations

$$p_1 X_1 + \dots + p_n X_n - Z = lf + u.$$

Si l'on veut, de chaque couple de plans parallèles, déduire par cette transformation un nouveau couple de tels plans, lequel soit équivalent au précédent à une translation près, il faut et il suffit que f soit indépendant de u . On obtient alors, pour les X_i , Z les expressions simplifiées (2)

$$(4) \quad \begin{cases} X_i = x_i + l \frac{\partial f}{\partial p_i}, \\ Z = z + l \left(p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \dots + p_n \frac{\partial f}{\partial p_n} - f \right) \quad (\text{avec } P_i = p_i). \end{cases}$$

Dès lors, si m décrit une n -surface $z = \varphi(x_1, \dots, x_n)$, en la paramétrant au moyen des coefficients p_1, \dots, p_n de son n -plan tangent, on trouve aisément

$$x_i = \frac{\partial \psi}{\partial p_i}, \quad z = p_1 \frac{\partial \psi}{\partial p_1} + \dots + p_n \frac{\partial \psi}{\partial p_n} - \psi,$$

(2) Noter que la méthode exposée à la fin du n° 1 pour aboutir aux équations générales d'une TCP, méthode qui tablait sur une conséquence très immédiate de la condition obtenue au n° 3, et qui se laisse généraliser aisément à un nombre quelconque de dimensions permet d'effectuer en raccourci l'intégration du système des $2n$ équations aux dérivées partielles

$$\Phi_i = 0, \quad F_j = 0,$$

où figurent $n + 1$ fonctions inconnues. Le résultat pourrait d'ailleurs se retrouver en traitant ce système par les méthodes usuelles.

Notons enfin que toute famille linéaire de transformations de contact contenant la transformation identique forme un groupe d'après les résultats précédemment obtenus.

d'où résulte bien la propriété pour la TC introduite par les équations (4) d'être un parallélisme au sens du n° 2.

6. Définissons, pour une TC, caractérisée par l'existence d'un n -plan contenant les $2n$ vecteurs primaires du n° 4, ce que j'appelle *éléments critiques* de cette TC. Supposons que le point $m(x_1, \dots, x_n, z)$ décrive une variété $z = z(x_1, \dots, x_n)$ et prenons ses éléments de contact du second ordre, qui sont nécessaires à la formation des vecteurs $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_n$ par lesquels se détermine, dans les cas normaux, le n -plan tangent à la variété image. Il en sera bien ainsi quand la matrice des composantes de ces vecteurs est exactement de rang n : c'est le cas *normal*. Je dirai qu'un élément de contact du second ordre de $z = z(x_1, \dots, x_n)$ est *critique* si cette matrice est de rang $\leq n - 1$ ⁽³⁾.

Considérons dans un L_{n+1} , une *variété cloison*, c'est-à-dire coupant localement l'espace en chacun de ses points, laquelle soit un continu d'éléments du second ordre. Cette variété aura donc, moyennant des axes adéquats, une représentation locale $z = z(x_1, \dots, x_n)$ à second membre bidérivable continûment. A une région de cette variété pour laquelle chaque élément du second ordre est normal, correspond dès lors, en vertu de la théorie classique des fonctions implicites, une région de la variété image à paratingent n -planaire. Mais cette propriété sera en général compromise s'il se présente un élément critique. Pour en donner un exemple, il suffit d'examiner, dans l'espace euclidien à trois dimensions ($n = 2$) le cas du parallélisme ordinaire. Les centres de courbure principaux d'une surface (S), situés sur les normales à (S) suffisamment voisine d'une normale donnée, décrivent alors deux surfaces (H) et (K) qui sont les développées de (S) et des (S_i) parallèles à (S). Or on peut retrouver de tels systèmes (S), (H), (K) en partant d'une surface (H), laquelle soit un continu d'éléments de contact d'ordre suffisamment élevé (3 par exemple) et d'une famille à 1 paramètre de géodésiques Γ de H (elle aussi, suffisamment régulière). Les tangentes à ces géodésiques forment une congruence douée de surfaces orthogonales,

(3) C. R. Acad. Sc., t. 232, 1951, p. 911 et 1791; t. 254, 1952, p. 909.

à savoir (S) et les (S_l). Les normales développables de (S) ayant leurs arêtes de rebroussement sur (K) sont circonscrites à (H) le long de courbes conjuguées des géodésiques Γ. Les tangentes aux Γ, en les divers points où les coupe une de ses conjuguées, engendrent une des normales développables de S, normale coupée par S suivant une trajectoire orthogonale Ω de ses génératrices rectilignes. On engendre alors S par les développantes des Γ s'appuyant sur Γ; ce qui, d'après la disposition d'ensemble des développantes d'une Γ, fait prévoir, pour une certaine (S_l) parallèle à (S), une arête de rebroussement sur (H). Cette arête provient sur (S) d'une courbe E de cette surface lieu des points où l'un des rayons de courbure principaux est constant.

Plus généralement, si l'on prend dans un L₃ la TC définie par

$$X = x + l \frac{\partial f}{\partial p}, \quad Y = y + l \frac{\partial f}{\partial q}, \quad Z = z + l \left(p \frac{\partial f}{\partial q} + q \frac{\partial f}{\partial p} - f \right),$$

et si l'on décrit la surface $z = \varphi(x, y)$, on obtient le lieu E des points de cette surface, fournissant des éléments de contact qui soient critiques pour la valeur l , en annulant le déterminant

$$D(l) = \begin{vmatrix} 1 + l \left(r \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + s \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} \right) & l \left(r \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} + s \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \right) \\ l \left(s \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + t \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} \right) & 1 + l \left(s \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} + t \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \right) \end{vmatrix},$$

ce qui exprime en effet la proportionnalité, pour les vecteurs \vec{V}_1, \vec{V}_2 du n° 4 (vecteurs contenus dans un plan parallèle à $\zeta = p\xi + q\eta$), de leurs deux premières composantes. Tout le long de la courbe E de cette surface, lieu des points où $D(l)$ s'annule pour un l donné, \vec{V}_1 et \vec{V}_2 sont alors colinéaires. Ils ne déterminent donc plus le plan tangent à l'image de $z = \varphi(x, y)$. Dès lors, si aux deux fonctions X, Y, ci-dessus de x, y (définies par l'entremise de $p = \varphi_x, q = \varphi_y$) on peut en adjoindre une autre

$$T = \theta(x, y),$$

où, par exemple, on essaiera de prendre θ linéaire en x, y , et cela de manière telle que la matrice des dérivées partielles

$$(M) \quad \left\| \begin{array}{ccc} X_x & Y_x & T_x \\ X_y & Y_y & T_y \end{array} \right\|$$

(calculées en retenant la dépendance de p, q vis-à-vis de x, y) contienne un déterminant d'ordre 2 qui ne soit pas nul; dans l'espace X, Y, T les équations

$$X = x + l \frac{\partial f}{\partial p}, \quad Y = y + l \frac{\partial f}{\partial q}, \quad T = \theta(x, y),$$

fournissent dans ces conditions la représentation paramétrique d'une surface Σ douée d'un plan tangent continu. De la correspondance entre le point (x, y) et un point de Σ . on passe en projetant Σ sur le plan $T = 0$ à la transformation de plan à plan

$$X = x + l \frac{\partial f}{\partial p}, \quad Y = y + l \frac{\partial f}{\partial q}.$$

Il intervient dans celle-ci, sur le plan des X, Y , une ligne frontière fournie par le contour apparent de Σ en projection : c'est la courbe image de la ligne $D(l) = 0$, obtenue en projetant E sur le plan des xy . Cette ligne frontière était, dans l'exemple de l'alinéa précédent, la projection de l'arête de rebroussement de S_l sur le plan xOy . Sans y insister, on voit qu'elle gardera ce rôle et qu'on aura de même ses projections sur les plans des X, Z et des Y, Z , chaque fois qu'on pourra, en posant

$$\theta = \alpha x + \beta y,$$

choisir les constantes α, β de manière que l'hypothèse supposée vérifiée par la matrice (M) le soit aussi par les deux matrices analogues

$$(M') \quad \left\| \begin{array}{ccc} X_x & Z_x & T_x \\ X_y & Z_y & T_y \end{array} \right\|$$

et

$$(M'') \quad \left\| \begin{array}{ccc} Y_x & Z_x & T_x \\ Y_y & Z_y & T_y \end{array} \right\|.$$

Tout ceci découle, à titre local, de méthodes que j'ai déjà suivies

en pareil cas (*), lesquelles se compliqueraient dès que la ligne $D(l) = 0$ n'est plus formée aux environs du point initial par un arc à paratingente unique.

En définitive, le cas $n = 2$ fait prévoir que, sauf en des cas exceptionnels, lorsqu'on prend l'image d'une variété cloison présentant un élément critique, la propriété de paratingent n -planaire sur l'élément correspondant de la variété image est en général compromise. La circonstance la plus fréquente est alors celle d'un paratingent qui englobe toutes directions.

7. Nous allons maintenant poursuivre dans un L_{n+1} l'étude des parallélismes généralisés définis par les équations (4) du n° 3 : cela dans le cas où la variété cloison décrite par le point de coordonnées

$$\xi_1 = \frac{\partial f}{\partial p_1}, \quad \dots, \quad \xi_n = \frac{\partial f}{\partial p_n}, \quad \zeta = p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \dots + p_n \frac{\partial f}{\partial p_n} - f,$$

variété qui n'est autre que l'indicatrice de notre géométrie de Minkowski, est *convexe* au voisinage d'un certain point. Cela entraîne le fait que cette indicatrice, dans la dite portion, est toujours d'un même côté de son n -plan tangent, et si f a des dérivées secondes continues, la propriété pour la forme quadratique

$$Q = \sum_{i,j} u_i u_j \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j}$$

(sommation étendue à tous arrangements i, j de $1, 2, \dots, n$)

d'être une forme définie. En appelant (\mathcal{C}) cette indicatrice, nous parlerons de la (T)-géométrie qu'elle détermine, et dans laquelle on introduit la (\mathcal{C})-longueur, réduite à l'unité pour un vecteur issu de l'origine et se terminant sur (\mathcal{C}), aussi bien que les (\mathcal{C})-normales à une surface, invariantes par translation, communes à deux surfaces ayant en commun un élément de contact du premier ordre (pour le point où elles se touchent), et portées le long de (\mathcal{C}) elle-même par le rayon vecteur.

(*) *Bull. Sc. Math.*, t. 61, 1937, p. 47-54. Cet article précise notamment les conditions d'existence d'une arête de rebroussement pour l'enveloppe d'une famille de surfaces à deux paramètres.

Cela posé, soit (S) un morceau de surface qu'une correspondance par n -plans tangents parallèles met en relation biunivoque avec (\mathcal{C}), ou plus exactement, avec la région de cette indicatrice où elle reste convexe. Les (\mathcal{C})-normales correspondantes à (S) forment une *congruence*, c'est-à-dire une famille à n paramètres. Je me propose alors d'établir le théorème suivant, qui généralise le résultat obtenu quand (\mathcal{C}) est une n -sphère.

Sur chaque génératrice de la congruence des (\mathcal{C})-normales émanées d'un point de (S), il y a n points focaux réels.

Puisqu'il s'agit d'une propriété locale, on peut supposer que (S) est donnée sous la forme

$$z = \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

La congruence de l'énoncé est alors définie par les équations (4) où l est le paramètre fixant un point sur une de ses droites. Les p_i deviennent ainsi des fonctions de x_1, \dots, x_n ; tenant compte de cette dépendance dans (4), les points focaux seront déterminés par l'équation

$$\frac{D(X_1, \dots, X_n, Z)}{D(x_1, \dots, x_n, l)} = 0.$$

Or chaque dérivée partielle de Z , prise dans les conditions susdites par rapport aux x_i ou par rapport à l s'obtient comme somme de n termes dont chacun est le produit de p_i par la dérivée correspondante de X_i . Cette équation se réduit donc à la suivante :

$$\frac{D(X_1, \dots, X_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = 0,$$

formée en retenant la dépendance des p_i vis-à-vis des x_j , c'est-à-dire à l'équation définissant les valeurs de l pour lesquelles l'élément de contact du second ordre défini avec les x_k , les p_i , les p_{ij} est un élément critique. Ce qui donne

$$D(l) = \begin{vmatrix} 1 + lA_{11} & lA_{12} & lA_{1n} \\ lA_{21} & 1 + lA_{22} & lA_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ lA_{n1} & lA_{n2} & 1 + lA_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

en posant

$$\Lambda_{ij} = p_{i1} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_1} + p_{i2} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_2} + \dots + p_{in} \frac{\partial^2 f}{\partial p_j \partial p_n} \quad \text{et} \quad l = -\frac{1}{s}.$$

La résolution de l'équation générale $D(l) = 0$ se ramène à celle de l'équation en s d'une substitution linéaire s'offrant comme le produit de deux autres, dont chacune est définie par une matrice symétrique. Les deux matrices mises en cause sont d'une part, celle des p_{ij} , d'autre part celle des $\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j}$. Cela posé, étant parti de coordonnées rectangulaires, prenons pour nouveaux axes les directions principales de la transformation attachée à la matrice des $\frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j}$. Celle-ci prend le type diagonal, ce qui réduit à un seul monome chaque élément de la matrice produit. Dès lors, dans les nouveaux axes, la forme quadratique Q envisagée au début du présent paragraphe se ramène au type

$$a_1 \bar{u}_1^2 + a_2 \bar{u}_2^2 + \dots + a_n \bar{u}_n^2,$$

où les a_1, a_2, \dots, a_n sont d'un même signe. Ainsi l'équation $D(l) = 0$ donne les valeurs de l pour lesquelles la forme

$$l \sum_{ij} p'_{ij} u_i u_j + \frac{u_1^2}{a_1} + \frac{u_2^2}{a_2} + \dots + \frac{u_n^2}{a_n}$$

a son discriminant nul. Ainsi, la démonstration de réalité annoncée rejoint celle analogue pour les racines de l'équation en s du cas classique (matrice symétrique) moyennant un changement de variables

$$u_1 = \sqrt{|a_1|} v_1, \quad \dots, \quad u_n = \sqrt{|a_n|} v_n.$$

On voit ici l'intervention d'un lemme d'algèbre, établissant la réalité des racines de l'équation en s provenant de la substitution linéaire produit de deux autres dont chacune a sa matrice symétrique, l'une de ces deux substitutions étant attachée à une forme quadratique définie.

8. Le résultat précédent introduit à diverses questions qu'il est intéressant d'approfondir dans le cas $n = 2$, en prenant pour l'indica-

trice (\mathcal{T}) une surface fermée convexe, qui sera *considérée à titre global*. Cette nouvelle convention introduira, dans l'étude locale des normales à (S) , certaines modalités. Soit toujours O le point origine auquel est attaché (\mathcal{T}) . Soit ϖ_m le plan tangent à (S) en celui de ses points désigné par m . La surface (\mathcal{T}) admet deux plans tangents parallèles à ϖ_m , plans dont les points de contact viennent en q_1, q_2 quand, par la translation \overrightarrow{Om} , on passe de (\mathcal{T}) à (\mathcal{T}_m) : les plans en question, devenus ϖ_1, ϖ_2 , seront imaginés horizontaux. Des transformées (\mathcal{T}_1) et (\mathcal{T}_2) de (\mathcal{T}_m) par les translations

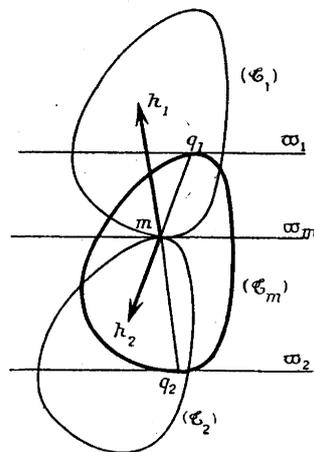
$$\overrightarrow{mh_1} = -\overrightarrow{mq_2}, \quad \overrightarrow{mh_2} = -\overrightarrow{mq_1} \quad (\text{respect.}),$$

la première amène m en h_1 situé par rapport à ϖ_m du même côté que ϖ_1 (en dessus), et la seconde amène m en h_2 sous ϖ_m . Une définition acceptable, c'est-à-dire englobant celle du cas où (\mathcal{T}) est une sphère de centre O , consiste à poser que les demi-droites mh_1, mh_2 sont les (\mathcal{T}) semi-normales à S en m au-dessus et au-dessous. De la sorte, l'enveloppe des translitées de (\mathcal{T}_m) suivant un vecteur arbitraire de ϖ_m se compose de ϖ_1 et ϖ_2 . La semi-normale commune en q_1 à ϖ_1 et à (\mathcal{T}_m) est relative au côté 2 de ϖ_1 , et par suite est équipollente à mh_2 : elle passe par le point m . Même propriété pour la semi-normale commune en q_2 à ϖ_2 et à (\mathcal{T}_m) . Cela montre l'objectivité de la définition choisie, en faisant retrouver par elle une propriété familière s'offrant pour l'enveloppe des sphères de rayon constant ayant leurs centres dans un plan fixe ⁽⁵⁾. On pourrait d'ailleurs généraliser cette propriété en faisant décrire à m au lieu du plan ϖ_m , une surface σ_m aux courbures normales assez petites pour que l'enveloppe des (\mathcal{T}_m) se compose de deux surfaces, σ_1 décrite par q_1 et σ_2 décrite par q_2 ,

(5) Cette objectivité se confirme quand on prend par exemple la surface qu'engendre, en tournant autour de Oz , l'ensemble du plan $y=0$ formé des points $0 \leq x < 1$ de Ox et de ceux de la ligne $z^2 = (x-1)^2(2-x)$, ou une surface isotope de la précédente. Pour la continuité sur une telle surface des (T) -semi-normales, il faut en chaque point de la partie provenant du disque introduire sur les deux faces deux semi-normales ayant la disposition précisée ci-dessus.

points où les plans tangents à ces surfaces seraient parallèles à celui en m de σ_m et pour que chaque (\mathcal{E}_m) possède effectivement, avec cette enveloppe, les deux points de contact q_1 et q_2 . La couche d'espace comprise entre σ_1 et σ_2 , serait alors la frontière du domaine réunion des domaines limités par les (\mathcal{E}_m) . Et voici la propriété annoncée : passage en m des semi-normales à σ_1 en q_1 du côté 2 et à σ_2 en q_2 du côté 1, la figure (m, \mathcal{E}_m) étant translatée de (O, \mathcal{E}) .

Pour avoir deux semi-normales se prolongeant quel que soit le point m sur (S) , il suffit de supposer que (\mathcal{E}) ait pour centre de



symétrie le point origine auquel elle est attachée. Mais, en général, cela n'ayant pas lieu, on aura des surfaces à *normales réfractées*.

Supposons d'abord S convexe. On a deux points focaux réels sur chaque droite du support d'une semi-normale; relativement au plan tangent à (S) , ces deux points, pour l'une ou l'autre droite sont situés du côté où se trouve (S) . D'après la définition précédente, sur les quatre points ainsi obtenus, on doit exclure les deux situés sur une demi-droite prolongeant une semi-normale pour ne conserver que les deux autres. Si l'on prend (S) à courbures opposées, on a un point focal réel sur chaque semi-normale proprement dite, c'est-à-dire de part et d'autre de (S) . Et en effet, pour ces divers cas, l'équation $D(l) = 0$ prend la forme rencontrée au n° 6. Pour chaque congruence

de droites provenant d'une des familles de semi-normales, on a donc une équation du type

$$1 + Al + (rt - s^2) \left[\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} \right)^2 \right] l^2 = 0.$$

On a toujours deux racines réelles qui sont de même signe pour $rt - s^2 > 0$, et de signes opposés pour $rt - s^2 < 0$, ce qui correspond aux deux cas ci-dessus. Mis à part le cas parabolique $rt - s^2 = 0$, chaque réunion de deux demi-droites formant une normale réfractée porte donc un couple de points focaux réels à distance finie ⁽⁶⁾.

9. Jusqu'ici, on a supposé que la surface convexe (\mathcal{C}) soit douée de courbures normales. Cela entraîne notamment que le paratingent en chaque point de (\mathcal{C}) est plan. Il n'y a donc pas sur (\mathcal{C}) de points coniques au sens étroit (points où le contingent se réduit à une nappe de cône convexe, ce dernier n'incluant jamais deux demi-tangentes opposées, et à ce titre, se laissant inclure dans un cône de révolution); il n'y a pas non plus sur (\mathcal{C}) de points coniques au sens large, points où le contingent serait formé par les deux faces d'un dièdre, et par suite pas de lignes en saillant. On pourrait chercher à étendre la théorie du parallélisme minkowskien au cas où (\mathcal{C}) est, sans plus, la frontière d'une région convexe. L'intervention d'une hypothèse de caractère aussi général exerce une profonde influence sur les propriétés de la famille de TC qu'on obtient de cette manière : les effets de ce genre exigent une étude minutieuse si l'on veut aborder la question dans toute son ampleur. Nous chercherons donc surtout ce qui se produit lorsque, sur la surface (\mathcal{C}) la continuité des plans tangents est compromise soit par la présence d'un seul point conique (au sens étroit), soit par la présence d'une seule ligne saillante, en s'en tenant à certains cas de cette circonstance.

Le cas d'un point conique γ intervenant sur (\mathcal{C}) comme singularité

(6) Pour abrégé, l'exposé à invoquer la *courbure normale*, comme si, avant l'étude minkowskienne, le matériel de surfaces introduit était contrôlé au moyen de la géométrie différentielle métrique. Celle-ci n'a qu'un rôle apparent : car, en géométrie linéaire, borner $|r|$, $|s|$, $|t|$ sur un morceau de surface, sans fixer les bornes, a un caractère invariant.

isolée se traite d'une manière immédiate. Chaque élément de contact (m, ϖ) dont le plan ϖ est parallèle à un plan d'appui de (\mathcal{C}) au point γ (il est donc aussi parallèle à celui d'une section bornée du cône des demi-tangentes, ou encore à celui d'un plan passant par son sommet γ et ne contenant aucune de ces demi-droites) est purement et simplement translaté. Au vecteur de la translation on peut attribuer pour origine le point O vis-à-vis duquel (\mathcal{C}) joue le rôle d'indicatrice, et pour extrémité un point de la demi-droite $O\gamma$. Par ce processus, apparaît un certain champ d'éléments de contact, champ laissé invariant par une translation arbitraire, les parallélismes obtenus pour les éléments du champ se réduisent donc chacun à une translation. Étant donné une portion de surface σ dont tout élément de contact est un élément du champ, le fait que γ est unique sur (\mathcal{C}) implique cette propriété simple : la dégénérescence du parallélisme n'a lieu que d'un côté de σ . La distinction entre deux côtés sur un élément de contact prend donc ici plus d'importance que dans le cas ordinaire. On la réalise en établissant une correspondance par plans tangents parallèles entre \mathcal{C} et une autre surface fermée convexe $(\mathcal{C})^*$ ayant partout son paratingent plan. Il est toujours loisible de la supposer douée d'un centre de symétrie : hormis γ , auquel il correspond une petite aire sur $(\mathcal{C})^*$, il y a correspondance biunivoque entre (\mathcal{C}) et $(\mathcal{C})^*$. Les deux faces d'un élément de contact (m, ϖ) sont alors représentées par deux éléments de contact e_1 et e_2 , translatsés de (m, ϖ) et empruntés à $(\mathcal{C})^*$: ils seront, d'après ce qui précède, symétriques par rapport au centre de $(\mathcal{C})^*$. On convient alors d'adjoindre à chacun d'eux le demi-espace contenant $(\mathcal{C})^*$. Cela fait, on revient par translation à l'élément initial, pour lui adjoindre, en partant de e_1 ou de e_2 , un demi-espace.

Si les seules singularités de (\mathcal{C}) sont des points coniques γ , il leur correspond sur $(\mathcal{C})^*$ un système d'aires non empiétantes. L'ensemble de ces points singuliers est donc dénombrable. A chaque point γ correspond en un point un ensemble continu de plans, ayant chacun un côté distingué, passant par ce point. Et ces divers continus sont deux à deux disjoints. Les directions de plans (avec côté distingué) qu'ils mettent en jeu se translatsent dans le passage d'un point à un autre et l'on voit ainsi se multiplier pour une surface convexe telle

que $(\mathcal{C})^*$ à paratingent partout plan les aires sur lesquelles les TC étudiées deviennent dégénéréscentes pour un côté de cette surface. L'ensemble de ces aires peut devenir partout dense sur $(\mathcal{C})^*$ ⁽⁷⁾.

10. Le cas où (\mathcal{C}) présente, à l'exclusion de toute autre singularité, une ligne saillante unique λ ne sera considéré ici que pour (\mathcal{C}) frontière de ce que j'appellerai, dans un sens élargi, une *lentille* biconvexe. Je précise cette notion qualitative : les discontinuités du plan tangent à (\mathcal{C}) sont localisées le long d'un cycle partageant la surface (\mathcal{C}) en deux calottes simplement connexes; on suppose que ce cycle, jouant le rôle de ligne λ , admet en chaque point p une paratingente unique $t'pt$. Pour tout point p de λ , les plans contenant $t'pt$ et qui sont plans d'appui de (\mathcal{C}) en ce point sont les plans situés à l'extérieur d'un dièdre ouvert Δ_p d'arête $t'pt$, et défini par la condition que tout plan déterminé par $t'pt$ et un point de ce domaine diédral coupe (\mathcal{C}) en un point distinct de p , au moins. Soient f_p, f'_p les faces de Δ_p et soit K le fermé convexe intersection de tous les fermés diédraux f_p, f'_p obtenus quand p décrit λ . Pour tout point à distance finie ou à l'infini, pris en dehors de K , la ligne λ est la directrice du cône Γ circonscrit à (\mathcal{C}) ayant pour sommet ce point, et ainsi, Γ est convexe. Dans ces conditions précises, à chaque point m et à toute direction de plan ϖ telle que les plans parallèles à ϖ , touchant λ , soient des plans d'appui de (\mathcal{C}) , correspond une ligne, qui indépendamment du choix de m sur la surface à transformer se déduit par la

⁽⁷⁾ Ceci conduit à considérer une correspondance par plans tangents parallèles entre (\mathcal{C}) , pourvue de points coniques et une (S) qui soit partout à paratingent plan comme résultant de deux correspondances de ce type, l'une entre (\mathcal{C}) et $(\mathcal{C})^*$, l'autre entre $(\mathcal{C})^*$ et (S).

En revenant à des hypothèses de régularité dans la répartition des plans tangents aux surfaces que nous allons mettre en cause, on aperçoit alors la propriété suivante :

Si l'on compose deux parallélismes généralisés, l'un d'indicatrice (\mathcal{C}') , l'autre d'indicatrice (\mathcal{C}'') (convexes ou non), la TCP (cf. n° 2) ainsi obtenue est encore un parallélisme généralisé. Ce résultat découle immédiatement de la transformation, par un parallélisme généralisé, d'un couple de plans parallèles en un couple translaté.

translation \overrightarrow{Om} d'une des homothétiques de λ par rapport à O . Pour les parallélismes étudiés, la dégénérescence locale ici obtenue *se rattache au processus des transformations de seconde classe*.

Cela montre en définitive que, dans le cas général évoqué au début du n° 9 où coexistent les points γ et un ensemble de lignes saillantes λ , pouvant présenter une grande complexité (par exemple, le cas d'une surface de révolution fait voir que la réunion de ces λ peut être partout dense), on sera conduit de la manière la plus naturelle à des TC de classe variable : sans analyser ici à fond le mécanisme général de répartition des valeurs de la classe dans le champ pentadimensionnel des éléments de contact, on peut y noter une circonstance qui ne se réalisait pas sur l'exemple donné au début du n° 1 : dans cet exemple, le partage des éléments se faisait exclusivement d'après l'appartenance à trois ensembles ponctuels disjoints des points qui sont les supports ponctuels de ces éléments. Or ici, les choses se passent d'une manière tout à fait différente. C'est dans l'espace (x, y, z, p, q) qu'il convient de formuler la loi de répartition en classes, loi dont l'objectivité résulte des exemples qui précèdent.

