JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

YVES THIRY

Étude mathématique des équations d'une théorie unitaire à quinze variables de champ

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 30 (1951), p. 275-396.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1951_9_30__275_0>

Étude mathématique des équations d'une théorie unitaire à quinze variables de champ ;

Par Yves THIRY.

INTRODUCTION.

La théorie de la Relativité a fait subir au concept de champ physique une évolution dont nous allons rappeler les idées essentielles.

La théorie de la Relativité restreinte donne pour cadre aux phénomènes physiques un espace quadridimensionnel euclidien, l'espace de Minkowski, dans lequel le temps s'incorpore aux trois dimensions d'espace.

Les phénomènes de gravitation y reçoivent une interprétation qui est nouvelle, puisqu'elle est quadridimensionnelle et qu'en particulier la masse d'une particule varie suivant l'observateur. Mais il n'y a aucun progrès dans l'explication de la gravitation qui apparaît toujours comme un phénomène à part, simplement superposé à la structure euclidienne de l'espace de Minkowski.

Par contre, la Relativité restreinte réalise un progrès important par l'unification des champs électrique et magnétique; ces deux champs apparaissent comme deux aspects, variables suivant l'observateur, d'un seul et même phénomène, représenté mathématiquement par un tenseur antisymétrique du second ordre.

La théorie de la Relativité générale introduit en quelque sorte un premier essai d'explication des phénomènes de gravitation en ce sens que la gravitation est incorporée à la structure géométrique de l'Univers, qui n'est plus euclidien mais riemannien : la gravitation se propage dans l'Univers avec la vitesse de la lumière et ainsi disparaît l'incompréhensible action à distance instantanée de la théorie de Newton.

Sur la théorie de la Relativité générale se greffe immédiatement une théorie relativiste de l'Électromagnétisme, qui ne peut être considérée que comme provisoire : l'Électromagnétisme y apparaît en effet comme un phénomène à part, simplement superposé à la structure riemannienne de l'Univers d'Einstein. Cette théorie est d'ailleurs tout à fait justifiée par le rôle prépondérant joué par la gravitation.

On a donc été naturellement conduit à essayer de construire une théorie unitaire qui réaliserait l'unification des champs gravitationnel et électromagnétique en un seul hyperchamp susceptible d'être incorporé à la structure géométrique d'un certain espace.

C'est Hermann Weyl qui ouvre la voie en 1919 : la théorie qui se développe alors, la gravifique de Weyl-Eddington, tend à l'identification, à un scalaire multiplicatif près, du potentiel-vecteur et du vecteur-courant et semble aujourd'hui devoir être rejetée.

Kaluza introduit ensuite en 1921 le premier essai de théorie pentadimensionnelle. Ses idées sont reprises un peu plus tard par O. Klein dont la théorie n'est au fond qu'une interprétation nouvelle de la théorie provisoire de l'Électromagnétisme.

Il apparaît ensuite des essais portant sur des théories projectives, dont Veblen fait une étude complète en 1933. Ces essais tendent à reconsidérer le problème mathématique de la structure de l'espace qui sert de cadre aux phénomènes physiques et ne sont pas au fond essentiellement distincts des essais pentadimensionnels. C'est pourquoi nous nous sommes plus particulièrement intéressés à ces derniers, susceptibles de faire intervenir une structure strictement riemannienne.

Les idées nouvelles apportées par les théories relativistes ont suscité de très nombreux travaux. Du point de vue mathématique, l'intégration rigoureuse des équations de la gravitation relativiste ont fait l'objet de travaux de E. Cartan, de de Donder, de G. Darmois, de Vessiot et de beaucoup d'autres. En particulier, Cartan met en évidence le fait que le système des équations d'Einstein est un système en involution, se partageant en un problème de conditions initiales et en un problème d'évolution dans le temps. Stellmacher démontre ensuite le théorème d'unicité relatif à ces équations dans le cas non analytique.

C'est Charles Racine qui s'occupe le premier des champs extérieurs partout réguliers. Il s'agit de démontrer que de tels champs sont nécessairement euclidiens. Cette proposition résulte du fait que les seuls champs susceptibles de correspondre à une réalité physique sont tels que, là où peut être introduite une distribution matérielle, le champ extérieur doit présenter certaines singularités. L'étude systématique des problèmes globaux ainsi posés est abordée par Lichnerowicz; un résultat général récent, auquel Einstein et Pauli apportent une contribution, règle la question dans le cas purement gravitationnel. Le résultat obtenu est essentiel à la cohérence de la théorie d'Einstein, puisqu'il s'agit de savoir à quelles conditions le principe de causalité relie l'existence du champ de gravitation à la présence de la matière.

Quant aux théories unitaires, il semble que leur étude mathématique ait été relativement négligée : on les étudie plutôt d'un point de vue physique, en basant leurs équations sur un principe variationnel plus ou moins arbitraire et en cherchant tout de suite à y introduire les phénomènes de quantification pour passer à la Mécanique ondulatoire.

Il nous a paru utile de tenter une étude mathématique systématique d'une théorie unitaire et de voir si une telle théorie est susceptible de présenter la même cohérence que la théorie de la Relativité générale.

Le premier Chapitre de notre travail contient une étude critique de la notion de théorie unitaire. Nous rappelons au début les idées modernes concernant le rôle joué par le principe des géodésiques dans l'axiomatique de la théorie de la Relativité générale. Puis, constatant que dans la théorie provisoire de l'Électromagnétisme, le principe des géodésiques n'est pas satisfait, nous sommes amenés à poser et à étudier un problème de calcul des variations relatif à la représentation paramétrique des extrémales d'une certaine fonction. La solution de ce problème, appliquée à la Dynamique analytique, donne la clé des rapports existant, non seulement entre le principe d'Hamilton et celui de Maupertuis, mais encore entre le principe d'Halmiton et le ds^2 d'Eisenhart et conduit en outre à la considération d'un ds^2 nouveau.

Il se trouve que la solution de ce problème permet de représenter paramétriquement les trajectoires de tout type de particule électrisée par des géodésiques d'un espace riemannien à cinq dimensions. Ainsi sont jetées mathématiquement les bases d'une théorie unitaire pentadimensionnelle dont nous étudions les hypothèses. Parmi ces hypothèses, l'une nous semble essentielle : c'est celle de la cylindricité qui consiste à supposer les coefficients de la métrique pentadimensionnelle indépendants de la cinquième variable x^0. Mais nous rejetons comme mathématiquement peu satisfaisante, l'hypothèse d'O. Klein qui consiste à tenir pour constant le coefficient de $(dx^0)^2$ dans cette métrique. Ceci conduit à envisager une théorie unitaire dans laquelle figure, à côté des dix potentiels de gravitation et des quatre composantes du potentiel-vecteur, une quinzième variable de champ, qui n'est autre que la « constante » de gravitation, dont les variations seraient d'ailleurs liées aux variations que subirait le rapport $\frac{e}{m}$ d'une particule bien déterminée le long de sa trajectoire.

Au Chapitre II, nous élaborons une théorie unitaire pentadimensionnelle dont le premier chapitre nous a fourni une justification mathémathique, en calquant son axiomatique sur celle de la théorie de la Relativité générale. Nous écrivons, sous une forme particulièrement intéressante, les équations du cas extérieur (au sens unitaire); nous présentons en particulier deux formes que l'on peut donner à la quinzième équation de la théorie, l'une faisant intervenir un laplacien, l'autre une divergence de vecteur dans un espace à quatre dimensions que nous interprétons comme espace-temps et que nous définissons de façon précise comme espace-quotient. La méthode employée est celle du repère mobile orthonormé et du calcul extérieur. Ces équations, établies pour un espace à cinq dimensions cylindrique, se transposeraient immédiatement au cas d'un espace-temps stationnaire.

Écrivant ensuite les équations sous la forme que l'on peut leur donner dans le cas intérieur, nous étudions les conditions de raccordement de Schwarzschild, ce qui nous permet de régler définitivement la question relative au principe des géodésiques.

Nous montrons de plus dans ce chapitre de quelle façon simple on peut passer de notre théorie unitaire à la théorie d'O. Klein, c'est-à-dire en fait à la théorie provisoire de l'Électromagnétisme.

Dans le troisième Chapitre, nous faisons l'étude des problèmes globaux relatifs aux deux propositions suivantes :

Si l'on considère des champs extérieurs stationnaires, tout domaine qui peut être meublé de manière stationnaire par une distribution de matière chargée, contient nécessairement des singularités de ces champs extérieurs.

Si des champs gravitationnel et électromagnétique stationnaires sont nuls à l'infini, ils ne peuvent être réguliers partout sans être partout identiquement nuls.

Les conditions dans lesquelles ces deux propositions sont réalisées complètent l'axiomatique de la théorie de manière qu'alors les champs extérieurs peuvent être considérés comme effectivement produits par les différentes distributions de matière chargée envisagées.

Le résultat de cette étude est que notre théorie unitaire à quinze variables de champ possède exactement la même cohérence mathématique que la théorie de la Relativité générale. La démonstration de la seconde proposition s'y effectue d'une façon curieuse par un raisonnement en cascade basé sur l'analogie qui existe entre l'hypothèse de cylindricité et l'hypothèse du cas stationnaire. Il est important de signaler que la forme que nous avons donnée aux équations du champ nous permet d'éviter l'utilisation du résultat d'Einstein-Pauli relatif à l'ordre d'infinitude des déviations des potentiels par rapport à leur valeurs euclidiennes.

Dans la théorie à quatorze variables de champ d'O. Klein, il est encore possible d'atteindre la seconde proposition par une modification, très intéressante en elle-même, de la démonstration valable dans notre théorie unitaire. Mais il est impossible d'atteindre la première proposition sans faire d'hypothèses restrictives sur la charge des particules considérées.

Nous donnons une bibliographie qui ne doit évidemment pas être considérée comme complète, mais qui indique les études les plus importantes faites tant au sujet des théories unitaires qu'au sujet de certains problèmes mathématiques posés par les théories relativistes.

Enfin, un tableau contient les notations et les conventions employées dans ce travail; il est destiné à faciliter la lecture des Chapitres II et III.

Parmi ceux qui s'occupent actuellement de questions analogues à celles qui sont traitées ici, nous devons plus particulièrement signaler Jordan et son école, qui ont obtenu à peu près en même temps que nous les équations que nous donnons au Chapitre II. Nous n'avons eu connaissance de ce fait que fort tard et ce n'est que récemment que nous avons pu correspondre avec Jordan, qui a eu l'amabilité de nous envoyer ses publications qu'il était alors impossible de se procurer autrement.

Qu'il me soit permis maintenant d'exprimer ma respectueuse gratitude aux Maîtres, tels M. G. Darmois pour ne citer que l'un d'eux, que malheureusement je n'ai pas eu l'occasion d'approcher personnellement mais dont les travaux m'ont été fort utiles et dont la sympathie a été pour moi une grande source de réconfort.

Il m'est difficile d'exprimer tout ce que je dois à mon Maître et ami Lichnerowicz : grâce à ses remarquables qualités pédagogiques, j'ai pu acquérir en un minimum de temps les instruments mathématiques nécessaires. Il n'a cessé ensuite de me prodiguer ses conseils et ses critiques, sans lesquels ce travail n'aurait certainement pas pu avancer. Enfin il a su, par son amitié et son exemple, m'éviter le découragement dans des conditions de travail qui furent parfois assez pénibles.

Je tiens enfin à adresser mes plus sincères remercîments à M. Henri Villat pour l'accueil bienveillant qu'il a réservé à ce travail, ainsi que pour les grandes facilités qu'il a bien voulu m'accorder pour son impression.

NOTATIONS.

Indices :

$\lambda, \mu, \ldots, \alpha, \beta$	0,	1,	2,	3,	4
i, j, k		1,	2,	3,	4
i', j', k'	0,	1,	2,	3	
I, J, K		1,	2,	3	
a, b	0,	1,	2,		4 (§ **23-24**, Chap. II)

Les indices non soulignés indiquent des composantes sur un repère naturel.

Les indices soulignés indiquent des composantes sur un repère orthonormé.

Éléments de $\mathcal{R}_4$ *et de* $\mathcal{R}'_4$. — Les éléments surlignés appartiennent à $\mathcal{R}_4$ (espace-quotient de $\mathcal{R}_5$ par $[L_0]$); cependant, les éléments habituels ds, g_{ij}, g, φ_i, F_{ij}, ... ne sont pas surlignés.

Les éléments de $\mathcal{R}'_4$ (espace-quotient de $\mathcal{R}_5$ par $[L_4]$) sont accentués; cependant $\vec{\eta}'$ et $\vec{\zeta}'$ appartiennent à $\mathcal{R}_5$.

Repères. — Le repère orthonormé $(\vec{e}_{\underline{\alpha}})$ de $\mathcal{R}_5$ (variable directrice x^0) induit un repère orthonormé $(\vec{e}_{\underline{i}})$ dans $\mathcal{R}_4$.

Le repère orthonormé $(\vec{\varepsilon}_{\underline{\alpha}})$ de $\mathcal{R}_5$ (variable directrice x^4) induit un repère orthonormé $(\vec{\varepsilon}'_{\underline{i'}})$ dans $\mathcal{R}'_4$.

Le repère naturel $(\vec{e}_\alpha)$ de $\mathcal{R}_5$ induit un repère naturel $(\vec{e}_i)$ dans $\mathcal{R}_4$ et un repère naturel $(\vec{\varepsilon}'_{i'})$ dans $\mathcal{R}'_4$.

Signature. — En signature elliptique, les éléments sont surmontés du signe $\star$.

Au Chapitre II, les paragraphes **2** à **11** devraient être écrits en éléments étoilés; les paragraphes **4** à **7** devraient être écrits en indices soulignés.

Aucune référence n'est faite aux paragrapes **4** à **7**; toute référence aux paragraphes **2**, **3**, **8**, **9**, **10** et **11** est immédiatement suivie d'une étude de la signature.

CHAPITRE I.

Les trajectoires d'une particule électrisée et l'introduction de la cinquième dimension.

I. — Le problème unitaire.

1. Le principe des géodésiques dans la théorie de la Relativité générale. — Dans la théorie de la Relativité générale, l'Univers est représenté par un espace de Riemann à quatre dimensions défini par une métrique

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j \qquad (i, j, = 1, 2, 3, 4), \tag{1.1}$$

et les propriétés géométriques de cet espace rendent compte des phénomènes purement gravitationnels; si bien que ce ds^2 doit être susceptible de régir intégralement le phénomène élémentaire, c'est-à-dire la loi du mouvement d'une masse infiniment petite isolée.

L'accord avec les principes essentiels de la Physique exige que la généralité des potentiels de gravitation g_{ij} soit limitée par des conditions locales, les dix équations d'Einstein, que l'on peut écrire, dans le cas extérieur, sous la forme

$$S_{ij} = 0,$$

les quantités S_{ij} devant satisfaire aux conditions suivantes :

Elles ne doivent dépendre que des potentiels g_{ij} et de leurs dérivées des deux premiers ordres, être linéaires par rapport aux dérivées du second ordre et être les composantes d'un tenseur conservatif.

Or, Élie Cartan a montré (¹) que ces conditions imposent aux S_{ij} la valeur

$$S_{ij} = h\left[R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij}(R + k)\right],$$

(¹) *Cf.* Élie Cartan, (bibl. [33]).

h et k étant deux constantes et R_{ij} désignant les composantes du tenseur de Ricci.

Les équations d'Einstein doivent donc s'écrire

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = 0 \quad [1],$$

une constante k non nulle n'intervenant que pour des considérations cosmologiques spéciales.

La présence de la matière est caractérisée par l'introduction, aux seconds membres des équations d'Einstein, des composantes du tenseur d'impulsion-énergie. Nous poserons en première approximation pour ce tenseur

$$t_{ij} = \rho u_i u_j,$$

ρ désignant la densité de matière et u_i les composantes du vecteur-vitesse généralisé. Les équations du cas extérieur s'écriront donc

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \chi t_{ij},$$

χ représentant la constante de la gravitation.

L'axiomatique de la théorie relativiste de la gravitation doit être complétée par l'énoncé des conditions qui expriment la compatibilité dans un même champ des solutions extérieures et intérieures des équations.

C'est grâce à ces conditions que l'on peut voir, en faisant se matérialiser le champ par son action sur une masse d'épreuve, de quelle façon le ds^2 régit le phénomène élémentaire.

Introduisons d'abord dans l'Univers de la matière sous forme diffuse, par le tenseur t_{ij} aux seconds membres des équations d'Einstein. Les trajectoires du champ de vecteur u_i sont appelées lignes de courant; on obtient le système différentiel les définissant en écrivant les conditions de conservation du tenseur t_{ij}, et l'on voit alors que ces lignes de courant sont des géodésiques du ds^2. Considérons

---

[1] Ce sont ces équations que Einstein a écrites intuitivement; la genèse de la théorie n'a évidemment pas l'apect axiomatique envisagé ici.

ensuite un tube d'Univers satisfaisant à la condition de raccordement de Schwarzschild :

Il existe un système de coordonnées tel que les potentiels g_{ij} et leurs dérivées premières soient continus à la traversée de la frontière du tube.

En faisant tendre ce tube vers une ligne, on arrive au principe des géodésiques qui régit le phénomène élémentaire :

Les trajectoires des particules non chargées sont des géodésiques de l'Univers.

Ainsi, dans la théorie relativiste purement gravitationnelle, le principe des géodésiques découle à la fois des équations d'Einstein et de la condition de raccordement de Schwarzschild ([1]).

2. Remarques sur la théorie relativiste purement gravitationnelle. — On peut dire qu'on est là en présence d'une théorie satisfaisante de la gravitation : en effet, aux premiers membres des équations figurent les composantes d'un tenseur de nature purement géométrique, dont les propriétés traduisent les propriétés du champ gravitationnel; aux seconds membres figurent, dans le cas intérieur, les composantes d'un tenseur choisi pour représenter au mieux les propriétés de la matière. Ainsi on peut dire que, compte tenu de la condition de raccordement, l'introduction de la matière modifie la courbure de l'Univers, donc le champ gravitationnel. La séparation logique entre la cause, présence de la matière, et l'effet, création du champ gravitationnel, se traduit mathématiquement par l'identification de deux tenseurs de nature essentiellement différente.

Il ne va plus en être de même lorsqu'on essaie d'introduire dans l'Univers une forme d'énergie autre que gravitationnelle. Pour un domaine balayé par une certaine forme d'énergie, on écrira les équations d'Einstein sous la forme

$$S_{ij} = \chi T_{ij} \qquad (h = 1,\ k = 0),$$

([1]) Pour toute cette question, on pourra se reporter à la thèse de Lichnerowicz (Bibl. [38]). Nous développons d'ailleurs cette question dans le cas d'une théorie unitaire dans la troisième partie du Chapitre II.

le tenseur symétrique T_{ij} étant à choisir au mieux pour représenter la forme d'énergie considérée.

Si, en particulier, on veut construire sur ces bases une théorie relativiste de l'électromagnétisme, on est amené à une théorie qui ne possède plus le caractère précédent et qui ne peut être considérée que comme provisoire.

3. La théorie provisoire de l'électromagnétisme. — Le tenseur énergie électromagnétique à considérer est défini par

$$\tau_{ij} = \frac{1}{4} g_{ij}(F_{kl}F^{kl}) - g^{kl}F_{ki}F_{lj}, \tag{3.1}$$

et les équations d'Einstein s'écriront, dans le cas du schéma champ électromagnétique pur,

$$S_{ij} = \chi\tau_{ij}. \tag{3.2}$$

Le tenseur antisymétrique champ électromagnétique F_{ij} est astreint à satisfaire aux équations de Maxwell-Lorentz. Désignons par ∇_i l'opérateur de dérivation covariante dans l'espace de Riemann (1.1). Le premier groupe des équations de Maxwell-Lorentz s'écrit

$$\nabla_i F^{ij} = J^j, \tag{3.3}$$

J^j désignant le vecteur-courant. Le second groupe s'écrit

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{ijkl}\nabla_i F_{jk} = 0, \tag{3.4}$$

ε^{ijkl} désignant l'indicateur classique de permutation des indices i, j, k, l. Ce second groupe d'équations équivaut au fait que le champ électromagnétique dérive d'un potentiel-vecteur φ_i, défini à un gradient additif près,

$$F_{ij} = \nabla_i\varphi_j - \nabla_j\varphi_i. \tag{3.5}$$

Les équations (3.2), (3.3) et (3.4) constituent les équations relativistes de la théorie provisoire de l'Électromagnétisme.

4. Critique de cette théorie. — On exprime ce que nous disions de cette théorie au paragraphe **2** en disant qu'elle n'est pas unitaire; c'est là une expression qu'il est plus commode d'employer dans une proposition négative que dans une proposition affirmative et il nous semble utile d'en analyser le sens.

Quand on dit que la théorie provisoire n'est pas unitaire, on veut dire que le champ gravitationnel et le champ électromagnétique y jouent des rôles tout à fait différents : le premier est fourni par un caractère géométrique de l'Univers, alors que le second est introduit comme modification de la théorie purement gravitationnelle par la présence du tenseur τ_{ij} aux seconds membres des équations d'Einstein. Il faut d'ailleurs se rappeler que les modifications introduites sont petites, l'énergie électromagnétique restant toujours très faible devant l'énergie pondérable, si bien que la théorie provisoire procède d'une méthode d'étude tout à fait justifiée. Remarquons encore que, sur le plan de l'électromagnétisme pur, les équations de Maxwell-Lorentz séparent bien la cause, le courant introduit aux seconds membres, de l'effet, le champ électromagnétique figurant aux premiers membres.

Examinons de quelle façon la théorie provisoire réalise le lien entre les champs gravitationnel et électromagnétique : les variétés caractéristiques des équations d'Einstein sont les variétés tangentes en chaque point à l'hypercône élémentaire d'équation $ds^2 = 0$ attaché à ce point; et il en est de même des variétés caractéristiques des équations de Maxwell (3.3) avec ou sans seconds membres. Ainsi le champ de gravitation possède un caractère de propagation et il y a identité entre la propagation du champ gravitationnel et celle du champ électromagnétique. D'autre part, si l'on considère plusieurs particules chargées dans l'Univers, le mouvement de chacune d'elles dépend des autres, sans que l'on puisse distinguer les rôles joués par chacun des deux champs. Il y a interférence entre les deux champs en ce sens que, les tenseurs R_{ij} et τ_{ij} étant reliés par les équations d'Einstein, toute modification de l'un réagit sur l'autre.

Mais, si la théorie provisoire nous dévoile au premier coup d'œil un défaut d'unité entre deux champs, elle nous fournit par contre un exemple de deux champs que tout le monde s'entendra à dire parfaitement unifiés : ce sont les champs électrique et magnétique [1]. Par

---

[1] En fait, cette unification est déjà réalisée par la théorie de la Relativité restreinte.

l'introduction du temps comme quatrième variable d'Univers et par la considération du tenseur F_{ij}, ces deux champs se trouvent fondus en un seul : ils y perdent leur individualité et n'apparaissent plus que comme deux aspects différents d'un phénomène unique. Il est même possible de faire disparaître à volonté l'un ou l'autre de ces aspects au profit de l'autre en se plaçant dans certaines conditions d'observation.

5. ASPECTS UNITAIRES D'UNE THÉORIE DU CHAMP. — En partant de cet exemple, définissons ce que nous appellerons théorie unitaire au sens physique : une telle théorie devrait satisfaire aux propositions suivantes :

(*a*) *elle devrait faire jouer au champ gravitationnel et au champ électromagnétique des rôles symétriques ; comme le premier est donné par le caractère géométrique de l'Univers, les deux champs devraient donc émaner d'une même géométrie ;*

(*b*) *les deux champs devraient pouvoir se fondre en un même hyperchamp, dont ils ne seraient plus que deux aspects différents ; l'un des aspects devrait pouvoir disparaître complètement pour que l'existence même de l'un des champs soit liée de façon covariante aux changements de système de référence de la géométrie dont ils émanent.*

Cette deuxième proposition paraît d'une exigence bien sévère : s'il semble normal que le champ électrique et le champ magnétique jouent des rôles parallèles vis-à-vis du champ électromagnétique, il semble anormal qu'il doive en être de même du champ gravitationnel et du champ électromagnétique vis-à-vis d'un certain hyperchamp unitaire; on peut admettre de pouvoir faire disparaître le champ électromagnétique de sorte que, pour certains observateurs, il ne subsiste plus que l'aspect gravitationnel du champ. Il semble exagéré de prétendre pouvoir faire disparaître le champ gravitationnel qui, à l'échelle astronomique, est largement prépondérant, et de pouvoir envisager des observateurs pour lesquels subsisterait seul un champ électromagnétique.

Nous laisserons donc de côté la proposition (*b*) et définirons ce que nous appellerons théorie unitaire au sens logique à l'aide de la seule proposition (a).

Examinons quelles conditions sont impliquées dans cette proposition : une telle théorie doit pouvoir se ramener, au moins en première approximation, à la théorie provisoire. Elle doit donc se ramener à la théorie de la Relativité générale lorsqu'on annule le champ électromagnétique. Dans les équations d'une telle théorie, les deux champs, qui comme nous l'avons dit doivent émaner d'une même réalité géométrique, devront intervenir aux premiers membres sous forme de tenseurs de nature purement géométrique. Les seconds membres seront nuls dans une théorie du vide étudiant le cas extérieur au sens unitaire (l'Univers ne contient aucune forme d'énergie autre que gravitationnelle ou électromagnétique). Dans le cas intérieur au sens unitaire, les seconds membres des équations devront représenter, sous une forme tensorielle convenable, ce qui crée les champs, c'est-à-dire la matière chargée (1).

Enfin, comme le phénomène élémentaire est régi dans la théorie relativiste purement gravitationnelle par le principe des géodésiques, il semble indiqué, compte tenu des rôles unifiés joués par les deux champs, de vouloir étendre ce principe à une théorie unitaire; il sera préférable que le phénomène élémentaire unitaire, c'est-à-dire la loi du mouvement d'une particule électrisée, soit régi par le principe des géodésiques dans l'espace géométrique représentant les champs,

---

(1) Historiquement, l'unification des champs électrique et magnétique par l'introduction du temps comme quatrième coordonnée conduisit Kaluza dès 1921 à tenter l'unification des champs gravitationnel et électromagnétique par l'introduction d'une cinquième coordonnée. La théorie de Kaluza n'est pas unitaire au sens physique et c'est bien à ce caractère que Einstein et Pauli font allusion lorsqu'ils en parlent en ces termes (bibl. [37]) : « ... la cinquième coordonnée est traitée de façon tout à fait différente des autres. Par conséquent les composantes du champ électromagnétique se transforment indépendamment de celles du champ gravitationnel et les deux champs ne sont unifiés qu'en apparence ». Par contre, la théorie de Kaluza réalise l'unification au sens logique mais sera encore soumise sous cet aspect à deux sortes de critiques : la première porte sur l'introduction *a priori* d'une cinquième coordonnée sans signification physique, la seconde sur ses équations. Comme on le verra plus loin, ces deux questions sont largement examinées dans le présent travail.

plutôt que d'être régi dans cet espace par un principe d'extremum portant sur une fonction autre que son ds^2 (¹).

Dans la théorie provisoire, le phénomène élémentaire unitaire n'est pas régi par le principe des géodésiques, mais par un principe d'extremum portant sur une fonction qui dépend de la particule que l'on considère. Comme cela va être le point de départ de notre étude, reprenons en détail l'étude des trajectoires d'une particule électrisée dans la théorie provisoire.

6. LES TRAJECTOIRES D'UNE PARTICULE ÉLECTRISÉE DANS LA THÉORIE PROVISOIRE. — Considérons d'abord de l'énergie introduite dans un domaine d'Univers sous forme diffuse; le tenseur correspondant à un schéma matière-champ électromagnétique est donné par

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + \tau_{ij},$$

ρ et u_i ayant les significations du paragraphe **1**, τ_{ij} étant donné par (3.1).

Les équations d'Einstein s'écrivent

$$S_{ij} \equiv R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \chi T_{ij};$$

on doit leur adjoindre les équations de Maxwell-Lorentz (3.3) et (3.4).

Établissons le système différentiel aux lignes de courant à partir des conditions de conservation. Il résulte des identités de Bianchi que le tenseur S_{ij} satisfait aux quatre conditions de conservation

$$\nabla_i S^i_j = 0.$$

Par suite, le tenseur T_{ij} satisfera à

$$\nabla_i T^i_j = 0$$

(¹) On verra plus loin qu'un problème de calcul des variations, nous apportant plus que ce que nous sommes logiquement en droit d'en attêndre, nous permettra d'envisager le phénomène élémentaire comme régi par le principe des géodésiques dans un espace *de Riemann* à cinq dimensions.

ou

$$(6.1)\qquad \nabla_i(\rho u^i u_j) + \nabla_i \tau^i_j = 0.$$

Si l'on calcule $\nabla_i \tau^i_j$, on trouve, en tenant compte des équations de Maxwell,

$$\nabla_i \tau^i_j = F_{ij} J^i.$$

Attribuons alors au courant électrique le caractère d'un courant de convection et posons

$$J^i = \mu u^i,$$

μ représentant la densité de charge élecrique.

L'équation (6.1) s'écrit

$$(6.2)\qquad u_j \nabla_i(\rho u^i) + \rho u^i \nabla_i u_j + \mu F_{ij} u^i = 0.$$

De plus, le vecteur u_i étant unitaire, nous avons

$$u^j u_j = 1 \qquad \text{et} \qquad u^j \nabla_i u_j = 0.$$

Des équations (6.2) nous tirons alors par multiplication par u^j et sommation

$$(6.3)\qquad \nabla_i(\rho u^i) = 0,$$

en tenant compte du fait que

$$\mu F_{ij} u^i u_j = 0,$$

à cause de l'antisymétrie de F_{ij}.

(6.2) donne alors

$$(6.4)\qquad u^i \nabla_i u_j = \frac{\mu}{\rho} F_{ji} u^i.$$

L'équation (6.3) joue le rôle d'une équation de continuité; les équations (6.4) sont les équations différentielles aux lignes de courant. On démontre de plus ([1]) que le rapport $\frac{\mu}{\rho}$ reste constant le long d'une ligne de courant.

([1]) *Cf.* LICHNEROWICZ (bibl. [39]).

Considérons à présent un schéma matière-champ électromagnétique homogène, c'est-à-dire pour lequel $\frac{\mu}{\rho}$ est une constante absolue et démontrons que, pour un tel schéma, les lignes de courant sont les extrémales de l'intégrale

$$\Phi = \int_{u_0}^{u_1} \left[(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)^{\frac{1}{2}} + \frac{\mu}{\rho}\varphi_i\dot{x}^i \right] du,$$

où u est un paramètre arbitraire dont dépendent les x^i, $\dot{x}^i$ la dérivée de x^i par rapport à u et φ_i le potentiel-vecteur. Les x^i fonctions de u définissent une courbe C; calculons la variation de Φ en variant C à extrémités fixes; posons

$$W = (g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)^{\frac{1}{2}} + \frac{\mu}{\rho}\varphi_i\dot{x}^i.$$

On aura

$$\delta\Phi = -\int_{u_0}^{u_1} \left[\frac{d}{du}\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial W}{\partial x^i} \right] \delta x^i \, du.$$

Or

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{x}^i} = g_{ij}\dot{x}^j\frac{du}{ds} + \frac{\mu}{\rho}\varphi_i,$$

$$\frac{\partial W}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\partial_i g_{kl}\dot{x}^k\dot{x}^l\frac{du}{ds} + \frac{\mu}{\rho}\partial_i\varphi_k\dot{x}^k.$$

D'où

$$\delta\Phi = -\int_{M_0}^{M_1} \left[\frac{d}{ds}\left(v_i + \frac{\mu}{\rho}\varphi_i\right) - \frac{1}{2}\partial_i g_{kl}v^k v^l - \frac{\mu}{\rho}\partial_i\varphi_k v^k \right] \delta x^i \, ds$$

$$= -\int_{M_0}^{M_1} \left[v^j\nabla_j v_i + \frac{\mu}{\rho}F_{ji}v^j \right] \delta x^i \, ds,$$

en désignant par v_i le vecteur unitaire tangent à C.

Les courbes réalisant l'extremum de Φ sont donc les solutions des équations

$$v^i\nabla_i v_j = \frac{\mu}{\rho}F_{ji}v^i,$$

qui sont identiques aux équations (6.4) des lignes de courant, ce qui établit le résultat.

Considérons à présent le schéma matière-champ électromagnétique distribué dans un tube d'Univers de frontière S et supposons réalisées les conditions de Schwarzschild étendues à ce cas :

Il existe un système de coordonnées tel que les potentiels g_{ij} et φ_i ainsi que leurs dérivées premières soient continus à la traversée de S.

On peut alors faire tendre le tube d'Univers vers une ligne, qui sera décrite par une particule électrisée. Le rapport $\frac{\mu}{\rho}$ sera donné par le rapport de la charge e de la particule à sa masse m et nous obtenons le résultat suivant :

Les trajectoires d'une particule électrisée de charge e et de masse m sont les extrémales de l'intégrale

$$\int_{u_0}^{u_1}\left[(g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j)^{\frac{1}{2}}+\frac{e}{m}\varphi_i\dot{x}^i\right]du.$$

Ainsi, les trajectoires d'une particule électrisée ne sont pas des géodésiques de l'Univers, mais apparaissent comme les géodésiques d'un espace de Finsler associé à l'Univers, dont la métrique est donnée par

$$ds' = (g_{ij}\,dx^i\,dx^j)^{\frac{1}{2}}+\frac{e}{m}\varphi_i\,dx^i.$$

Mais, comme le rapport $\frac{e}{m}$ est variable d'une particule à une autre, c'est à chaque type de particule qu'il faut attacher un espace de Finsler du type précédent. Nous sommes ainsi conduits à étudier un ensemble de familles de géodésiques, chaque famille étant associée à une certaine valeur de $\frac{e}{m}$.

7. Énoncé d'un problème de calcul des variations. — Nous allons rechercher s'il est possible de trouver une représentation paramétrique pour l'ensemble de ces géodésiques. L'ensemble des familles de géodésiques apparaîtrait alors comme les extrémales d'une intégrale portant sur une fonction déterminée construite à partir de ds', contenant une variable x^0 nouvelle, mais indépendante de $\frac{e}{m}$. La

variable auxiliaire x^0 se substituerait à la quantité variable $\frac{e}{m}$ en unifiant en une seule famille l'ensemble des familles précédentes.

Cette question se rencontre souvent en Mécanique et nous montrerons le parti que l'on en peut tirer. Nous allons donc étudier dans la seconde partie de ce chapitre le problème suivant :

Étant donné une fonction $L(x^i, x'^i, h)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *dépendant d'un paramètre arbitraire h, trouver une fonction* $F(x^\alpha, x'^\alpha)$ $(\alpha = 0, 1, \ldots, n)$ *dont les géodésiques donnent une représentation paramétrique pour l'ensemble des géodésiques de* L *correspondant aux différentes valeurs de h.*

II. — **Un problème de calcul des variations** (¹).

1. — Position et résolution du problème.

8. Posé sous cette forme, le problème n'est évidemment pas déterminé, puisqu'en multipliant la fonction L par une fonction arbitraire $f(h)$ du paramètre h, la fonction obtenue $f(h)L$ admet les mêmes géodésiques que la fonction L. L'introduction d'un facteur $f(h)$ permettra donc d'obtenir des fonctions F pourvues d'un large degré d'arbitraire. C'est donc par le problème inverse, celui qui consiste à déterminer L connaissant F que nous allons commencer (²). La

(¹) Ce problème et son application à la Dynamique analytique ont fait l'objet d'une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. **224**, 1947, p. 529.

(²) C'est ce problème inverse qui s'introduit dans la question suivante de Mécanique analytique : soit un système dynamique à $n+1$ degrés de liberté q^0, q^i, holonome, à liaisons parfaites et bilatérales, et conservatif; envisageons le cas où l'on a une intégrale première donnée par le fait que le lagrangien $\mathcal{L}$ ne dépend pas explicitement de q^0. Si l'on résout $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'^0} = h$ par rapport à q'^0, si l'on porte cette valeur de q'^0 dans le lagrangien et si l'on écrit après coup les équations de Lagrange, on commet une erreur qui consiste à utiliser un lagrangien réduit incorrect. Une théorie correcte du lagrangien réduit s'élabore aisément à partir du résultat du paragraphe **9**.

fonction L ne dépendant pas de la variable x^0, nous n'envisagerons que le cas où la fonction F elle-même ne dépend pas de x^0; en effet, si F dépendait de x^0, cette variable s'introduirait nécessairement dans la fonction L. Nous écrirons donc $F(x^i, x'^i, x'^0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

9. Détermination de la fonction L. — Nous supposerons de plus la fonction F homogène et du premier degré par rapport aux x'^α. Cette hypothèse n'introduit pour F aucune restriction nouvelle, étant donné que l'on peut toujours se ramener à ce cas par un changement de paramètre (1). Enfin nous supposerons $\frac{\partial^2 F}{(\partial x'^0)^2}$ différent de zéro.

Considérons les x^α comme des fonctions d'un paramètre arbitraire u; le système différentiel aux géodésiques de la fonction F admet l'invariant intégral (2)

$$\omega = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x'^i}\,\delta x^i + \frac{\partial F}{\partial x'^0}\,\delta x^0$$

et l'intégrale première

$$\frac{\partial F}{\partial x'^0} = h. \tag{9.1}$$

Considérons la famille G_h des géodésiques de F correspondant à une certaine valeur de h; on tire de (9.1)

$$x'^0 = \varphi(x^i, x'^i, h),$$

φ étant une fonction homogène et de degré 1 par rapport aux x'^i.

Pour les G_h, le dernier terme de ω, $h\delta x^0$, est une différentielle totale exacte et il en résulte pour le système différentiel aux géodésiques G_h, l'existence de l'invariant intégral tronqué

$$\bar{\omega} = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x'^i}\,\delta x^i.$$

(1) C'est, au contraire, lorsqu'on particularise le paramètre utilisé que l'on est amené à considérer des fonctions non homogènes par rapport aux dérivées : on verra plus loin comment le lagrangien d'un système dynamique, non homogène lorsqu'on particularise le rôle du temps, devient homogène et du premier degré sous sa forme « relativisée ».

(2) *Cf.* Élie Cartan (bibl. [6]).

Or, l'homogénéité de F permet de transformer le résultat précédent : on a

$$\frac{\partial F}{\partial x'^i} x'^i + \frac{\partial F}{\partial x'^0} x'^0 = F,$$

donc si l'on pose

$$L = \frac{\partial F}{\partial x'^i} x'^i = F[x^i, x'^i, \varphi(x^i, x'^i, h)] - h\varphi(x^i, x'^i, h),$$

les coefficients de $\overline{\omega}$ ne sont autres que les dérivées partielles de L par rapport aux x'^i.

Ainsi les fonctions x^i définissant les géodésiques G_h définissent également les géodésiques de la fonction L et nous pouvons énoncer :

Étant donné une fonction F *des variables* x^α *et* x'^α ($\alpha = 0, 1, \ldots, n$), *ne dépendant pas explicitement de* x^0, *homogène et du premier degré par rapport aux* x'^α *et telle que* $\frac{\partial^2 F}{(\partial x'^0)^2} \neq 0$, *les extrémales de l'intégrale*

$$\int_{u_0}^{u_1} F(x^i, x'^i, x'^0)\, du$$

coïncident avec l'ensemble des familles G_h *des extrémales correspondant à une certaine valeur de h de l'intégrale* $\int_{u_0}^{u_1} L(x^i, x'^i, h)\, du$.

La fonction L *est donnée par*

$$L(x^i, x'^i, h) = F[x^i, x'^i, \varphi(x^i, x'^i, h)] - h\varphi(x^i, x'^i, h), \tag{9.2}$$

φ *s'obtenant en résolvant* $\frac{\partial F}{\partial x'^0} = h$ *par rapport à* x'^0 :

$$x'^0 = \varphi(x^i, x'^i, h). \tag{9.3}$$

10. Détermination de la fonction F. — Étudions maintenant comment peut s'exprimer la fonction F d'où nous sommes partis à l'aide de la fonction L obtenue en (9.2).

Dérivons L par rapport à h :

$$\frac{\partial L}{\partial h} = \frac{\partial F}{\partial x'^0}\frac{\partial \varphi}{\partial h} - h\frac{\partial \varphi}{\partial h} - \varphi.$$

Compte tenu de l'intégrale première (9.1), on a

$$\frac{\partial L}{\partial h} = -\varphi(x^i, x'^i, h)$$

et l'on connaît la fonction φ à partir de L.

Si nous résolvons (9.3) par rapport à h, on obtiendra

$$h = \psi(x^i, x'^i, x'^0). \tag{10.1}$$

Alors la fonction F s'exprimera nécessairement par la formule (9.2), où h et φ sont remplacés par leurs valeurs (10.1) et (9.3), c'est-à-dire par

$$F(x^i, x'^i, x'^0) = L[x^i, x'^i, \psi(x^i, x'^i, x'^0)] + x'^0\psi(x^i, x'^i, x'^0). \tag{10.2}$$

Si nous partons à présent d'une fonction L (homogène et du premier degré par rapport aux x'^i) quelconque, mais telle toutefois que $\frac{\partial^2 L}{\partial h^2} \neq 0$, nous poserons $\frac{\partial L}{\partial h} = -x'^0$, d'où l'on tirera

$$h = \psi(x^i, x'^i, x'^0).$$

Considérons *a priori* la fonction F donnée par (10.2). Il lui correspond, d'après le paragraphe précédent, une fonction L_1 qui s'écrit

$$L_1 = F(x^i, x'^i, x'^0) - hx'^0$$

et d'après la forme de F, on a $L_1 \equiv L$.

Comme la fonction F fournit la fonction L_1, c'est cette fonction F qui est associée à la fonction donnée L et nous pouvons énoncer :

Étant donné une fonction $L(x^i, x'^i, h)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *homogène et du premier degré par rapport aux* x'^i *et telle que* $\frac{\partial^2 L}{\partial h^2} \neq 0$, *il lui correspond une fonction* F *des* x^α *et des* x'^α $(\alpha = 0, 1, \ldots, n)$ *ne dépendant pas explicitement de* x^0, *homogène et du premier degré par rapport aux* x'^α, *et une seule, répondant au problème posé. Elle est donnée par*

$$F(x^i, x'^i, x'^0) = L[x^i, x'^i, \psi(x^i, x'^i, x'^0)] + x'^0\psi(x^i, x'^i, x'^0),$$

où l'on a posé

$$x'^0 = \frac{\partial L}{\partial h}$$

et où ψ est la fonction obtenue en résolvant cette équation par rapport à h :

$$h = \psi(x^i, x'^i, x'^0).$$

11. L'étude précédente établit entre les fonctions F et L considérées une relation biunivoque. Mais, ainsi que nous l'avons déjà signalé, ce ne sont pas les fonctions L elles-mêmes qui ont de l'intérêt mais leurs géodésiques. Ainsi, si l'on considère les géodésiques d'une certaine fonction L, on pourra faire subir au préalable à cette fonction toute modification qui laisse invariantes ses géodésiques; mais, une fois la forme de L fixée, il lui correspondra une fonction F bien déterminée.

Nous pourrons profiter de cette latitude pour obtenir des fonctions F d'un type déterminé. Un cas particulièrement intéressant en Mécanique classique ou relativiste est celui où l'on pourra obtenir une fonction F définissant une métrique riemannienne.

Nous allons donc étudier la fonction L associée à une fonction F définissant une métrique riemannienne.

12. Étude d'une métrique riemannienne. — Considérons la fonction F définie par

$$F^2 = \gamma_{\lambda\mu} x'^\lambda x'^\mu \qquad (\lambda, \mu = 0, 1, \dots, n),$$

les coefficients $\gamma_{\lambda\mu}$ étant des fonctions données des x^λ symétriques par rapport aux indices λ et μ, et ne dépendant pas de la variable x^0.

Mettant les termes contenant x'^0 en évidence, on peut écrire

$$(12.1) \quad F^2 = \gamma_{00}(x'^0)^2 + 2\gamma_{i0} x'^i x'^0 + \gamma_{ij} x'^i x'^j \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

$\dfrac{\partial F}{\partial x'^0} = h$ nous donne

$$(12.2) \qquad \gamma_{00} x'^0 + \gamma_{i0} x'^i = h\,F.$$

Nous devons en principe tirer x'^0 de (12.2) et porter cette valeur dans

$$(12.3) \qquad L = F - h x'^0,$$

c'est-à-dire en fait éliminer x'^0 entre (12.1), (12.2) et (12.3). Pour cela, nous sommes amenés à distinguer deux cas bien distincts :

a. $\gamma_{00} \neq 0$. — Groupons les termes contenant x'^0 dans F en amorçant la décomposition en carrés

$$F^2 = \frac{1}{\gamma_{00}} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial (F^2)}{\partial x'^0} \right]^2 + F_1^2,$$

F_1 étant donné par

$$F_1^2 = g_{ij} x'^i x'^j$$

en posant

$$g_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{\gamma_{i0}\gamma_{j0}}{\gamma_{00}}.$$

On a alors

$$F^2 = \frac{1}{\gamma_{00}} \left[F \frac{\partial F}{\partial x'^0} \right]^2 + F_1^2 \qquad \text{ou} \qquad F^2 = \frac{h^2 F^2}{\gamma_{00}} + F_1^2 :$$

$$F^2 \left(1 - \frac{h^2}{\gamma_{00}} \right) = F_1^2. \tag{12.4}$$

L'élimination de x'^0 entre (12.1) et (12.2) étant ainsi effectuée, nous pouvons éliminer x'^0 entre (12.2) et (12.3), ce qui donne

$$L = F \left(1 - \frac{h^2}{\gamma_{00}} \right) + h \frac{\gamma_{i0}}{\gamma_{00}} x'^i,$$

puisque

$$x'^0 = \frac{hF}{\gamma_{00}} - \frac{\gamma_{i0}}{\gamma_{00}} x'^i.$$

Remplaçons enfin F par sa valeur tirée de (12.4) :

$$L = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\gamma_{00}}}\, F_1 + h \frac{\gamma_{i0}}{\gamma_{00}} x'^i$$

ou encore en explicitant

$$L(x^i, x'^i, h) = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\gamma_{00}}} \sqrt{g_{ij} x'^i x'^j} + h \frac{\gamma_{i0}}{\gamma_{00}} x'^i. \tag{12.5}$$

Nous pouvons donc énoncer :

Dans le cas où la fonction $F(x^i, x'^i, x'^0)$ *définit une métrique riemannienne avec un coefficient de* $(x'^0)^2$ *différent de zéro, la fonction* $L(x^i, x'^i, h)$ *correspondante a la forme d'une somme de la racine carrée d'une forme quadratique par rapport aux* x'^i *et d'une forme linéaire par rapport* *aux x'^i. La façon dont la constante h figure dans cette fonction* L *est précisée par la formule* (12.5).

b. $\gamma_{00} = 0$. — Éliminons d'abord F entre (12.1) et (12.2); (12.2) donne

$$F = \frac{\gamma_{i0}}{h} x'^i.$$

Portons dans (12.1) :

$$\frac{(\gamma_{i0} x'^i)^2}{h^2} = 2\gamma_{i0} x'^i x'^0 + \gamma_{ij} x'^i x'^j.$$

Cette équation étant linéaire par rapport à x'^0, tirons-en

$$x'^0 = \frac{\gamma_{i0} x'^i}{2h^2} - \frac{\gamma_{ij} x'^i x'^j}{2\gamma_{i0} x'^i}$$

et portons cette valeur dans (12.3) :

$$L = \frac{\gamma_{i0} x'^i}{h} - \frac{\gamma_{i0} x'^i}{2h} + h\frac{\gamma_{ij} x'^i x'^j}{2\gamma_{i0} x'^i};$$

$$L(x^i, x'^i, h) = h\frac{\gamma_{ij} x'^i x'^j}{2\gamma_{i0} x'^i} + \frac{1}{2h}\gamma_{i0} x'^i. \tag{12.6}$$

Nous énoncerons donc :

Dans le cas où la fonction $F(x^i, x'^i, x'^0)$ *définit une métrique riemannienne avec un coefficient de* $(x'^0)^2$ *nul, la fonction* $L(x^i, x'^i, h)$ *correspondante a la forme d'un quotient d'une forme quadratique par rapport aux x'^i par une forme linéaire par rapport aux x'^i augmenté de cette forme linéaire elle-même. La façon dont la constante h figure dans cette fonction* L *est précisée par la formule* (12.6).

13. Problème inverse : obtention d'un ds^2 riemannien. — Les considérations du paragraphe **11** nous permettent d'affirmer que, inversement, on ne pourra obtenir pour fonction F une fonction définissant un ds^2 riemannien que si la fonction L de départ peut être mise sous l'une ou l'autre des formes (12.5) ou (12.6) et nous énoncerons :

Dans le cas où la fonction L *peut être ramenée à la forme* (12.5), *l'ensemble des familles* G_h *de ses géodésiques peut être représenté para-*

métriquement par les géodésiques d'un espace riemannien où $\gamma_{00} \neq 0$.

Dans le cas où la fonction L *peut être ramenée à la forme* (12.6), *l'ensemble des familles* G_h *de ses géodésiques peut être représenté paramétriquement par les géodésiques d'un espace riemannien où* $\gamma_{00} = 0$.

Nous ne pouvons rien dire de plus de ce problème sous cette forme générale : il faudrait en effet faire des hypothèses sur la façon dont intervient dans L la constante à laquelle on désire faire jouer le rôle de la constante h. Nous utiliserons plusieurs fois dans la suite le résultat précédent : dans certains cas, la fonction prise pour fonction L sera dépourvue de constante devant jouer le rôle de h et notre but sera uniquement de nous ramener à une question de géométrie riemannienne : dans l'étude du problème unitaire, il nous sera possible d'atteindre le double but d'éliminer la constante $\frac{e}{m}$ et de nous ramener à un problème de géométrie riemannienne. Avant d'aborder ce problème, nous allons appliquer nos résultats à la Dynamique classique.

2. Application a la Dynamique classique.

14. Nous allons montrer comment les résultats précédents donnent la clé des rapports existant, non seulement entre le principe d'Hamilton et celui de Maupertuis, mais encore entre le ds^2 d'Eisenhart [1] et le principe d'Hamilton. De plus, nous serons conduits à envisager un ds^2 nouveau lié au principe de Maupertuis.

Nous partirons du principe d'Hamilton, que nous mettrons d'abord sous une forme « relativisée » invariante dans l'espace-temps de configuration. On obtiendra ainsi une fonction qui répondra aux conditions d'homogénéité de notre problème. Considérant alors cette fonction comme une fonction L, nous montrerons que la recherche de la fonction F associée conduit à un ds^2 riemannien à $n+2$ variables, qui généralise celui donné par Eisenhart. Considérant ensuite cette même fonction comme une fonction F, nous montrerons que la

---

[1] *Cf.* Eisenhart (bibl. [9]).

recherche de la fonction L associée conduit au principe de Maupertuis. Enfin nous serons amenés à remonter du principe de Maupertuis d'une façon différente de celle qui redonne le principe d'Hamilton et nous serons conduits à envisager un ds^2 nouveau à $n+1$ variables, la $(n+1)^{\text{ième}}$ n'étant alors plus le temps.

15. Le principe d'Hamilton. — Soit un système dynamique à n degrés de liberté caractérisés par les paramètres $q^i (i=1, 2, \ldots, n)$, holonome, à liaisons parfaites et bilatérales, et conservatif.

Les équations différentielles du mouvement du système s'écrivent, en variables de Lagrange q', q'^i, t :

$$\frac{dq^i}{dt} = q'^i,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'^i}\right) - \frac{d\mathcal{L}}{\partial q^i} = 0,$$

$\mathcal{L}$ désignant le lagrangien $T+U$.

Ce système différentiel aux extrémales de l'action hamiltonienne $\int \mathcal{L}(q^i, t, q'^i)\,dt$ est caractérisé par le fait d'admettre l'invariant intégral relatif de Cartan

$$\omega = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'^i} dq^i - \mathrm{H}\,dt,$$

H représentant la fonction hamiltonienne $T_2 - T_0 - U$.

Cet énoncé, qui constitue le principe de Cartan, peut être mis sous une forme invariante par rapport aux transformations faisant intervenir le temps

$$\overline{q}^j = f(q^i, t).$$

Pour cela posons

$$t = q^{n+1},$$

nous aurons alors $n+1$ paramètres q^α que nous considérerons au cours du mouvement comme des fonctions d'un paramètre auxiliaire u.

Nous poserons

$$\dot{q}^\alpha = \frac{dq^\alpha}{du},$$

si bien que

$$q'^i = \frac{\dot{q}^i}{\dot{q}^{n+1}}.$$

Faisons ce changement de variable dans l'intégrale d'action hamiltonienne

$$\int \mathcal{L}(q^i, t, q'^i)\, dt = \int \mathcal{L}\left(q^i, q^{n+1}, \frac{\dot{q}^i}{\dot{q}^{n+1}}\right) \dot{q}^{n+1}\, du.$$

Au lagrangien $\mathcal{L}(q^i, t, q'^i)$ se substitue la fonction

$$f(q^\alpha, \dot{q}'^\alpha) = \dot{q}^{n+1} \mathcal{L}\left(q^i, q^{n+1}, \frac{\dot{q}^i}{\dot{q}^{n+1}}\right).$$

Le facteur $\dot{q}^{n+1}$ rend f homogène et de degré 1 par rapport aux $\dot{q}^\alpha$ et permet d'écrire

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'^i},$$

tandis que l'hamiltonien H s'introduira par

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^{n+1}} = -\,\mathrm{H}.$$

Dans ces conditions, l'invariant intégral relatif de Cartan s'écrira

$$\omega = \sum_\alpha \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^\alpha} dq^\alpha.$$

Cette forme a le grand intérêt de permettre d'obtenir les équations du mouvement dans n'importe quels systèmes d'axes en mouvement les uns par rapport aux autres.

Explicitons la fonction $f(q^\alpha, \dot{q}^\alpha)$ en nous donnant la force vive sous la forme habituelle

$$2\mathrm{T} = a_{ij}\, q'^i q'^j + 2\, b_i\, q'^i + 2\,\mathrm{T}_0.$$

On a

$$\mathcal{L}\left(q^i, q^{n+1}, \frac{\dot{q}^i}{\dot{q}^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\, a_{ij}\, \frac{\dot{q}^i \dot{q}^j}{(\dot{q}^{n+1})^2} + b_i\, \frac{\dot{q}^i}{\dot{q}^{n+1}} + \mathrm{T}_0 + \mathrm{U},$$

et

(15.1) $$f(q^\alpha, \dot{q}^\alpha) = \frac{a_{ij}\, \dot{q}^i \dot{q}^j}{2\, \dot{q}^{n+1}} + b_i \dot{q}^i + \mathrm{T}_0 + \mathrm{U})\, \dot{q}^{n+1}.$$

Nous énoncerons donc le principe d'Hamilton sous la forme :

Les trajectoires d'un système dynamique holonome, à liaisons parfaites et bilatérales, et conservatif sont définies intrinsèquement dans l'espace-temps de configuration comme étant les géodésiques de la fonction $f(q^\alpha, \dot{q}^\alpha)$ *donnée par* (15.1).

16. Passage du principe d'Hamilton a un ds^2 riemannien a $n+2$ variables. — Cette fonction $f(q^\alpha, \dot{q}^\alpha)$ étant de la forme quotient d'une forme quadratique par une forme linéaire augmenté de cette forme linéaire elle-même, nous pouvons ramener l'étude de ses géodésiques dans l'espace-temps de configuration à l'étude des géodésiques d'un espace de Riemann à $n+2$ dimensions et à γ_{00} nul dont nous allons déterminer le ds^2. $f(q^\alpha, \dot{q}^\alpha)$ étant dépourvue de constante devant jouer le rôle de h, nous identifierons cette fonction avec ce que devient la fonction (12.6) pour une certaine valeur, soit B, de la constante h.

Pour faire cette identification, nous écrirons d'abord f sous la forme

$$f(q^\alpha, \dot{q}^\alpha) = \frac{a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + 2b_i\dot{q}^i\dot{q}^{n+1} + 2(T_0+U)(\dot{q}^{n+1})^2}{2\dot{q}^{n+1}}.$$

Quant à la fonction L donnée par (12,6), nous devons l'écrire pour $n+1$ variables avec une forme linéaire au dénominateur se réduisant au seul terme $\gamma_{n+1,0}\dot{q}^{n+1}$; on aura donc

$$\mathrm{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, h) = h\frac{\gamma_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta}{2\gamma_{n+1,0}\dot{q}^{n+1}} + \frac{1}{2h}\gamma_{n+1,0}\dot{q}^{n+1} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n+1),$$

$$\mathrm{L}(q^\alpha, \dot{q}^\alpha, \mathrm{B}) = \frac{\mathrm{B}^2\gamma_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta + (\gamma_{n+1,0})^2(\dot{q}^{n+1})^2}{2\mathrm{B}\gamma_{n+1,0}\dot{q}^{n+1}}.$$

L'identification donne

$$a_{ij} = \mathrm{B}\frac{\gamma_{ij}}{\gamma_{n+1,0}}; \qquad b_i = \mathrm{B}\frac{\gamma_{i,n+1}}{\gamma_{n+1,0}};$$

$$2(T_0+U) = \frac{\mathrm{B}^2\gamma_{n+1,n+1} + (\gamma_{n+1,0})^2}{\mathrm{B}\gamma_{n+1,0}}.$$

La solution dépend d'une fonction arbitraire $\gamma_{n+1,0} = B\psi$ des q^α et s'exprime par

$$\gamma_{ij} = \psi a_{ij}, \qquad \gamma_{n+1,0} = B\psi,$$
$$\gamma_{i,n+1} = \psi b_i, \qquad \gamma_{i0} = 0,$$
$$\gamma_{n+1,n+1} = 2\psi(T_0 + U) + \psi^2.$$

La fonction F associée s'écrit alors

$$F^2 = \psi\{a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + 2b_i\dot{q}^i\dot{q}^{n+1} + [2(T_0 + U) - \psi](\dot{q}^{n+1})^2 + 2B\dot{q}^{n+1}\dot{q}^0\},$$

si bien que le ds^2 cherché s'écrit

$$(16.1) \qquad ds^2 = \psi\{a_{ij}\,dq^i\,dq^j + 2b_i\,dq^i\,dt + [2(T_0 + U) - \psi]\,dt^2 + 2B\,dt\,dq^0\}.$$

Ce ds^2 généralise celui d'Eisenhart, qui s'obtient en prenant la fonction ψ égale à une constante et en le divisant par ψ :

$$ds_E^2 = a_{ij}\,dq^i\,dq^j + 2b_i\,dq^i\,dt + 2(T_0 + U_1)\,dt^2 + 2B\,dt\,dq^0,$$

avec

$$2U_1 = 2U - \psi,$$

la fonction de force n'étant définie qu'à une constante additive près.

Nous allons à présent donner la signification de la variable supplémentaire q^0 et préciser de quelle façon se réalise la représentation paramétrique des trajectoires du système dynamique.

Si l'on considère le ds^2 donné par (16.1), on a, en prenant pour ψ une constante positive,

$$(16.2) \qquad \frac{ds^2}{dt^2} = \psi(2\mathcal{L}_1 + 2q'^0)$$

en posant $\mathcal{L}_1 = T + U_1$, et en prenant $B = 1$.

D'autre part, l'équation $\frac{\partial F}{\partial \dot{q}^0} = h = B$ donne avec $F^2 = \frac{ds^2}{du^2}$,

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\psi} = a^2,$$

relation qui indique que pour ces ds^2 l'arc est proportionnel au temps.

On tire alors de (16.2)

$$q'^0 = -\mathcal{L}_1 + \frac{\psi}{2},$$

d'où

$$q^0 = -\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}_1\, dt + b + \frac{t}{2a^2}.$$

Ainsi q^0 est déterminé si l'on choisit les deux constantes a et b. Si ce choix est fait une fois pour toutes, il y a correspondance biunivoque entre les géodésiques de l'espace riemannien à $n+2$ dimensions défini par (16.1) et les trajectoires du système dynamique considéré dans l'espace-temps de configuration.

La correspondance biunivoque que nous venons de réaliser avec des géodésiques non minimales peut également être réalisée avec des géodésiques de longueur nulle :

$ds^2 = 0$ donne

$$q'^0 = -\mathcal{L}_1 \qquad \text{et} \qquad q^0 = -\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}_1\, dt + b,$$

le choix fait une fois pour toutes de la seule constante b fournit la correspondance biunivoque annoncée.

Résumons cette étude par l'énoncé suivant :

Les trajectoires du système dynamique envisagé sont dans l'espace de configuration les géodésiques d'une fonction non homogène $\mathcal{L} = \mathrm{T} + \mathrm{U}$ (*principe d'Hamilton sous sa forme ordinaire*). *Elles sont les géodésiques de l'espace finslérien constitué par l'espace-temps de configuration doué de la métrique* (15.1). *Elles peuvent être mises en correspondance biunivoque avec des géodésiques d'un espace riemannien à* $n+2$ *dimensions par le choix de deux constantes si l'on prend des géodésiques non minimales, par le choix de deux constantes si l'on prend des géodésiques non minimales, par le choix d'une seule constante si l'on prend des géodésiques de longueur nulle* ([1]).

17. Passage du principe d'Hamilton au principe de Maupertuis. — Considérons à présent la fonction f qui intervient dans le principe

---

([1]) Signalons encore que cette façon de mettre en correspondance les trajectoires du système dynamique avec des géodésiques d'un espace riemannien peut être utile dans des études de stabilité de mouvements, qui se trouvent ainsi ramenées à des problèmes « d'écart géodésique ».

d'Hamilton comme une fonction F en faisant jouer au temps le rôle de la variable x^0. Pour cela, nous sommes amenés à nous placer dans les conditions du paragraphe **9**; nous allons donc supposer f indépendante de q^{n+1}; autrement dit nous supposons que le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps, c'est-à-dire que nous sommes dans le cas d'intégrabilité de Painlevé.

Reprenons la fonction (15.1)

$$f(q^i, \dot{q}^i, \dot{q}^{n+1}) = \frac{a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j}{2\dot{q}^{n+1}} + b_i\dot{q}^i + (\mathrm{T}_0 + \mathrm{U})\dot{q}^{n+1}$$

et effectuons sur elle les calculs du paragraphe **9** :

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{q}^{n+1}} = -\frac{a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j}{2(\dot{q}^{n+1})^2} + \mathrm{T}_0 + \mathrm{U} = h.$$

Cette équation exprime que le système différentiel des équations du mouvement admet l'intégrale première $\mathrm{H} = \text{const.}$

On a vu en effet au paragraphe **15** que

$$\frac{\partial f}{\partial \dot{q}^{n+1}} = -\mathrm{H}.$$

On en tire que

$$(\dot{q}^{n+1})^2 = \frac{a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j}{2(\mathrm{T}_0 + \mathrm{U} - h)},$$

et en portant dans $\mathrm{L} = f - h\varphi$, on a

$$\mathrm{L}(q^i, \dot{q}^i, h) = \frac{1}{2}\sqrt{a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j}\sqrt{2(\mathrm{T}_0 + \mathrm{U} - h)} + b_i\dot{q}^i$$
$$+ \frac{(\mathrm{T}_0 + \mathrm{U})\sqrt{a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j}}{\sqrt{2(\mathrm{T}_0 + \mathrm{U} - h)}} - \frac{h\sqrt{a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j}}{\sqrt{2(\mathrm{T}_0 + \mathrm{U} - h)}},$$

soit

$$(17.1) \qquad \mathrm{L}(q^i, \dot{q}^i, h) = \sqrt{2(\mathrm{T}_0 + \mathrm{U} - h)}\sqrt{a_{ij}\dot{q}^i\dot{q}_j} + b^i\dot{q}^i.$$

Nous sommes donc amenés à énoncer le principe de Maupertuis sous la forme suivante :

Dans le cas où le système dynamique considéré admet l'intégrale première de Painlevé $\mathrm{H} = \text{const.}$, *les trajectoires à énergie totale déterminée* E *sont définies dans l'espace de configuration, indépendamment* *de la loi de parcours, comme étant les géodésiques de la fonction* (17.1) *où* $h = -E$.

18. Passage du principe de Maupertuis a un ds^2 nouveau. — Cette fonction étant de la forme racine carrée d'une forme quadratique augmentée d'une forme linéaire, nous pouvons ramener l'étude de ses géodésiques à l'étude des géodésiques d'un espace de Riemann à $n+1$ dimensions et à $\gamma_{00} \neq 0$; la $(n+1)^{\text{ième}}$ variable ne représentera alors plus le temps. Nous nous occupons ici des trajectoires à énergie totale déterminée et envisageons donc notre fonction comme étant dépourvue de constante devant jouer le rôle de la constante h; évidemment, si nous faisions jouer à $-E$ le rôle de la constante h, nous pourrions remonter du principe de Maupertuis au principe d'Hamilton.

Nous ferons d'abord les calculs pour une fonction L dépourvue de constante h et représentée avec les notations

$$L(x^i, x'^i) = \sqrt{\alpha_{ij} x'^i x'^j} + \beta_i x'^i.$$

Formons une fonction $L_1(x^i, x'^i, h)$ qui se réduise à $L(x^i, x'^i)$ pour une certaine valeur, 1 par exemple, de la constante h; pour cela, γ_{00} étant une fonction quelconque des x^i, posons

$$\alpha_{ij} = \left(1 - \frac{1}{\gamma_{00}}\right) \overset{\star}{\alpha}_{ij}; \qquad \beta_1 = \frac{1}{\gamma_{00}} \overset{\star}{\beta}_i.$$

Ces relations définissent des fonctions $\overset{\star}{\alpha}_{ij}$ et $\overset{\star}{\beta}_i$ des x^i et nous prendrons

$$\alpha_{ij}(h) = \left(1 - \frac{h^2}{\gamma_{00}}\right) \overset{\star}{\alpha}_{ij}; \qquad \beta_i(h) = \frac{h}{\gamma_{00}} \overset{\star}{\beta}_i.$$

Nous obtenons ainsi pour L_1 :

$$L_1(x^i, x'^i, h) = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\gamma_{00}}} \sqrt{\overset{\star}{\alpha}_{ij} x'^i x'^j} + \frac{h}{\gamma_{00}} \overset{\star}{\beta}_i x'^i.$$

La fonction F associée est définie par

$$F^2 = \gamma_{ij} x'_i x'^j + 2\gamma_{i0} x'^i x'^0 + \gamma_{00} (x'^0)^2,$$

où

$$\gamma_{ij} = \overset{*}{\alpha}_{ij} + \frac{\overset{*}{\beta}_i \overset{*}{\beta}_j}{\gamma_{00}}; \qquad \gamma_{i0} = \overset{*}{\beta}_i,$$

ou, en revenant aux fonctions données α_{ij} et β_i,

$$\gamma_{ij} = \gamma_{00}\left(\frac{\alpha_{ij}}{\gamma_{00} - 1} + \beta_i \beta_j\right); \qquad \gamma_{i0} = \gamma_{00}\beta_i.$$

Remplaçons alors α_{ij} par $2(T_0 + U + E)\, a_{ij}$ et β_i par b_i; nous obtenons le ds^2 cherché

$$ds^2 = \gamma_{00}\left\{\left[\frac{2(T_0 + U + E)}{\gamma_{00} - 1} a_{ij} + b_i b_j\right] dq^i\, dq^j + 2 b_i\, dq^i\, dq^0 + (dq^0)^2\right\}.$$

Pour simplifier, il nous est loisible de prendre $\gamma_{00} = 2$ et d'envisager le ds^2 suivant, obtenu après division par 2,

$$(18.1) \qquad ds^2 = [2(T_0 + U + E) a_{ij} + b_i b_j]\, dq^i\, dq^j + 2 b_i\, dq^i\, dq^0 + (dq^0)^2$$

ou

$$ds^2 = 2(T_0 + U + E) a_{ij}\, dq^i\, dq^j + (dq^0 + b_i\, dq^i)^2.$$

L'interprétation de la variable q^0 pour le ds^2 (18.1) et la représentation paramétrique des trajectoires du système dynamique se fera ici de la façon suivante :

$\dfrac{\partial F}{\partial q'^0} = h$ donne avec $F^2 = 2\dfrac{ds^2}{du^2}$ et en prenant $h = 1$:

$$2(T_0 + U + E) a_{ij} q'^i q'^j + (q'^0 + b_i q'^i)^2 = 2(q'^0 + b^i q'^i)^2$$

ou

$$q'^0 = 2\sqrt{T_2(T_0 + U + E)} - T_1.$$

En introduisant le lagrangien $\mathcal{L} = T_2 + T_1 + T_0 + U$ et en tenant compte de la relation $T_2 - T_0 - U = E$, on peut écrire

$$q'^0 = \mathcal{L} + E - 2T_1,$$

d'où

$$q^0 = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}\, dt + E t - 2\int_{t_0}^{t_1} b_i\, dq^i + k.$$

Le choix fait une fois pour toutes de la constante d'intégration k

établit une correspondance biunivoque entre les trajectoires dans l'espace de configuration du système dynamique considéré et les géodésiques de l'espace riemannien défini par (18.1).

Ainsi, dans le cas où le système dynamique considéré admet l'intégrale première de Painlevé, ses trajectoires à énergie totale déterminée peuvent être mises en correspondance biunivoque avec les géodésiques de l'espace riemannien à $n+1$ *dimensions défini par* (18.1). *Quant à la loi de parcours sur les trajectoires, elle est définie par l'intégrale de Painlevé elle-même.*

Sans nous étendre davantage sur ces questions de Dynamique classique, revenons au problème unitaire à partir duquel nous avons été conduit à dégager le problème de calcul des variations que nous venons de traiter.

3. Application au problème unitaire.

19. Nous avons vu que, dans la théorie provisoire de l'électromagnétisme, les trajectoires d'une particule électrisée de masse m et de charge e apparaissaient dans l'espace-temps de la Relativité générale comme les géodésiques de la fonction

$$\varphi(x^i, x'^i) = \sqrt{g_{ij}x'^i x'^j} + \frac{e}{m}\varphi_i x'^i.$$

Nous nous étions alors posé la question de savoir s'il était possible de trouver une représentation paramétrique par géodésiques des trajectoires de toute particule électrisée, étant donné que le rapport $\frac{e}{m}$ varie d'un type de particule à un autre. Nous avons été ainsi conduit à résoudre un problème de calcul des variations et nous pouvons affirmer à présent qu'une telle représentation est possible.

Mais l'étude d'une métrique riemannienne à $n+1$ variables nous a conduit à envisager deux types de fonctions L dont l'un, celui qui correspond au cas où γ_{00} est différent de zéro, est précisément celui de la fonction $\varphi(x^i, x'^i)$. Ce fait est du plus grand intérêt, car il va nous être possible de trouver une représentation paramétrique des trajectoires des particules électrisées, non seulement comme extrémales d'une intégrale portant sur une fonction définie sur un espace à cinq dimensions, mais comme géodésiques d'un espace *de Riemann* à cinq dimensions.

C'est ce résultat, qui dépasse ce à quoi nous pouvions nous attendre logiquement, qui nous invite à poursuivre dans cette voie. L'introduction d'une cinquième coordonnée, faite mathématiquement à partir de la recherche d'une représentation paramétrique, se justifiera donc par le fait qu'elle confère aux trajectoires des particules électrisées le rôle de géodésiques qu'elles perdaient dans l'espace-temps et que, en plus, le nouvel espace à envisager est, comme l'espace-temps lui-même, un espace de Riemann.

20. Détermination de l'espace de Riemann a cinq dimensions. — Pour déterminer cet espace de Riemann, il nous suffit de ramener la fonction

$$\sqrt{g_{ij}x'^i x'^j} + \frac{e}{m}\varphi_i x'^i$$

à la forme

$$\sqrt{1 - \frac{h^2}{\gamma_{00}}}\sqrt{g_{ij}x'^i x'^j} + \frac{h}{\gamma_{00}}\gamma_{i0}x'^i.$$

Les facteurs $\sqrt{1 - \frac{h^2}{\gamma_{00}}}$ et $\frac{h}{\gamma_{00}}$ qui multiplient la racine carrée de la forme quadratique et la forme linéaire dans cette deuxième fonction dépendent des x^i par l'intermédiaire de la fonction γ_{00}. Dans la première fonction au contraire, ces facteurs 1 et $\frac{e}{m}$ ne dépendent pas des x^i. La solution qui se présente en premier lieu à l'esprit est de choisir γ_{00} constant (hypothèse d'O. Klein) [1]. L'identification des deux fonctions se fera en posant d'abord

$$\frac{e}{m} = \frac{\beta h}{\sqrt{1 - \frac{h^2}{\gamma_{00}}}},$$

β étant une constante qui nous permettra de prendre $\gamma_{00} = 1$.

---

(1) *Cf.* O. Klein (bibl. [13]).

Pour terminer l'identification des deux fonctions nous poserons

$$\varphi_i = \frac{\gamma_{i0}}{\beta\gamma_{00}}.$$

Énonçons donc le résultat suivant :

Les trajectoires des particules électrisées se représentent paramétriquement par les géodésiques de l'espace de Riemann à cinq dimensions de métrique

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij}\,dx^i\,dx^j + 2\gamma_{i0}\,dx^i\,dx^0 + \gamma_{00}(dx^0)^2$$

où γ_{00}, γ_{i0} et γ_{ij} ont les valeurs

$$(20.1)\qquad \begin{cases} \gamma_{00} = 1, \\ \gamma_{i0} = \beta\gamma_{00}\varphi_i, \\ \gamma_{ij} = g_{ij} + \beta^2\gamma_{00}\varphi_i\varphi_j. \end{cases}$$

Nous allons examiner plus en détail et discuter les hypothèses de la théorie pentadimensionnelle à laquelle nous avons été conduit.

III. — Les hypothèses d'une théorie unitaire pentadimensionnelle.

21. Caractère unitaire de la théorie. — La théorie à laquelle nous serions conduits par les considérations précédentes serait unitaire au sens que nous avons appelé logique au paragraphe **5**. En effet, tout d'abord, elle serait identique à la théorie provisoire puisqu'elle ne serait qu'un nouvel aspect de celle-ci, dû à notre désir d'obtenir une représentation paramétrique valable pour l'ensemble des trajectoires de tout type de particule électrisée.

Ensuite les champs gravitationnel et électromagnétique seraient tous deux incorporés dans la métrique de l'espace à cinq dimensions de la façon précisée par les formules (20.1).

Enfin nous serions en droit de penser que le phénomène élémentaire unitaire y serait régi par le principe des géodésiques. Pour régler définitivement cette question des géodésiques, il faut en effet étudier dans la théorie les conditions de raccordement puis atteindre le phénomène élémentaire par passage à la limite.

Auparavant il faut évidemment élaborer la théorie en ce qui concerne ses équations, ce que nous ferons au chapitre suivant après en avoir ici discuté les hypothèses fondamentales.

22. Rôle de la cinquième coordonnée. — La critique fondamentale faite *a priori* à toute théorie pentadimensionnelle est précisément son caractère pentadimensionnel. L'introduction d'une cinquième coordonnée d'Univers, dépourvue de signification physique, est en effet peu satisfaisante pour l'esprit. Les tentatives de justification faites après coup laissent également à désirer. Cependant, de nombreux savants ont été séduits par une telle théorie, persuadés qu'elle contenait une « part de vérité ».

Dans ce travail, la cinquième coordonnée est apparue mathématiquement, dans un problème de recherche de représentation paramétrique. Nous nous contenterons de préciser son rôle mathématique (1) :

D'après les formules (12.4) et suivantes, nous avons

$$F = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{\gamma_{00}}}} \sqrt{g_{ij} x'^i x'^j},$$

$$x'^0 = \frac{hF}{\gamma_{00}} - \frac{\gamma_{i0}}{\gamma_{00}} x'^i = \frac{\dfrac{h}{\gamma_{00}}}{\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{\gamma_{00}}}} \sqrt{g_{ij} x'^i x'^j} - \frac{\gamma_{i0}}{\gamma_{00}} x'^i,$$

(1) Au Chapitre II, nous attribuerons à la cinquième variable le caractère spatial ainsi qu'aux variables x^1, x^2, x^3 ; x^4 sera la variable à caractère temporel. Nous verrons au Chapitre III quelles considérations mathématiques imposent cette hypothèse. Physiquement, cette hypothèse est beaucoup plus satisfaisante que l'hypothèse contraire; chaque point de l'espace ordinaire serait à considérer comme un élément linéaire d'un espace à quatre dimensions. Autrement dit les points que nous observons seraient les projections sur un espace à trois dimensions d'éléments de lignes d'un espace à quatre dimensions; de façon plus précise, ils seraient les éléments de l'espace quotient d'une variété proprement spatiale $x^4 = \text{const.}$ de l'espace à cinq dimensions par la relation d'équivalence qui consiste à tenir pour équivalents les points d'une ligne le long de laquelle x^0 varie seul.

ou encore avec les notations du paragraphe **20** :

$$x'^0 = \frac{\frac{e}{m}}{\beta\gamma_{00}}\sqrt{g_{ij}x'^i x'^j} - \beta\varphi_i x'^i;$$

d'où, avec $ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$,

$$x^0 = \int_{u_0}^{u_1} \frac{1}{\beta\gamma_{00}}\,\frac{e}{m}\,ds - \beta\int_{u_0}^{u_1} \varphi_i\,dx^i + k. \tag{22.1}$$

Le choix fait une fois pour toutes de la constante k introduit une correspondance biunivoque entre les trajectoires dans l'Univers d'une particule électrisée déterminée et des géodésiques de l'espace riemannien à cinq dimensions défini au paragraphe **20**.

23. L'HYPOTHÈSE DE CYLINDRICITÉ. — D'après la façon même dont a été construit l'espace à cinq dimensions que nous envisageons, les coefficients $\gamma_{\lambda\mu}(\lambda, \mu = 0, 1, 2, 3, 4)$ de sa métrique ne dépendent pas de x^0. On exprime ce fait en disant que l'espace à cinq dimensions est *cylindrique* par rapport à la cinquième coordonnée x^0.

Cette hypothèse de cylindricité s'est introduite ici de façon purement mathématique. Elle est fondamentale dans toute théorie pentadimensionnelle et ne saurait en aucun cas être rejetée : en effet tous les phénomènes physiques sont à quatre et non cinq paramètres ; aucun d'eux n'a permis de mettre en évidence l'existence physique d'un cinquième paramètre. Si l'on rejetait l'hypothèse de cylindricité, on se trouverait en contradiction avec ce fait fondamental.

Signalons dès à présent que cette hypothèse est à rapprocher de celle que l'on fait lorsqu'on suppose le ds^2 de l'Univers stationnaire, cas où il existe un système de coordonnées dans lequel les potentiels de gravitation g_{ij} ne dépendent pas de la variable possédant le caractère temporel ; on verra plus loin le parti que l'on peut tirer de cette analogie.

Il découle de l'hypothèse de cylindricité que la théorie pentadimensionnelle ne va pas être celle des phénomènes covariants vis-à-vis des changements de systèmes de coordonnées les plus généraux dans l'espace à cinq dimensions, $y^\alpha = f^\alpha(x^\beta)$, mais que nous devrons nous limiter à ceux qui conservent à l'espace son caractère cylindrique, c'est-à-dire à ceux qui ne modifient pas les lignes-coordonnées où x^0 varie seul :

$$(23.1) \qquad \begin{cases} y^0 = x^0 + f(x^i) \\ y^i = g^i(x^j) \end{cases} \qquad (i, j = 1, 2, 3, 4).$$

C'est ceci qui limite au sens que nous avons appelé logique l'aspect unitaire de la théorie; en effet, ces changements de variables restreints ne permettent pas la fusion totale des champs gravitationnel et électromagnétique en un même hyperchamp.

En définitive, l'hypothèse de cylindricité, qui s'est imposée à nous mathématiquement, se trouve conforme aux idées physiques que nous avons exposées au paragraphe **5**.

24. L'hypothèse d'O. Klein. — Nous avons été amené à envisager une autre hypothèse pour une théorie pentadimensionnelle : celle de la constance du coefficient γ_{00}.

Voyons d'abord sa signification géométrique : c'est que les trajectoires du groupe d'isométrie [1] sont des géodésiques. En effet, pour que le système différentiel aux géodésiques de l'espace à cinq dimensions, soit

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\sigma^2} + \Gamma_\lambda{}^\alpha{}_\mu \frac{dx^\lambda}{d\sigma}\frac{dx^\mu}{d\sigma} = 0,$$

admette la solution $x^i =$ const. il est nécessaire et suffisant que $\Gamma_0{}^\alpha{}_0$ soit nul ou que

$$\Gamma_{0\alpha 0} = -\frac{1}{2}\partial_\alpha \gamma_{00} = 0,$$

c'est-à-dire que γ_{00} soit constant dans tout l'espace.

Cette hypothèse est de toute autre nature que celle de la cylindricité [2] : si cette dernière s'imposait à nous par des considérations

---

(1) Il s'agit ici d'un groupe conservant l'intervalle pentadimensionnel de deux points.

(2) Les deux hypothèses sont distinctes : les changements de coordonnées limités (23.1) imposés par l'hypothèse de cylindricité laissent γ_{00} invariant *en chaque point* mais ne restreignent en rien l'arbitraire de cette fonction.

physiques, il n'en est plus du tout de même pour celle-ci. Aucun fait physique ne nous révélant l'existence d'une cinquième dimension, *a fortiori* rien d'expérimental ne peut imposer aux trajectoires du groupe d'isométrie d'être des géodésiques.

Mathématiquement également, les deux hypothèses sont de natures distinctes : la première nous a été imposée par la nature même du problème de calcul des variations que nous avons résolu; la seconde n'a été obtenue au paragraphe **20** que comme le moyen le plus simple de rester le plus longtemps possible en conformité avec la théorie provisoire.

Remarquons encore que cette hypothèse n'intervient en rien dans le caractère unitaire de la théorie.

De plus, une théorie à γ_{00} variable donc à quinze variables de champ sera mathématiquement beaucoup plus satisfaisante que la théorie d'O. Klein à quatorze variables de champ; le nombre (15) de ses équations, égal au nombre des composantes distinctes d'un tenseur symétrique du second ordre d'un espace à cinq dimensions, s'accorde bien mieux avec le nombre de dimensions.

25. Rejet de l'hypothèse d'O. Klein. — C'est pour ces raisons que nous rejetterons l'hypothèse d'O. Klein. Le rejet de cette hypothèse conduit à une théorie dans laquelle la « constante de gravitation » χ est susceptible de varier; nous verrons en effet comment γ_{00} va se trouver relié à χ.

γ_{00} étant supposé fonction des x^i, la relation entre $\frac{e}{m}$, h et γ_{00} doit toujours être comme au paragraphe **20** :

$$\frac{e}{m}\sqrt{1-\frac{h^2}{\gamma_{00}}}=\beta h; \tag{25.1}$$

mais nous envisagions les géodésiques pour $h=$ const.; nous sommes ainsi amenés à considérer des lignes le long desquelles $\frac{e}{m}$ varie.

Nous proposons de garder à ces lignes le caractère de trajectoires et de considérer le rapport $\frac{e}{m}$ comme variable pour une particule déterminée; nous préciserons plus loin comment la variation de $\frac{e}{m}$ doit être reliée à la variation de la « constante » de la gravitation.

Ainsi, nous proposons d'appeler par définition, trajectoires d'une particule électrisée les lignes le long desquelles h demeure constant, h étant donné par la formule (25.1).

Nous aurons ainsi une théorie distincte de la théorie provisoire, mais qui approchera cette théorie pour des variations faibles de γ_{00}. Ce processus d'élaboration des hypothèses d'une théorie est tout à fait normal : si nous nous contentions de l'hypothèse $\gamma_{00} = \text{const.}$, nous ne pourrions avoir qu'une théorie qui traduirait dans un langage nouveau la théorie provisoire; nous ne pourrions en attendre que des simplifications d'exposition pour des résultats fatalement contenus dans la théorie provisoire. L'étude mathématique de la théorie d'O. Klein sera d'ailleurs faite au Chapitre III.

26. Les considérations développées dans ce chapitre nous conduisent à envisager une théorie réalisant l'unification des champs gravitationnel et électromagnétique dans laquelle :

les champs seraient donnés par la connaissance de quinze fonctions $\gamma_{\lambda\mu}$; ces quinze potentiels de champ seraient les coefficients de la métrique $d\sigma^2$ d'un espace de Riemann à cinq dimensions; cet espace serait cylindrique par rapport à la cinquième coordonnée x^0; la signification mathématique de cette cinquième coordonnée serait donnée par la formule (22.1), *où γ_{00} doit être considéré comme variable.*

Le phénomène élémentaire doit y être étudié à la lumière des considérations du paragraphe précédent : il s'agira de voir si la théorie est susceptible de contenir un résultat analogue à celui que nous avons rappelé au paragraphe **1** pour la théorie de la Relativité générale.

Nous allons à présent jeter les bases de l'étude axiomatique d'une telle théorie, en restant le plus possible en parallélisme avec la théorie de la Relativité générale.

(*à suivre*).

Étude mathématique des équations d'une théorie unitaire à quinze variable de champ;

(suite et fin).

Par Yves THIRY.

CHAPITRE II.

Formation et étude des équations d'une théorie unitaire a quinze variables de champ.

I. — Formation des équations.

1. Nous nous proposons dans cette première partie d'établir, sous leur forme purement mathématique, les équations du champ du cas extérieur (au sens unitaire) de la théorie à laquelle nous avons été conduit. Pour cela nous postulerons que l'axiomatique de cette théorie en ce qui concerne ses équations est identique à la partie correspondante de l'axiomatique de la théorie de la Relativité générale.

Considérons donc un espace de Riemann à cinq dimensions, $\mathcal{R}_5$, défini par la donnée de la métrique

$$d\sigma^2 = \gamma_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu;$$

λ, μ ainsi que dans la suite tout indice représenté par une lettre grecque prennent les valeurs 0, 1, 2, 3, 4. Les coefficients $\gamma_{\lambda\mu}$ correspondants à un système de coordonnées déterminé sont des fonctions des variables x^1, x^2, x^3, x^4 mais ne dépendent pas de la variable x^0 (hypothèse de cylindricité). Ces quinze fonctions définissent complètement par rapport à ce système de coordonnées le phénomène élémentaire unitaire et seront appelées les quinze potentiels de champ relatifs à ce système de coordonnées.

Nous supposerons parallèlement à ce qui a lieu dans la théorie de la Relativité générale, que la généralité de ces potentiels est limitée par des équations aux dérivées partielles du second ordre qui s'écrivent dans le cas extérieur

$$S_{\lambda\mu} = 0,$$

les $S_{\lambda\mu}$, de signification purement géométrique, étant astreintes aux conditions suivantes :

Elles ne dépendent que des potentiels $\gamma_{\lambda\mu}$ *et de leurs dérivées des deux premiers ordres et sont linéaires par rapport aux dérivées du second ordre ; elles sont les composantes d'un tenseur conservatif, c'est-à-dire que l'on a*

$$\gamma^{\lambda\mu} \nabla_\lambda S_{\mu\nu} = 0 \quad (^1).$$

Or, d'après le résultat d'É. Cartan que nous avons rappelé au début du chapitre I, ces conditions imposent aux $S_{\lambda\mu}$ la valeur

$$S_{\lambda\mu} = h\left[R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\gamma_{\lambda\mu}(R + k)\right],$$

$R_{\lambda\mu}$ désignant les composantes du tenseur de Ricci de $\mathcal{R}_5$.

Nous donnerons la valeur 1 au facteur h surabondant et nous

---

(1) Il nous semble plus normal de baser les équations de la théorie sur ces conditions plutôt que sur tel ou tel principe variationnel comme cela se fait d'habitude. Le principe variationnel est en général choisi en vue du résultat que l'on veut obtenir : c'est ainsi que l'on peut choisir un principe variationnel fournissant une théorie à quatorze équations, ce qui a été longtemps considéré comme un point essentiel : c'est ce que fait O. Klein (bibl. [13]). Naturellement, les équations que nous écrivons correspondent au principe variationnel

$$\delta \int \sqrt{\gamma}\, \gamma^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu}\, d\tau = 0,$$

γ étant le déterminant des $\gamma_{\lambda\mu}$ et $d\tau$ l'élément de volume de $\mathcal{R}_5$. D'après Bergmann (bibl. [31]), Jordan aurait écrit en 1945 les quinze équations d'une théorie pour laquelle le principe variationnel porterait sur l'intégrale $\int \sqrt{-g}\, \gamma^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu}\, d\tau$, g étant le déterminant des g_{ij} définis comme au paragraphe **12** de notre premier chapitre. Cela conduit Bergmann à une théorie qui semble bien peu satisfaisante, puisque la quinzième équation y est du premier prendrons la constante k égale à zéro, si bien que les équations de la théorie s'écriront

$$S_{\lambda\mu} \equiv R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2}\gamma_{\lambda\mu} R = 0. \tag{1.1}$$

Ces équations sont au nombre de quinze. La relation entre le nombre d'équations et le nombre de conditions imposées au tenseur $S_{\lambda\mu}$ par son caractère conservatif est évidemment correcte, comme dans la théorie de la Relativité générale : en effet, par un choix convenable du système de coordonnées, on peut se donner *a priori* cinq potentiels; les dix potentiels restant ne peuvent alors vérifier quinze équations indépendantes et les quinze premiers membres des équations doivent être liés par cinq conditions; ils le sont effectivement par les cinq conditions de conservation.

Nous allons à présent décomposer $d\sigma^2$ en carrés en faisant jouer à x^0 le rôle de première variable directrice, de façon à ce que la différentielle dx^0 ne figure plus que dans le premier carré. Nous en déduirons la construction d'un repère mobile orthonormé et la définition d'un espace riemannien à quatre dimensions $\mathcal{R}_4$. Nous écrirons alors les équations (1.1) sous une forme explicite faisant intervenir des éléments de $\mathcal{R}_4$ en utilisant la technique du calcul extérieur.

2. Construction d'un repère mobile orthonormé. — Supposons pour l'instant la forme quadratique $d\sigma^2$, non dégénérée, décomposable en une somme de cinq carrés (signature elliptique), et posons

$$\gamma_{00} = V^2.$$

Écrivons $d\sigma^2$ sous la forme

$$d\sigma^2 = V^2(dx^0)^2 + 2\gamma_{i0}\, dx^i\, dx^0 + \gamma_{ij}\, dx^i\, dx^j,$$

i, j ainsi que dans la suite tout indice représenté par une lettre minuscule latine prenant les valeurs 1, 2, 3, 4.

---

ordre ! En réalité, le texte complet des travaux de Jordan n'était pas parvenu à Bergmann à cette époque et Jordan écrit dans une Note dont nous avons eu connaissance qu'au milieu de l'année 1948 (bibl. [28]) des équations formellement identiques à celles qui font l'objet de notre Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 12 janvier 1948.

Il vient alors

$$d\sigma^2 = \left(V\,dx^0 + \frac{\gamma_{i0}}{V}\,dx^i\right)^2 - \frac{\gamma_{i0}\gamma_{j0}}{V^2}\,dx^i\,dx^j + \gamma_{ij}\,dx^i\,dx^j,$$

$$d\sigma^2 = V^2\left(dx^0 + \frac{\gamma_{i0}}{V^2}\,dx^i\right)^2 + \left(\gamma_{ij} - \frac{\gamma_{i0}\gamma_{j0}}{V^2}\right)dx^i\,dx^j.$$

Introduisons la forme de Pfaff $\underset{-}{\overset{0}{\omega}}$ définie par

$$\underset{-}{\overset{0}{\omega}} = V\left(dx^0 + \frac{\gamma_{i0}}{V^2}\,dx^i\right)$$

et la forme quadratique

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j, \qquad \text{où} \quad g_{ij} = \gamma_{ij} - \frac{\gamma_{i0}\gamma_{j0}}{V^2}.$$

Nous poserons encore, toujours en conformité avec les notations du chapitre précédent

$$\frac{\gamma_{i0}}{V^2} = \beta\varphi_i \qquad (\beta = \text{const.})\,;$$

$\underset{-}{\overset{0}{\omega}}$ s'écrit alors

$$(2.1) \qquad \underset{-}{\overset{0}{\omega}} = V\,dx^0 + \beta V\,\varphi_i\,dx^i,$$

et l'on a

$$g_{ij} = \gamma_{ij} - \beta^2 V^2 \varphi_i \varphi_j.$$

Considérons à présent une décomposition de ds^2 en carrés sous la forme

$$ds^2 = \sum_{\underline{i}} (\underset{-}{\overset{i}{\omega}})^2,$$

les $\underset{-}{\overset{i}{\omega}}$ étant des combinaisons linéaires indépendantes des dx^i, à coefficients indépendants de x^0, soit

$$(2.2) \qquad \underset{-}{\overset{i}{\omega}} = A^{\underline{i}}_j\,dx^j.$$

Le $d\sigma^2$ de $\mathcal{R}_5$ est ainsi décomposé en carrés sous la forme

$$d\sigma^2 = (\omega^0)^2 + \sum_{\underline{i}} (\underset{-}{\overset{i}{\omega}})^2.$$

Les formules (2.1) et (2.2), qui peuvent s'écrire

$$\underset{-}{\overset{\alpha}{\omega}} = A^{\underline{\alpha}}_\beta\,dx^\beta$$

avec

$$A^{\underline{0}}_0 = V;\qquad A^{\underline{0}}_i = \beta V\varphi_i;\qquad A^{\underline{i}}_0 = 0,$$

se résolvent par rapport aux dx^α en introduisant la matrice $\left(A^{\beta}_{\underline{\alpha}}\right)$ inverse de $\left(A^{\underline{\alpha}}_{\beta}\right)$:

$$dx^\alpha = A^{\alpha}_{\underline{\beta}}\,\omega^{\underline{\beta}},$$

avec

$$A^0_{\underline{0}} = \frac{1}{V};\qquad A^0_{\underline{i}} = -\beta\varphi_{\underline{i}};\qquad A^i_{\underline{0}} = 0,$$

où nous avons posé

$$\varphi_{\underline{i}} = A^j_{\underline{i}}\,\varphi_j.$$

Ceci nous permet de définir en chaque point P de $\mathcal{R}_5$ un repère mobile orthonormé dont les vecteurs de base seront désignés par $\vec{e}_{\underline{\alpha}}$ ([1]) : un déplacement infinitésimal $d\vec{P}$ du point P, de composantes dx^α dans le repère naturel $\left(\vec{e}_\alpha\right)$ aura pour composantes $\omega^{\underline{\alpha}}$ dans ce nouveau repère et l'on passe d'un repère à l'autre par les formules

$$\vec{e}_{\underline{\alpha}} = A^{\beta}_{\underline{\alpha}}\,\vec{e}_\beta;\qquad \vec{e}_\alpha = A^{\underline{\beta}}_{\alpha}\,\vec{e}_{\underline{\beta}},$$

qui s'écrivent en explicitant

$$\vec{e}_0 = \frac{1}{V}\,\vec{e}_{\underline{0}},\qquad\qquad \vec{e}_0 = V\,\vec{e}_{\underline{0}};$$

$$\vec{e}_{\underline{i}} = A^j_{\underline{i}}\,\vec{e}_j - \beta\varphi_{\underline{i}}\,\vec{e}_0\qquad \vec{e}_i = A^{\underline{j}}_i\,\vec{e}_{\underline{j}} + \beta\varphi_i\,\vec{e}_{\underline{0}}.$$

3. Définition d'un espace riemannien a quatre dimensions. — Considérons la relation, non intégrable, $\omega^{\underline{0}} = 0$, et étudions sa signification :

Un déplacement $d\vec{P}$ du point P satisfaisant à cette relation est orthogonal à la ligne passant par P, le long de laquelle x^0 varie seul; nous désignerons par L_0 les lignes le long desquelles x^0 varie seul. Les vecteurs $\vec{e}_{\underline{0}}$ et $\vec{e}_0$ sont tangents en P à la ligne L_0 passant par P. L'orthogonalité du déplacement $d\vec{P}$ et de $\vec{e}_0$ est la signification intrin-

---

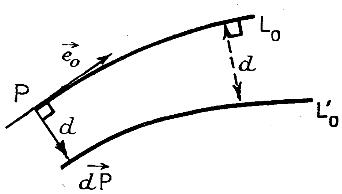
([1]) D'une façon générale, les indices soulignés caractériseront des éléments relatifs à un repère orthonormé.

sèque de la relation $\omega^{\underline{0}} = 0$ vis-à-vis des changements de coordonnées laissant les lignes L_0 invariantes :

$$y^0 = x^0 + f(x^i),$$
$$y^i = g^i(x^j).$$

Introduisons alors la relation d'équivalence $[L_0]$ suivante : deux points de $\mathcal{R}_5$ sont considérés comme équivalents s'ils appartiennent à la même ligne L_0; ces lignes L_0 apparaissent ainsi comme des fibres de $\mathcal{R}_5$. Considérons l'espace-quotient $\mathcal{R}_5/[L_0]$ de $\mathcal{R}_5$ par cette relation d'équivalence; cet espace ponctuel a pour éléments les fibres L_0 de $\mathcal{R}_5$.

Nous prendrons comme distance de deux fibres infiniment voisines la distance d'un point P d'une fibre L_0 au point $P + d\vec{P}$ de l'autre, $d\vec{P}$ étant orthogonal à L_0. D'après l'hypothèse de cylindricité, cette



distance ne dépend pas du point P choisi sur L_0. La métrique $d\sigma^2$ de $\mathcal{R}_5$ induit ainsi la métrique ds^2 dans l'espace des fibres qui se trouve alors doué d'une structure d'espace riemannien; cet espace riemannien à quatre dimensions sera désigné par $\mathcal{R}_4$.

Un déplacement infinitésimal d'un « point » L_0 de $\mathcal{R}_4$ s'exprimera par

$$d\mathrm{L}_0 = \vec{\underline{e}}_i \, dx_i \qquad \text{ou} \qquad d\mathrm{L}_0 = \vec{\underline{e}}_{\underline{i}} \, \omega^{\underline{i}}.$$

Ces deux formules définissent dans $\mathcal{R}_4$ un repère naturel $\left(\vec{\underline{e}}_i\right)$ et un repère orthonormé $\left(\vec{\underline{e}}_{\underline{i}}\right)$ (¹). Le passage d'un repère à l'autre s'effectue par les formules

$$\vec{\underline{e}}_{\underline{i}} = \mathrm{A}^j_{\underline{i}} \, \vec{\underline{e}}_j \qquad \text{et} \qquad \vec{\underline{e}}_i = \mathrm{A}^{\underline{j}}_i \, \vec{\underline{e}}_{\underline{j}}$$

(¹) Les éléments surlignés appartiennent à $\mathcal{R}_4$. Le repère $\left(\vec{\underline{e}}_i\right)$ est le repère faisant intervenir les matrices tronquées $(A^{i}_{\underline{i}})$ et $(A^{\underline{i}}_{i})$ déduites de $(A^{\beta}_{\underline{\alpha}})$ et $(A^{\underline{\beta}}_{\alpha})$ par suppression de la première ligne et de la première colonne.

La relation $\omega^{\underline{0}} = 0$, qui s'écrit

$$\beta\varphi_i\, dx^i = -\, dx^0 \tag{3.1}$$

montre que les quantités φ_i sont les composantes sur le repère naturel $(\vec{e}_i)$ d'un vecteur $\vec{\varphi}$ de $\mathcal{R}_4$ puisque dx^0 est un scalaire. Les quantités $\varphi_{\underline{i}}$ sont alors les composantes de ce vecteur sur le repère orthonormé $(\vec{e}_{\underline{i}})$ et $\omega^{\underline{0}}$ peut s'écrire

$$\omega^{\underline{0}} = V(dx^0 + \beta\varphi_{\underline{i}}\,\omega^{\underline{i}}). \tag{3.2}$$

La relation (3.1) nous permet de donner la signification de x^0 en langage de $\mathcal{R}_4$: *la différentielle de x^0 est à un facteur constant près le « travail élémentaire » du vecteur $\vec{\varphi}$ pour un déplacement infiniment petit d'un point de $\mathcal{R}_4$.*

Nous allons à présent évaluer les composantes $S_{\underline{\lambda\mu}}$ du tenseur d'Einstein dans le repère orthonormé $(\vec{e}_{\underline{\alpha}})$ de $\mathcal{R}_5$ en y explicitant les éléments de $\mathcal{R}_4$, ces éléments de $\mathcal{R}_4$ étant définis par leurs composantes sur le repère orthonormé $(\vec{e}_{\underline{i}})$ de $\mathcal{R}_4$. Comme il n'y a pas lieu en repère orthonormé de distinguer les composantes contravariantes des composantes covariantes [1], nous placerons systématiquement les indices en position basse, étant entendu qu'il faudra sommer par rapport à tout indice répété deux fois dans un monome. De plus,

---

naturel d'après sa définition même; on vérifie immédiatement que l'on a bien dans $\mathcal{R}_4$: $\vec{e}_i . \vec{e}_j = g_{ij}$. Le repère $(\vec{e}_{\underline{i}})$ est orthonormé puisque ds^2 s'écrit dans ce repère sous la forme $\sum_i (\omega^{\underline{i}})^2$.

[1] Dans le cas de la signature elliptique où nous sommes placé actuellement; il n'en est plus de même dans le cas de la signature hyperbolique.

pour la durée de ce calcul, c'est-à-dire dans les quatre paragraphes suivants, nous nous abstiendrons de souligner les indices qui, d'après nos conventions, devraient tous être soulignés.

4. Utilisation du calcul extérieur [1]. — Les formes différentielles qui permettent de définir les différentielles absolues des vecteurs de base seront désignées par $\omega_{\alpha\beta}$:

$$d\vec{e}_\alpha = \omega_{\alpha\beta}\vec{e}_\beta.$$

Elles sont définies par deux sortes de conditions :

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}, \tag{4.1}$$

$$d\omega_\alpha = \omega_\beta \wedge \omega_{\beta\alpha}, \tag{4.2}$$

le signe $\wedge$ indiquant la multiplication extérieure des formes différentielles.

Les quantités qui jouent ici le rôle des symboles de Christoffel sont les coefficients de rotation de Ricci $\gamma_{\alpha\beta\lambda}$ qui servent à exprimer les formes $\omega_{\alpha\beta}$ en fonction linéaire des formes ω_λ :

$$\omega_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta\lambda}\omega_\lambda; \tag{4.3}$$

ils sont antisymétriques par rapport aux deux premiers indices :

$$\gamma_{\alpha\beta\lambda} = -\gamma_{\beta\alpha\lambda}.$$

On les calcule en faisant intervenir d'autres coefficients à trois indices, $c_{\lambda\mu\alpha}$, eux aussi antisymétriques par rapport aux deux premiers indices, définis par

$$d\omega_\alpha = \frac{1}{2}c_{\lambda\mu\alpha}\omega_\lambda \wedge \omega_\mu. \tag{4.4}$$

En utilisant (4.2) et (4.3) on a

$$c_{\lambda\mu\alpha} = \gamma_{\lambda\alpha\mu} - \gamma_{\mu\alpha\lambda}, \tag{4.5}$$

d'où

$$\gamma_{\alpha\beta\lambda} = \frac{1}{2}(c_{\alpha\beta\lambda} - c_{\beta\lambda\alpha} - c_{\lambda\beta\alpha}). \tag{4.6}$$

---

[1] *Cf.* E. Cartan (bibl. [5], p. 221) et Lichnerowicz (bibl. [10], p. 143).

Enfin les relations de structure de l'espace s'écrivent en introduisant les formes quadratiques extérieures

$$\Omega_{\alpha\beta} = d\omega_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\lambda} \wedge \omega_{\lambda\beta} = \frac{1}{2} R_{\alpha\beta,\lambda\mu}\, \omega_\lambda \wedge \omega_\mu,$$

où $R_{\alpha\beta,\lambda\mu}$ désigne les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel de $\mathcal{R}_5$ sur le repère mobile orthonormé de cet espace.

5. Évaluation des coefficients a trois indices $c_{\lambda\mu\alpha}$ et $\gamma_{\alpha\beta\lambda}$. — Nous allons évaluer les coefficients $\bar{c}_{hki}$ et $\mathcal{R}_4$ en fonction des c_{hki} de $\mathcal{R}_5$ et calculer les coefficients $c_{\lambda\mu\alpha}$ qui ont un indice au moins égal à zéro.

Pour cela évaluons d'abord $d\omega_i$ [1] d'après la formule (4.4), dans $\mathcal{R}_5$ d'abord en y explicitant le terme contenant l'indice zéro, puis dans $\mathcal{R}_4$:

$$(5.1) \qquad d\omega_i = \frac{1}{2} c_{hki}\, \omega_h \wedge \omega_k + c_{0ki}\, \omega_0 \wedge \omega_k,$$

$$(5.2) \qquad d\omega_i = \frac{1}{2} \bar{c}_{hki}\, \omega_h \wedge \omega_k.$$

On en tire

$$(5.3) \qquad \bar{c}_{hki} = c_{hki},$$

$$(5.4) \qquad c_{0ki} = 0.$$

Considérons alors $d\omega_0$ évalué d'après (4.4) explicitée, puis obtenu par calcul direct à partir de (3.2) :

$$(5.5) \qquad d\omega_0 = c_{i00}\, \omega_i \wedge \omega_0 + \frac{1}{2} c_{ik0}\, \omega_i \wedge \omega_k,$$

$$(5.6) \qquad d\omega_0 = \frac{\partial_i V}{V} \omega_i \wedge \omega_0 + \beta V\, \partial_i \varphi_k\, \omega_i \wedge \omega_k + \beta V \varphi_h \frac{1}{2} c_{ikh}\, \omega_i \wedge \omega_k \quad [2].$$

On en tire

$$(5.7) \qquad c_{i00} = \frac{\partial_i V}{V},$$

$$(5.8) \qquad c_{ik0} = \beta V (\partial_i \varphi_k - \partial_k \varphi_i + c_{ikh} \varphi_h).$$

---

[1] On a évidemment $\bar{\omega}_i = \omega_i$.

[2] $\partial_i f$ représente le coefficient de ω_i dans $df = \partial_i f\, \omega_i$.

Cette évaluation des coefficients c permet alors de calculer les coefficients γ :

La formule (5.3), rapprochée de (4.6) donne

$$\bar{\gamma}_{hki} = \gamma_{hki}. \tag{5.9}$$

La formule (5.4), rapprochée de (4.5) donne

$$\gamma_{0ik} = \gamma_{ki0} \tag{5.10}$$

qui s'écrit aussi bien, compte tenu de l'antisymétrie des γ par rapport aux deux premiers indices

$$\gamma_{i0k} = \gamma_{ik0}. \tag{5.11}$$

La formule (5.7), rapprochée de (4.5) donne

$$\gamma_{i00} = \frac{\partial_i V}{V}, \tag{5.12}$$

c_{ik0} peut alors s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} c_{ik0} &= \gamma_{i0k} - \gamma_{k0i}, \\ &= \gamma_{i0k} + \gamma_{0ki} && \text{(antisymétrie des } \gamma), \\ &= \gamma_{i0k} + \gamma_{ik0} && [\text{d'après } (5.10)], \\ &= 2\gamma_{ik0} && [\text{d'après } 5.11)] \end{aligned}\right. \tag{5.13}$$

et la formule (5.8) donne

$$c_{ik0} = \beta V(\partial_i \varphi_k - \partial_k \varphi_i + \gamma_{ihk}\varphi_h - \gamma_{khi}\varphi_h). \tag{5.14}$$

Ceci introduit l'opérateur $\overline{\nabla}_i$ de dérivation covariante dans $\mathcal{R}_4$, défini par

$$\overline{\nabla}_i \varphi_k = \partial_i \varphi_k + \gamma_{hki}\varphi_h,$$

si bien que (5.14) s'écrit

$$c_{ik0} = \beta V(\overline{\nabla}_i \varphi_k - \overline{\nabla}_k \varphi_i).$$

Nous introduirons le tenseur antisymétrique F_{ik} de $\mathcal{R}_4$ défini par

$$F_{ik} = \overline{\nabla}_i \varphi_k - \overline{\nabla}_k \varphi_i$$

et résumerons le calcul des coefficients γ par les formules

$$\gamma_{hki} = \bar{\gamma}_{hki},$$
$$\gamma_{ik0} = \gamma_{i0k} = \gamma_{0ki} = \frac{1}{2}\beta V F_{ik},$$
$$\gamma_{i00} = \frac{\partial_i V}{V}.$$

6. Les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel en repère orthonormé. — $d\omega_{i\alpha}$ évalué directement dans $\mathcal{R}_5$ introduit les composantes du tenseur de courbure de cet espace; évalué en fonction de $d\bar{\omega}_{i\alpha}$, il introduit les composantes du tenseur de courbure de $\mathcal{R}_4$.

Commençons par nous occuper de $d\omega_{ij}$, qui, évalué dans $\mathcal{R}_5$ donne

$$d\omega_{ij} = \omega_{i0} \wedge \omega_{0j} + \omega_{ir} \wedge \omega_{rj} + \Omega_{ij},$$

soit en explicitant

$$\begin{aligned}(6.1)\qquad d\omega_{ij} = {} & (\gamma_{i00}\,\omega_0 + \gamma_{i0r}\,\omega_r) \wedge (\gamma_{0j0}\,\omega_0 + \gamma_{0js}\,\omega_s) \\ & + (\gamma_{ir0}\,\omega_0 + \gamma_{irk}\,\omega_k) \wedge (\gamma_{rj0}\,\omega_0 + \gamma_{rjk}\,\omega_k) \\ & + R_{ij0l}\,\omega_0 \wedge \omega_l + \frac{1}{2} R_{ijkl}\,\omega_k \wedge \omega_l.\end{aligned}$$

Mais d'autre part on a

$$\omega_{ij} = \gamma_{ij0}\,\omega_0 + \bar{\omega}_{ij}$$

et par conséquent

$$d\omega_{ij} = \partial_k \gamma_{ij0}\,\omega_k \wedge \omega_0 + \gamma_{ij0}\left(c_{k00}\,\omega_k \wedge \omega_0 + \frac{1}{2} c_{kh0}\,\omega_k \wedge \omega_h\right) + \bar{\omega}_{ir} \wedge \bar{\omega}_{rj} + \bar{\Omega}_{ij},$$

soit en explicitant

$$\begin{aligned}(6.2)\qquad d\omega_{ij} = {} & \partial_l \gamma_{ij0}\,\omega_l \wedge \omega_0 + \gamma_{ij0}\left(\frac{\partial_k V}{V}\,\omega_k \wedge \omega_0 + \gamma_{kl0}\,\omega_k \wedge \omega_l\right) \\ & + \gamma_{irk}\gamma_{rjl}\,\omega_k \wedge \omega_l + \frac{1}{2}\bar{R}_{ijkl}\,\omega_k \wedge \omega_l.\end{aligned}$$

L'identification des termes en $\omega_k \wedge \omega_l$ dans les formules (6.1) et (6.2) donne

$$\bar{R}_{ijkl} + 2\,\gamma_{ij0}\gamma_{kl0} = \gamma_{i0k}\gamma_{0jl} - \gamma_{i0l}\gamma_{0jk} + R_{ijkl}$$

ou

$$(6.3)\qquad \bar{R}_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{\beta^2 V^2}{4}(F_{ik}F_{jl} - F_{il}F_{jk} + 2\,F_{ij}F_{kl}).$$

L'identification des termes en $\omega_0 \wedge \omega_l$ donne

$$(6.4) \qquad R_{ij0l} = -\frac{\beta}{2}\left[V\,\overline{\nabla}_l F_{ij} + 2\,\partial_l V\, F_{ij} - \partial_j V\, F_{li} - \partial_i V\, F_{jl}\right]$$

que l'on peut écrire

$$(6.5) \qquad R_{i0kl} = \frac{\beta}{2}\left[V\,\overline{\nabla}_l F_{kl} + 2\,\partial_i V\, F_{kl} - \partial_k V\, F_{li} - \partial_l V\, F_{ik}\right].$$

Occupons-nous à présent de $d\omega_{i0}$ qui, évalué dans $\mathcal{R}_5$, donne

$$d\omega_{i0} = \omega_{ir} \wedge \omega_{r0} + \Omega_{i0},$$

soit en explicitant

$$(6.6) \qquad \begin{aligned} d\omega_{i0} = {} & (\gamma_{ir0}\,\omega_0 + \gamma_{irk}\,\omega_k) \wedge (\gamma_{r00}\,\omega_0 + \gamma_{r0l}\,\omega_l) \\ & + \frac{1}{2} R_{i0kl}\,\omega_k \wedge \omega_l + R_{i00l}\,\omega_0 \wedge \omega_l. \end{aligned}$$

Mais d'autre part on a

$$\omega_{i0} = \gamma_{i00}\,\omega_0 + \gamma_{i0l}\,\omega_l$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} d\omega_{i0} = {} & \partial_l \gamma_{i00}\,\omega_l \wedge \omega_0 + \gamma_{i00}\left(c_{l00}\,\omega_l \wedge \omega_0 + \frac{1}{2} c_{kl0}\,\omega_k \wedge \omega_l\right) \\ & + \partial_k \gamma_{i0l}\,\omega_k \wedge \omega_l + \gamma_{i0r}\frac{1}{2} c_{klr}\,\omega_k \wedge \omega_l. \end{aligned}$$

L'identification des termes en $\omega_k \wedge \omega_l$ dans les formules (6.6) et (6.7) donne

$$(6.8) \qquad R_{i0kl} = \frac{\beta}{2}\left[V(\overline{\nabla}_k F_{il} - \overline{\nabla}_l F_{ik}) + 2\,\partial_i V\, F_{kl} - \partial_k V\, F_{li} - \partial_l V\, F_{ik}\right].$$

L'identification des termes en $\omega_0 \wedge \omega_l$ donne

$$(6.9) \qquad R_{i00l} = -\overline{\nabla}_l\left(\frac{\partial_i V}{V}\right) - \frac{\partial_i V\,\partial_l V}{V^2} - \frac{\beta^2 V^2}{4} F_{ir} F_{rl}$$

que l'on peut encore écrire

$$(6.10) \qquad R_{i0k0} = \frac{1}{V}\overline{\nabla}_k(\partial_i V) + \frac{\beta^2 V^2}{4} F_{ir} F_{rl}.$$

Si nous rapprochons les formules (6.8) et (6.5), nous obtenons l'identité

$$\overline{\nabla}_i F_{kl} + \overline{\nabla}_k F_{li} + \overline{\nabla}_l F_{ik} \equiv 0, \tag{6.11}$$

équivalente au fait que F_{ik} est le rotationnel d'un vecteur.

Nous obtenons donc les résultats suivants pour les diverses composantes du tenseur de Riemann-Christoffel sur le repère orthonormé de $\mathcal{R}_5$:

$$\tag{6.12} \left\{ \begin{aligned} R_{ijkl} &\equiv \overline{R}_{ijkl} + \frac{\beta^2 V^2}{4}(F_{ik}F_{jl} - F_{il}F_{jk}) + \frac{\beta^2 V^2}{2} F_{ij}F_{kl}, \\ R_{i0kl} &\equiv \frac{\beta}{2} V \overline{\nabla}_i F_{kl} + 2\,\partial_i V\, F_{kl} - \partial_k V\, F_{li} - \partial_l V\, F_{ik}, \\ R_{i0k0} &\equiv \frac{1}{V} \overline{\nabla}_k(\partial_i V) + \frac{\beta^2 V^2}{4} F_{ir}F_{rk}. \end{aligned} \right.$$

7. Les composantes du tenseur de Ricci et du tenseur d'Einstein en repère orthonormé. — Calculons d'abord la composante $R_{ik} = \sum_\alpha R_{i\alpha k\alpha}$. On a

$$R_{ik} = \sum_j R_{ijkj} + R_{i0k0}.$$

La première des formules (6.12) donne

$$\sum R_{ijkj} = \overline{R}_{ik} - \frac{3}{4}\beta^2 V^2 F_{ij}F_{jk},$$

d'où

$$R_{ik} = \overline{R}_{ik} + \frac{1}{V}\overline{\nabla}_k(\partial_i V) - \frac{\beta^2 V^2}{2} F_{ij}F_{jk}. \tag{7.1}$$

$R_{i0} = \sum_j R_{ij0j}$ sera donné par la formule (6.4)

$$R_{i0} = -\frac{\beta}{2}(V\overline{\nabla}_j F_{ij} + 3\,\partial_j V\, F_{ij}), \tag{7.2}$$

$R_{00} = \sum_j R_{0j0j} = \sum_i R_{i0i0}$ sera donné par la troisième des formules (6.12)

$$R_{00} = \frac{1}{V}\overline{\nabla}_i(\partial_i V) - \frac{\beta^2 V^2}{4} H^2, \tag{7.3}$$

en posant

$$H^2 = \sum_{i,j} (F_{ij})^2. \tag{7.4}$$

Calculons enfin $R = \sum_\alpha R_{\alpha\alpha}$. On a

$$R = \sum_i R_{ii} + R_{00},$$

(7.1) donne

$$\sum_i R_{ii} = \bar{R} + \frac{1}{V} \bar{\nabla}_i (\partial_i V) + \frac{\beta^2 V^2}{2} H^2$$

et l'on a

$$R = \bar{R} + \frac{2}{V} \bar{\Delta}_2 V + \frac{\beta^2 V^2}{4} H^2 \tag{7.5}$$

en désignant par $\bar{\Delta}_2$ l'opérateur laplacien $\bar{\nabla}_i(\partial_i)$ dans l'espace $\mathcal{R}_4$.

Les formules (7.1), (7.2), (7.3) et (7.5) permettent alors d'exprimer les composantes sur le repère mobile orthonormé de $\mathcal{R}_5$ du tenseur d'Einstein en fonction d'éléments appartenant à $\mathcal{R}_4$ et définis par leurs composantes sur le repère orthonormé de cet espace. $\delta_{\lambda\mu}$ désignant le symbole classique de Kronecker, nous aurons pour

$$S_{\lambda\mu} \equiv R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\lambda\mu} R$$

les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned} S_{ik} &\equiv \bar{S}_{ik} - \frac{\beta^2 V^2}{2} \left(\frac{1}{4} \delta_{ik} H^2 - F_{ij} F_{kj} \right) + \frac{1}{V} [\bar{\nabla}_k (\partial_i V) - \delta_{ik} \bar{\Delta}_2 V], \\ S_{i0} &\equiv \frac{\beta}{2} (V \bar{\nabla}_j F_{ji} + 3\, \partial_j V\, F_{ji}), \\ S_{00} &\equiv -\frac{3}{8} \beta^2 V^2 H^2 - \frac{1}{2} \bar{R}. \end{aligned} \right. \tag{7.6}$$

8. Nous allons récrire dans ce paragraphe, en rétablissant les indices soulignés qui indiquent qu'il s'agit de composantes sur un repère orthonormé, toutes les formules des quatre paragraphes précédents dont nous nous servirons dans la suite. Après quoi nous nous abstiendrons de façon systématique de nous reporter à des formules de ces quatre paragraphes.

L'opérateur de dérivation covariante $\overline{\nabla}_i$ dans $\mathcal{R}_4$ est défini par

$$(8.1) \qquad \overline{\nabla}_{\underline{i}}\varphi_{\underline{k}} = \partial_{\underline{i}}\varphi_{\underline{k}} + \gamma_{\underline{h}\underline{k}\underline{i}}\varphi_{\underline{h}}$$

et le tenseur antisymétrique $F_{\underline{i}\underline{k}}$ par

$$(8.2) \qquad F_{\underline{i}\underline{k}} \equiv \overline{\nabla}_{\underline{i}}\varphi_{\underline{k}} - \overline{\nabla}_{\underline{k}}\varphi_{\underline{i}}.$$

La dérivée pfaffienne $\partial_{\underline{i}} V$ est reliée à $\gamma_{\underline{i}\underline{0}\underline{0}}$ par

$$(8.3) \qquad \gamma_{\underline{i}\underline{0}\underline{0}} = \frac{\partial_{\underline{i}} V}{V}.$$

Les composantes du tenseur de Ricci de $\mathcal{R}_5$ sur le repère orthonormé de cet espace s'expriment en éléments de $\mathcal{R}_4$ définis par leurs composantes sur le repère orthonormé de $\mathcal{R}_4$ par les formules suivantes, où nous avons placé les indices (dont la position haute ou basse est indifférente) de façon que la sommation se fasse suivant la convention d'Einstein

$$(8.4) \qquad \begin{cases} R_{\underline{i}\underline{k}} \equiv \overline{R}_{\underline{i}\underline{k}} + \dfrac{1}{V}\overline{\nabla}_{\underline{k}}(\partial_{\underline{i}} V) - \dfrac{\beta^2 V^2}{2} F_{\underline{i}\underline{j}} F^{\underline{j}}{}_{\underline{k}}, \\ R_{\underline{i}\underline{0}} \equiv -\dfrac{\beta}{2}\left(V\,\overline{\nabla}_{\underline{j}} F_{\underline{i}}{}^{\underline{j}} + 3\,\partial_{\underline{j}} V\, F_{\underline{i}}{}^{\underline{j}}\right), \\ R_{00} \equiv \dfrac{1}{V}\overline{\Delta}_2 V - \dfrac{\beta^2 V^2}{4} H^2, \end{cases}$$

avec

$$(8.5) \qquad H^2 = \sum_{\underline{i},\underline{j}} F_{\underline{i}\underline{j}} F^{\underline{i}\underline{j}}.$$

Pour R nous avons toujours

$$(8.6) \qquad R \equiv \overline{R} + \frac{2}{V}\overline{\Delta}_2 V + \frac{\beta^2 V^2}{4} H^2.$$

Les composantes du tenseur d'Einstein

$$S_{\underline{\lambda}\underline{\mu}} \equiv R_{\lambda\underline{\mu}} - \frac{1}{2}\delta_{\underline{\lambda}\underline{\mu}} R$$

s'expriment enfin par

$$
(8.7)\quad \left\{
\begin{aligned}
& S_{\underline{i}\underline{k}} \equiv \overline{S}_{\underline{i}\underline{k}} - \frac{\beta^2 V^2}{2}\left(\frac{1}{4}\delta_{\underline{i}\underline{k}} H^2 - F_{\underline{i}\underline{j}} F_{\underline{k}}{}^{\underline{j}}\right) + \frac{1}{V}\left[\overline{\nabla}_{\underline{k}}(\partial_{\underline{i}} V) - \delta_{\underline{i}\underline{k}} \overline{\Delta}_2 V\right], \\
& S_{\underline{i}\underline{0}} \equiv \frac{\beta}{2}\left(V \overline{\nabla}_{\underline{j}} F^{\underline{j}}{}_{\underline{i}} + 3\,\partial_{\underline{j}} V F^{\underline{j}}{}_{\underline{i}}\right), \\
& S_{\underline{0}\underline{0}} \equiv -\frac{3}{8}\beta^2 V^2 H^2 - \frac{1}{2}\overline{R}.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans ces expressions, $\overline{S}_{\underline{i}\underline{k}}$ désigne la quantité $\overline{R}_{\underline{i}k} - \frac{1}{2}\delta_{\underline{i}\underline{k}}\overline{R}$.

9. DÉFINITION DE NOUVELLES QUANTITÉS TENSORIELLE, VECTORIELLE ET SCALAIRE DANS $\mathcal{R}_4$. — Si nous voulions passer des composantes $S_{\underline{\lambda}\underline{\mu}}$ du tenseur d'Einstein sur le repère orthonormé à ses composantes $S_{\lambda\mu}$ sur le repère naturel de $\mathcal{R}_5$, nous aurions à utiliser les formules

$$
S_{\lambda\mu} = A^{\underline{\lambda}}_{\lambda} A^{\underline{\mu}}_{\mu} S_{\underline{\lambda}\underline{\mu}},
$$

qui s'écrivent sous forme explicitée

$$
(9.1)\quad \left\{
\begin{aligned}
& S_{ik} = A^{\underline{i}}_{i} A^{\underline{k}}_{k} S_{\underline{i}\underline{k}} + \left(A^{\underline{i}}_{i} A^{\underline{0}}_{k} + A^{\underline{0}}_{i} A^{\underline{i}}_{k}\right) S_{\underline{i}\underline{0}} + A^{\underline{0}}_{i} A^{\underline{0}}_{k} S_{\underline{0}\underline{0}}, \\
& S_{i0} = A^{\underline{i}}_{i} A^{\underline{0}}_{0} S_{\underline{i}\underline{0}} + A^{\underline{0}}_{i} A^{\underline{0}}_{0} S_{\underline{0}\underline{0}}, \\
& S_{00} = \left(A^{\underline{0}}_{0}\right)^2 S_{\underline{0}\underline{0}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces quantités ne présentent pas grand intérêt et nous considérerons plutôt les quantités suivantes, qui figurent dans ces expressions (9.1)

$$
(9.2)\quad \left\{
\begin{aligned}
& T_{ik} = A^{\underline{i}}_{i} A^{\underline{k}}_{k} S_{\underline{i}\underline{k}}, \\
& T_{i0} = A^{\underline{i}}_{i} S_{\underline{i}\underline{0}}, \\
& T_{00} = S_{00}.
\end{aligned}
\right.
$$

La première de ces formules définit les composantes sur le repère naturel de $\mathcal{R}_4$ d'un tenseur appartenant à $\mathcal{R}_4$ puisque par leur définition même les quantités T_{ik} se transforment tensoriellement dans un changement de coordonnées dans $\mathcal{R}_4$. Ce tenseur ne doit pas être confondu avec le tenseur $\overline{S}_{ik}$ introduit précédemment. La formule suivante définit de même les composantes sur le repère naturel de $\mathcal{R}_4$

d'un vecteur appartenant à cet espace. La troisième formule définit un scalaire dans $\mathcal{R}_4$.

Pour évaluer ces quantités T_{ik}, T_{i0} et T_{00}, reprenons les formules (8.7) et remarquons que dans $\mathcal{R}_4$, les quantités V, H et $\overline{\Delta}_2$ sont de nature sacalaire, $\partial_{\underline{i}} V$ et $\overline{\nabla}_{\underline{k}}$ de nature vectorielle, $F_{\underline{i}\underline{k}}$ et $\overline{S}_{\underline{i}\underline{k}}$ de nature tensorielle. Par multiplication par $A_i^{\underline{i}} A_k^{\underline{k}}$ et par sommation, la première des formules (8.7) nous donnera l'expression de T_{ik} en fonction d'éléments de $\mathcal{R}_4$ intervenant par leurs composantes sur le repère naturel de cet espace. De même, par multiplication par $A_i^{\underline{i}}$ et par sommation, la seconde des formules (8.7) nous fournira T_{i0} :

$$(9.3)\quad \left\{\begin{aligned} T_{ik} &\equiv \overline{S}_{ik} - \frac{\beta^2 V^2}{2}\left(\frac{1}{4} g_{ik} H^2 - F_{ij} F_k{}^j\right) + \frac{1}{V}\left[\overline{\nabla}_k(\partial_i V) - g_{ik}\overline{\Delta}_2 V\right], \\ T_{i0} &\equiv \frac{\beta}{2}\left(V\,\overline{\nabla}_j F^j{}_i + 3\,\partial_j V\, F^j{}_i\right), \\ T_{00} &\equiv -\frac{3}{8}\beta^2 V^2 H^2 - \frac{1}{2}\overline{R}. \end{aligned}\right.$$

En effet, pour un vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{R}_4$ on a, d'après la définition même de la dérivation covariante,

$$A_i^{\underline{i}} A_k^{\underline{k}} \overline{\nabla}_{\underline{k}} v_{\underline{i}} = \overline{\nabla}_k v_i,$$

$\overline{\nabla}_k$ représentant l'opérateur de dérivation covariante dans $\mathcal{R}_4$

$$\overline{\nabla}_k v_i = \partial_k v_i - \Gamma_k{}^h{}_i v_h$$

défini à l'aide des symboles de Christoffel de $\mathcal{R}_4$.

Ainsi on aura

$$A_i^{\underline{i}} A_k^{\underline{k}} F_{\underline{i}\underline{k}} = F_{ik} = \overline{\nabla}_i \varphi_k - \overline{\nabla}_k \varphi_i \quad (^1),$$
$$A_i^{\underline{i}} A_k^{\underline{k}} \overline{\nabla}_{\underline{k}}(\partial_{\underline{i}} V) = \overline{\nabla}_k(\partial_i V),$$

où $\partial_i V$ représente $\dfrac{\partial V}{\partial x^i}$.

On a évidemment

$$A_i^{\underline{i}} A_k^{\underline{k}} \overline{S}_{\underline{i}\underline{k}} = \overline{S}_{ik}, \qquad A_i^{\underline{i}} A_k^{\underline{k}} \delta_{\underline{i}\underline{k}} = g_{ik}.$$

(1) Puisqu'il s'agit de composantes sur le repère naturel de $\mathcal{R}_4$, cette formule peut s'écrire $F_{ik} = \partial_i \varphi_k - \partial_k \varphi_i$.

Explicitons les calculs pour montrer que

$$A_{\underline{i}}^{i} A_{\underline{k}}^{k} F_{\underline{i}\underline{j}} F_{\underline{k}}{}^{\underline{j}} = F_{ij} F_{k}{}^{j}.$$

On a

$$\sum_{\underline{i},\underline{k}} A_{i}^{\underline{i}} A_{k}^{\underline{k}} \sum_{\underline{j}} F_{\underline{i}\underline{j}} F_{\underline{k}}{}^{\underline{j}} = \sum_{\underline{i},\underline{k}} A_{i}^{\underline{i}} A_{k}^{\underline{k}} \left[\sum_{j} A_{j}^{\underline{j}} A_{\underline{j}}^{j} \left(\sum_{\underline{j}} F_{\underline{i}\underline{j}} F_{\underline{k}}{}^{\underline{j}} \right) \right]$$

en multipliant par la quantité $\sum_{j} A_{j}^{\underline{j}} A_{\underline{j}}^{j}$ qui est égale à 1 puisque les deux matrices $(A_{j}^{\underline{j}})$ et $(A_{\underline{j}}^{j})$ sont inverses l'une de l'autre; en groupant et en intervertissant l'ordre des sommations on a

$$\sum_{j} \sum_{\underline{i},\underline{j}} A_{i}^{\underline{i}} A_{j}^{\underline{j}} F_{\underline{i}\underline{j}} \left(\sum_{\underline{k},\underline{j}} A_{k}^{\underline{k}} A_{\underline{j}}^{j} F_{\underline{k}}{}^{\underline{j}} \right) = \sum_{j} F_{ij} F_{k}{}^{j}.$$

Un calcul analogue établira

$$A_{i}^{\underline{i}} \overline{\nabla}_{j} F^{\underline{j}}{}_{\underline{i}} = \overline{\nabla}_{j} F^{j}{}_{i} \qquad \text{et} \qquad A_{i}^{\underline{i}} \partial_{\underline{j}} V F^{\underline{j}}{}_{\underline{i}} = \partial_{j} V F^{j}{}_{i}.$$

10. Expressions de la composante mixte R_0^0 du tenseur de Ricci sur le repère naturel de $\mathcal{R}_5$. — Nous utiliserons dans la suite les expressions de la composante R_0^0 que nous allons établir dans ce paragraphe. Exprimons R_0^0 à l'aide des composantes du tenseur de Ricci sur le repère orthonormé de $\mathcal{R}_5$:

$$R_0^0 = A_{\underline{\alpha}}^{0} A_{0}^{\underline{\beta}} R_{\underline{\beta}}^{\underline{\alpha}} = R_{\underline{0}}^{\underline{0}} - \beta V \varphi_{\underline{i}} R_{\underline{0}}^{\underline{i}} = R_{\underline{0}\underline{0}} - \beta V \varphi_{\underline{i}} R_{\underline{i}\underline{0}}.$$

En nous reportant aux expressions de $R_{\underline{0}\underline{0}}$ et $R_{\underline{i}\underline{0}}$ données par les formules (8.4), nous aurons

$$R_0^0 = \frac{1}{V} \overline{\Delta}_2 V - \frac{\beta^2 V^2}{4} H^2 - \frac{\beta^2 V}{2} \varphi_{\underline{i}} \left(V \overline{\nabla}_{\underline{j}} F_{\underline{j}\underline{i}} + 3\, \partial_{\underline{j}} V F_{\underline{j}\underline{i}} \right),$$

$$R_0^0 = \frac{1}{V} \overline{\Delta}_2 V - \frac{\beta^2 V^2}{4} H^2 - \frac{\beta^2 V^2}{2} \varphi_{\underline{i}} \overline{\nabla}_{\underline{j}} F_{\underline{j}\underline{i}} - 3 \frac{\beta^2 V}{2} \partial_{\underline{j}} V F_{\underline{j}\underline{i}} \varphi_{\underline{i}}.$$

Intégrons par partie le troisième terme du second membre en l'écrivant

$$\frac{1}{V} \frac{\beta^2}{2} V^3 \varphi_{\underline{i}} \overline{\nabla}_{\underline{j}} F_{\underline{j}\underline{i}} = \frac{1}{V} \frac{\beta^2}{2} \overline{\nabla}_{\underline{j}} (V^3 \varphi_{\underline{i}} F_{\underline{j}\underline{i}}) - \frac{1}{V} \frac{\beta^2}{2} F_{\underline{j}\underline{i}} \overline{\nabla}_{\underline{j}} (V^3 \varphi_{\underline{i}}).$$

Il vient pour R_0^0 :

$$R_0^0 = \frac{1}{V}\bar{\Delta}_2 V - \frac{\beta^2 V^2}{4} H^2 - \frac{1}{V}\frac{\beta^2}{2}\bar{\nabla}_{\underline{j}}(V^3 \varphi_{\underline{i}} F_{\underline{j}\underline{i}}) + \frac{\beta^2 V^2}{2} F_{\underline{j}\underline{i}} \bar{\nabla}_{\underline{j}} \varphi_{\underline{i}}.$$

Or nous pouvons écrire

$$F_{\underline{j}\underline{i}}\bar{\nabla}_{\underline{j}}\varphi_{\underline{i}} = \frac{1}{2}\left(F_{\underline{j}\underline{i}}\bar{\nabla}_{\underline{j}}\varphi_{\underline{i}} + F_{\underline{i}\underline{j}}\bar{\nabla}_{\underline{i}}\varphi_{\underline{j}}\right) = \frac{1}{2}H^2,$$

si bien que les termes en H^2 disparaissent :

$$R_0^0 = \frac{1}{V}\bar{\Delta}_2 V - \frac{1}{V}\frac{\beta^2}{2}\bar{\nabla}_{\underline{j}}(V^3 \varphi_{\underline{i}} F_{\underline{j}\underline{i}}),$$

$$R_0^0 = \frac{1}{V}\bar{\nabla}_{\underline{j}}\left(\partial_{\underline{j}} V - \frac{\beta^2 V^3}{2}\varphi_{\underline{i}} F_{\underline{j}\underline{i}}\right).$$

Définissons un vecteur $\vec{h}$ de $\mathcal{R}_4$ par ses composantes sur le repère orthonormé de cet espace :

$$h_{\underline{j}} = \partial_{\underline{j}} V - \frac{\beta^2 V^3}{2}\varphi_{\underline{i}} F_{\underline{j}}{}^{\underline{i}}, \tag{10.1}$$

de façon à pouvoir écrire R_0^0 sous la forme

$$R_0^0 \equiv \frac{1}{V}\bar{\nabla}_{\underline{j}} h^{\underline{j}}. \tag{10.2}$$

Pour passer à l'expression de R_0^0 en éléments de $\mathcal{R}_4$ définis par leurs composantes sur le repère naturel de $\mathcal{R}_4$, multiplions R_0^0 par la quantité $\sum_j A_{\underline{j}}^{j} A_j^{\underline{j}}$ qui est égale à l'unité; il vient par un calcul analogue à celui fait au paragraphe **9** :

$$R_0^0 \equiv \frac{1}{V}\bar{\nabla}_j h^j, \tag{10.3}$$

le vecteur $\vec{h}$ ayant pour composantes covariantes sur le repère naturel de $\mathcal{R}_4$:

$$h_j = \partial_j V - \frac{\beta^2 V^3}{2}\varphi_i F_j{}^i. \tag{10.4}$$

Au lieu d'exprimer comme nous venons de le faire la composante R_0^0 par une divergence de vecteur dans l'espace $\mathcal{R}_4$ on peut l'exprimer par une divergence de vecteur dans $\mathcal{R}_5$.

Donnons-nous un vecteur $\vec{\xi}$ de $\mathcal{R}_5$ par ses composantes $\xi_{\underline{\alpha}}$ sur le repère orthonormé de $\mathcal{R}_5$ et supposons $\vec{\xi}$ orthogonal à $\vec{e}_{\underline{0}}$ ce qui se traduit par $\xi^{\underline{0}} = \xi_{\underline{0}} = 0$. Pour un tel vecteur nous avons

$$\nabla_{\underline{\alpha}}\xi_{\underline{\alpha}} = \partial_{\underline{\alpha}}\xi_{\underline{\alpha}} + \gamma_{\underline{\lambda}\underline{\alpha}\underline{\alpha}}\xi_{\underline{\lambda}} = \overline{\nabla}_{\underline{j}}\xi_{\underline{j}} + \gamma_{\underline{j}\underline{0}\underline{0}}\xi_{\underline{j}},$$

d'où

$$\frac{1}{V}\overline{\nabla}_{\underline{j}}\xi_{\underline{j}} = \frac{1}{V}\nabla_{\underline{\alpha}}\xi_{\underline{\alpha}} - \frac{\partial_{\underline{j}} V}{V^2}\xi_{\underline{j}} = \nabla_{\underline{\alpha}}\left(\frac{\xi_{\underline{\alpha}}}{V}\right).$$

Ainsi, si nous considérons le vecteur $\vec{\eta}$ de $\mathcal{R}_5$ défini par ses composantes sur le repère orthonormé de cet espace par

$$\eta_{\underline{j}} = \frac{h_{\underline{j}}}{V} = \frac{\partial_{\underline{j}} V}{V} - \frac{\beta^2 V^2}{2}\varphi_{\underline{i}} F_{\underline{j}\underline{i}}; \qquad \eta_{\underline{0}} = 0, \tag{10.5}$$

nous pouvons écrire R_0^0 sous la forme

$$R_0^0 \equiv \nabla_{\underline{\alpha}}\xi^{\underline{\alpha}}. \tag{10.6}$$

Si nous voulons passer au repère naturel de $\mathcal{R}_4$ nous multiplierons $\nabla_{\underline{\alpha}}\eta^{\underline{\alpha}}$ par $\sum_{\alpha} A^{\alpha}_{\underline{\alpha}} A^{\underline{\alpha}}_{\alpha} = 1$ et obtiendrons

$$R_0^0 \equiv \nabla_\alpha \eta_{,\alpha} \tag{10.7}$$

le vecteur $\vec{\eta}$ ayant pour composantes covariantes dans le repère naturel de $\mathcal{R}_5$

$$\eta_j = \frac{\partial_j V}{V} - \frac{\beta^2 V^2}{2}\varphi_i F_j{}^i; \qquad \eta_0 = A^{\underline{0}}_0 \eta_{\underline{0}} + A^{\underline{j}}_0 \eta_{\underline{j}} = 0. \tag{10.8}$$

11. Les équations du cas extérieur en signature elliptique. — Nous allons dans ce paragraphe donner plusieurs systèmes équivalents des équations du cas extérieur sans les écrire explicitement puisqu'elles n'obtiendront leur forme définitive qu'en signature hyperbolique.

1° *En repère orthonormé.* — En égalant à zéro les composantes

$$S_{\underline{\lambda}\underline{\mu}} \equiv R_{\underline{\lambda}\underline{\mu}} - \frac{1}{2}\delta_{\underline{\lambda}\underline{\mu}} R$$

du tenseur d'Einstein de $\mathcal{R}_5$ sur le repère orthonormé de cet espace, nous obtenons le système suivant

$$(11.1) \qquad S_{\underline{i}\underline{k}} = 0; \qquad S_{\underline{i}\underline{0}} = 0; \qquad S_{\underline{0}\underline{0}} = 0.$$

Les premiers membres ayant les valeurs données par (8.7) ces équations ne font intervenir que des éléments de $\mathcal{R}_4$ définis par leurs composantes sur le repère orthonormé de cet espace.

Le système

$$(11.2) \qquad S_{\underline{i}\underline{k}} = 0; \qquad R_{\underline{i}\underline{0}} = 0; \qquad R_{\underline{0}\underline{0}} = 0;$$

$R_{\underline{i}\underline{0}}$ et $R_{\underline{0}\underline{0}}$ ayant les valeurs données par (8.4) est équivalent au système (11.1). En effet : tout d'abord $R_{\underline{i}\underline{0}}$ est identique à $S_{\underline{i}\underline{0}}$; ensuite, pour ces deux systèmes, la contraction $\underline{i} = \underline{k} \left(\sum_{\underline{i}=\underline{k}} \delta_{\underline{i}\underline{k}} = 4 \right)$ des dix premières équations donne

$$S_{\underline{i}\underline{i}} = R_{\underline{i}\underline{i}} - 2R = -R - R_{\underline{0}\underline{0}} = 0.$$

Cette relation, rapprochée de la quinzième équation, donne pour les deux systèmes

$$R = R_{\underline{0}\underline{0}} = 0,$$

ce qui établit l'équivalence des deux systèmes.

Au début du paragraphe **10**, nous avons vu que

$$R_0^0 = R_{\underline{0}\underline{0}} - \beta V \varphi_{\underline{i}} R_{\underline{i}\underline{0}},$$

c'est-à-dire que R_0^0 est une combinaison linéaire des $R_{\underline{i}\underline{0}}$ et de $R_{\underline{0}\underline{0}}$. Le système (11.2) est donc encore équivalent aux deux suivants :

$$(11.3) \qquad S_{\underline{i}\underline{k}} = 0; \qquad R_{\underline{i}\underline{0}} = 0; \qquad \overline{\nabla}_{\underline{j}} h^{\underline{j}} = 0,$$

$h_{\underline{j}}$ ayant la valeur donnée par (10.1);

$$(11.4) \qquad S_{\underline{i}\underline{k}} = 0; \qquad R_{\underline{i}\underline{0}} = 0; \qquad \nabla_{\underline{\alpha}} \eta^{\underline{\alpha}} = 0,$$

$\eta_{\underline{\alpha}}$ étant défini par (10.5).

2° *En repère naturel.* — Écrire les équations en égalant à zéro les composantes $S_{\lambda\mu} \equiv R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} \gamma_{\lambda\mu} R$ du tenseur d'Einstein de $\mathcal{R}_5$ sur le repère naturel de cet espace ne présenterait pas grand intérêt, mais, d'après les formules (9.2), nous pouvons écrire un système équivalent sous la forme

$$(11.5) \qquad T_{ik} = 0; \qquad T_{i0} = 0; \qquad T_{00} = 0.$$

Les premiers membres ayant les valeurs données par (9.3), ces équations ne font intervenir que des éléments de $\mathcal{R}_4$ définis par leurs composantes sur le repère naturel de cet espace.

Comme en repère orthonormé, nous pouvons écrire (11.5) sous les formes équivalentes :

$$(11.6) \qquad T_{ik} = 0; \qquad T_{i0} = 0; \qquad R_{\underline{0}\,\underline{0}} = 0,$$

$R_{\underline{0}\,\underline{0}}$ ayant la valeur donnée par (8.4);

$$(11.7) \qquad T_{ik} = 0; \qquad T_{i0} = 0; \qquad \overline{\nabla}_j h^j = 0,$$

h_j étant défini par (10.4);

$$(11.8) \qquad T_{ik} = 0; \qquad T_{i0} = 0; \qquad \nabla_\alpha \eta^\alpha = 0,$$

η_α étant défini par (10.8).

12. Passsage a un $d\sigma^2$ du type hyperbolique. — Dans les calculs précédents, nous avons supposé que le $d\sigma^2$ de $\mathcal{R}_5$ se décomposait en une *somme* de cinq carrés. Or nous interpréterons plus loin l'espace $\mathcal{R}_4$ comme espace-temps de la Relativité générale et supposerons pour cela que le ds^2 de cet espace est du type hyperbolique normal, à un carré positif et trois carrés négatifs pour fixer les idées. *A priori*, le signe précédant le cinquième carré, $(\omega^{\underline{0}})^2$, de la décomposition en carrés du $d\sigma^2$ de $\mathcal{R}_5$ est arbitraire; nous supposerons que ce signe est le signe moins, c'est-à-dire que les fibres de $\mathcal{R}_5$ sont du genre espace. Cette hypothèse, plus satisfaisante au point de vue physique que l'hypothèse contraire, nous sera d'ailleurs imposée au chapitre III, où elle se révèlera indispensable à la démonstration d'un théorème que nous nous proposons d'établir.

Nous pourrions garder les formules telles que nous les avons écrites, en précisant quelles sont les quantités qu'il convient de considérer comme imaginaires mais il ne serait pas commode dans la suite d'avoir toujours présent à l'esprit le caractère réel ou imaginaire de chaque quantité. Aussi allons-nous transformer effectivement nos formules de façon à ce que, pour un $d\sigma^2$ du type hyperbolique précisé ci-dessus, elles s'écrivent en ne faisant intervenir que des éléments réels.

Pour cela, caractérisons en les surmontant d'une étoile tous les éléments introduits précédemment; ainsi toutes les formules écrites dans les paragraphes **2** à **11** inclus sont à considérer comme écrites avec des éléments étoilés.

Attribuons à la variable x^4 le caractère temporel; le passage à la signature considérée se fera en effectuant la transformation

$$\stackrel{*}{x}{}^0 = \frac{x^0}{i}, \qquad \stackrel{*}{x}{}^{\mathrm{I}} = \frac{x^{\mathrm{I}}}{i}, \qquad \stackrel{*}{x}{}^4 = x^4, \tag{12.1}$$

I, ainsi que dans la suite tout indice représenté par une lettre majuscule prenant les valeurs 1, 2, 3.

Cette transformation transforme les composantes sur les repères naturels d'un tenseur de $\mathcal{R}_5$ ou de $\mathcal{R}_4$ de la façon suivante : on passe de la composante étoilée à la composante non étoilée correspondante en multipliant cette dernière par i autant de fois qu'il y a d'indices 0, 1, 2, 3 en position covariante et en la divisant par i autant de fois qu'il y a d'indices 0, 1, 2, 3 en position contravariante.

Ainsi on obtiendra

$$\begin{aligned} &\stackrel{*}{\gamma}_{00} = -\gamma_{00}; \\ &\stackrel{*}{\gamma}_{\mathrm{I}0} = -\gamma_{\mathrm{I}0}, \qquad \stackrel{*}{\varphi}_{\mathrm{I}} = i\varphi_{\mathrm{I}}; \\ &\stackrel{*}{\gamma}_{40} = i\gamma_{40}, \qquad \stackrel{*}{\varphi}_4 = \varphi_4. \end{aligned}$$

Avec la nouvelle signature, nous sommes amenés à poser

$$\gamma_{00} = -V^2, \qquad \gamma_{\mathrm{I}0} = \beta V^2 \varphi_{\mathrm{I}}, \qquad \gamma_{40} = \beta V^2 \varphi_4.$$

Pour que nos anciennes formules,

$$\stackrel{*}{\gamma}_{00} = \stackrel{*}{V}{}^2, \qquad \stackrel{*}{\gamma}_{\mathrm{I}0} = \stackrel{*}{\beta} \stackrel{*}{V}{}^2 \stackrel{*}{\varphi}_{\mathrm{I}}, \qquad \stackrel{*}{\gamma}_{40} = \stackrel{*}{\beta} \stackrel{*}{V}{}^2 \stackrel{*}{\varphi}_4$$

se transforment en celles-ci, nous prendrons

$$\stackrel{*}{V} = V, \qquad \stackrel{*}{\beta} = i\beta. \tag{12.2}$$

Les formules définissant les $\overset{*}{g}_{ij}$:

$$\overset{*}{g}_{ij} = \overset{*}{\gamma}_{ij} - \overset{*}{\beta}{}^2 \overset{*}{V}{}^2 \overset{*}{\varphi}_i \overset{*}{\varphi}_j$$

que nous séparerons en trois groupes

$$\overset{*}{g}_{IJ} = \overset{*}{\gamma}_{IJ} - \overset{*}{\beta}{}^2 \overset{*}{V}{}^2 \overset{*}{\varphi}_I \overset{*}{\varphi}_J, \qquad \overset{*}{g}_{I4} = \overset{*}{\gamma}_{I4} - \overset{*}{\beta}{}^2 \overset{*}{V}{}^2 \overset{*}{\varphi}_I \overset{*}{\varphi}_4, \qquad \overset{*}{g}_{44} = \overset{*}{\gamma}_{44} - \overset{*}{\beta}{}^2 \overset{*}{V}{}^2 (\overset{*}{\varphi}_4)^2$$

se transforment par (12.1) et (12.2) en

$$g_{IJ} = \gamma_{IJ} + \beta^2 V^2 \varphi_I \varphi_J, \qquad g_{I4} = \gamma_{I4} + \beta^2 V^2 \varphi_I \varphi_4, \qquad g_{44} = \gamma_{54} + \beta^2 V^2 (\varphi_4)^2$$

qui se regroupent en

$$g_{ij} = \gamma_{ij} + \beta^2 V^2 \varphi_i \varphi_j. \tag{12.3}$$

On constatera partout un tel regroupement des formules, et un regroupement dans les termes à sommer de façon que les termes faisant intervenir l'indice 4 soient traités de la même façon que ceux qui font intervenir les indices 1, 2, 3 : la transformation effectuée respecte la convention d'Einstein.

Les nouvelles formes de Plaff $\omega^{\underline{\alpha}}$ seront définies à partir des anciennes par

$$\overset{*}{\omega}{}^{\underline{0}} = \frac{\omega^{\underline{0}}}{i}, \qquad \overset{*}{\omega}{}^{\underline{I}} = \frac{\omega^{\underline{I}}}{i}, \qquad \overset{*}{\omega}{}^{\underline{4}} = \omega^{\underline{4}}$$

et les composantes d'un tenseur sur un repère orthonormé se transforment de la même façon que celle qui a été indiquée pour les composantes sur un repère naturel, si bien qu'il y a lieu à présent de distinguer en repère orthonormé les composantes covariantes des composantes contravariantes; ainsi pour un vecteur $\vec{\xi}$ de $\mathcal{R}_5$ on aura

$$\xi^{\underline{0}} = -\xi_{\underline{0}} \quad \left(\text{car } \overset{*}{\xi}{}^{\underline{0}} = \frac{\xi^{\underline{0}}}{i} \text{ et } \overset{*}{\xi}_{\underline{0}} = i\xi_{\underline{0}}\right); \qquad \xi^{\underline{I}} = -\xi_{\underline{I}}; \qquad \xi^{\underline{4}} = \xi_{\underline{4}}.$$

Les $\overset{*}{A}{}^{\beta}_{\underline{\alpha}}$ et les $\overset{*}{A}{}^{\underline{\alpha}}_{\beta}$ se transforment également comme les composantes d'un tenseur et les formules

$$\overset{*}{\omega}{}^{\underline{\alpha}} = \overset{*}{A}{}^{\underline{\alpha}}_{\beta}\, d\overset{*}{x}{}^{\beta}, \qquad d\overset{*}{x}{}^{\alpha} = \overset{*}{A}{}^{\alpha}_{\underline{\beta}} \overset{*}{\omega}{}^{\underline{\beta}}$$

sont invariantes :

$$\omega^{\underline{\alpha}} = A^{\underline{\alpha}}_{\beta}\, dx^{\beta}, \qquad dx^{\alpha} = A^{\alpha}_{\underline{\beta}}\, \omega^{\underline{\beta}},$$

mais on a

$$A^{\underline{0}}_{0} = V, \qquad A^{\underline{0}}_{i} = -\beta V \varphi_i, \qquad A^{\underline{i}}_{0} = 0;$$

$$A^{0}_{\underline{0}} = \frac{1}{V}, \qquad A^{0}_{\underline{i}} = \beta \varphi_i \qquad A^{i}_{\underline{0}} = 0.$$

Les vecteurs de base des deux repères de $\mathcal{R}_5$ envisagés sont définis par

$$\overset{*}{\vec{e}}_0 = i\, \vec{e}_0,$$

$$\overset{*}{\vec{e}}_1 = i\, \vec{e}_1,$$

$$\overset{*}{\vec{e}}_4 = \vec{e}_4$$

et l'on a toujours

$$\vec{e}_{\underline{\alpha}} = A^{\beta}_{\underline{\alpha}}\, \vec{e}_{\beta}, \qquad \vec{e}_{\alpha} = A^{\underline{\beta}}_{\alpha}\, \vec{e}_{\underline{\beta}}.$$

Les vecteurs de base des deux repères de $\mathcal{R}_4$ sont définis de façon analogue.

Les formules définissant les composantes sur le repère naturel de $\mathcal{R}_4$ du rotationnel du vecteur $\vec{\varphi}$:

$$\overset{*}{F}_{ik} = \overset{*}{\nabla}_i \overset{*}{\varphi}_k - \overset{*}{\nabla}_k \overset{*}{\varphi}_i$$

se transforment en

(12.4) $$F_{ik} = \overline{\nabla}_i \varphi_k - \overline{\nabla}_k \varphi_i = \partial_i \varphi_k - \partial_k \varphi_i.$$

Le scalaire

$$\overset{*}{H}{}^2 = \sum_{i,j} \overset{*}{F}_{ij} \overset{*}{F}{}^{ij}$$

se transforme en

(12.5) $$H^2 = \sum_{i,j} F_{ij} F^{ij}.$$

Remarquons que cette quantité n'est pas de signe constant; pour le voir, explicitons son expression en fonction des composantes $F_{\underline{i}\underline{j}}$ sur le repère orthonormé de $\mathcal{R}_4$: on a

$$H^2 = \sum_{\underline{i},\underline{j}} F_{\underline{i}\underline{j}} F^{\underline{i}\underline{j}} = \delta^{\underline{I}\underline{I}}\delta^{\underline{J}\underline{J}}(F_{\underline{I}\underline{J}})^2 + 2\,\delta^{\underline{I}\underline{I}}\delta^{\underline{4}\underline{4}}(F_{\underline{I}\underline{4}})^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta^{\underline{I}\underline{I}} = -1, \\ \delta^{\underline{4}\underline{4}} = +1, \end{array} \right.$$

donc

$$H^2 = \sum_{\underline{I}\underline{J}} (F_{\underline{I}\underline{J}})^2 - 2 \sum_{\underline{I}} (F_{\underline{I}\underline{4}})^2,$$

les quantités $F_{\underline{i}\underline{j}}$ étant réelles.

Enfin l'opérateur scalaire $\overset{*}{\overline{\Delta}}_0$ se transforme dans la transformation (12.1) en l'opérateur $\overline{\Delta}_2$.

Nous sommes à présent en mesure de transformer les formules des paragraphes **9** et **10**.

Les dix premières relations (9.3)

$$\overset{*}{T}_{ik} \equiv \overset{*}{\overline{S}}_{ik} - \frac{\overset{*}{\beta}{}^2 \overset{*}{V}{}^2}{2}\left(\frac{1}{4}\overset{*}{g}_{ik}\overset{*}{H}{}^2 - \overset{*}{F}_{ij}\overset{*}{F}_k{}^j\right) + \frac{1}{\overset{*}{V}}\left[\overset{*}{\overline{\nabla}}_k(\overset{*}{\partial}_i\overset{*}{V}) - \overset{*}{g}_{ik}\overset{*}{\overline{\Delta}}_2\overset{*}{V}\right]$$

se transforment en

$$(12.6)\quad \left\{ \begin{array}{rl} -\,T_{IK} \equiv & -\,\overline{S}_{IK} + \dfrac{\beta^2 V^2}{2}\left(-\dfrac{1}{4}\, g_{IK} H^2 + F_{Ij} F_K{}^j\right) \\ & \qquad - \dfrac{1}{V}\left[\overline{\nabla}_K(\partial_I V) - g_{IK}\overline{\Delta}_2 V\right], \\ iT_{I4} \equiv & i\,\overline{S}_{I4} + \dfrac{\beta^2 V^2}{2}\left(\dfrac{1}{4}\, i g_{I4} H^2 - iF_{Ij} F_4{}^j\right) \\ & \qquad + \dfrac{i}{V}\left[\overline{\nabla}_4(\partial_I V) - g_{I4}\overline{\Delta}_2 V\right], \\ T_{44} \equiv & S_{44} + \dfrac{\beta^2 V^2}{2}\left(\dfrac{1}{4}\, g_{44} H^2 - F_{4j} F_4{}^j\right) \\ & \qquad + \dfrac{1}{V}\left[\overline{\nabla}_4(\partial_4 V) - g_{44}\overline{\Delta}_2 V\right]. \end{array} \right.$$

Les quatre relations (9.3) suivantes :

$$\overset{*}{T}_{i0} \equiv \frac{\overset{*}{\beta}}{2}\left(\overset{*}{V}\,\overset{*}{\overline{\nabla}}_j \overset{*}{F}{}^j{}_i + 3\,\overset{*}{\partial}_j \overset{*}{V}\,\overset{*}{F}{}^j{}_i\right)$$

se transforment en

$$(12.7)\quad \begin{cases} -\ T_{10} \equiv \dfrac{i\beta}{2}\left(V\, i\overline{\nabla}_j F^j{}_1 + 3\, i\, \partial_j V\, F^j{}_1\right), \\ iT_{40} \equiv \dfrac{i\beta}{2}\left(V\ \overline{\nabla}_j F^j{}_4 + 3\ \partial_j V\, F^j{}_4\right). \end{cases}$$

Enfin la quinzième relation (9.3)

$$\overset{*}{T}_{00} \equiv -\frac{3}{8}\overset{*}{\beta}{}^2 \overset{*}{V}{}^2 \overset{*}{H}{}^2 - \frac{1}{2}\overset{*}{R}$$

se transforme en

$$(12.8)\qquad -\ T_{00} \equiv \frac{3}{8}\beta^2 V^2 H^2 - \frac{1}{2}\overline{R}.$$

Les expressions (12.6), (12.7) et (12.8) se regroupent sous la forme

$$(12.9)\quad \begin{cases} T_{ik} \equiv \overline{S}_{ik} + \dfrac{\beta^2 V^2}{2}\left(\dfrac{1}{4} g_{ik} H^2 - F_{ij} F_k{}^j\right) + \dfrac{1}{V}\left[\overline{\nabla}_k(\partial_i V) - g_{ik}\overline{\Delta}_2 V\right], \\ T_{i0} \equiv \dfrac{\beta}{2}\left(V\, \overline{\nabla}_j F^j{}_i + 3\, \partial_j V\, F^j{}_i\right), \\ T_{00} \equiv -\dfrac{3}{8}\beta^2 V^2 H^2 + \dfrac{1}{2}\overline{R}. \end{cases}$$

La composante $\overset{*}{R}_{\underline{0\,0}}$ donnée en signature elliptique par

$$\overset{*}{R}_{\underline{0\,0}} \equiv \frac{1}{\overset{*}{V}}\overset{*}{\overline{\Delta}}_2 \overset{*}{V} - \frac{\overset{*}{\beta}{}^2 \overset{*}{V}{}^2}{4} H^2$$

sera donnée en signature hyperbolique par

$$(12.10)\qquad R_{\underline{0\,0}} \equiv -\frac{1}{V}\overline{\Delta}_2 V - \frac{\beta^2 V^2}{4} H^2.$$

La composante $\overset{*}{R}{}^0_0$ donnée en signature elliptique par

$$\overset{*}{R}{}^0_0 \equiv \frac{1}{\overset{*}{V}}\overset{*}{\overline{\nabla}}_j \overset{*}{h}{}^j$$

sera donnée en signature hyperbolique par

$$(12.11)\qquad R^0_0 \equiv \frac{1}{V}\overline{\nabla}_j h^j,$$

le vecteur $\vec{h}$ étant défini par ses composantes covariantes sur le repère naturel de $\mathcal{R}_4$ par la formule déduite de

$$\overset{*}{h}_j = \overset{*}{\partial}_j \overset{*}{V} - \frac{\overset{*}{\beta}{}^2 \overset{*}{V}{}^3}{2} \overset{*}{\varphi}_i \overset{*}{F}_j{}^i,$$

c'est-à-dire par

$$h_j = \partial_j V + \frac{\beta^2 V^3}{2} \varphi_i F_j{}^i. \tag{12.12}$$

De même, les formules

$$\overset{*}{R}{}^0_0 \equiv \overset{*}{\nabla}_\alpha \eta^\alpha, \qquad \overset{*}{\eta}_j = \frac{\overset{*}{\partial}_j \overset{*}{V}}{\overset{*}{V}} - \frac{\overset{*}{\beta}{}^2 \overset{*}{V}{}^2}{2} \overset{*}{\varphi}_i \overset{*}{F}_j{}^i, \qquad \overset{*}{\eta}_0 = 0$$

seront remplacées en signature hyperbolique par

$$R^0_0 \equiv \nabla_\alpha \eta^\alpha, \tag{12.13}$$

$$\eta_j = \frac{\partial_j V}{V} + \frac{\beta^2 V^2}{2} \varphi_i F_j{}^i, \qquad \eta_0 = 0. \tag{12.14}$$

Nous aurons encore besoin pour écrire les équations en repère orthonormé des composantes $S_{\underline{i}\underline{k}}$, $S_{\underline{i}\underline{0}}$, $S_{\underline{0}\underline{0}}$. Pour obtenir leurs expressions nous pouvons utiliser les formules (8.7) en les récrivant en éléments étoilés et effectuer sur elles la transformation du passage à la signature hyperbolique. Nous pouvons aussi utiliser les formules (12.9) qui sont écrites en signature hyperbolique et revenir au repère orthonormé par

$$S_{\underline{i}\underline{k}} = A^i_{\underline{i}} A^k_{\underline{k}} T_{ik}, \qquad S_{\underline{i}\underline{0}} = A^i_{\underline{i}} T_{i0}.$$

on obtient

$$\left\{\begin{aligned} S_{\underline{i}\underline{k}} &\equiv \overline{S}_{\underline{i}\underline{k}} + \frac{\beta^2 V^2}{2}\left(\frac{1}{4}\delta_{\underline{i}\underline{k}} H^2 - F_{\underline{i}\underline{j}} F_{\underline{k}}{}^{\underline{j}}\right) + \frac{1}{V}\left[\overline{\nabla}_{\underline{k}}(\overline{\partial}_{\underline{i}} V) - \delta_{\underline{i}\underline{k}} \overline{\Delta}_2 V\right] \\ S_{\underline{i}\underline{0}} &\equiv \frac{\beta}{2}\left(V \overline{\nabla}_{\underline{j}} F^{\underline{j}}{}_{\underline{i}} + 3\, \partial_{\underline{j}} V\, F^{\underline{j}}_{\underline{i}}\right), \\ S_{00} &\equiv -\frac{3}{8}\beta^2 V^2 H^2 + \frac{1}{2}\overline{R}. \end{aligned}\right. \tag{12.15}$$

13. LES ÉQUATIONS DU CAS EXTÉRIEUR EN SIGNATURE HYPERBOLIQUE. — Transcrivons dans le cas de la signature hyperbolique les huit systèmes équivalents d'équations que nous avons considérés au paragraphe **11**.

1° *En repère orthonormé.* — Le premier système s'écrit

$$(13.1)\quad \begin{cases} \overline{S}_{\underline{ik}} = -\dfrac{\beta^2 V^2}{2}\left(\dfrac{1}{4}\delta_{\underline{ik}}H^2 - F_{\underline{ij}}F_{\underline{k}}{}^{\underline{j}}\right) - \dfrac{1}{V}\left[\overline{\nabla}_{\underline{k}}(\delta_{\underline{i}}V) - \partial_{\underline{ik}}\overline{\Delta}_2 V\right], \\ \overline{\nabla}_{\underline{j}}F^{\underline{j}}{}_{\underline{i}} = -3\dfrac{\partial_{\underline{j}}V}{V}F^{\underline{j}}{}_{\underline{i}}, \\ \overline{R} = \dfrac{3}{4}\beta^2 V^2 H^2. \end{cases}$$

Trois systèmes équivalents seront obtenus en remplaçant sa quinzième équation respectivement par

$$(13.2)\qquad \frac{1}{V}\overline{\Delta}_2 V + \frac{\beta^2 V^2}{4}H^2 = 0;$$

$$(13.3)\qquad \overline{\nabla}_{\underline{j}}h^{\underline{j}} = 0, \qquad \text{avec}\quad h_{\underline{j}} = \partial_{\underline{j}}V + \frac{\beta^2 V^3}{2}\varphi_{\underline{i}}F_{\underline{j}}{}^{\underline{i}};$$

$$(13.4)\qquad \overline{\nabla}_{\underline{\alpha}}\eta^{\underline{\alpha}} = 0, \qquad \text{avec}\quad \eta_{\underline{j}} = \frac{\partial_{\underline{j}}V}{V} + \frac{\beta^2 V^2}{2}\varphi_{\underline{i}}F_{\underline{j}}{}^{\underline{i}}; \qquad \eta_{\underline{0}} = 0.$$

2° *En repère naturel.* — Le système

$$T_{ik} = 0, \qquad T_{i0} = 0, \qquad T_{00} = 0$$

s'écrit

$$(13.5)\quad \begin{cases} \overline{S}_{ik} = -\dfrac{\beta^2 V^2}{2}\left(\dfrac{1}{4}g_{ik}H^2 - F_{ij}F_{k}{}^{j}\right) - \dfrac{1}{V}\left[\overline{\nabla}_{k}(\partial_{i}V) - g_{ik}\overline{\Delta}_2 V\right], \\ \overline{\nabla}_{j}F^{j}{}_{i} = -3\dfrac{\partial_{j}V}{V}F^{j}{}_{i}, \\ \overline{R} = \dfrac{3}{4}\beta^2 V^2 H^2. \end{cases}$$

Trois systèmes équivalents seront obtenus en remplaçant sa quinzième équation respectivement par

$$(13.6)\qquad \frac{1}{V}\overline{\Delta}_2 V + \frac{\beta^2 V^2}{4}H^2 = 0$$

$$(13.7)\qquad \overline{\nabla}_{j}h^{j} = 0, \qquad \text{avec}\quad h_{j} = \delta_{j}V + \frac{\beta^2 V^3}{2}\varphi_{i}F_{j}{}^{i};$$

$$(13.8)\qquad \nabla_{\alpha}\eta^{\alpha} = 0, \qquad \text{avec}\quad \eta_{j} = \frac{\partial_{j}V}{V} + \frac{\beta^2 V^2}{2}\varphi_{i}F_{j}{}^{i}; \qquad \eta_0 = 0.$$

II. — Les conditions de conservation et les équations du cas intérieur.

14. Interprétation des éléments introduits. — Les résultats obtenus dans la première partie de ce chapitre nous suggèrent l'interprétation suivante des différents éléments introduits :

L'espace de Riemann $\mathcal{R}_4$ défini au paragraphe **3** est doué de la métrique

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

qui est à considérer à partir du paragraphe **12** comme étant du type hyperbolique normal, à un carré positif et trois carrés négatifs. Cet espace sera interprété comme l'espace-temps de la théorie de la Relativité générale, la variable x^4 jouant le rôle de variable temporelle.

Le vecteur $\vec{\varphi}$ de $\mathcal{R}_4$, défini par ses composantes φ_i sur le repère naturel de $\mathcal{R}_4$ sera interprété comme potentiel-vecteur. Le tenseur F_{ik} sera donc le tenseur-champ électromagnétique.

Dans le premier groupe des équations (13.5), les premiers membres font intervenir les composantes du tenseur d'Einstein de $\mathcal{R}_4$ et les seconds membres font intervenir le tenseur d'énergie du champ électromagnétique :

$$\tau_{ik} = \frac{1}{4} g_{ik} H^2 - F_{ij} F_k{}^j$$

précédé du facteur $-\frac{\beta^2 V^2}{2}$ [1]. Or les équations d'Einstein de la théorie provisoire de l'électromagnétisme s'écrivent dans le cas du schéma-champ électromagnétique pur $S_{ik} = -\chi\tau_{ik}$, χ désignant la constante de la gravitation. Nous sommes donc amené à poser $\frac{\beta^2 V^2}{2} = \chi$ et à considérer un facteur de gravitation χ qui n'est plus constant, puisque le fait que V est variable est un point essentiel des hypothèses de notre théorie.

---

[1] La présence du signe moins est due à la façon dont nous avons effectué les contractions au paragraphe **7**.

Cette interprétation physique nous permet d'exprimer les quinze variables de notre théorie en langage ordinaire : ce sont les dix potentiels de gravitation g_{ik}, les quatre composantes φ_i du potentiel-vecteur et le facteur de gravitation χ qui doit être considéré comme variable.

A partir de cette expression des quinze variables de champ, on peut aisément reconstruire l'espace $\mathcal{R}_5$: c'est l'espace de Riemann défini par la métrique $d\sigma^2 = \gamma_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu$ où les quinze potentiels $\gamma_{\lambda\mu}$ de la théorie unitaire sont donnés par

$$\gamma_{00} = -\frac{2\chi}{\beta^2} \qquad (\beta = \text{const.}).,$$

$$\gamma_{i0} = \frac{2\chi}{\beta}\varphi_i,$$

$$\gamma_{ij} = g_{ij} - 2\chi\varphi_i\varphi_j,$$

la nouvelle variable x^0 étant définie par (*cf.* paragraphe **12**) :

$$\overset{0}{\omega} = \overset{0}{A}_\alpha\, dx^\alpha = V\, dx^0 - \beta V \varphi_i\, dx^i = 0,$$

c'est-à-dire par

$$dx^0 = \beta\varphi_i\, dx^i.$$

15. Interprétation des équations; la théorie d'O. Klein. — Les dix premières équations (13.5) du cas extérieur en théorie unitaire généralisent les équations d'Einstein de la Relativité générale dans le cas intérieur du schéma-champ électromagnétique pur. Elles se réduisent à ces dernières si l'on suppose V constant.

Les quatre équations (13.5) suivantes sont du type du premier groupe des équations de Maxwell-Lorentz avec second membre. Pour V constant, le second membre est nul, ce qui est en conformité avec le fait que pour tout schéma-champ électromagnétique pur, le vecteur courant électrique est nul.

La quinzième équation, prise sous la forme (13.2), fait intervenir de façon essentielle la variation de V c'est-à-dire du facteur de gravitation et il ne lui correspond rien dans une théorie classique. Si l'on suppose V constant, cette quinzième équation conduirait à considérer la quantité H^2 comme nulle en tout point de l'espace-temps [1]. Cette conclusion doit manifestement être rejetée, tout comme la possibilité de construire une théorie à quinze équations et à quatorze variables de champ.

Ce qui précède montre que, si l'on suppose V constant et si l'on supprime la quinzième équation, les équations de notre théorie se réduisent à celles de la théorie provisoire de l'électromagnétisme. L'interprétation pentadimensionnelle subsiste et l'on se trouve en présence de la théorie d'O. Klein. Dans le chapitre III, nous aurons l'occasion de voir comment les méthodes d'étude de notre théorie s'adaptent à la théorie d'O. Klein et de faire une comparaison de la valeur mathématique de ces deux théories.

16. Les équations du cas intérieur. — Dans le cas intérieur au sens unitaire, nous traduirons la présence de matière chargée par l'introduction, aux seconds membres des équations du cas extérieur, des composantes d'un tenseur de $\mathcal{R}_5$, symétrique par rapport à ses deux indices.

Nous ferons sur ce tenseur l'hypothèse la plus simple, c'est-à-dire que nous supposerons qu'il généralise le tenseur introduit aux seconds membres des équations d'Einstein de la théorie relativiste de la gravitation dans le cas d'un schéma purement matériel. Introduisons donc en chaque point de $\mathcal{R}_5$ un vecteur unitaire dans la métrique de cet espace

$$u^\lambda = \frac{dx^\lambda}{d\sigma} \qquad \text{(vecteur-vitesse généralisé)} \tag{16.1}$$

et un scalaire positif ρ.

Nous préciserons dans un instant l'interprétation qui doit être donnée pour les diverses composantes u_λ et pour ρ, et nous examinerons comment nos équations du cas intérieur s'interprètent en termes de $\mathcal{R}_4$.

---

(1) En chaque point de $\mathcal{R}_4$, pour un observateur lié au repère mobile orthonormé attaché à ce point, le carré du champ électrique serait égal au carré du champ magnétique.

χ représentant toujours la quantité $\frac{\beta^2 V^2}{2}$, nous écrirons donc les équations du cas intérieur sous la forme

(16.2) $$S_{\lambda\mu} = -\chi\rho\, u_\lambda u_\mu.$$

La théorie unitaire dont nous écrivons ainsi les équations du cas intérieur va posséder les mêmes propriétés que la théorie de la Relativité générale dans le cas du schéma purement matériel. Nous étudierons dans la troisième partie de ce chapitre le problème du raccordement, ce qui nous permettra de régler la question du principe des géodésiques.

17. Les conditions de conservation. — Étudions à présent le rôle joué par les conditions de conservation. L'identité

(17.1) $$\nabla_\lambda S^\lambda_\mu \equiv 0$$

entraîne pour les seconds membres des équations (16.2)

(17.2) $$\nabla_\lambda (\chi\rho\, u^\lambda u_\mu) = 0.$$

A l'aide de ces équations, nous pouvons obtenir une équation jouant le rôle d'équation de continuité et le système différentiel aux trajectoires du champ de vecteur u^λ, que nous appellerons lignes de courant de $\mathcal{R}_5$.

Le calcul est le même que celui que nous avons développé au chapitre I (paragraphe **6**); la seule différence est qu'ici χ ne doit plus être considéré comme constant.

L'équation de continuité est

(17.3) $$\nabla_\lambda (\chi\rho\, u^\lambda) = 0.$$

Le système différentiel aux lignes de courant de $\mathcal{R}_5$ est

(17.4) $$u^\lambda \nabla_\lambda u_\mu = 0.$$

Il a la signification suivante :

Les lignes de courant de $\mathcal{R}_5$ sont des géodésiques du $d\sigma^2$.

18. Les vecteurs-vitesses généralisés dans $\mathcal{R}_5$ et dans $\mathcal{R}_4$. — A côté du vecteur-vitesse généralisé de $\mathcal{R}_5$:

$$u^\lambda = \frac{dx^\lambda}{d\sigma}, \tag{18.1}$$

introduisons le vecteur-vitesse généralisé de $\mathcal{R}_4$:

$$\bar{u}^i = \frac{dx^i}{ds}. \tag{18.2}$$

Nous avons vu au chapitre I que dans notre théorie unitaire les géodésiques de $\mathcal{R}_5$ admettaient l'intégrale première $\frac{\partial F}{\partial x'^0} = h$, ce qui s'écrit encore

$$\gamma_{00}\frac{dx^0}{d\lambda} + \gamma_{i0}\frac{dx^i}{d\lambda} = h\frac{d\sigma}{d\lambda}$$

puisque F représente $\frac{d\sigma}{d\lambda}$, λ étant un paramètre arbitraire.

Ainsi la constante h s'identifie avec $\gamma_{00}u^0 + \gamma_{0i}u^i$ c'est-à-dire avec la composante u_0 :

La composante u_0 du vecteur u_λ n'est autre que la quantité h introduite au chapitre I.

Autrement dit, l'hypothèse de cylindricité entraîne pour le système différentiel aux lignes de courant l'intégrale première

$$u_0 = h. \tag{18.3}$$

D'autre part, la formule (12.4) du chapitre I peut s'écrire maintenant

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{u_0^2}{V^2}}} \tag{18.4}$$

et nous aurons

$$u^i = \sqrt{1+\frac{u_0^2}{V^2}}\,\bar{u}^i. \tag{18.5}$$

L'interprétation du vecteur u^λ est ainsi donnée par les expressions des u^i en fonction des composantes $\bar{u}^i$ du vecteur-vitesse généralisé de $\mathcal{R}_4$ et par la valeur constante de $u_0 = h$ qui a déjà été donnée au chapitre I (paragraphe **20**) mais qui va être retrouvée dans la suite.

Comme nous allons dans un instant revenir au système orthonormé, transformons encore (18.5) par multiplication des deux membres par $A^{i}_{\underline{i}}$ et sommation en i; il vient

$$u^{\underline{i}} = \sqrt{1 + \frac{u_0^2}{V^2}}\, \bar{u}^{\underline{i}}. \tag{18.6}$$

On a en effet

$$A^{i}_{\underline{i}}\, u^{\underline{i}} = u^{i}, \qquad \text{car} \quad A^{i}_{\underline{0}} = 0.$$

Enfin de (18.6) on déduit

$$u_{\underline{i}} = \sqrt{1 - \frac{u_0^2}{V^2}}\, \bar{u}_{\underline{i}}. \tag{18.7}$$

19. Les dix équations d'Einstein; interprétation de ρ. — Écrivons les dix premières équations de la théorie dans le cas intérieur en repère orthonormé :

$$S_{\underline{i}\underline{k}} = -\chi\rho\, u_{\underline{i}} u_{\underline{k}}.$$

En nous reportant aux formules (12.15) nous aurons

$$\bar{S}_{\underline{i}\underline{k}} = -\chi\left(\frac{1}{4}\delta_{\underline{i}\underline{k}} H^2 - F_{\underline{i}\underline{j}} F_{\underline{k}}{}^{\underline{j}}\right) - \chi\rho\, u_{\underline{i}} u_{\underline{k}} - \frac{1}{V}\left[\bar{\nabla}_{\underline{k}}(\partial_i V) - \delta_{\underline{i}\underline{k}} \bar{\Delta}_2 V\right]. \tag{19.1}$$

Pour obtenir l'écriture classique à laquelle doit se réduire le second membre pour V constant, nous devons identifier la quantité $\chi\rho u_{\underline{i}} u_{\underline{k}}$ avec $\chi\bar{\rho}\bar{u}_{\underline{i}}\bar{u}_{\underline{k}}$, $\bar{\rho}$ désignant la densité de matière habituellement considérée.

D'après (18.7), il vient

$$\rho\left(1 + \frac{u_0^2}{V^2}\right) = \bar{\rho} \tag{19.2}$$

qui donne la signification de la quantité ρ précédemment introduite.

20. Les quatre équations du premier groupe de Maxwell-Lorentz; interprétation de la constante u_0. — Toujours en repère orthonormé, les quatre équations suivantes de la théorie s'écriront :

$$S_{\underline{i}\underline{0}} = -\chi\rho\, u_{\underline{0}}\, u_{\underline{i}}.$$

D'après (12.15), nous aurons

$$\bar{\nabla}_{\underline{j}} F^{\underline{j}}_{\underline{i}} = -\frac{2\chi}{\beta V}\rho\, u_{\underline{0}} u_{\underline{i}} - 3\,\frac{\partial_{\underline{j}} V}{V} F^{\underline{j}}_{\underline{i}}. \tag{20.1}$$

En admettant que tout courant électrique doit nécessairement être un courant de convection, pour obtenir l'écriture classique à laquelle doit se réduire le second membre pour V constant, nous devons identifier la quantité $\frac{2\chi}{\beta V}\rho\, u_{\underline{0}} u_{\underline{i}}$ avec $\mu \bar{u}_i$, μ désignant la densité de charge habituellement considérée.

ρ est donné par (19.2), $u_{\underline{i}}$ par (18.7); de plus, nous avons

$$u_{\underline{0}} = A^{\alpha}_{\underline{0}} u_{\alpha} = \frac{1}{V} u_0.$$

Nous trouvons ainsi pour interpréter u_0 la formule

$$\frac{\beta u_0}{\sqrt{1+\frac{u_0^2}{V^2}}} = \frac{\mu}{\rho}, \tag{20.2}$$

qui a déjà été écrite au paragraphe **20** du chapitre I, au remplacement près de u_0 par h, de $\frac{\mu}{\rho}$ par $\frac{e}{m}$ et de V^2 par $-\gamma_{00}$.

21. La quinzième équation; un effet physique nouveau. — La quinzième équation s'écrit

$$S_{\underline{0}\underline{0}} = -\chi\rho(u_{\underline{0}})^2. \tag{21.1}$$

Évaluons $S_{\underline{0}\underline{0}} \equiv R_{\underline{0}\underline{0}} - \frac{1}{2}R$ en calculant R; par contraction $\underline{\lambda} = \underline{\mu}$ des quinze équations

$$S_{\underline{\lambda}\underline{\mu}} \equiv R_{\underline{\lambda}\underline{\mu}} - \frac{1}{2}\delta_{\underline{\lambda}\underline{\mu}} R = -\chi\rho\, u_{\underline{\lambda}} u_{\underline{\mu}},$$

on obtient

$$R - \frac{5}{2}R = -\chi\rho, \qquad \text{car} \quad \sum_{\underline{\lambda}=\underline{\mu}} \delta^{\underline{\mu}}_{\underline{\lambda}} = 5.$$

On en déduit

$$R = \frac{2}{3}\chi\rho$$

et (21.1) s'écrit

$$R_{\underline{0}\underline{0}} = \chi\rho\left[\frac{1}{3} - (u_{\underline{0}})^2\right]$$

ou encore, d'après (12.10),

$$\frac{1}{V}\bar{\nabla}_2 V + \frac{\beta^2 V^2}{4} H^2 = \chi\rho\left[(u_{\underline{0}})^2 - \frac{1}{3}\right]. \tag{21.2}$$

Nous pouvons déduire de cette équation l'existence dans notre théorie de l'effet physique suivant : un champ électromagnétique est créé par la présence d'une distribution purement matérielle, en l'absence de toute charge.

Posons en effet $\mu = 0$; la relation (20.2) montre qu'alors u_0, et par conséquent $\underline{u}_0$, est nul.

En supposant alors que $\bar{\rho}$, ou ρ qui se confond alors $\bar{\rho}$, est différent de zéro, l'équation (21.2) s'écrit

$$\frac{1}{V}\bar{\Delta}_2 V + \frac{\beta^2 V^2}{4} H^2 = -\frac{1}{3}\chi\rho. \tag{21.3}$$

Supposons V stationnaire et les sections d'espace compactes. Ces hypothèses entraînent $H^2 \neq 0$ c'est-à-dire l'existence effective d'un champ électromagnétique : en effet, V étant stationnaire, l'opérateur $\bar{\Delta}_2$ est elliptique; si $H^2 = 0$, il résulte de (21.3) $\bar{\Delta}_2 \leq 0$ et la fonction V ne peut atteindre son maximum sans se réduire à une constante; or dans nos hypothèses ce maximum est effectivement atteint. On aurait donc $\rho = 0$ contrairement à l'hypothèse faite.

Ainsi dans notre théorie, si l'on suppose que l'espace-temps est stationnaire et a ses sections d'espace compactes, *il existe nécessairement en présence d'une distribution purement matérielle un champ électromagnétique non nul* (1).

---

(1) Cet effet de création d'un champ électromagnétique par de la matière en mouvement fait actuellement l'objet des recherches de nombreux physiciens; en particulier Blackett a étudié le champ magnétique créé par une masse en rotation, d'après des observations faites sur la Terre, le Soleil et l'étoile 78 Virginis.

22. Variations de $\frac{e}{m}$ et de χ. — Reprenons la formule (20.2), en y remplaçant $\frac{\mu}{\rho}$ par $\frac{e}{m}$:

$$\frac{e}{m}\sqrt{1+\frac{u_0^2}{V^2}}=\beta u_0. \tag{22.1}$$

Cette formule donne la signification de la quantité u_0, qui est la quantité qui demeure constante le long de la trajectoire d'une particule électrisée. L'étude du principe des géodésiques qui sera faite dans la troisième partie de ce chapitre montrera en effet que la trajectoire dans $\mathcal{R}_5$ d'une particule électrisée se confond nécessairement avec une ligne de courant de $\mathcal{R}_5$.

Ainsi que nous l'avons déjà annoncé au chapitre I, nous sommes ainsi amenés à supposer dans notre théorie que la quantité $\frac{e}{m}$ est susceptible de varier pour une particule électrisée le long de sa trajectoire. La variation de $\frac{e}{m}$ est liée par (22.1) à la variation de V, donc à celle du facteur de gravitation χ.

Introduisons la valeur classique χ_0 de la constante de gravitation. La constante β que nous avons introduite nous permet de prendre $V=1$ pour $\chi=\chi_0$; elle a donc pour valeur

$$\beta=\sqrt{2\chi_0}.$$

Introduisons de même la valeur classique $\left(\frac{e}{m}\right)_0$ du rapport de la charge électrique à la masse de la particule envisagée.

La formule (22.1) écrite pour ces valeurs classiques, c'est-à-dire

$$\left(\frac{e}{m}\right)_0\sqrt{1+u_0^2}=\sqrt{2\chi_0}\,u_0$$

nous donne la valeur de la constante u_0 en fonction des quantités χ_0 et $\left(\frac{e}{m}\right)_0$ des théories classiques.

Pour étudier les variations de $\frac{e}{m}$ et de χ, prenons la différentielle logarithmique des deux membres de (22.1)

$$\frac{\delta\left(\frac{e}{m}\right)}{\frac{e}{m}}-\frac{1}{2}\,\frac{u_0^2\,\frac{\delta(V^2)}{V^4}}{1+\frac{u_0^2}{V^2}}=0$$

ou

$$\frac{2\beta^2 V^2}{\left(\frac{e}{m}\right)^2} \frac{\delta\left(\frac{e}{m}\right)}{\frac{e}{m}} - \frac{\delta(V^2)}{V^4} = 0.$$

En introduisant le facteur χ et en supposant que χ et $\frac{e}{m}$ varient peu autour de leurs valeurs classiques χ_0 et $\left(\frac{e}{m}\right)_0$, on peut écrire

$$\frac{4\chi_0}{\left(\frac{e}{m}\right)_0^2} \frac{\delta\left(\frac{e}{m}\right)}{\left(\frac{e}{m}\right)_0} - \frac{\delta\chi}{\chi_0} = 0. \tag{22.2}$$

Cette formule montre que les variations relatives de χ et de $\frac{e}{m}$ sont de même signe; ainsi, dans des domaines où le facteur χ subit une augmentation, la masse de la particule (il s'agit de la masse au repos) diminue par rapport à sa charge.

La quantité χ_0 est donnée par la formule $\chi_0 = \frac{8\pi f}{c^2}$, où f représente la constante intervenant dans la loi de Newton $F = f\frac{mm'}{r^2}$ et c la vitesse de la lumière.

Du point de vue de l'homogénéité des formules, donnons les dimensions des principales quantités qui interviennent ici :

χ a pour dimensions LM^{-1};

V et u_0 sont des nombres sans dimension;

β a les dimensions de $\sqrt{\chi}$ c'est-à-dire $L^{\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{2}}$;

$\frac{e}{m}$ doit être considéré comme mesuré dans le système électromagnétique et a dans ce système d'unités les dimensions $L^{\frac{1}{2}}M^{-\frac{1}{2}}$.

Calculons l'ordre de grandeur du facteur $\frac{\frac{32\pi f}{c^2}}{\left(\frac{e}{m}\right)^2}$ multipliant la variation relative de $\frac{e}{m}$ dans la formule (22.2).

Avec

$$f \# 6{,}6 . 10^{-8} \text{ C. G. S.}, \qquad c = 3 . 10^{10} \text{ C. G. S.},$$

$$\frac{e}{m} \# 1{,}77 . 10^{17} \text{ u. e. m. C. G. S.},$$

on trouve que ce facteur vaut approximativement $2{,}4 . 10^{-43}$.

La variation relative de $\frac{e}{m}$ est donc beaucoup plus grande que celle de χ. On doit considérer que ces variations relatives sont inférieures aux erreurs relatives commises dans les mesures actuelles de $\frac{e}{m}$ et de χ. Les mesures de $\frac{e}{m}$ ne mettent en effet en évidence aucune variation de cette quantité à la surface de la Terre et il semble impossible de penser que χ puisse être connu avec une précision 10^{43} fois plus grande. Quant aux variations de $\frac{e}{m}$ dans l'Univers, elles ne peuvent être mises en évidence, toute mesure d'un effet physique faisant intervenir cette quantité étant interprétée dans une théorie où l'on suppose essentiellement que $\frac{e}{m}$ a partout la même valeur que sur la Terre.

III. — Étude mathématique des équations.

Nous nous proposons dans cette troisième partie d'aborder l'étude des équations de notre théorie par le problème des conditions de compatibilité dans un même champ de leurs solutions extérieures et intérieures. Cette étude est destinée à régler de façon définitive la question des extrémales que nous avons vue apparaître à plusieurs reprises et sous des aspects divers au cours de l'exposé précédent.

23. Le problème extérieur. — Dans notre théorie, nous pouvons donner au problème extérieur (au sens unitaire) l'énoncé suivant :

L'hyperchamp unitaire étant donné sur une hypersurface (S) *à quatre dimensions* a priori *quelconque au moyen des quinze potentiels* $\gamma_{\lambda\mu}$ *et de leurs dérivées premières, déterminer l'hyperchamp unitaire extérieur dans tout son domaine d'existence.*

Cet énoncé se traduit dans l'espace-temps habituel par le suivant :

Étant donné sur une hypersurface (s) à trois dimensions de l'espace-temps $\mathcal{R}_4$ *les dix potentiels de gravitation* g_{ij}, *les quatre composantes* φ_i *du potentiel-vecteur et le facteur de gravitation* χ *ainsi que les dérivées premières de ces quinze quantités, déterminer les* g_{ij}, *les* φ_i *et* χ *dans tout leur domaine d'existence.*

Nous pouvons toujours supposer [1] que l'hypersurface (S) qui porte les conditions initiales est définie par l'équation

$$x^3 = 0.$$

La donnée sur (S) des potentiels $\gamma_{\lambda\mu}$ détermine les dérivées premières $\partial_a \gamma_{\lambda\mu}$ tangentes à (S); l'indice a et, dans un instant l'indice b prennent les valeurs 0, 1, 2 et 4. On se donne en outre les dérivées $\partial_3 \gamma_{\lambda\mu}$.

Au point de vue des seules dérivées secondes $\partial_{33}\gamma_{\lambda\mu}$ qui peuvent être discontinues à la traversée de (S), les équations du cas extérieur,

$$S_{\lambda\mu} = 0 \qquad \text{ou} \qquad R_{\lambda\mu} = 0$$

se séparent en deux groupes : les cinq équations $S^3_\lambda = 0$ qui ne contiennent pas de dérivées secondes $\partial_{33}\gamma_{ab}$ (les autres dérivées secondes $\partial_{33}\gamma_{\lambda 3}$ n'intervenant pas dans les équations) et les dix équations $R_{ab} = 0$.

Cette séparation des équations conduit au résultat suivant :

Pourvu que les données de Cauchy satisfassent aux cinq conditions $S^3_\lambda = 0$ *et soient telles que, sur* (S), γ^{33} *soit différent de zéro, le système des équations* $S_{\lambda\mu} = 0$ *admet, dans le cas analytique, une solution unique.*

24. Le problème intérieur. — Dans notre théorie, le problème intérieur (au sens unitaire) s'énoncera :

---

[1] Ayant calqué l'axiomatique de notre théorie sur celle de la théorie de la Relativité générale, nous nous contenterons ici de montrer que les raisonnements utilisés pour l'espace-temps (*cf.* bibl. [34] et [38]) s'appliquent sans modification à l'espace $\mathcal{R}_5$.

Étant donné sur une hypersurface (S) *les valeurs des quinze potentiels* $\gamma_{\lambda\mu}$ *et de leurs dérivées premières, déterminer les valeurs sur* (S) *des dérivées successives des quinze potentiels ainsi que les valeurs de* ρ, *des* u_λ *et de leurs dérivées.*

Dans l'espace-temps habituel, nous aurons l'énoncé suivant :

Étant donné sur une hypersurface (s) *à trois dimensions de* $\mathcal{R}_4$ *les dix potentiels de gravitation* g_{ij}, *les quatre composantes* φ_i *du potentiel-vecteur, le facteur de gravitation* χ *et les dérivées premières de ces quinze quantités, déterminer les valeurs sur* (s) *des dérivées successives des* g_{ij}, *des* φ_i *et de* χ, *ainsi que les valeurs de* $\bar\rho$, *des* $\bar u_i$ *et de leurs dérivées.*

Les liens établis entre ρ et $\bar\rho$ [*cf.* (19.2)], u^i et $\bar u^i$ [*cf.* (18.5)] et la signification donnée à u_0 [*cf.* (20.2)], indiquent comment la solution du problème posé sous le premier énoncé fournira immédiatement la solution du problème posé sous le second énoncé.

L'hypersurface (S) étant toujours supposée définie par $x^3 = 0$ et γ^{33} étant supposé différent de zéro, le système des équations du cas intérieur peut s'écrire sous la forme équivalente

$$R_{ab} = -\chi\rho\left(u_a u_b - \frac{1}{2}\gamma_{ab}\right); \tag{24.1}$$

$$R_a^3 = -\chi\rho\, u_a u^3; \qquad R_3^3 - \frac{1}{2}R = -\chi\rho\, u_3 u^3; \tag{24.2}$$

$$\gamma^{\lambda\mu}\, u_\lambda u_\mu = 1 \qquad \text{avec la condition } \rho \text{ (ou } \bar\rho) > 0. \tag{24.3}$$

Les équations (24.2) ne contenant aucune dérivée d'indice 2, les données de Cauchy déterminent sur (S) les quantités S_λ^3. On peut alors déterminer à l'aide de (24.2) et de (24.3) les quantités u_λ, u^3 et $\chi\rho$, en supposant toutefois la quantité $\Omega^{33} = \gamma^{\lambda\mu} S_\lambda^3 S_\mu^3$ différente de zéro sur (S). (24.1) donne alors les $\partial_{33}\gamma_{\lambda\mu}$.

On voit ainsi que, si γ^{33} et Ω^{33} sont différents de zéro et si S^{33} est positif, les quantités u_λ, $\chi\rho$ et $\partial_{33}\gamma_{\lambda\mu}$ ont sur (S) des valeurs bien déterminées et ne peuvent être discontinues à la traversée de (S).

Les équations de conservation montrent enfin que, dans les hypothèses énoncées, le problème posé admet une solution et une seule (du moins dans le cas analytique).

Si l'on se donne alors effectivement un champ extérieur, le seul cas (en excluant le cas où $\gamma^{33} = 0$) où il puisse se produire des discontinuités à la traversée d'une hypersurface (S) est celui où (S) est tangente à une ligne de courant ou engendrée par des lignes de courant ($u^3 = 0$).

25. Condition de raccordement de Schwarzschild. — Si l'on considère à présent un espace $\mathcal{R}_5$ doué de plusieurs distributions de matière chargée, chacune de ces distributions engendre un tube de $\mathcal{R}_5$ limité par une hypersurface (S). Sur la frontière d'un tel tube les deux $d\sigma^2$ correspondant au cas intérieur et au cas extérieur doivent se raccorder de façon à satisfaire à la condition de Schwarzschild :

Il existe un système de coordonnées tel que les quinze potentiels de champ et leurs dérivées premières soient continus à la traversée de (S).

Les difficultés qui se présentent lorsqu'on cherche à savoir pour quels changements de coordonnées cette condition est invariante sont résolues par la considération du système de coordonnées de Gauss et il suffit d'étudier le problème du raccordement dans ce système.

26. Prolongement de l'intérieur vers l'extérieur. — Le problème du prolongement de l'intérieur vers l'extérieur se pose de la façon suivante :

Étant donné un $d\sigma^2$ intérieur limité par une hypersurface (S), *rechercher s'il existe un $d\sigma^2$ extérieur se raccordant le long de* (S) *au sens de Schwarzschild avec le $d\sigma^2$ intérieur.*

La condition nécessaire et suffisante pour que ce problème admette une solution unique est que l'hypersurface (S) soit engendrée par des lignes de courant du champ extérieur.

Le fait que la condition est nécessaire se démontre en utilisant le système de coordonnées pour lequel les $\gamma_{\lambda\mu}$ et leurs dérivées premières sont continus à la traversée de (S), supposée toujours définie par $x^3 = 0$. On voit alors que les quantités S^3_λ relatives au champ intérieur sont continues à la traversée de (S) et comme elles sont nulles à l'extérieur du tube, elles le sont aussi sur (S) ce qui se traduit par la nullité sur (S) de u_3.

Pour montrer que la condition est suffisante, on rapportera (S) (engendrée par des lignes de courant et par conséquent partout orientée dans le temps) aux coordonnées de Gauss et l'on se trouvera ainsi ramené au cas du problème intérieur dans le cas où $\gamma^{33} \neq 0$. Nous sommes alors assurés de l'existence et de l'unicité d'un champ extérieur raccordé au champ intérieur, du moins au voisinage de (S).

27. Le principe des géodésiques. — Si nous envisageons à présent le problème du prolongement de l'extérieur vers l'intérieur, nous voyons que, s'il existe un $d\sigma^2$ intérieur se raccordant le long d'une hypersurface (S) à un $d\sigma^2$ extérieur donné, (S) doit être engendrée par des lignes de courant de ce $d\sigma^2$ intérieur. Or nous avons vu au paragraphe **17** que, dans le cas intérieur, ces lignes sont des géodésiques du $d\sigma^2$ intérieur. Puisqu'il y a raccordement, elles sont aussi des géodésiques du $d\sigma^2$ extérieur.

Considérons alors le tube de $\mathcal{R}_5$ décrit par une masse chargée qui devient infiniment petite; un tel tube, engendré par des géodésiques du $d\sigma^2$ extérieur, tend vers une ligne qui est nécessairement une géodésique du champ extérieur.

Ainsi, des équations dont nous avons doué notre théorie, et de l'étude des conditions de raccordement, découle l'existence dans notre théorie du principe des géodésiques :

Les trajectoires des particules électrisées sont des géodésiques du $d\sigma^2$ de $\mathcal{R}_5$.

28. Conclusion. — Faisons à présent le raccord entre ces considérations et celles du chapitre I en résumant les idées directrices de ces deux chapitres.

La constatation du fait que dans la théorie provisoire de l'Électromagnétisme les trajectoires des particules électrisées n'étaient pas des géodésiques de l'espace-temps nous a conduit à énoncer un problème purement mathématique. La solution de ce problème nous a indiqué que ces trajectoires peuvent être considérées comme associées à des géodésiques d'un espace à cinq dimensions et que nous étions précisément dans un cas où cet espace est riemannien.

Nous avons été ainsi aiguillés vers une théorie pentadimensionnelle dont l'axiomatique restait douée d'un certain degré d'indétermination. Plutôt que de baser la théorie sur tel ou tel principe variationnel, nous avons généralisé au plus près la théorie relativiste de la gravitation, élaborant ainsi une théorie unitaire qui satisfait par elle-même au principe des géodésiques.

Sans vouloir prétendre que la solution adoptée est la seule possible, nous voulons du moins insister sur un fait : toute théorie unitaire doit admettre comme première approximation la théorie provisoire de l'Électromagnétisme et doit satisfaire au principe des géodésiques. La théorie que nous avons construite satisfait à ces exigences et se trouve en mesure de profiter au mieux de toute étude faite dans la théorie de la Relativité générale.

Dans un troisième chapitre, nous allons faire subir à notre théorie une autre épreuve essentielle, relative à des problèmes globaux, et dont l'issue est assurée d'une façon beaucoup plus curieuse, quoique toujours inspirée par les problèmes analogues résolus pour la théorie relativiste de la gravitation.

CHAPITRE III.

Les solutions régulières des équations du champ.

I. — **Généralités.**

1. Certains problèmes globaux de la théorie de la Relativité générale. — Dans la théorie de la Relativité générale, l'étude des conditions de compatibilité dans un même champ des solutions extérieures et intérieures des équations d'Einstein conduit à des problèmes de nature

essentiellement globale qui n'ont été étudiés que récemment [1]. Ces problèmes se posent de façons diverses suivant que l'on envisage les cas intérieurs correspondant à différents schémas : schéma matière pure, schéma champ électromagnétique pur, schéma matière-champ électromagnétique, etc. Dans le cas purement gravitationnel, on est amené à examiner les deux propositions suivantes :

(A) *Un champ extérieur doit être tel que, dans tout domaine où une distribution énergétique peut être introduite, il présente nécessairement certaines singularités.*

Ce n'est que dans ce cas que l'on pourra considérer le champ de gravitation extérieur comme effectivement produit par la présence de la matière. Tout champ extérieur possédant une signification physique doit donc satisfaire, non seulement aux équations d'Einstein, mais encore à des conditions telles que la proposition (A) soit satisfaite. Un champ extérieur régulier partout ne peut alors contenir aucune distribution énergétique et doit par conséquent satisfaire à :

(B) *Un champ extérieur partout régulier doit nécessairement se réduire à un champ euclidien.*

L'étude de ces deux propositions conduit à des théorèmes qui apparaissent comme essentiels pour la cohérence de la théorie de la Relativité générale et l'on peut dire qu'il s'agit là d'une véritable vérification *a posteriori* de la cohérence mathématique de la théorie. Tout comme les vérifications expérimentales et l'étude d'É. Cartan portant sur la forme mathématique des équations d'Einstein, l'étude des problèmes relativistes globaux met en lumière l'extraordinaire intuition d'Einstein.

2. Bᴜᴛ ᴅᴜ ᴄʜᴀᴘɪᴛʀᴇ ᴇᴛ ᴄᴏɴꜱɪᴅéʀᴀᴛɪᴏɴꜱ ɢéɴéʀᴀʟᴇꜱ ꜱᴜʀ ʟᴇꜱ ᴍéᴛʜᴏᴅᴇꜱ ᴇᴍᴘʟᴏʏéᴇꜱ. — Nous aurons d'abord pour but dans ce chapitre de montrer que notre théorie unitaire possède la même cohérence mathématique au point de vue de son étude globale que la théorie

(1) *Cf.* Lichnerowicz (bibl. [38] et [39]).

relativiste de la gravitation. Les résultats que nous obtiendrons unifient et complètent les résultats qui ne peuvent être obtenus que séparément pour les différents schémas des divers cas intérieurs.

Bien que nous ayons adopté pour notre théorie unitaire une axiomatique calquée sur celle de la théorie de la Relativité générale, le résultat obtenu et la méthode qui y mène doivent être considérés comme entièrement nouveaux ([1]). Un point particulièrement important de cette méthode est l'analogie qui existe entre l'hypothèse de cylindricité (les quinze potentiels de champ sont indépendants de x^0) et l'hypothèse du cas stationnaire (ces quinze potentiels sont indépendants de la variable à caractère temporel x^4) ([2]).

Nous pourrons ainsi, dans l'hypothèse où $\mathcal{R}_5$ est à la fois cylindrique et stationnaire, écrire sans calcul nouveau, des équations déduites de celles du chapitre II en faisant jouer à x^4 le rôle que nous faisions jouer alors à x^0.

Par ailleurs, nous avons vu que notre théorie unitaire s'identifiait avec la théorie d'O. Klein lorsqu'on suppose V constant et que l'on écarte la quinzième équation. En adaptant notre méthode à ce cas, nous nous trouverons en mesure d'émettre un jugement sur la

---

([1]) En effet, si une partie de ce résultat a été atteinte par Einstein et Pauli (*cf.* bibl. [**37**]) par une méthode qui ne fait pas intervenir le nombre de dimensions de l'espace, notre démonstration, inspirée par la méthode de Lichnerowicz dans laquelle ce nombre de dimensions intervient, nécessite une démonstration en cascade caractéristique de notre méthode. On trouvera dans une Note de Lichnerowicz (*C. R. Acad. Sc.*, t. **221**, 1945, p. 652) une mise au point de l'étude des espaces-temps partout réguliers et une comparaison des deux méthodes et l'on verra dans une autre Note du même auteur (*C. R. Acad. Sc.*, t. **222**, 1946, p. 432) comment une synthèse des deux méthodes permet de régler définitivement la question dans le cas de la théorie relativiste de la gravitation. Signalons dès à présent que la forme des équations que nous utilisons nous dispensera de faire appel à la partie du raisonnement due à Einstein et Pauli.

([2]) Les équations (**13**.6) et (13.7) du chapitre II transposées au cas d'un espace stationnaire à quatre dimensions sont susceptibles de remplacer celles utilisées par Lichnerowicz; elles auraient l'avantage de faire disparaître de la démonstration toute la partie du raisonnement relative au résultat d'Einstein et Pauli.

cohérence mathématique de la théorie d'O. Klein c'est-à-dire en fait de la théorie provisoire de l'Électromagnétisme. Cette question, malgré son importance, n'avait jamais été réglée.

Terminons ces généralités par une remarque sur l'introduction d'une théorie pentadimensionnelle : il nous semble qu'une telle théorie vaut autant par les méthodes qu'elle suggère et par la forme des équations du champ obtenues au chapitre II que par l'interprétation physique de la représentation des champs qu'elle introduit. Tel est le point de vue mathématique auquel nous nous sommes placé dans ce travail pour étudier une telle théorie sous une forme qui apparaît comme un des aspects essentiels de la Physique moderne ([1]).

Avant de traduire les deux propositions (A) et (B) précédentes en langage de théorie unitaire, nous allons préciser les hypothèses que nous serons amené à faire sur les champs.

5. Régularité du champ. — Nous dirons qu'un espace $\mathcal{R}_5$ rapporté à un système de coordonnées (x^λ) est *régulier dans un domaine* D lorsqu'il satisfait dans D aux conditions suivantes :

1° Les quinze potentiels $\gamma_{\lambda\mu}$ relatifs au système (x^λ) et leurs dérivées partielles jusqu'au second ordre sont des fonctions continues des coordonnées x^i.

2° Le $d\sigma^2$ de $\mathcal{R}_5$ est du type hyperbolique normal à un carré positif et à quatre carrés négatifs; le discriminant γ est essentiellement positif et ne peut s'annuler en aucun point de D.

3° x^4 désignant la variable présentant le caractère temporel, γ_{44} et γ^{44} sont des quantités essentiellement positives et ne peuvent s'annuler en aucun point de D; les formes quadratiques $\gamma_{i'j'}X^{i'}X^{j'}$

([1]) A ce sujet nous ne pouvons mieux faire que de citer une phrase de L. de Broglie (*Les grands courants de la pensée mathématique*) : « Bien que ces théories unitaires n'aient pas abouti jusqu'à présent à représenter de façon très satisfaisante la véritable nature du champ électromagnétique et qu'il faille certainement s'attendre à voir les quantas dire leur mot dans cette affaire, elles ont cependant provoqué tout un mouvement d'idées qui a été très profitable à la fois à la Physique théorique et aux Mathématiques pures ».

et $\gamma^{i'j'}X_{i'}Y_{j'}$ sont définies négatives dans D; i', j' ainsi que dans la suite tout indice représenté par une lettre minuscule latine accentuée prenant les valeurs 0, 1, 2, 3.

Lorsque x^4 varie entre deux valeurs a et b, la variété $x^4 = \text{const.}$ balaye une certaine région (R) non limitée dans le champ des variables $(x^{i'})$; s'il existe un système de coordonnées (x^λ) et une région (R) correspondante tels que $\mathcal{R}_5$ rapporté au système (x^λ) soit régulier dans tout domaine D appartenant à (R), on dira que $\mathcal{R}_5$ est *régulier partout* (dans l'espace quadridimensionnel des variables x^i).

Ces hypothèses faites sur $\mathcal{R}_5$ se traduisent sur l'espace-temps $\mathcal{R}_4$ par les suivantes : $\mathcal{R}_4$ est régulier dans le domaine $D/[L_0]$ quotient de D par la relation d'équivalence portant sur les points des lignes L_0. En effet l'hypothèse de cylindricité et les formules du paragraphe **14** (chap. II) reliant les $\gamma_{\lambda\mu}$ aux g_{ij}, φ_i et χ montrent que ces dernières quantités et leurs dérivées partielles jusqu'au second ordre sont des fonctions continues des x^i. Le ds^2 de $\mathcal{R}_4$ est du type hyperbolique normal à un carré positif et à trois carrés négatifs; le discriminant g est essentiellement négatif et ne peut s'annuler en aucun point de $D/[L_0]$. $\gamma_{44} > 0$ entraîne automatiquement $g_{44} > 0$; nous reviendrons sur ce fait dans un instant; de même g^{44} est positif et les formes $g_{IJ}X^IX^J$ et $g^{IJ}X_IX_J$ sont définies négatives ($I, J = 1, 2, 3$). Enfin dans la région $(R)/[L_0]$, $\mathcal{R}_4$ sera régulier partout (dans l'espace tridimensionnel des variables x^I).

4. Le comportement asymptotique du champ. — Nous appellerons pour simplifier le langage comportement asymptotique normal d'un champ unitaire à quinze potentiels le comportement d'un champ qui satisfait aux hypothèses suivantes :

1° L'espace $\mathcal{R}_5$ est homéomorphe à l'espace euclidien à cinq dimensions et le système des lignes L_0 est homéomorphe à un système de parallèles de cet espace euclidien.

2° L'espace $\mathcal{R}_5$ admet un domaine à l'infini dans l'espace quadridimensionnel des variables $x^{i'}$ et il existe un système de coordonnées régulier dans ce domaine à l'infini tel que les potentiels $\gamma_{\lambda\mu}$ correspondants tendent uniformément vers les quantités

$$\delta_{\lambda\mu}\begin{cases} = 0 & \text{pour } \lambda \neq \mu, \\ = -1 & \text{pour } \lambda = \mu = 0,\ 1,\ 2 \text{ ou } 3, \\ = +1 & \text{pour } \lambda = \mu = 4, \end{cases}$$

lorsqu'on s'éloigne à l'infini sur les sections d'espace d'une région (R) de $\mathcal{R}_5$.

Précisons cette notion de domaine à l'infini :

Considérons l'espace $\mathcal{R}_5$ rapporté à un système de coordonnées (x^λ) et satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Sur toute variété $x^4 = \text{const.}$ d'une région (R) de $\mathcal{R}_5$ il existe des points pour lesquels la distance $\rho = \sqrt{\sum_{i'} (x^{i'})^2}$ surpasse toute valeur donnée à l'avance.

2° $\mathcal{R}_5$, rapporté au système (x^λ), est partout régulier dans (R), sauf peut-être dans certains domaines situés tout entier à distance finie.

Dans la région où $\mathcal{R}_5$ est régulier, toute section d'espace quadridimensionnel de $\mathcal{R}_5$ peut être considérée comme un espace de Riemann rapporté au système $(x^{i'})$ de métrique $-d\sigma_e^2 = \gamma_{i'j'}\, dx^{i'}\, dx^{j'}$. Dans cette région traçons sur les diverses sections d'espace de $\mathcal{R}_5$ des courbes C partant d'un point M_0 et s'éloignant à l'infini. Si, quel que soit C, la longueur $\int_{M_0}^{M} \sqrt{-\gamma_{i'j'}\, dx^{i'}\, dx^{j'}}$ tend vers l'infini avec ρ, on dit que $\mathcal{R}_5$ admet un domaine à l'infini dans l'espace et que le système de coordonnées (x^λ) est régulier dans ce domaine à l'infini.

Ces hypothèses faites sur $\mathcal{R}_5$ se traduisent dans $\mathcal{R}_4$ par les suivantes : d'abord dans $\mathcal{R}_4$ on est assuré de l'existence d'un domaine à l'infini dans l'espace; en effet, grâce aux hypothèses de nature topologique, sur toute variété $x^4 = \text{const.}$ de la région $(R)/[L_0]$ de $\mathcal{R}_4$ il existera des points pour lesquels la distance $r = \sqrt{\sum_{I} (x^I)^2}$ surpasse toute valeur donnée à l'avance et $\mathcal{R}_4$, rapporté au système (x^i) sera partout régulier dans $(R)/[L_0]$ sauf peut-être dans certains domaines situés tout entier à distance finie. Les variétés $x^4 = \text{const.}$ de la région $(R)/[L_0]$ de $\mathcal{R}_4$ seront des sections d'espace douées d'une structure d'espace riemannien de métrique $-ds_e^2 = g_{IJ}\,dx^I\,dx^J$ et la longueur $\int_{(L_0)_{M_0}}^{(L_0)_M} \sqrt{-g_{IJ}\,dx^I\,dx^J}$ augmente indéfiniment avec r. Enfin, dans ce domaine à l'infini dans l'espace, $\mathcal{R}_4$ admettra un système de coordonnées régulier tel que les potentiels g_{ij} tendent uniformément vers δ_{ij}, les composantes φ_i du potentiel-vecteur vers zéro et le facteur de gravitation vers sa valeur classique χ_0.

Ainsi, le comportement asymptotique normal du champ unitaire à quinze potentiels entraîne le comportement asymptotique euclidien de l'espace-temps, avec un champ électromagnétique nul à l'infini et un facteur de gravitation constant à l'infini.

5. Les deux propositions fondamentales en théorie unitaire. — A partir de maintenant, nous n'utiliserons plus les mots extérieur et intérieur que dans leur sens unitaire : nous appellerons donc *champ extérieur* l'ensemble d'un champ gravitationnel et d'un champ électromagnétique, avec en plus dans notre théorie un facteur de gravitation variable, à l'extérieur de toute distribution de matière chargée.

Toute singularité d'un champ extérieur doit pouvoir être meublée par une distribution de matière chargée, si l'on veut pouvoir concevoir cette distribution comme cause du champ; et cela de telle sorte que l'ensemble du champ extérieur et des divers champs intérieurs considérés soit partout régulier. Inversement nous sommes conduits à la proposition suivante :

(A_1) *Dans tout domaine de $\mathcal{R}_5$ où une distribution de matière chargée peut être introduite, le champ extérieur doit nécessairement présenter des singularités.*

Dans ces conditions, dans un champ extérieur partout régulier, on ne peut introduire aucune distribution de matière chargée. Un tel champ doit donc nécessairement se réduire à zéro, un champ unitaire nul étant un champ tel que $g_{ij} = \delta_{ij}$, $\varphi_i = 0$, $\chi = \chi_0$. Si l'on admet d'autre part que les seuls champs susceptibles d'une interprétation physique ont un comportement asymptotique normal, nous arrivons à la proposition :

(B_1) *Si un champ unitaire extérieur admet un comportement asymptotique normal, il ne peut être régulier partout sans se réduire identiquement à zéro.*

Dans la théorie d'O. Klein, la proposition (A_1) garde exactement la même forme que dans notre théorie unitaire mais la matière et la charge s'introduisent séparément, la matière aux seconds membres des équations d'Einstein et la charge par le vecteur-courant aux seconds membres des équations de Maxwell-Lorentz. Il en est encore de même dans la théorie provisoire de l'Électromagnétisme où il ne faudra alors considérer que des domaines d'espace-temps.

Quant à la proposition (B_1), elle s'énoncera pour la théorie provisoire de l'Électromagnétisme ou pour son interprétation par la théorie d'O. Klein, de la façon suivante :

(B'_1) *Si un espace-temps admet des champs gravitationnel et électromagnétique nuls à l'infini et satisfaisant partout aux équations d'Einstein*

$$\bar{S}_{ik} = -\chi\tau_{ik}$$

et de Maxwell

$$\bar{\nabla}_j F^{ji} = 0,$$

ces champs ne peuvent être partout réguliers sans se réduire identiquement à zéro.

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous étudierons successivement dans notre théorie unitaire les deux propositions (B_1) et (A_1), en nous bornant à la considération d'un champ unitaire stationnaire.

La troisième partie de ce chapitre sera consacrée à l'étude des propositions (B'_1) et (A_1) dans la théorie d'O. Klein [1].

---

[1] Les résultats relatifs aux propositions (B_1) et (B'_1) ont fait l'objet d'une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. **226**, 1948, p. 1881.

II. — Les solutions partout régulières des équations de notre théorie unitaire dans le cas d'un champ stationnaire.

1. La proposition (B_1).

6. Rappel des hypothèses. — Le champ unitaire est représenté dans un espace de Riemann $\mathcal{R}_5$, cylindrique, par les quinze potentiels de champ $\gamma_{\lambda\mu}$ satisfaisant dans le cas extérieur aux équations $S_{\lambda\mu} = 0$.

Ce champ est stationnaire (les $\gamma_{\lambda\mu}$ sont indépendants de x^4).

Il a un comportement asymptotique normal.

Il est partout régulier.

7. L'espace $\mathcal{R}'_4$. — Profitant de l'analogie qui existe entre l'hypothèse du cas stationnaire et l'hypothèse de cylindricité, nous allons faire jouer à x^4 le rôle que nous avons fait jouer à x^0 dans le chapitre II. Reprenant les calculs que nous avons fait dans le cas de la signature elliptique nous poserons

$$\gamma_{44} = V'^2 \tag{7.1}$$

et nous décomposerons en carrés le $d\sigma^2$ de $\mathcal{R}_5$ en faisant jouer à x^4 le rôle de première variable directrice. En posant (¹)

$$\omega'^{\underline{4}} = V'\left[dx^4 + \frac{\gamma_{i'4}}{V'^2}\,dx^{i'}\right], \tag{7.2}$$

nous aurons

$$d\sigma^2 = (\omega'^{\underline{4}})^2 + ds'^2, \tag{7.3}$$

avec

$$ds'^2 = g'_{i'j'}\,dx^{i'}\,dx^{j'}, \tag{7.4}$$

où

$$g'_{i'j'} = \gamma_{i'j'} - \frac{\gamma_{i'4}\gamma_{j'4}}{V'^2}. \tag{7.5}$$

(¹) Comme d'habitude, nous soulignons les indices quand il s'agit de composantes sur un repère orthonormé; nous caractériserons par un accent les élément de l'espace $\mathcal{R}'_4$ même lorsque ce caractère sera visible sur ses indices $i', j', \ldots, = 0, 1, 2, 3$.

La décomposition de ds'^2 en carrés sous la forme

$$(7.6) \qquad ds'^2 = (\omega'^{\underline{0}})^2 + (\omega'^{\underline{1}})^2 + (\omega'^{\underline{2}})^2 + (\omega'^{\underline{3}})^2$$

nous permet de définir un repère mobile orthonormé de $\mathcal{R}_5$ dont les vecteurs de base seront désignés par $\vec{\varepsilon}_{\underline{\alpha}}$.

L'étude de la relation $\omega'^{\underline{4}} = 0$ nous conduit à la définition d'un espace $\mathcal{R}'_4$: considérons la relation d'équivalence $[L_4]$ qui consiste à tenir pour équivalents les points d'une ligne L_4 de $\mathcal{R}_5$ le long de laquelle x^4 varie seul; $\mathcal{R}'_4$ sera l'espace quotient $\mathcal{R}_5/[L_4]$ de $\mathcal{R}_5$ par cette relation d'équivalence. La métrique $d\sigma^2$ de $\mathcal{R}_5$ induit la métrique ds'^2 dans l'espace $\mathcal{R}'_4$ qui se trouve ainsi doué d'une structure d'espace riemannien. Le repère mobile orthonormé $\left(\vec{\varepsilon}_{\underline{\alpha}}\right)$ de $\mathcal{R}_5$ induit dans $\mathcal{R}'_4$ un repère mobile orthonormé qui sera désigné par $\left(\vec{\varepsilon}'_{\underline{i'}}\right)$; le repère naturel $\left(\vec{e}_\alpha\right)$ de $\mathcal{R}_5$ induit dans $\mathcal{R}'_4$ un repère naturel qui sera désigné par $\left(\vec{\varepsilon}'_{i'}\right)$.

La formule

$$(7.7) \qquad \frac{\gamma_{i'4}}{V'^2} = \varphi'_{i'}$$

définira un vecteur $\vec{\varphi}$ de $\mathcal{R}'_4$ par ses composantes sur le repère naturel de cet espace; nous désignerons par $\nabla'_{j'}$ et Δ'_2 respectivement l'opérateur de dérivation covariante et le laplacien dans $\mathcal{R}'_4$ et nous poserons

$$F'_{i'j'} = \nabla'_{i'}\varphi'_{j'} - \nabla'_{j'}\varphi'_{i'},$$

ce qu'on peut d'ailleurs aussi bien écrire, puisqu'il s'agit de composantes sur le repère naturel de $\mathcal{R}'_4$:

$$(7.8) \qquad F'_{i'j'} = \partial_{i'}\varphi'_{j'} - \partial_{j'}\varphi'_{i'}.$$

Enfin nous poserons

$$(7.9) \qquad H'^2 = \sum_{i',j'} F'_{i'j'} F'^{i'j'}.$$

Nous pouvons alors, sans calcul nouveau, écrire à partir de la dernière des formules (8.4) du chapitre II, l'expression de la composante $R_{\underline{44}}$ du tenseur de Ricci de $\mathcal{R}_5$ sur le repère orthonormé $(\vec{\varepsilon}_{\underline{\alpha}})$ de cet espace en fonction d'éléments appartenant à $\mathcal{R}'_4$:

$$R_{\underline{44}} \equiv \frac{1}{V'} \Delta'_2 V' - \frac{V'^2}{4} H'^2. \tag{7.10}$$

De même, à partir des formules (10.3) et (10.4) du chapitre II, nous obtenons l'expression de la composante de $\mathcal{R}^4_4$ du tenseur de Ricci de $\mathcal{R}_5$ sur le repère naturel de cet espace, en fonction d'éléments de $\mathcal{R}'_4$, définis par leurs composantes sur le repère naturel de cet espace :

$$R^4_4 \equiv \frac{1}{V'} \nabla'_{j'} h'^{j'}, \tag{7.11}$$

où $h'^{j'}$ sont les composantes contravariantes d'un vecteur $\vec{h}'$ de $\mathcal{R}'_4$ défini par

$$h'_{j'} = \partial_{j'} V' - \frac{V'^3}{2} \varphi'_{i'} F'_{j'}{}^{i'}. \tag{7.12}$$

Enfin les formules (10.7) et (10.8) du chapitre II nous permettent d'obtenir l'expression de cette même composante R^4_4 en fonction d'éléments de $\mathcal{R}_5$ définis par leurs composantes sur le repère naturel de cet espace :

$$R^4_4 \equiv \nabla_\alpha \eta'^\alpha, \tag{7.13}$$

où η'^α sont les composantes contravariantes d'un vecteur $\vec{\eta}'$ de $\mathcal{R}_5$ défini par

$$\eta'_{j'} = \frac{\partial_{j'} V'}{V'} - \frac{V'^2}{2} \varphi'_{i'} F'_{j'}{}^{i'}; \qquad \eta'_4 = 0. \tag{7.14}$$

D'après ce que nous avons vu au paragraphe **11** du chapitre II sur les différentes façons équivalentes d'écrire les équations de notre théorie, chacune des équations

$$R_{\underline{44}} = 0, \qquad R^4_4 = 0$$

peut être substituée, en fournissant un système équivalent au système $S_{\lambda\mu} = 0$, à l'équation $S_{44} = 0$.

8. Passage a la signature hyperbolique; le caractère spatial de x_0. — C'est ici que nous pouvons justifier l'attribution du caractère spatial à la variable x^0.

Pour pouvoir utiliser dans la démonstration suivante la formule (7.10), il est essentiel de pouvoir supposer que la quantité H'^2 garde un signe constant; or, ce n'est qu'en attribuant à x^0 le caractère spatial que cette quantité est constamment positive. Ce n'est également qu'avec cette hypothèse de signature que l'opérateur Δ'_2 est un opérateur du type elliptique, ce qui jouera également un rôle essentiel dans la démonstration.

De plus, il est nécessaire que dans l'espace-temps $\mathcal{R}_4$ le fait pour la quantité g_{44} d'être positive résulte automatiquement de l'hypothèse que c'est la variable x^4 qui possède dans $\mathcal{R}_5$ le caractère temporel. Or l'hypothèse de signature que nous avons faite au paragraphe **12** du chapitre II nous a conduit à la formule

$$g_{44} = \gamma_{44} + \beta^2 V^2 (\varphi_4)^2$$

et $\gamma_{44} > 0$ entraîne automatiquement $g_{44} > 0$, ce qui ne serait pas le cas si nous attribuions à x^0 le caractère temporel.

Si nous effectuons sur toutes les formules du paragraphe **7**, qui auraient dues être écrites en éléments étoilés, la transformation

$$\overset{\star}{x}{}^{i'} = \frac{x^{i'}}{i}, \qquad \overset{\star}{x}{}^4 = x^4 \qquad \text{complétée par} \quad \overset{\star}{V}{}' = V',$$

nous constatons que toutes les formules écrites demeurent inchangées. La seule différence porte sur (7.6) qui doit s'écrire

$$ds'^2 = -(\omega'^{\underline{0}})^2 - (\omega'^{\underline{1}})^2 - (\omega'^{\underline{2}})^2 - (\omega'^{\underline{3}})^2.$$

Faisons à ce propos une remarque sur les discriminants des diverses formes quadratiques considérées : en signature elliptique, le discriminant $\overset{\star}{\gamma}$ des $\overset{\star}{\gamma}_{\lambda\mu}$, le discriminant $\overset{\star}{g}$ des $\overset{\star}{g}_{ij}$ et le discriminant $\overset{\star}{g}{}'$ des $\overset{\star}{g}{}'_{i'j}$ sont tous trois positifs. Le passage à la signature hyperbolique normale donnera :

$\gamma = \overset{\star}{\gamma}$ puisqu'il y a changements de signes portant sur quatre variables à caractère spatial;

$g = -\overset{\star}{g}$ puisqu'il y a changements de signes portant sur trois variables à caractère spatial;

$g' = \overset{\star}{g}'$ puisqu'on retrouve ici les quatre variables à caractère spatial.

Ainsi γ et g' sont positifs mais g est négatif.

En résumé, le passage à la signature hyperbolique ne change pas les formules du paragraphe **7**. C'est pour cette raison que nous n'avons pas écrit ces formules en éléments étoilés comme elles auraient dû l'être; nous les utiliserons telles qu'elles sont écrites.

Les trois équations susceptibles de remplacer dans le système $S_{\lambda\mu} = 0$ l'équation $S_{44} = 0$ seront donc

$$\frac{1}{V'} \Delta'_2 V' - \frac{V'^2}{4} H'^2 = 0, \tag{8.1}$$

$$\nabla'_{j'} h'^{j'} = 0, \tag{8.2}$$

$$\nabla_\alpha \eta'^\alpha = 0, \tag{8.3}$$

les vecteurs $\vec{h}'$ et $\vec{\eta}'$ étant définis respectivement par (7.12) et (7.14).

9. Ordre des déviations des $\gamma_{\lambda\mu}$ par rapport a leurs valeurs normales. — Nous allons dans ce paragraphe exposer la contribution apportée par Einstein et Pauli à l'étude des solutions régulières des équations du champ [1]. En réalité, comme on le verra plus loin, la forme que nous avons donnée à nos équations nous dispensera d'avoir besoin de ce résultat. Il nous paraît cependant intéressant d'exposer cette question, non seulement à cause de l'intérêt propre qu'elle ne peut cesser de présenter, mais encore précisément pour bien mettre en évidence la simplification que nous apportons à la démonstration.

Nous nous contenterons d'exposer la méthode dans le cas qui nous intéresse ici; nous considérerons un espace de Riemann $\mathcal{R}_5$ à cinq dimensions, dans lequel quatre variables possèdent le caractère spatial correspondant à des signes moins, et la cinquième le caractère

---

[1] *Cf.* bibl. [37].

temporel correspondant au signe plus, en faisant l'hypothèse de cylindricité par rapport à la variable à caractère temporel [1].

ρ étant défini par

$$\rho^2 = \sum_{i'} (x^{i'})^2$$

nous poserons

$$\gamma_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu} + \varepsilon_{\lambda\mu}$$

le symbole $\delta_{\lambda\mu}$ ayant les valeurs définies au paragraphe **4** et les $\varepsilon_{\lambda\mu}$ tendant uniformément vers zéro avec $\frac{1}{\rho}\cdot$ Nous ne considérerons que la partie d'ordre $\frac{1}{\rho}$ des $\varepsilon_{\lambda\mu}$ soit $\frac{m_{\lambda\mu}}{\rho}$ ($m_{\lambda\mu} = \text{const.}$).

On peut toujours se ramener à un système de coordonnées isotherme c'est-à-dire tel que l'on ait

$$\gamma^{\lambda\mu}\Gamma_\lambda{}^\nu{}_\mu = 0. \tag{9.1}$$

Soit γ le déterminant des $\gamma_{\lambda\mu}$; on peut écrire $\gamma = 1 + \varepsilon$, ε étant donné par

$$\varepsilon = \varepsilon_{44} - \sum_{i'} \varepsilon_{i'i'} \tag{9.2}$$

et nous poserons $\varepsilon = -\frac{2m}{\rho}\cdot$

La formule (9.1) donne alors

$$\partial_\lambda \varepsilon_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}\partial_\nu \varepsilon = 0, \tag{9.3}$$

équations qui nous fournissent pour les parties en $\frac{1}{\rho}$ des quantités $\varepsilon_{\lambda\mu}$ les résultats suivants :

pour $\nu = 4$, on a

$$\partial_{i'}\varepsilon_{4i'} = 0,$$

---

(1) Einstein et Pauli font une démonstration plus générale et par suite moins rapide en considérant trois dimensions de caractère spatial et un nombre quelconque de dimensions supplémentaires correspondant à une signature quelconque avec l'hypothèse de cylindricité par rapport à ces variables supplémentaires.

d'où

(9.4) $$m_{i'4} = 0;$$

pour $\nu = i'$, on a

$$\partial_{j'} \varepsilon_{i'j'} - \frac{1}{2} \partial_{i'} \varepsilon = 0,$$

d'où

(9.5) $$m_{i'j'} = -m\, \delta_{i'j'}.$$

(9.2) donne alors

$$m_{44} - 4m = -2m,$$

soit

(9.6) $$m_{44} = 2m.$$

Intégrons alors la relation (8.2) dans le volume limité par une sphère géodésique Σ' de l'espace $\mathcal{R}'_4$ de « rayon » arbitrairement grand; on a

$$\text{flux}_{\Sigma'} \vec{h}' = \iiiint_{\mathcal{V}'} \nabla'_{j'} h'^{j'} \sqrt{g'}\, dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3 = 0,$$

où $\mathcal{V}'$ est l'hypervolume limité par Σ'.

Or $h'^{j'}$ est donné par

$$h'^{j'} = g'^{j'k'} \left(\partial_{k'} V' - \frac{V'^3}{2} \varphi'_{i'} F'_{k'}{}^{i'} \right).$$

L'hypothèse du comportement asymptotique normal de $\mathcal{R}_5$ entraîne le caractère euclidien à l'infini de $\mathcal{R}'_4$ et $g'^{j'k'}$ tend uniformément vers $\delta_{i'k'}$. $h'^{j'}$ apparaît alors comme la somme de deux termes dont le premier $g'^{j'k'} \partial_{k'} V'$ a pour terme du second ordre en $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{2} m_{44} \frac{x^{j'}}{\rho^3}$. Le second terme, $\frac{V'^3}{2} g'^{j'k'} \varphi'_{j'} F'_{k'}{}^{i'}$ ne contient pas de termes du second ordre par rapport à $\frac{1}{\rho}$. On peut en effet l'écrire $\frac{V'^3}{2} \varphi'_{i'} F'^{j'i'}$; $\varphi'_{i'} = \frac{\gamma_{i'4}}{\gamma_{44}}$ a pour partie principale $\frac{m_{i'4}}{\rho}$ et $F'^{j'i'}$ a pour partie principale $\frac{m_{j'4} x^{i'} - m_{i'4} x^{j'}}{\rho_3}$ c'est-à-dire un terme en $\frac{1}{\rho^2}$. En définitive, $\varphi'_{i'} F'^{j'i'}$ ou ce qui revient au même $\varphi'_{i'} F'_{j'}{}^{i'}$ est du troisième ordre en $\frac{1}{\rho}$.

Le terme du second ordre en $\frac{1}{\rho}$ de $h'^{j'}$ est donc $\frac{1}{2} m_{44} \frac{x^{j'}}{\rho_3}$; le flux du vecteur $\vec{h}'$ à travers Σ' a donc un sens et vaut $2\pi m_{44}$; il ne peut être nul que si l'on a

$$m_{44} = 0. \tag{9.7}$$

(9.6) montre alors que $m = 0$, ce qui conduit d'après (9.5) à $m_{i'j'} = 0$.

Ainsi, toutes les constantes $m_{\lambda\mu}$ sont nécessairement nulles et nous pouvons énoncer :

S'il existe une solution partout régulière des équations du champ et si le comportement asymptotique du champ est normal, les déviations des $\gamma_{\lambda\mu}$ par rapport à leurs valeurs normales sont nécessairement d'ordre supérieur à $\frac{1}{\rho}$.

Nous n'utiliserons pas la démonstration précédente mais chemin faisant nous avons démontré le lemme suivant qui nous servira dans la suite :

L'expression $\varphi'_{i'} F'_{j'}{}^{i'}$ est du troisième ordre au moins en $\frac{1}{\rho}$.

10. Première partie de la démonstration. — Nous avons considéré le vecteur $\vec{h}'$ de $\mathcal{R}_4$ de composantes covariantes sur le repère naturel de cet espace

$$h'_{j'} = \partial_{j'} V' - \frac{V'^3}{2} \varphi'_{i'} F'_{j'}{}^{i'}. \tag{10.1}$$

Considérons de même le vecteur $\vec{k}'$ défini par

$$k'_{j'} = \partial_{j'} V'. \tag{10.2}$$

Les équations (8.1) et (8.2) donnent

$$\nabla'_{j'} h'^{j'} = 0, \tag{10.3}$$

$$\nabla'_{j'} k'^{j'} = \frac{V'^3}{4} H'^2. \tag{10.4}$$

Considérons les flux des vecteurs $\vec{h}'$ et $\vec{k}'$ à travers la surface Σ' d'une sphère géodésique de $\mathcal{R}'_4$ dont le « rayon » est arbitrairement grand. D'après le lemme de la fin du paragraphe précédent, la différence des deux vecteurs $\vec{h'}$ et $\vec{k'}$ est du troisième ordre au moins par rapport à $\frac{1}{\rho}$ et les deux flux sont équivalents à l'infini.

On peut écrire

$$\text{flux}_{\Sigma'}\vec{h'} = \iiiint_{\mathcal{V}'} \nabla'_{j'} h'^{j'} \sqrt{g'}\, dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3, \tag{10.5}$$

$$\text{flux}_{\Sigma'}\vec{k'} = \iiiint_{\mathcal{V}'} \frac{V'^3}{4} H'^2 \sqrt{g'}\, dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3. \tag{10.6}$$

D'après (10.3), le premier de ces flux est nul. Le flux de $\vec{k'}$ équivalent à l'infini au flux de $\vec{h'}$, tend donc vers zéro avec $\frac{1}{\rho}$. La nullité du second membre de (10.6) quand ρ devient infiniment grand donne

$$H'^2 = 0. \tag{10.7}$$

L'équation (10.4) s'écrit alors

$$\Delta'_2 V' = 0. \tag{10.8}$$

L'espace $\mathcal{R}_5$ étant partout régulier, il en est de même de $\mathcal{R}'_4$; la forme quadratique $-g'^{i'j'} X_{i'} X_{j'}$ étant partout définie positive, Δ'_2 est un opérateur elliptique. Il résulte de l'équation (10.8) et des propriétés des opérateurs elliptiques que V', qui est constant à l'infini, se réduit identiquement à une constante.

Avec l'hypothèse de signature que nous avons faite, (10.7) entraîne

$$F'_{i'j'} = 0$$

ou encore puisque V' est constant

$$\partial_{i'} \gamma_{4j'} = \partial_{j'} \gamma_{4i'}. \tag{10.9}$$

On peut donc trouver une fonction $\theta(x^0, x^1, x^2, x^3)$ définie dans tout l'espace R'_4 (à une constante additive près) telle que

$$\gamma_{4i'} = \partial_{i'} \theta \quad (^1).$$

---

(1) L'hypothèse de cylindricité permet de séparer (10.9) en $\partial_I \gamma_{4J} = \partial_J \gamma_{4I}$ et

Effectuons le changement de coordonnées

$$x^{i'} = \overset{\star}{x}{}^{i'}; \qquad x^4 = \overset{\star}{x}{}^4 - \frac{1}{V'^2}\theta\left(\overset{\star}{x}{}^0, \overset{\star}{x}{}^1, \overset{\star}{x}{}^2, \overset{\star}{x}{}^3\right).$$

Les lignes de temps de $\mathcal{R}_5$ ne sont pas modifiées et les potentiels se transforment par

$$\gamma_{\overset{\star}{i'}\overset{\star}{j'}} = \gamma_{i'j'} - \frac{1}{V'^2}\gamma_{4i'}\gamma_{4j'} \qquad \text{pour} \quad i' = \overset{\star}{i'},\ j' = \overset{\star}{j'};$$

$$\gamma_{\overset{\star}{4}\overset{\star}{i'}} = \gamma_{4i'} - \partial_{i'}\theta = 0 \qquad \text{pour} \quad i' = \overset{\star}{i'};$$

$$\gamma_{\overset{\star}{4}\overset{\star}{4}} = \gamma_{44} = V'^2 = \text{const.}$$

L'espace $\mathcal{R}_5$ admet ainsi dans le système de coordonnées $\left(\overset{\star}{x}{}^\lambda\right)$ l'élément linéaire stationnaire et orthogonal :

$$d\sigma^2 = V'^2\left(d\overset{\star}{x}{}^4\right)^2 + \gamma_{\overset{\star}{i'}\overset{\star}{j'}}\, d\overset{\star}{x}{}^{i'}\, d\overset{\star}{x}{}^{j'}. \tag{10.10}$$

11. Deuxième partie de la démonstration. — Dans ce paragraphe, nous supposerons $\mathcal{R}_5$ rapporté au système de coordonnées $\left(\overset{\star}{x}{}^\lambda\right)$ et nous supprimerons le signe $\star$. La décomposition en carrés du $d\sigma^2$ (10.10) en prenant x^0 comme première variable directrice nous fournira pour l'espace $\mathcal{R}_4$ un ds^2 stationnaire et orthogonal :

$$ds^2 = g_{IJ}\, dx^I\, dx^J + V'^2(dx^4)^2.$$

Le vecteur $\vec{\varphi}$ de $\mathcal{R}_4$ sera tel que $\varphi_4 = 0$ puisque $\gamma_{40} = 0$. On en déduit pour le rotationnel de ce vecteur

$$F_{4J} = \partial_4\varphi_J - \partial_J\varphi_4 = 0,$$

le premier terme étant nul à cause du caractère stationnaire, le second à cause de la nullité de φ_4.

La quantité H^2 se réduit alors à $g^{IK}g^{JL}F_{IJ}F_{KL}$; elle est essentiellement positive.

$\partial_J\gamma_{40} = 0$, ce qui montre que γ_{40} est constant et que θ a la forme

$$ax^0 + f(x^1, x^2, x^3).$$

Considérons les vecteurs $\vec{h}$ et $\vec{k}$ de $\mathcal{R}_4$ définis par leurs composantes covariantes sur le repère naturel de $\mathcal{R}_4$ par

$$h_j = \partial_j V + \frac{\beta^2 V^3}{2} \varphi_i F_j{}^i, \tag{11.1}$$

$$h_j = \partial_j V. \tag{11.2}$$

On notera que $h^4 = k^4 = 0$; en effet $h^4 = g^{4i} h_i$ et $g^{4i} = 0$ sauf pour $i = 4$.

Les équations (13.7) et (13.6) du chapitre II s'écrivent

$$\overline{\nabla}_j h^j = 0, \tag{11.3}$$

$$\overline{\nabla}_j k^j = -\frac{\beta^2 V^3}{4} H^2. \tag{11.4}$$

Considérons alors dans $\mathcal{R}_4$ l'espace $x^4 = \text{const.}$ et une sphère géodésique Σ de cet espace de « rayon » arbitrairement grand ; nous aurons

$$\operatorname{flux}_\Sigma \vec{h} = \iiint_{\mathcal{V}} \overline{\nabla}_j h^j \sqrt{-g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3,$$

$$\operatorname{flux}_\Sigma \vec{k} = \iiint_{\mathcal{V}} -\frac{\beta^2 V^3}{4} H^2 \sqrt{-g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3,$$

où $\mathcal{V}$ est le volume limité par Σ.

Le premier de ces flux est nul à cause de (11.3). r désignant $\sqrt{\sum_1 (x^1)^2}$, la différence entre les vecteurs $\vec{h}$ et $\vec{k}$ est du troisième ordre au moins en $\frac{1}{r}$ et les deux flux considérés sont équivalents à l'infini. La nullité du second flux pour les grandes valeurs de r donne

$$H^2 = 0 \tag{11.5}$$

et l'équation (11.4) s'écrit

$$\overline{\Delta}_2 V = 0. \tag{11.6}$$

Le ds^2 de $\mathcal{R}_4$ étant stationnaire et orthogonal, $\overline{\Delta}_2$ est un opérateur elliptique sur $x^4 = \text{const.}$ Le comportement asymptotique de $\mathcal{R}_4$ étant euclidien, (11.6) permet de conclure que V est constant.

(11.5) donne alors $F_{IJ} = 0$, ce qui se traduit puisque V est constant par

$$\partial_I \gamma_{J0} = \partial_J \gamma_{I0}.$$

On peut alors trouver une fonction $\tau(x^1, x^2, x^3)$ telle que

$$\gamma_{I0} = \partial_I \tau.$$

Revenons alors pour un moment à l'espace $\mathcal{R}'_4$, dont la métrique s'identifie en ce moment avec celle de la variété $x^4 = \text{const.}$ de $\mathcal{R}_5$ à cause de la nullité des $\gamma_{i'4}$, et faisons le changement de coordonnées

$$x^I = \overset{\star}{x}{}^{I}; \qquad x^0 = \overset{\star}{x}{}^{0} + \frac{1}{V^2}\tau\left(\overset{\star}{x}{}^{1}, \overset{\star}{x}{}^{2}, \overset{\star}{x}{}^{3}\right).$$

Les $\gamma_{i'j'}$ se transforment suivant :

$$\gamma_{\overset{\star}{I}\overset{\star}{J}} = \gamma_{IJ} + \frac{1}{V}\gamma_{0I}\gamma_{0J} \qquad \text{pour} \quad I = \overset{\star}{I}, \qquad J = \overset{\star}{J};$$

$$\gamma_{\overset{\star}{0}\overset{\star}{J}} = \gamma_{0J} - \partial_J \tau = 0 \qquad \text{pour} \quad J = \overset{\star}{J};$$

$$\gamma_{\overset{\star}{0}\overset{\star}{0}} = \gamma_{00} = -V^2 = \text{const.}$$

Ainsi dans ce nouveau système de coordonnées, les γ_{I0} (en supprimant les $\star$) sont nuls, ce qui se traduit dans $\mathcal{R}_4$ par la nullité des φ_I.

Les dix premières équations (13.5) du chapitre II se réduisent alors à

$$\bar{S}_{ik} = 0,$$

et nous sommes ramenés en définitive à un espace-temps extérieur (au sens habituel de la théorie de la Relativité générale), stationnaire et orthogonal. On sait qu'avec les hypothèses faites, un tel espace-temps se réduit localement à l'espace euclidien (¹) : on peut choisir un système de coordonnées tel que les g_{IJ} ou ce qui revient au même ici les γ_{IJ} aient la valeur δ_{IJ}.

Pour résumer cette démonstration, faisons la remarque suivante sur la façon dont se partagent les quinze potentiels dans les deux

(¹) *Cf.* LICHNEROWICZ (bibl. [38], p. 41-43). Puisqu'on sait déjà que le coefficient V'^2 de $(dx^4)^2$ dans le ds^2 est constant, il ne reste plus à établir que le caractère localement euclidien des sections d'espace.

parties de la démonstration : la première partie de la démonstration nous a fourni des résultats sur les cinq quantités $\gamma_{4\lambda}$: γ_{44} est constant et nous avons pu opérer une orthogonalisation dans laquelle les $\gamma_{4\mathrm{I}}$ et γ_{40} deviennent nuls. La seconde partie de la démonstration fournit d'abord des résultats sur les quatre quantités $\gamma_{0i'}$: γ_{00} est constant et nous avons pu opérer une orthogonalisation dans laquelle les $\gamma_{0\mathrm{I}}$ deviennent nuls, puis sur les six γ_{IJ}.

En langage relativiste habituel, nous rencontrons dans la première partie de la démonstration les cinq quantités V' (qui s'identifiera avec g_{44} lorsque γ_{04} sera rendu nul), φ_4 et $g_{\mathrm{I}4}$ (qui s'identifiera avec $\gamma_{\mathrm{I}4}$ lorsque $\gamma_{40}=0$); dans la seconde partie, nous rencontrons les dix potentiels χ, φ_{I} et g_{IJ}.

Ayant ainsi établi dans notre théorie unitaire la proposition (B_1) dans le cas d'un champ unitaire stationnaire, abordons à présent l'étude de la proposition (A_1), le champ extérieur étant toujours supposé stationnaire.

2. La proposition (A_1).

12. Les équations du cas intérieur

$$\mathrm{R}_\lambda^\mu - \frac{1}{2}\gamma_\lambda^\mu \mathrm{R} = -\chi\rho\, u_\lambda u^\mu$$

donnent par contraction

$$\mathrm{R} = \frac{2}{3}\chi\rho$$

et peuvent donc s'écrire

$$\mathrm{R}_{\lambda\mu} = -\chi\rho\left(u_\lambda u_\mu - \frac{1}{3}\gamma_{\lambda\mu}\right).$$

L'équation présentant le caractère scalaire dans les sections d'espace $x^4=$ const. de $\mathcal{R}_4$ s'écrira donc

$$(12.1)\qquad \mathrm{R}_4^4 = -\chi\rho\left(u^4 u_4 - \frac{1}{3}\right).$$

Cette équation nous montre que la quantité R_4^4 est essentiellement négative; en effet, u^λ étant un vecteur unitaire de $\mathcal{R}_5$, on a

$$2u^4 u_4 - 1 = \gamma^{44}(u_4)^2 - \gamma^{i'j'} u_{i'} u_{j'};$$

la forme quadratique $\gamma^{i'j'}u_{i'}u_{j'}$ étant définie négative, l'expression $2u^4u_4-1$ est positive [1]; or le second membre de (12.1) peut s'écrire

$$-\frac{1}{2}\chi\rho\left[(2u^4u_4-1)+\frac{1}{6}\right].$$

La formule (8.3) nous permet d'autre part d'exprimer R_4^4 sous une forme d'une divergence dans $\mathcal{R}_5$:

$$R_4^4=\nabla_\alpha\eta'^\alpha, \qquad \text{avec} \quad \eta'_{j'}=\frac{\partial_{j'}V'}{V'}-\frac{V'^2}{2}\varphi'_{i'}F'_{j'}{}^{i'}.$$

Or si nous développons $\nabla_\alpha\eta'^\alpha$ sous la forme

$$\nabla_\alpha\eta'^\alpha=\partial_{i'}\eta'^{i'}+\partial_4\eta'^4+\Gamma_\alpha{}^\alpha{}_{i'}\eta'^{i'}+\Gamma_\alpha{}^\alpha{}_4\eta'^4,$$

nous constatons que, les second et quatrième termes étant nuls à cause du caractère stationnaire de la métrique de $\mathcal{R}_5$, cette divergence ne dépend pas de η'^4. On ne changera donc pas sa valeur en remplaçant le vecteur $\vec{\eta}'$ par un vecteur $\vec{\zeta}'$ ayant les mêmes composantes contravariantes que $\vec{\eta}'$ pour $\alpha=i'$ et tel que $\zeta'^4=0$. Nous pouvons donc écrire

$$R_4^4=\nabla_\alpha\zeta'^\alpha, \qquad \text{avec} \quad \zeta'^{i'}=\gamma^{i'k'}\left(\frac{\partial_{k'}V'}{V'}-\frac{V'^2}{2}\varphi'_{l'}F'_{k'}{}^{l'}\right); \qquad \zeta'^4=0.$$

Considérons alors un tube de $\mathcal{R}_5$ qui soit limité par une hypersurface (S) engendrée non seulement par des lignes de courant mais encore par des lignes de temps. Soient Σ_e et $\Sigma_{e'}$ deux sections d'espace de $\mathcal{R}_5$ du champ extérieur, Σ_i et $\Sigma_{i'}$ deux sections d'espace de $\mathcal{R}_5$ du champ intérieur qui se raccordent avec les précédentes le long de la paroi (S) du tube. Soient D le domaine à quatre dimensions déterminé sur (S) par l'un ou l'autre groupe de ces sections d'espace de $\mathcal{R}_5$, V_e et V_i les hypervolumes limités respectivement par D, Σ_e, $\Sigma_{e'}$ et par D, Σ_i, $\Sigma_{i'}$.

Si l'on suppose qu'il y a raccordement le long de (S) des deux champs extérieur et intérieur considérés, on constate en se reportant

---

[1] γ^{44} est positif car c'est le quotient par γ (positif) du mineur de γ_{44} (également positif) dans le développement de γ.

à la condition de raccordement énoncée au paragraphe **25** du chapitre II, que, le long de (S), *les vecteurs* $\vec{\zeta}'$ *attachés aux deux champs coïncident,* puisque ce vecteur ne dépend que des potentiels et de leurs dérivées premières.

En appliquant l'extension du théorème de Gauss à V_i, nous aurons, le flux de $\vec{\zeta}'$ à travers Σ_i et $\Sigma_{i'}$ étant nul

$$\operatorname{flux}_D \vec{\zeta}' = \iiiint\!\!\!\int_{V_i} R_4^4 \sqrt{\gamma}\, dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4.$$

R_4^4 étant essentiellement négatif, ceci nous montre que le flux de $\vec{\zeta}'$ à travers D est lui aussi essentiellement négatif et ne peut en aucun cas se réduire à zéro.

Si à présent, nous supposons le champ extérieur régulier dans V_e, le même raisonnement appliqué à V_e donnerait

$$\operatorname{flux}_D \vec{\zeta}' = 0.$$

Il en résulte que l'intégrale $\iiiint\!\!\!\int R_4^4 \sqrt{\gamma}\, dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3 dx^4$ ne peut pas être calculée dans le cas du champ extérieur et que par suite le champ extérieur ne peut pas être supposé régulier dans V_e, ce qui établit la proposition (A_1).

Ainsi, dans notre théorie unitaire les deux propositions (A_1) et (B_1) sont toujours simultanément satisfaites dans le cas du champ unitaire stationnaire. Notre théorie possède donc exactement la même cohérence mathématique que la théorie relativiste de la gravitation.

III. — Les solutions partout régulières des équations de la théorie provisoire de l'Électromagnétisme dans le cas de champs stationnaires.

1. La proposition (B'_1).

35. Rappel des hypothèses. — Les champs gravitationnel et électromagnétique sont donnés dans l'espace-temps $\mathcal{R}_4$ par les dix potentiels de gravitation g_{ij} et les quatre composantes φ_i du potentiel-vecteur.

Ces quatorze potentiels de champ satisfont aux équations

$$
(13.1) \qquad \begin{cases} \ddot{S}_{ik} = -\chi\tau_{ik}, \\ \overline{\nabla}_j F^{ji} = 0. \end{cases}
$$

Les deux champs sont stationnaires (les g_{ij} et les φ_i sont indépendants de x^4).

Le comportement asymptotique de $\mathcal{R}_4$ est euclidien et le champ électromagnétique est nul à l'infini.

Les deux champs sont partout réguliers.

Nous nous proposons de démontrer que dans ces conditions, les deux champs se réduisent partout identiquement à zéro. Pour cela nous allons utiliser la représentation pentadimensionnelle de la théorie provisoire.

14. Traduction des hypothèses dans la théorie d'O. Klein. — Construisons, selon les indications des paragraphes **14** et **15** du chapitre II, l'espace de Riemann $\mathcal{R}_5$ défini par la métrique

$$d\sigma^2 = \gamma_{\lambda\mu}\, dx^\lambda\, dx^\mu,$$

où

$$\gamma_{00} = -V^2 = \frac{2\chi}{\beta^2} = \text{const.},$$

$$\gamma_{i0} = \frac{2\chi}{\beta}\varphi_i,$$

$$\gamma_{ij} = g_{ij} - 2\chi\varphi_i\varphi_j,$$

la nouvelle variable x^0 étant définie par $dx^0 = \beta\varphi_i\, dx^i$.

Cet espace $\mathcal{R}_5$ est cylindrique et $\mathcal{R}_4$ apparaît comme l'espace quotient de $\mathcal{R}_5$ par la relation d'équivalence $[L_0]$.

En nous reportant aux identités (12.9) du chapitre II, nous voyons que les quatorze potentiels de champ γ_{ij}, γ_{i0} satisfont au système suivant, qui s'identifie avec (13.1) puisque $V = \text{const}$.

$$
(14.1) \qquad T_{ik} = 0; \qquad T_{i0} = 0.
$$

Le $d\sigma^2$ de R_5 est stationnaire (les $\gamma_{\lambda\mu}$ sont indépendants de x^4).

On déduit des considérations des paragraphes **3** et **4** et en particulier des hypothèses de nature topologique faites sur $\mathcal{R}_5$, l'existence pour $\mathcal{R}_5$ d'un domaine à l'infini et le fait que $\mathcal{R}_5$ a un comportement asymptotique normal.

Enfin l'espace $\mathcal{R}_5$ est partout régulier.

15. Les équations $S_{\underline{4}\underline{4}} = 0$ et $S_4^4 = 0$. — La définition des quantités T_{ik} et T_{i0} :

$$T_{ik} = A_i^{\underline{i}} A_k^{\underline{k}} S_{\underline{i}\underline{k}},$$
$$T_{i0} = A_i^{\underline{i}} S_{\underline{i}\underline{0}},$$

nous montre que le système (14.1) peut être remplacé par le système équivalent

$$(15.1) \qquad S_{\underline{i}\underline{k}} = 0; \qquad S_{\underline{i}\underline{0}} = 0,$$

qui indique que les quatorze premières composantes du tenseur d'Einstein de $\mathcal{R}_5$ sur le repère orthonormé $\left(\vec{e}_{\underline{\alpha}}\right)$ de cet espace sont nulles. Nous utiliserons en particulier l'équation

$$(15.2) \qquad S_{\underline{4}\underline{4}} = 0.$$

Considérons d'autre part la composante S_4^4 du tenseur d'Einstein de $\mathcal{R}_5$ sur le repère naturel de cet espace; on a

$$S_4^4 = A_4^{\underline{\alpha}} A_{\underline{\beta}}^4 S_{\underline{\alpha}}^{\underline{\beta}} = A_4^{\underline{0}} A_{\underline{0}}^4 S_{\underline{0}}^{\underline{0}} + A_4^{\underline{0}} A_{\underline{i}}^4 S_{\underline{0}}^{\underline{i}} + A_4^{\underline{i}} A_{\underline{0}}^4 S_{\underline{i}}^{\underline{0}} + A_4^{\underline{i}} A_{\underline{k}}^4 S_{\underline{i}}^{\underline{k}}.$$

$A_{\underline{0}}^4$ étant nul, le système (15.1) entraîne

$$(15.3) \qquad S_4^4 = 0.$$

Évaluons à présent le scalaire R qui ici est différent de zéro [1] : par contraction $\underline{i} = \underline{k}$ des dix équations

$$S_{\underline{i}}^{\underline{k}} \equiv R_{\underline{i}}^{\underline{k}} - \frac{1}{2} \delta_{\underline{i}}^{\underline{k}} R = 0,$$

---

[1] C'est $\overline{R}$ qui est nul ici, ainsi que le montre la contraction $i = k$ des dix équations

$$\overline{S}_i^k = -\chi \tau_i^k \qquad \text{avec} \quad \sum_{i=k} g_i^k = 4 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=k} \tau_i^k = 0.$$

on obtient avec $\sum_{\underline{i}=\underline{k}} \delta_{\underline{i}}^{\underline{k}} = 4$:

$$\sum_{\underline{i}=\underline{k}} R_{\underline{i}}^{\underline{k}} - 2R = 0.$$

Or

$$R = \sum_{\underline{i}=\underline{k}} R_{\underline{i}}^{\underline{k}} + R_{\underline{0}}^{\underline{0}}.$$

On en déduit

$$R = -R_{\underline{0}}^{\underline{0}} = R_{\underline{0}\,\underline{0}},$$

soit, d'après la valeur (12.10) du chapitre II de $R_{\underline{0}\,\underline{0}}$, avec $V = \text{const.}$:

$$R = -\frac{\chi}{2} H^2.$$

Les équations (15.2) et (15.3) peuvent donc s'écrire

$$R_{\underline{4}\,\underline{4}} = -\frac{\chi}{4} H^2, \tag{15.4}$$

$$R_4^4 = -\frac{\chi}{4} H^2. \tag{15.5}$$

Nous pouvons reprendre ici sans modification les paragraphes **7**, **8** et **9** de ce chapitre. Ainsi les vecteurs $\vec{h'}$ et $\vec{k'}$ de l'espace $\mathcal{R}'_4$ étant définis par leurs composantes contravariantes sur le repère naturel de $\mathcal{R}'_4$ par

$$h'_{j'} = \partial_{j'} V' - \frac{V'^3}{2} \varphi'_{i'} F'_{j'}{}^{i'}.$$
$$k'_{j'} = \partial_{j'} V',$$

les équations (15.4) et (15.5) s'écriront

$$\nabla'_{j'} k'^{j'} - \frac{V'^3}{4} H'^2 = -\frac{\chi V'}{4} H^2, \tag{15.6}$$

$$\nabla'_{j'} h'^{j'} = -\frac{\chi V'}{4} H^2. \tag{15.7}$$

Le résultat d'Einstein-Pauli et sa démonstration restent valables sous la forme que nous leur avons donnée au paragraphe **9**, mais ici on sait dès le début que $m_{00} = 0$. Ici encore nous n'aurons besoin que du lemme.

16. Première partie de la démonstration. — Nous n'avons pas ici d'équation nous indiquant qu'une divergence de vecteur est nulle, mais l'égalité des seconds membres des équations (15.6) et (15.7) et le fait que la quantité $\varphi'_{i'} F'_{j'}{}^{i'}$ est du troisième ordre au moins en $\frac{1}{\rho}$ nous incite à considérer la différence $\vec{l'}$ des vecteurs $\vec{k'}$ et $\vec{h'}$. (15.6) et (15.7) donnent

$$\nabla'_{j'} l'^{j'} = \frac{V'^3}{4} H'^2. \tag{16.1}$$

Considérons le flux du vecteur $\vec{l'}$ à travers la surface Σ' d'une sphère géodésique de $\mathcal{R}'_4$ dont le « rayon » est arbitrairement grand :

$$\text{flux}_{\Sigma'} \vec{l'} = \iiiint_{\mathcal{V}'} \frac{V'^3}{4} H'^2 \sqrt{g'}\, dx^0\, dx^1\, dx^2\, dx^3.$$

$\vec{l'}$ étant du troisième ordre au moins en $\frac{1}{\rho}$, le flux de $\vec{l'}$ à travers Σ' tend vers zéro avec $\frac{1}{\rho}$ et l'on en déduit

$$H'^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad F'_{i'j'} = 0 \qquad \text{ou encore} \qquad \partial_{i'}\left(\frac{\gamma_{4j'}}{V'^2}\right) = \partial_{j'}\left(\frac{\gamma_{4i'}}{V'^2}\right).$$

On peut donc trouver une fonction $\theta(x^0, x^1, x^2, x^3)$ définie dans tout l'espace $\mathcal{R}'_4$ telle que

$$\gamma_{4i'} = V'^2\, \partial_{i'} \theta.$$

Effectuons le changement de variables

$$x^{i'} = \overset{\star}{x}{}^{i'}; \qquad x^4 = \overset{\star}{x}{}^4 - \theta\left(\overset{\star}{x}{}^0, \overset{\star}{x}{}^1, \overset{\star}{x}{}^2, \overset{\star}{x}{}^3\right),$$

qui fournit

$$\gamma_{\overset{\star}{i'}\overset{\star}{j'}} = \gamma_{i'j'} - \frac{1}{V'^2}\gamma_{4i'}\gamma_{4j'} \qquad \text{pour} \quad \overset{\star}{i'} = i', \qquad \overset{\star}{j'} = j';$$

$$\gamma_{\overset{\star}{4}\overset{\star}{i'}} = \gamma_{4i'} - V'^2\, \partial_{i'}\theta = 0 \qquad \text{pour} \quad \overset{\star}{i'} = i';$$

$$\gamma_{\overset{\star}{4}\overset{\star}{4}} = \gamma_{44} = V'^2.$$

Dans le système de coordonnées $\left(\overset{\star}{x}{}^{\lambda}\right)$, le $d\sigma^2$ de $\mathcal{R}_5$ est ainsi orthogonalisé sous la forme

$$d\sigma^2 = V'^2\left(d\overset{\star}{x}{}^4\right)^2 + \gamma_{\overset{\star}{i'}\overset{\star}{j'}}\, d\overset{\star}{x}{}^{i'}\, d\overset{\star}{x}{}^{j'}.$$

17. Deuxième partie de la démonstration. — Nous supposerons $\mathcal{R}_5$ rapporté au système $(\overset{\star}{x^\lambda})$ et nous supprimerons le signe $\star$. Revenons à l'espace $\mathcal{R}_4$ de métrique

$$ds^2 = g'_{IJ}\, dx^I\, dx^J + V'^2 (dx^4)^2,$$

$\vec{\varphi}$ est tel que $\varphi_4 = 0$ et l'on a $F_{4J} = 0$, si bien que H^2 se réduit à une quantité essentiellement positive.

Les deux vecteurs $\vec{h'}$ et $\vec{k'}$ sont identiques à cause de la nullité des $\varphi'_{\underline{i'}}$ et les deux équations (15.6) et (15.7) se réduisent à une seule

$$\frac{1}{V'} \Delta'_2 V' = -\frac{\chi}{4} H^2. \tag{17.1}$$

Nous allons exprimer cette équation en éléments appartenant à $\mathcal{R}_4$ et pour cela revenir pour un moment aux repères orthonormés.

En utilisant le repère orthonormé de $\mathcal{R}'_4$, nous avons

$$\Delta'_2 V' = \delta^{\underline{i'}\underline{l'}} \nabla_{\underline{l'}} (\partial_{\underline{i'}} V') = \delta^{\underline{i'}\underline{l'}} \left[\partial_{\underline{l'}} (\partial_{\underline{i'}} V') + \gamma_{\underline{l'}}{}^{\underline{k'}}{}_{\underline{k'}}\, \partial_{\underline{i'}} V' \right].$$

Or $\partial_{\underline{0}} V'$ est nul; en effet on a

$$\partial_{\underline{0}} V' = A^0_{\underline{0}}\, \partial_0 V' + A^i_{\underline{0}}\, \partial_i V',$$

mais $A^i_{\underline{0}} = 0$ et $\partial_0 V'$ est nul à cause de la cylindricité.

D'autre part, la formule (8.3) du chapitre II ([1]) nous donne

$$\gamma_{\underline{J}}{}^{\underline{0}}{}_{\underline{0}} = \frac{\partial_{\underline{J}} V}{V} = 0 \qquad \text{puisque V est constant.}$$

Ainsi $\Delta'_2 V'$ se réduit à

$$\Delta'_2 V' = \delta^{\underline{I}\underline{J}} \left[\partial_{\underline{J}} (\partial_{\underline{I}} V') + \gamma_{\underline{J}}{}^{\underline{K}}{}_{\underline{K}}\, \partial_{\underline{I}} V' \right]. \tag{17.2}$$

([1]) La formule (8.3) du chapitre II : $\gamma_{\underline{i}\underline{0}\underline{0}} = \frac{\partial_{\underline{i}} V}{V}$ était écrite ainsi avant le passage à la signature hyperbolique. La transformation effectuant ce passage laisse cette formule inchangée car elle devrait être écrite $\gamma_{\underline{i}}{}^{\underline{0}}{}_{\underline{0}} = \frac{\partial_{\underline{i}} V}{V}$. Il en est de même un peu plus loin pour $\gamma_{\underline{J}}{}^{\underline{4}}{}_{\underline{4}} = \frac{\partial_{\underline{J}} V'}{V'}$.

En utilisant le repère orthonormé de $\mathcal{R}_4$, nous évaluons $\overline{\Delta}_2 V'$:

$$\overline{\Delta}_2 V' = \delta^{\underline{i}\underline{j}} \overline{\nabla}_{\underline{j}}(\partial_{\underline{i}} V') = \delta^{\underline{i}\underline{j}}\left[\partial_{\underline{j}}(\partial_{\underline{i}} V) + \gamma_{\underline{j}}{}^{\underline{k}}{}_{\underline{k}}\, \partial_{\underline{i}} V'\right].$$

Or $\partial_{\underline{4}} V'$ est nul; la démonstration serait analogue à celle qui montre que $\partial_{\underline{0}} V'$ est nul, en faisant jouer au caractère stationnaire le rôle que jouait l'hypothèse de cylindricité. Le même processus nous permet d'écrire directement la formule suivante, transposée de (8.3) du chapitre II :

$$\gamma_{\underline{J}}{}^{\underline{4}}{}_{\underline{4}} = \frac{\partial_{\underline{J}} V'}{V'}.$$

Ainsi $\overline{\Delta}_2 V'$ se réduit à

$$\overline{\Delta}_2 V' = \delta^{\underline{I}\underline{J}}\left[\partial_{\underline{J}}(\partial_{\underline{I}} V') + \gamma_{\underline{J}}{}^{\underline{K}}{}_{\underline{K}}\, \partial_{\underline{I}} V' + \frac{\partial_{\underline{J}} V'\, \partial_{\underline{I}} V'}{V'}\right],$$

En comparant avec (17.2), on a

$$\Delta'_2 V' = \overline{\Delta}_2 V' - \delta^{\underline{I}\underline{J}} \frac{\partial_{\underline{J}} V'\, \partial_{\underline{I}} V'}{V'},$$

si bien que (17.1) s'écrit

$$\frac{1}{V'} \overline{\Delta}_2 V' - \delta^{\underline{I}\underline{J}} \frac{\partial_{\underline{J}} V'\, \partial_{\underline{I}} V'}{V'^2} = -\frac{\chi}{4} H^2$$

ou encore en remplaçant les indices $\underline{I}$ et $\underline{J}$ du second terme par $\underline{i}$ et $\underline{j}$, ce qui est sans importance puisque $\partial_{\underline{4}} V' = 0$:

$$\delta^{\underline{i}\underline{j}}\left[\frac{1}{V'} \overline{\nabla}_{\underline{j}}(\partial_{\underline{i}} V') - \frac{\partial_{\underline{i}} V'\, \partial_{\underline{j}} V'}{V'^2}\right] = -\frac{\chi}{4} H^2,$$

$$\delta^{\underline{i}\underline{j}} \overline{\nabla}_{\underline{j}}\left(\frac{\partial_{\underline{i}} V'}{V'}\right) = -\frac{\chi}{4} H^2.$$

Soit $\vec{m}$ le vecteur de $\mathcal{R}_4$ de composantes $\dfrac{\partial_{\underline{i}} V'}{V'}$ sur le repère orthonormé de cet espace; passons au repère naturel par multiplication par $\sum_i A^i_{\underline{i}} A^{\underline{i}}_i$: le vecteur $\vec{m}$ étant défini par ses composantes contravariantes sur le repère naturel de $\mathcal{R}_4$ par

$$m_i = \frac{\partial_i V'}{V'} \qquad (m_4 = m^4 = 0), \tag{17.3}$$

nous avons

(17.4) $$\overline{\nabla}_i m^i = -\frac{\chi}{4} \mathrm{H}^2.$$

On peut encore écrire cette équation sous une autre forme ; on a en effet en tenant compte des équations de Maxwell

$$\overline{\nabla}_j(\varphi_i \mathrm{F}^{ji}) = \overline{\nabla}_j \varphi_i \mathrm{F}^{ji} = \frac{1}{2}(\overline{\nabla}_j \varphi_i - \overline{\nabla}_i \varphi_j)\mathrm{F}^{ji} = \frac{1}{2}\mathrm{H}^2.$$

En définissant un vecteur $\vec{n}$ de $\mathcal{R}_4$ par

(17.5) $$n_j = \frac{\partial_j \mathrm{V}'}{\mathrm{V}'} - \frac{\chi}{2} \varphi_i \mathrm{F}_j{}^i \qquad (n_4 = n^4 = 0),$$

l'équation (17.4) peut s'écrire

(17.6) $$\overline{\nabla}_j n^j = 0.$$

Considérons alors une sphère géodésique Σ d'une variété $x^4 = \text{const.}$ de $\mathcal{R}_4$ et de « rayon » arbitrairement grand ; on a

$$\text{flux}_\Sigma \vec{n} = \iiint_{\mathcal{V}} \overline{\nabla}_j n^j \sqrt{-g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3,$$

$$\text{flux}_\Sigma \vec{m} = \iiint_{\mathcal{V}} -\frac{\chi}{4} \mathrm{H}^2 \sqrt{-g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3.$$

Le premier de ces flux est nul à cause de (17.6). r désignant $\sqrt{\sum_1 (x^1)^2}$, la différence entre les deux vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{m}$ est du troisième ordre au moins en $\frac{1}{r}$ et les deux flux sont équivalents à l'infini. On en déduit

$$\mathrm{H}^2 = 0.$$

L'équation (17.1) qui s'écrit alors $\Delta'_2 \mathrm{V}' = 0$ permet de conclure que V' est constant et la fin de la démonstration est exactement la même qu'au paragraphe **11** : une nouvelle orthogonalisation annule les coefficients γ_{01} et l'on se trouve ramené au cas d'un espace-temps extérieur (au sens habituel de la théorie de la Relativité générale), stationnaire et orthogonal, ce qui achève la démonstration de la proposition (B'_1).

La démonstration de cette proposition (B'_1) en théorie d'O. Klein apparaît plus complexe et moins harmonieuse que la démonstration de la proposition (B_1) dans notre théorie unitaire. Cela tient évidemment au fait que le nombre des équations ne cadre pas avec la représentation pentadimensionnelle. Le fait qu'il n'y a pas de quinzième équation dans la théorie d'O. Klein nous donne $R \neq 0$, ce qui nous a obligé à modifier la première partie de la démonstration mais, surtout, ne nous a pas permis de conclure à la constance de V' lorsque nous avons obtenu $H'^2 = 0$. La première partie de la démonstration règle la question des quatre quantités γ_{04}, γ_{14} ou, ce qui revient au même, φ_4 et g_{14}. Au début de la seconde partie, il nous a fallu modifier considérablement notre équation pour revenir à l'espace $\mathcal{R}_4$ et ce n'est qu'à ce moment que nous avons pu établir que V' était constant. Cette seconde partie de la démonstration règle la question des dix coefficients γ_{44}, γ_{0I} et γ_{IJ} ou, ce qui revient au même de g_{44}, φ_I et g_{IJ}.

2. La proposition (A_1).

18. Les équations du cas intérieur. — Les équations du cas intérieur en théorie d'O. Klein s'écriront

$$(18.1) \qquad \begin{cases} \bar{S}_{ik} = -\chi\tau_{ik} - \chi\bar{\rho}\bar{u}_i\bar{u}_k, \\ \bar{\nabla}_j F^j{}_i = -\bar{\mu}\bar{u}_i, \end{cases}$$

le scalaire $\bar{\rho}$, essentiellement positif, représentant la densité de matière, μ la densité de charge, $\bar{u}_i$ le vecteur-vitesse; ces trois éléments appartiennent naturellement à $\mathcal{R}_4$.

Or pour V constant, nous avons, d'après les formules (12.9) du chapitre II

$$T_{ik} \equiv \bar{S}_{ik} + \chi\tau_{ik},$$

$$T_{i0} \equiv \frac{\beta V}{2}\bar{\nabla}_j F^j{}_i,$$

si bien que les équations (18.1) peuvent s'écrire

$$(18.2) \qquad \begin{cases} T_{ik} = -\chi\bar{\rho}\bar{u}_i\bar{u}_k, \\ T_{i0} = -\dfrac{\beta V}{2}\mu\bar{u}_i. \end{cases}$$

Nous pouvons alors revenir au repère orthonormé et calculer les quatorze premières composantes du tenseur d'Einstein de $\mathcal{R}_5$ sur le repère orthonormé de cet espace par

$$S_{\underline{i}\,\underline{k}} = A^{i}_{\underline{i}} A^{k}_{\underline{k}} T_{ik},$$
$$S_{\underline{i}\,\underline{0}} = A^{i}_{\underline{i}} T_{i0},$$

si bien que le système (18.2) peut s'écrire sous la forme équivalente

$$(18.3)\qquad \begin{cases} S_{\underline{i}\,\underline{k}} = -\chi\bar{\rho}\,\bar{u}_{\underline{i}}\,\bar{u}_{\underline{k}}, \\ S_{\underline{i}\,\underline{0}} = -\dfrac{\beta V}{2}\mu\bar{u}_{\underline{i}}. \end{cases}$$

Évaluons encore le scalaire R; la contraction $\underline{i} = \underline{k}$ des dix premières équations (18.3) donne

$$\sum_{\underline{i}=\underline{k}} R^{\underline{k}}_{\underline{i}} - 2R = -\chi\bar{\rho}$$

et l'on a

$$R = \sum_{\underline{i}=\underline{k}} R^{\underline{k}}_{\underline{i}} + R^{\underline{0}}_{\underline{0}}.$$

On en déduit

$$R + R^{\underline{0}}_{\underline{0}} = \chi\bar{\rho} \qquad \text{ou} \qquad R = \chi\bar{\rho} + R_{\underline{0}\,\underline{0}},$$

d'où, puisque $R_{\underline{0}\,\underline{0}} = -\frac{\chi}{2}H^2$,

$$R = \chi\bar{\rho} - \frac{\chi}{2}H^2.$$

19. Expression de la composante S^4_4. — Calculons à présent la composante mixte S^4_4 du tenseur d'Einstein de $\mathcal{R}_5$ sur le repère naturel de cet espace; on a

$$S^4_4 = A^{\alpha}_{4} A^{4}_{\underline{\beta}} S^{\underline{\beta}}_{\underline{\alpha}}.$$

Puisque $A^4_{\underline{0}}$ est nul, cette formule se réduit à

$$S^4_4 = A^{\underline{i}}_4 A^4_{\underline{k}} S^{\underline{k}}_{\underline{i}} + A^{\underline{0}}_4 A^4_{\underline{k}} S^{\underline{k}}_{\underline{0}}.$$

Les $S^{\underline{k}}_{\underline{i}}$ et $S^{\underline{k}}_{\underline{0}}$ sont données par les équations (18.3) en y faisant passer les indices $\underline{k}$ en position covariante [1]; $A^{\underline{0}}_{4}$ vaut $-\beta V\varphi_4$. On obtient donc pour $\bar{S}^4_4$:

$$S^4_4 = -\chi\bar{\rho}A^{\underline{i}}_4 A^4_{\underline{k}}\bar{u}_{\underline{i}}\bar{u}^{\underline{k}} + \frac{\beta^2V^2}{2}\varphi_4\mu A^4_{\underline{k}}\bar{u}^{\underline{k}},$$

$$S^4_4 = -\chi\bar{\rho}\bar{u}_4\bar{u}^4 + \chi\mu\varphi_4\bar{u}^4.$$

En utilisant l'expression de R, on arrive à l'équation présentant le caractère scalaire dans les sections d'espace $x^4 =$ const. de $\mathcal{R}_5$:

$$R^4_4 = -\frac{\chi}{4}H^2 - \chi\bar{\rho}\left(\bar{u}^4\bar{u}_4 - \frac{1}{2}\right) + \chi\mu\varphi_4\bar{u}^4.$$

Le second terme seul ayant un signe déterminé, cette équation ne permet pas de démontrer la proposition (A_1).

On pourrait essayer de surmonter la difficulté due à la présence du terme $-\frac{\chi}{4}H^2$ par un procédé analogue à celui qui a été utilisé dans la première partie de la démonstration de la proposition (B'_1), c'est-à-dire en considérant l'équation

$$R_{\underline{4}\underline{4}} = -\frac{\chi}{4}H^2 - \chi\bar{\rho}\left[(\bar{u}_{\underline{4}})^2 - \frac{1}{2}\right].$$

Mais la difficulté due à la présence du troisième terme $\chi\mu\varphi_4\bar{u}_4$ subsistera de toute manière.

Il semble donc que, dans la théorie d'O. Klein, il soit impossible d'achever la démonstration de la proposition (A_1) dans toute sa généralité, c'est-à-dire sans faire d'hypothèses complémentaires sur le signe de la charge μ [2].

20. Conclusion. — La comparaison entre la théorie d'O. Klein et la théorie unitaire que nous avons étudiée dans ce travail est donc

---

(1) Il nous faut distinguer les indices en position haute ou basse en repère orthonormé à cause du fait déjà signalé que les composantes covariantes et contravariantes ne sont pas toujours identiques en signature hyperbolique.

(2) Lichnerowicz (*cf.* bibl. [39]) a démontré la proposition (A_1) en supposant que la charge a un signe déterminé.

en faveur de cette dernière. Elle donne du champ unitaire une représentation covariante par rapport aux changements de systèmes de référence permis dans l'espace à cinq dimensions et sa cohérence mathématique vient d'être nettement établie.

Il semble donc que l'introduction d'une théorie pentadimensionnelle doit admettre logiquement comme corollaire l'introduction d'une quinzième variable de champ.

BIBLIOGRAPHIE.

1. *Ouvrages généraux.*

[1] APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. V, Gauthier-Villars, 1933.

[2] BECKER, *Théorie des électrons*, Alcan, 1938.

[3] BERGMANN, *Introduction to the Theory of Relativity*, New-York, Prentice-Hall, 1948.

[4] BRILLOUIN, *Les tenseurs en Mécanique et en Élasticité*, Masson, 1938.

[5] E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, 1946.

[6] E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux*, Hermann, 1922.

[7] CHAZY, *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*, Gauthier-Villars, 1930.

[8] EISENHART, *Riemannian-Geometry*, Princeton University Press, 1926.

[9] EISENHART *Dynamical trajectories and geodesics* (*Ann. Math.*, t. **30**, 1929, p. 591).

[10] LICHNEROWICZ, *Algèbre linéaire*, Masson, 1947.

[11] H. WEYL, *Temps, espace, matière*, Blanchard, 1922.

2. *Sur les théories unitaires.*

[12] KALUZA, *Zum Unitätsproblem der Physik* (*Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, 1921, p. 966).

[13] O. KLEIN, *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie* (*Z. Physik*, t. **37**, 1926, p. 895).

[14] EYRAUD, *Les espaces métriques et les théories physico-géométriques* (*Thèse*, Chartres, Durand, 1926).

[15] L. DE BROGLIE, *L'Univers à cinq dimensions et la Mécanique ondulatoire* (*J. Phys.*, t. **8**, série VI, 1927, p. 65).

[16] DARRIEUS, *Sur une forme remarquable des équations de Maxwell-Lorentz dans l'Univers à cinq dimensions* (*J. Phys.*, t. **8**, série VI, 1927, p. 444).

[17] DE DONDER, *Bull. Acad. Roy. Belgique*, 5e série, t. **13**, 1927.

[18] ROSENFELD, *L'Univers à cinq dimensions et la Mécanique Ondulatoire* (*Bull. Acad. Roy. Belgique*, t. **13**, 1927, p. 304).

[19] EINSTEIN-MAYER, *Théorie unitaire de la gravitation et de l'électricité* (EINSTEIN, *Théorie de la Relativité*, trad. SOLOVINE, Hermann, 1933).

[20] PAULI et SOLOMON, *La théorie d'Einstein-Mayer et les équations de Dirac* (*J. Phys.*, t. **3**, série VII, 1932, p. 582).

[21] PAULI, *Uber die Formulierung der Naturgesetze mit fünf homogenen Koordinaten* (*Ann. Physik*, t. **18**, 1933, p. 305).

[22] O. VEBLEN, *Projektive Relativitätstheorie*, Berlin, J. Springer, 1933.

[23] EINSTEIN-BERGMANN, *On a generalisation of Kaluza's theory ofelect ricity* (*Ann. Math.*, t. **30**, 1938, p. 683).

[24] M. A. TONNELAT, *C. R. Acad. Sc.*, t. **222**, 1946, p. 1162.

[25] Y. FOURÈS, *C. R. Acad. Sc.*, t. **226**, 1948, p. 218.

[26] JORDAN, *Zur projektiven Relatvitätstheorie* (*Nachrichten d. Akad. d. Wiss, in Göttingen,* 1945, p. 74).

[27] JORDAN, *Erweiterung der projektiven Relativitätstheorie* (*Ann. Physik*, t. **1**, 1947, p. 219).

[28] JORDAN-MÜLLER, *Uber die Feldgleichungen der Gravitation bei variabler « Gravitationskonstante »* (*Z. Naturforschg*, t. **2***a*, 1947, p. 1-2).

[29] LUDWIG, *Der Zusammenhang zwischen den Variationsprinzipien der projektiven und der vierdimensionalen Relativitätstheorie* (*Z. Naturforschg*, t. **2***a*, 1947, p. 3-5).

[30] LUDWIG, *Skalares Materiefeld in der projektiven Relativitätstheorie mit variabler Gravitationsinvarianten* (*Z. Naturforschg*, t. **2***a*, 1947, p. 482-489).

[31] BERGMANN, *United theory with 15 field variables* (*Ann. Math.*, t. **49**, n° **1**, 1948, p. 255).

[32] JORDAN, *Fünfdimensionale Kosmologie* (*Astronomische Narichten*, **276** Band, nos **5**, **6**, 1948).

3. *Sur l'étude mathématique des équations.*

[33] E. CARTAN, *Sur les équations de la gravitation d'Einstein* (*J. Math.*, t. **1**, 1922, p. 141-203).

[34] G. DARMOIS, *Les équations de la gravitation einsteinienne* (*Mém. Sc. Math.*, fasc. **25**, 1927).

[35] DE DONDER, *Introduction à la gravifique einsteinienne* (*Mém. Sc. Math.*, fasc. **8**, 1927).

[36] DE DONDER, *Théorie des champs gravifiques* (*Mém. Sc. Math.*, fasc. **14**, 1925).

[37] EINSTEIN-PAULI, *On the non-existence of regular stationary solutions of relativistic field equations* (*Ann. Math.*, t. **44**, n° 2, 1943, p. 131).

[38] LICHNEROWICZ, *Sur certains problèmes globaux relatifs au système des équations d'Einstein* (Thèse, Hermann, 1939).

[39] LICHNEROWICZ, *Sur les équations relativistes de l'Électromagnétisme* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, (3), fasc. **4**).

[40] LICHNEROWICZ, *C. R. Acad. Sc.*, t. **222**, 1946, p. 432.

[41] RACINE, *On the most general static field in the relativity theory* (*J. Ind. Math. Soc.*, new series, vol. II, n° 2).

[42] STELLMACHER, *Zum Anfangswertproblem der Gravitationsgleichungen* (*Math. Ann.*, t. **115**, 1937, p. 136).

[43] Y. THIRY, *C. R. Acad. Sc.*, t. **224**, 1947, p. 529; t. **226**, 1948, p. 216; t. **226**, 1948, p. 1881.