JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES BOURION

Sur le prolongement analytique des séries lacunaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 31 (1952), p. 127-140.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1952_9_31__127_0>

Sur le prolongement analytique des séries lacunaires ;

Par Georges BOURION.

Le présent travail étudie le prolongement analytique des fonctions définies par un développement de Taylor qui présente une infinité de lacunes de largeur relative bornée inférieurement ([1]). Les exemples classiques de séries de Taylor ultraconvergentes sont formés à partir de séries de polynomes; les fonctions obtenues sont définies dans un domaine simplement connexe ([2]) et ne peuvent être prolongées au dehors. Pour obtenir des fonctions dont le domaine d'existence ne soit pas assujetti à cette restriction, il est naturel d'avoir recours aux méthodes de Le Roy et Lindelöf telles qu'elles ont été appliquées par M. Carlson et M. Pólya.

Dans la première partie, j'applique ces méthodes à la formation de quelques exemples de séries lacunaires définissant des fonctions qui peuvent être prolongées dans un certain voisinage du point à l'infini. J'indique ensuite quelles conséquences on peut tirer, pour le prolongement analytique des séries lacunaires, des théorèmes de M^lle^ Cartwright sur les zéros des fonctions entières. Les résultats obtenus m'amènent enfin à étudier la structure des séries de Taylor dont le domaine d'ultraconvergence comprend un cercle entaillé soit selon un segment de droite ou un arc de courbe, soit selon une pointe suffisamment fine.

([1]) Je réserverai ici le nom de « séries lacunaires » aux développements de cette nature. Pour les propriétés des séries lacunaires que j'aurai à utiliser et pour les indications bibliographiques, je renvoie à l'exposé publié dans les *Actualités scientifiques* (G. Bourion [1]).

([2]) Dans le plan non complété par le point à l'infini.

En apportant ces quelques compléments à des recherches antérieures auxquelles M. Montel a bien voulu s'intéresser, je suis heureux de lui exprimer ici ma respectueuse gratitude.

A.

1. Résumons d'abord ce qu'il nous sera nécessaire de savoir sur les possibilités de prolongement analytique par les méthodes de Le Roy et Lindelöf ([3]). Nous introduirons deux variables complexes w et z; le plan de la variable w sera fermé par adjonction du point à l'infini et la notion de domaine simplement connexe devra dans la suite être interprétée relativement au plan ainsi complété.

Partons d'une fonction entière $\varphi(z)$ qui appartient au type moyen de l'ordre *un*. Introduisons son indicatrice de croissance

$$h(\theta) = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\log|\varphi(r e^{i\theta})|}{r}$$

ainsi que le diagramme indicateur $\mathcal{J}$, intersection de la famille des demi-plans fermés $\{P_\theta\}$ définis par $\mathcal{R}(z e^{-i\theta}) \leqq h(\theta)$. Nous supposerons essentiellement que *la hauteur de $\mathcal{J}$ est plus petite que* 2π :

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) + h\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leqq 2\pi.$$

Soit $\mathcal{C}$ le lieu du point $w = e^\zeta$ quand le point ζ parcourt l'ensemble $\mathcal{K}$ symétrique de $\mathcal{J}$ par rapport à l'axe imaginaire : $\mathcal{C}$ est un ensemble fermé et borné, dont le complémentaire $\mathcal{E}$ par rapport au plan complet est un domaine simplement connexe; $\mathcal{E}$ contient l'origine et renferme un angle de sommet zéro et d'ouverture $2\pi - \left[h\left(\frac{\pi}{2}\right) + h\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

Ceci posé : *la fonction analytique $f(w)$, définie au voisinage de l'origine par le développement de Taylor*

$$\varphi(0) + \varphi(1)\, w + \ldots + \varphi(n)\, w^n + \ldots,$$

([3]) *Voir* Lindelöf [7], F. Carlson [2] et surtout G. Pólya [10]; les énoncés de M. Pólya sont relatifs à un développement autour du point à l'infini, d'où quelques différences de forme.

peut être prolongée analytiquement — de façon nécessairement uniforme — *dans $\mathcal{E}$ tout entier* ([4]).

— $f(w)$ a pour développement autour du point à l'infini

$$\varphi(-1)\frac{1}{w}+\varphi(-2)\frac{1}{w^2}+\ldots+\varphi(-n)\frac{1}{w^n}+\ldots.$$

Réciproquement, soit une fonction $f(w)$ définie et régulière (point à l'infini compris) dans un domaine $\mathcal{E}'$ à complémentaire $\mathcal{C}'$ borné; nous supposerons $f(w)$ nulle à l'infini. Si $\mathcal{E}'$ contient l'origine et renferme un angle de sommet zéro, $f(w)$ peut être définie par le procédé indiqué, à partir d'une fonction $\varphi(z)$ convenablement choisie, dans un domaine $\mathcal{E}$ contenu dans $\mathcal{E}'$ ([5]).

2. Pour obtenir une fonction $f(w)$, régulière dans un domaine $\mathcal{E}$ contenant le point à l'infini, et dont le développement à l'origine présente des lacunes de largeur relative bornée inférieurement, il suffit de disposer convenablement des zéros de $\varphi(z)$.

On pourra prendre

$$\varphi(z)=\prod_{\substack{4^k\leq n<2.4^k\\ k=0}}^{k=\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right),$$

$\varphi(z)$ est du type moyen de l'ordre 1, et son diagramme indicateur est contenu dans un cercle de rayon inférieur à π; sa hauteur est donc bien inférieure à 2π. On vérifie ce fait par un calcul élémentaire en introduisant le produit infini complémentaire $\psi(z)$ que l'on peut définir par

$$\varphi(z)\,\psi(z)=\frac{\sin\pi z}{\pi z}.$$

([4]) Il n'est naturellement pas dit que le prolongement de $f(w)$ dans une partie de $\mathcal{C}$ soit impossible, ni que ce prolongement ne puisse introduire dans $\mathcal{E}$ ou une partie de $\mathcal{E}$ de nouvelles branches de $f(w)$.

([5]) On pourra définir le complémentaire $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ en prenant l'enveloppe convexe $\mathcal{K}$ d'une image $\mathcal{K}'$ de $\mathcal{C}'$ dans le plan $\log w$, puis en revenant au plan w. $\mathcal{E}$ renferme donc l'angle de sommet zéro contenu dans $\mathcal{E}'$.

La comparaison d'un groupe de facteurs de $\varphi(z)$ avec le groupe immédiatement antérieur pris dans $\psi(z)$ donne

$$\varphi(iy) \leqq (1+y^2)[\psi(iy)]^2, \qquad \text{d'où} \qquad [\varphi(iy)]^3 \leqq (1+y^2)\left[\frac{\sin\pi i y}{\pi i y}\right]^2$$

et par suite

$$\overline{\lim_{|y|\to\infty}} \frac{\log|\varphi(iy)|}{|y|} \leqq \frac{2\pi}{3}.$$

Cette évaluation grossière nous suffira (6).

Il est à noter (*voir* plus loin § B) que le diagramme indicateur de $\varphi(z)$ ne se réduit pas à un segment de l'axe imaginaire. On trouve en effet, pour $x_k = 2\sqrt{2}.4^k$ et k assez grand,

$$\frac{\log|\varphi(x_k)|}{x_k} > 0{,}094\ldots$$

et par suite

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\log|\varphi(x)|}{x} > 0.$$

3. D'une façon plus générale, examinons ce que l'on peut obtenir à partir de la fonction $\varphi(z) = \prod^{*}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$, où l'étoile indique que le produit infini porte sur tous les entiers n contenus dans les intervalles $n_k \leqq n < m_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, les n_k et m_k vérifiant la condition $\underline{\lim} \frac{m_k}{n_k} > 1$. On peut supposer d'emblée $\overline{\lim} \frac{m_k}{n_k}$ finie et $\overline{\lim} \frac{n_{k+1}}{m_k} > 1$ (7). Je remplacerai cette dernière condition par la

(6) Elle peut facilement être améliorée, mais de toute façon cette limite supérieure surpasse $\frac{\pi}{2}$ (*voir* ci-après § **4**).

(7) La première de ces conditions est imposée par le théorème d'Ostrowski, d'après lequel une série où la largeur relative des lacunes n'est pas bornée supérieurement définit une fonction dont le domaine d'existence est simplement connexe et ne contient pas le point à l'infini (A. Ostrowski [8]). La seconde est nécessaire d'après l'étude des coefficients d'une série ultraconvergente (*voir* G. Bourion [1]) ou encore d'après le théorème de Fabry. On pourrait d'ailleurs les retrouver l'une et l'autre en poussant l'étude de cet exemple.

condition plus restrictive $\varliminf \frac{n_{k+1}}{m_k} > 1$; je supposerai donc que pour $k \geqq k_0$:

$$\Lambda \geqq \frac{m_k}{n_k} \geqq \lambda > 1, \qquad \frac{n_{k+1}}{m_k} \geqq \mu > 1.$$

Comme

$$|\varphi(z)| \leqq \varphi(i|z|) \leqq \frac{\operatorname{sh}\pi|z|}{\pi|z|},$$

$\varphi(z)$ est au plus du type moyen de l'ordre 1. D'autre part, il résulte de l'inégalité de Jensen que $\lim \frac{\log M(r)}{r} = 0$ exige $\lim \frac{n(r)}{r} = 0$, et même que $\varliminf \frac{\log M(r)}{r} = 0$ exige $\varliminf \frac{n(r)}{r} = 0$. En appliquant le premier résultat à $\varphi(z)$ et le second à $\psi(z)$ définie par $\varphi(z).\psi(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}$, on voit que l'indicatrice de $\varphi(z)$ vérifie $0 < h\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) < \pi$; $\varphi(z)$ a donc bien les propriétés voulues.

On obtient une majoration grossière mais suffisante de $h\left(\pm \frac{\pi}{2}\right)$ en reprenant un raisonnement déjà employé : la comparaison des facteurs de $\varphi(z)$ pour lesquels $n_k \leqq n < m_k$ et des facteurs de $\psi(z)$ pour lesquels $m_{k-1} \leqq n < n_k$ montre que, P désignant un polynome qui est un produit partiel de $\varphi(z)$,

$$\varphi(iy) \leqq P(iy)\,\psi(iy)^{\frac{\Lambda-1}{1-\frac{1}{\mu}}}, \qquad \text{d'où} \qquad \varphi(iy)^{1+\frac{\Lambda-1}{1-\frac{1}{\mu}}} \leqq P(iy)\left(\frac{\sin \pi i y}{\pi i y}\right)^{\frac{\Lambda-1}{1-\frac{1}{\mu}}}$$

et enfin

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) \leqq \frac{\Lambda - 1}{\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) + (\Lambda - 1)}\pi.$$

En prenant Λ voisin de 1, on peut donc obtenir par ce procédé des fonctions $f(w)$ pour lesquelles l'ensemble $\mathcal{C}$ hors duquel se fait le prolongement est contenu dans un cercle de rayon arbitrairement petit ([8]).

([8]) On sait, par l'étude de l'ultraconvergence, que $\mathcal{C}$ ne peut se réduire à un point. On retrouve ce résultat en observant que la fonction entière $\varphi(z)$ associée

Par un raisonnement analogue, si l'on suppose que pour k assez grand $\frac{n_{k+1}}{m_k} < \mathrm{M}$, on obtient

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) \geqq \frac{1-\frac{1}{\lambda}}{(\mathrm{M}-1)+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)}\pi.$$

Cette borne inférieure peut être rendue voisine de π par choix convenable de M et λ. Par conséquent, *il existe des séries lacunaires ponr lesquelles l'angle dans lequel peut se faire le prolongement analytique vers le point à l'infini est arbitrairement petit.*

4. Il n'est peut-être pas inutile de remarquer que pour les fonctions $\varphi(z)$ envisagées ici, $\frac{\log\varphi(iy)}{|y|}$ *ne tend certainement pas vers une limite quand y croît indéfiniment.* Ce fait peut être mis en évidence en exprimant $\log\varphi(iy)$ au moyen d'une intégrale portant sur une fonction oscillante : si $\omega_k(y)$ désigne l'angle sous lequel on voit du point $z = iy$ le segment (n_k, m_k) de l'axe réel, on a en effet

$$\log\varphi(iy) = 2\int_0^y \left[\sum_k \omega_k(t)\right] dt - \Theta(y),$$

avec

$$\Theta(y) = \sum_k \theta_k \log\left(1+\frac{y^2}{n_k^2}\right) \qquad (0 < \theta_k < 1),$$

d'où

$$\Theta(y) = o(y).$$

L'inexistence de cette limite peut aussi être déduite d'un théorème de Paley et Wiener (9), d'après lequel l'existence de $\lim\limits_{|y|\to\infty} \frac{\log\varphi(iy)}{|y|}$ entraînerait celle de

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{+r} \frac{\log|\varphi(x)|}{x^2}\,dx,$$

à une série lacunaire du type indiqué vérifie $\overline{\lim}\,\frac{n(r)}{r} > 0$ et a par conséquent trop de zéros pour appartenir au type minimal de l'ordre 1.

(9) Paley et Wiener [9], th. XXII, p. 70.

et d'un théorème de Levinson ([10]) assurant dans ces hypothèses l'existence de $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r}$.

5. Revenons sur les fonctions $\varphi(z)$, pour lesquelles le rapport $\frac{n_{k+1}}{m_k}$ n'est pas borné. Soit (K) une suite partielle de valeurs de k pour laquelle ce rapport croisse indéfiniment; prenons pour chacune de ces valeurs de k un intervalle (ρ_k, σ_k), de telle sorte que $\frac{\rho_k}{m_k}\to\infty$, $\sigma_k > \rho_k$, $\frac{\sigma_k}{n_{k+1}}\to 0$. Pour $|z| = r$, $\rho_k < r < \sigma_k$, écrivons $\varphi(z) = P_1 P_2$, où P_1 est formé par les facteurs pour lesquels $n < m_k$.

On a

$$\begin{aligned}\log|P_1| &\leq \sum_{1\leq n<m_k}\log\left(1+\frac{r^2}{n^2}\right)\leq \log(1+r^2)+\int_1^{m_k}\log\left(1+\frac{r^2}{u^2}\right)du\\ &\leq m_k\log\left(1+\frac{r^2}{m_k^2}\right)+2\int_1^{m_k}\frac{r^2}{r^2+u^2}\,du\\ &\leq m_k\log\left(1+\frac{r^2}{m_k^2}\right)+2m_k.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\log|P_2|\leq\sum_{n\geq n_{k+1}}\log\left(1+\frac{r^2}{n^2}\right)\leq\sum_{n\geq n_{k+1}}\frac{r^2}{n^2}\leq\frac{r^2}{n_{k+1}-1}.$$

On obtient donc pour $\frac{\log|P_1|}{r}$ et $\frac{\log|P_2|}{r}$ des majorations qui tendent vers zéro quand r croît indéfiniment dans les conditions indiquées. Par conséquent,

$$\lim_{|z|\to\infty}\frac{\log|\varphi(z)|}{|z|}=0.$$

Pour $k\in(K)$, donnons maintenant à z une valeur réelle positive $x_k = pm_k$, p fixe, $p>\sqrt{2}$. Observons que l'on obtient une évaluation par défaut de $|\varphi(x_k)|$ si l'on néglige des facteurs $1-\frac{z^2}{n^2}$ avec $n < x_k:\sqrt{2}$ et si l'on ajoute des facteurs avec $n > x_k:\sqrt{2}$. Donc

$$|\varphi(x_k)|\geq Q_1Q_2,\qquad \text{où}\quad Q_1=\prod_{n_k\leq n<m_k}\left(\frac{x_k^2}{n^2}-1\right),\qquad Q_2=\prod_{n\geq n_{k+1}}\left(1-\frac{x_k^2}{n^2}\right).$$

([10]) N. Levinson [5], lemme 11.2, p. 35.

On a

$$\log Q_1 = \sum_{n_k \leqq n < m_k} \log\left(\frac{x_k^2}{n^2} - 1\right) > \int_{n_k}^{m_k} \log\left(\frac{x_k^2}{u^2} - 1\right) du,$$

d'où

$$\frac{1}{x_k} \log Q_1 > \int_{\frac{n_k}{x_k}}^{\frac{m_k}{x_k}} \log\left(\frac{1}{v^2} - 1\right) dv \geqq \int_{\frac{1}{\lambda_p}}^{\frac{1}{p}} \log\left(\frac{1}{v^2} - 1\right) dv.$$

Par ailleurs, puisque $\log(1-u) > -2u$ pour $0 < u < \frac{1}{2}$:

$$\log Q_2 = \sum_{n \geqq n_{k+1}} \log\left(1 - \frac{x_k^2}{n^2}\right) \geqq -2 \sum_{n \geqq n_{k+1}} \frac{x_k^2}{n^2},$$

d'où

$$\frac{1}{x_k} \log Q_2 \geqq -\frac{2x_k}{n_{k+1} - 1} = -2p \frac{m_k}{n_{k+1} - 1}.$$

On tire de là

$$\varliminf_{k \to \infty} \frac{1}{x_k} \log|\varphi(x_k)| \geqq \int_{\frac{1}{\lambda_p}}^{\frac{1}{p}} \log\left(\frac{1}{v^2} - 1\right) dv$$

et à plus forte raison

$$h(0) = \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \log|\varphi(x)| > 0.$$

Une fonction $\varphi(z)$ de cette nature ne peut donc *mener à une fonction $f(w)$ définie dans le plan muni d'une fente radiale* ([11]).

6. La méthode que nous avons exposée donne des fonctions $f(w)$ dont le développement autour du point à l'infini est aussi lacunaire. Il est facile de la modifier pour faire disparaître cette particularité; on peut, par exemple, remplacer les facteurs $1 - \frac{z^2}{n^2}$ par des facteurs $\left(1 - \frac{z}{n}\right)\left(1 + \frac{z}{n + \frac{1}{2}}\right)$, ce qui ne modifie pas le diagramme indicateur.

On peut aussi remplacer les facteurs $1 - \frac{z^2}{n^2}$ par des facteurs $1 - \frac{z^3}{n^3}$

([11]) *Voir* B.

ou encore $1-\frac{z^p}{n^p}$ ($p \geqq 3$, p impair); mais dans ce cas, le produit étendu à toutes les valeurs de n donne une fonction entière dont le diagramme indicateur n'est pas contenu dans le cercle de rayon π, et le procédé ne réussit que si l'on prend la largeur des lacunes assez petite par rapport à celle des créneaux qui les séparent (Λ assez petit devant μ).

L'emploi des facteurs $1-\frac{z^2}{n^2}$ menait à un diagramme indicateur plus haut que large; avec les facteurs $1-\frac{z^p}{n^p}$ on peut obtenir un diagramme indicateur différant peu d'un cercle [12].

B.

1. Considérons une fonction $\varphi(z)$, du type moyen de l'ordre 1, dont le diagramme indicateur soit un segment $a \leqq x \leqq b$ de l'axe réel. Alors $h(\theta)$ est sinusoïdale dans chacun des deux angles $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{3\pi}{2}$; il résulte d'un théorème de M^lle^ Cartwright [13] que dans un angle d'ouverture inférieure à π ayant pour bissectrice, soit le demi-axe réel positif, soit le demi-axe réel négatif, le nombre des zéros de $\varphi(z)$ de module inférieur à r est un $o(r)$. Une fonction $\varphi(z)$ de l'espèce indiquée ne peut donc correspondre à une fonction $f(w)$ à développement lacunaire.

Un développement de Taylor lacunaire ne peut donc définir une fonction $f(w)$ qui soit holomorphe dans le plan complet muni d'une fente radiale.

En faisant appel à une forme un peu plus précise du théorème cité,

---

[12] Mais si l'on essaie de faire croître p avec le rang k de l'intervalle pour obtenir un diagramme circulaire, la fonction $\varphi(z)$ obtenue vérifie $\overline{\lim}\, \frac{n(r)}{r} = \infty$; elle est par conséquent du type maximum.

[13] M. L. Cartwright [3], th. I, p. 507.

on montre de même qu'un développement de Taylor à structure lacunaire ne saurait définir une fonction $f(w)$ qui soit holomorphe et uniforme dans le plan non complété par le point à l'infini et muni d'une fente radiale.

Un autre théorème de M^lle Cartwright (14) implique qu'une fonction $\varphi(z)$ qui a pour diagramme indicateur un segment $-a \leqq y \leqq a$ de l'axe imaginaire, avec $a < \pi$, ne peut vérifier $\varphi(n) = 0$ pour tous les entiers positifs n appartenant à des intervalles $n_k \leqq n \leqq m_k$ de largeur relative bornée inférieurement.

Un développement de Taylor lacunaire ne peut donc définir une fonction $f(w)$ holomorphe dans le plan complet muni d'une coupure selon un arc de la circonférence-unité.

Cet énoncé se généralise comme le précédent pour un développement à structure lacunaire.

On peut résumer ces résultats en disant que *l'ensemble complémentaire $\mathcal{C}$ a certainement des points intérieurs.*

Par ailleurs, $\varphi(z)$ ne peut avoir, dans un secteur circulaire correspondant à un angle où son indicatrice $h(\theta)$ est sinusoïdale, qu'un nombre $o(r)$ de zéros. Ceci *interdit que $\mathcal{C}$ puisse présenter sur le cercle de convergence un point anguleux* en lequel aucune des demi-tangentes à $\mathcal{C}$ ne soit portée par la tangente au cercle.

C.

Pour les séries lacunaires où la largeur relative des lacunes n'est pas bornée supérieurement, la question du prolongement analytique a été complètement résolue par M. Ostrowski (15) : la fonction définie par une telle série peut être prolongée dans un domaine qui est simplement connexe (dans le plan non complété par le point à l'infini) et qui n'est astreint à aucune autre condition. Dans le cas où la largeur relative des lacunes est bornée supérieurement, on sait assez

(14) M. L. Cartwright [4], th. V, p. 42.
(15) A. Ostrowski [8].

peu de choses sur le domaine d'existence ou la surface de Riemann [16] de la fonction définie par la série. Le paragraphe précédent donne quelques renseignements à ce sujet en indiquant des formes interdites pour le domaine d'existence.

Je vais maintenant donner des résultats allant dans le même sens, mais de caractère local [17], en étudiant l'influence de certains caractères du domaine d'ultraconvergence sur la répartition des valeurs des coefficients de la série.

1. Supposons que le domaine d'ultraconvergence de la suite $\{s_{n_k}\}$ de sommes partielles découpe sur la circonférence (c) : $z = r$, $r > 1$, un ensemble dont le complémentaire ait une mesure (longueur) inférieure à $2\pi\delta$; enfermons ce complémentaire dans un ensemble ouvert (q) de mesure $4\pi\delta$. Sur (c) hors de (q), les s_{n_k} sont bornés dans leur ensemble : $|s_{n_k}| \leqq K$. On a, d'autre part, sur (c) la majoration $\frac{1}{n}\log|s_n| < \log r + \varepsilon_n$, où $\{\varepsilon_n\}$ est une suite de nombres tendant vers zéro.

Sur un cercle concentrique (γ) de rayon ρ : $1 < \rho < r$, on aura par conséquent

$$\frac{1}{n_k}\log|s_{n_k}| < \omega\log\rho + \eta_k,$$

ω désignant le maximum sur (γ) de la mesure harmonique de la partie (q) de (c), et η_k étant la plus grande des deux quantités ε_{n_k} et $\frac{K}{n_k}$.

On tire de là par l'évaluation classique de Cauchy

$$|a_m| \leqq \frac{\max\limits_{|z|=\rho}|s_{n_k}|}{\rho^m} \qquad \text{pour} \quad m \leqq n_k;$$

---

[16] J'emploie l'expression « domaine d'existence » lorsque la surface de Riemann est à un seul feuillet.

[17] C'est-à-dire : ne faisant intervenir que le comportement du domaine d'existence dans un cercle un peu plus grand que le cercle de convergence du développement considéré.

en observant d'autre part que la formule de Poisson donne pour ω la majoration $2\,\delta\,\dfrac{r+\rho}{r-\rho}$:

$$\frac{1}{m}\log|a_m| \leqq 2\,\delta\,\frac{r+\rho}{r-\rho}\lambda\log r - \log\rho + \lambda\eta_k \qquad \text{pour} \quad \frac{1}{\lambda}n_k \leqq m \leqq n_k.$$

Posons $r = 1 + t$, $\delta = \varphi(t)$, puis $\rho = 1 + \tau$. Si l'on suppose d'emblée $t < 0,5$ et $\tau < \frac{t}{2}$, on aura

$$\frac{1}{m}\log|a_m| \leqq 6\,\frac{\varphi(t)}{t-\tau}\lambda\log(1+t) - \log(1+\tau) + \lambda\eta_k \qquad \text{pour} \quad \frac{1}{\lambda}n_k \leqq m \leqq n_k,$$

où η_k qui dépend de r, donc de t, tend vers zéro lorsque t est fixé et que k croît indéfiniment.

Si nous convenons de choisir τ de telle sorte que $(1+\tau)^2 = 1 + t$, nous aurons

$$\frac{1}{m}\log|a_m| \leqq \left[12\,\frac{\varphi(t)}{t}\lambda - \frac{1}{2}\right]\log(1+t) + \lambda\eta_k \qquad \text{pour} \quad \frac{1}{\lambda}n_k \leqq m \leqq n_k.$$

2. Supposons maintenant que le domaine d'ultraconvergence de la suite $\{s_{n_k}\}$ contienne le cercle (c) entaillé par une pointe aiguë; de manière précise, nous supposerons $\delta = o(r-1)$, c'est-à-dire $\lim\limits_{t \to 0+\infty} \dfrac{\varphi(t)}{t} = 0$ [18]; $\lambda > 1$ étant donné, fixons une valeur de t telle que $12\lambda\varphi(t) < \frac{1}{2}$; nous voyons que pour $\frac{1}{\lambda}n_k \leqq m \leqq n_k$ et pour k assez grand, $\frac{1}{m}\log|a_m|$ est majoré par une constante négative.

L'hypothèse faite sur le domaine d'ultraconvergence entraîne donc la possibilité d'écrire la série donnée comme somme de deux séries, dont l'une présente des lacunes de largeur relative donnée a priori (et arbitrairement grande), *l'autre ayant un rayon de convergence plus grand.*

---

(18) Il suffit que la limite inférieure de ce quotient soit nulle.

Cette forme du domaine d'ultraconvergence est donc incompatible avec l'existence d'une suite partielle de coefficients telle que

$$\overline{\lim}\,|a_{n_j}|^{\frac{1}{n_j}}=1,\ \overline{\lim}\,\frac{n_{j+1}}{n_j}<\infty.$$

On notera que si la fonction $f(z)$ définie par un développement à structure lacunaire est régulière dans un domaine du type indiqué, le domaine d'ultraconvergence d'une suite convenable de sommes partielles est encore du même type, et que nos raisonnements deviennent applicables.

3. Je supposerai maintenant que le domaine d'ultraconvergence (U) de la suite $\{s_{n_k}\}$ de polynomes-sections contient un cercle entaillé selon un arc de courbe; ou, plus généralement, qu'il existe une circonférence Γ de rayon $R>1$, dont la partie extérieure au domaine d'ultraconvergence soit de mesure nulle. $\delta>0$ étant donné arbitrairement, nous pouvons trouver sur Γ un ensemble ouvert G de mesure $<2\pi\delta$ dont le complémentaire par rapport à Γ soit complètement intérieur à (U); nous désignerons par K une borne commune des s_{n_k} sur ce complémentaire.

Si ρ est pris entre 1 et R, on obtient en reprenant le raisonnement précédent

$$\frac{1}{m}\log|a_m|\leqq\delta\,\frac{2R}{R-\rho}\,\lambda\log R-\log\rho+\lambda\eta_k \qquad \text{pour}\quad \frac{n_k}{\lambda}\leqq m\leqq n_k,$$

où, $\{\varepsilon_n\}$ étant une suite de nombres tendant vers zéro qui est déterminée lorsque R est fixé, η_k désigne la plus grande des deux quantités $\frac{\log K}{n_k}$ et ε_{n_k}.

Nous allons utiliser cette évaluation en prenant pour ρ, δ, λ des valeurs dépendant de k. Donnons-nous d'abord sur Γ une suite décroissante d'ensembles ouverts $\{G_\nu\}$ contenant tous la partie de Γ extérieure à (U) et de mesure tendant vers zéro; soit K_ν une borne commune des s_{n_k} sur le complémentaire de G_ν.

Pour une valeur donnée de k, nous prendrons dans la suite $\{G_\nu\}$ l'ensemble de rang le plus élevé vérifiant $\log K_\nu<\sqrt{n_k}$. Les δ_k sont ainsi fixés et les conditions $\delta_k \to 0$ et $\eta_k \to 0$ assurées; nous pouvons ensuite choisir les ρ_k de telle sorte que $1 < \rho_k < R$, $R - \rho_k = \sqrt{\delta_k}$, puis les λ_k de manière que $\lambda_k \to \infty$, $\lambda_k \sqrt{\delta_k} \to 0$, $\lambda_k \eta_k \to 0$.

Alors pour $\frac{n_k}{\lambda_k} \leqq m \leqq n_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, on a

$$\frac{1}{m} \log |a_m| \leqq -\log R + \zeta_k, \qquad \text{où} \quad \lim_{k \to \infty} \zeta_k = 0.$$

Dans les hypothèses faites, la série donnée peut donc être écrite comme somme d'une série qui présente des lacunes dont la largeur relative croît indéfiniment, et d'une série dont le rayon de convergence est au moins R.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] G. Bourion, *L'ultraconvergence dans les séries de Taylor* (*Actualités scientifiques et industrielles*, n° **472**, Paris, 1937).

[2] F. Carlson, *Sur une classe de séries de Taylor* (*Thèse*, Upsal, 1914).

[3] M. L. Cartwright, *On the directions of Borel of functions which are regular and of finite order in an angle* (*London math. Soc.*, t. **38**, 1934, p. 503-541).

[4] M. L. Cartwright, *Some uniqueness theorems* (*Ibid.* t. **41**, 1936, p. 33-47).

[5] N. Levinson, *Gap and density theorems* (*Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, t. **26**, New-York, 1940).

[6] E. Lindelöf, *Sur les fonctions entières d'ordre entier* (*Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.*, t. **22**, 1905, p. 369-395).

[7] E. Lindelöf, *Le calcul des résidus* (*Collection Borel*), Paris, 1905.

[8] A. Ostrowski, *Ueber vollständige Gebiete gleichmässiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen* (*Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität*, t. **1**, 1922, p. 327-350).

[9] R. E. A. C. Paley et N. Wiener, *Fourier transforms in the complex domain* (*Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, t. **19**, New-York, 1934).

[10] G. Pólya, *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen* (*Math. Z.*, t. **29**, 1929, p. 549-640).