JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ROGER GODEMENT

Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 30 (1951), p. 1-110.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1951_9_30__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires;

PAR ROGER GODEMENT.

INTRODUCTION.

> « Je tourne sans cesse dans un souterrain où la lumière n'est que sous-entendue. »
>
> (Paul ELUARD. *Les dessous d'une vie ou la Pyramide humaine.*)

Ce Mémoire a pour but d'exposer une partie des résultats obtenus par l'auteur depuis 1947 (¹) en ce qui concerne l'extension à des groupes généraux de la théorie des caractères, dont l'importance est bien connue dans les cas classiques. Il ne sera peut-être pas inutile de donner tout d'abord quelques indications sur les problèmes que pose cette théorie, ainsi que sur les méthodes par lesquelles on peut espérer les résoudre.

(¹) Les premiers résultats que nous avons obtenus ont été exposés dans deux Notes : *Analyse harmonique dans les groupes centraux* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 225, 1947, p. 19-21 et 221-223).

1. La notion de caractère. — Soient G un groupe compact, et $s \to T_s$ une représentation unitaire irréductible de G, s'effectuant dans un espace $\mathcal{H}$ de dimension finie. Comme on le sait, on appelle caractère de cette représentation la fonction

$$\chi(s) = \mathrm{Sp}(T_s)$$

[on désigne par le symbole Sp la trace normée, de telle sorte que l'on ait $\mathrm{Sp}(I) = 1$].

De toute évidence, cette fonction possède les propriétés suivantes :

a. elle est invariante par les automorphismes intérieurs de G (ce que nous exprimerons en disant que χ est une fonction *centrale*);

b. elle est continue et de type positif.

Naturellement, ces propriétés ne sont pas caractéristiques, puisqu'elles appartiennent aussi, par exemple, à toute combinaison linéaire à coefficients positifs de caractères; mais l'on sait que toute fonction possédant ces propriétés peut se développer en une série, uniformément convergente et à coefficients positifs, de caractères. Si donc on introduit l'ensemble convexe K formé par les fonctions continues, centrales, de type positif, prenant pour $x = e$ une valeur ≤ 1, on voit que les caractères de G peuvent encore être définis comme étant les *points extrémaux* non nuls de K.

Bien que la propriété précédente permette, comme on le verra, de généraliser d'une façon appréciable la théorie des caractères — et par exemple de l'étendre à tous les groupes discrets — son utilisation sur des groupes tels que le groupe de Lorentz soulève des difficultés considérables, pour la simple raison que, sur un tel groupe, il n'existe pas de fonction *continue*, centrale et de type positif autre que les fonctions constantes. On est donc conduit à chercher une autre propriété des caractères.

Pour cela, considérons la représentation $\{\mathcal{H}, T_s\}$ de G; soit $\mathbf{L}$ l'algèbre des fonctions continues sur le groupe compact G; on obtient une représentation unitaire irréductible de $\mathbf{L}$ si l'on associe à toute $f \in \mathbf{L}$ l'opérateur

$$T_f = \int T_s f(s)\, ds;$$

et l'on a

$$\mathrm{Sp}(T_f) = \int f(s)\, \chi(s)\, ds \qquad \text{pour toute } f \in \mathbf{L}.$$

Il suit de là que l'expression

$$\mu(f) = \int f(s)\, \chi(s)\, ds = \mathrm{Sp}(T_f)$$

est une *trace* sur l'algèbre $\mathbf{L}$, c'est-à-dire possède les propriétés fonctionnelles suivantes :

$$\mu(f \star g) = \mu(g \star f), \qquad \mu(\tilde{f} \star f) \geq 0.$$

Ceci étant, il est clair que les $f \in \mathbf{L}$ telles que $\mu(\tilde{f} \star f) = 0$ forment un idéal *bilatère* $\mathfrak{n}$, invariant par l'involution $\tilde{}$; si l'on désigne par $f \rightarrow \mathbf{f}$ l'application canonique de $\mathbf{L}$ sur l'algèbre quotient $\mathbf{L}/\mathfrak{n}$, l'expression

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \mu(\tilde{g} \star f)$$

est un produit scalaire sur cet espace, et l'on peut alors définir dans cet espace de Hilbert *deux* représentations unitaires de G; la première, que nous noterons $s \rightarrow U_s$, provient par passage au quotient des translations à gauche dans $\mathbf{L}$; la seconde, $s \rightarrow V_s$, provient des translations à droite. Il est clair que ces deux représentations sont permutables entre elles; d'autre part, si l'on introduit dans $\mathbf{L}/\mathfrak{n}$ l'involution S déduite, par passage au quotient, de l'involution $\tilde{}$, on voit que S transforme U_s en V_s.

On est ainsi conduit à introduire la notion générale ([2]) de *double représentation unitaire* d'un groupe; c'est l'objet $\{\mathfrak{L}, U_x, V_x, S\}$ constitué par un espace de Hilbert arbitraire $\mathfrak{L}$, deux représentations unitaires de G dans cet espace, et une involution S ([3]) dans $\mathfrak{L}$ qui échange ces deux représentations. Nous venons de voir que tout caractère d'un groupe compact G — et plus généralement toute trace continue sur l'algèbre $\mathbf{L}$ de ce groupe — permet de définir une double représentation unitaire de G; il est clair que, dans le cas d'un groupe unimodulaire quelconque G, les raisonnements précédents sont encore applicables toutes les fois que l'on désigne par $\mathbf{L}$ l'algèbre des fonctions continues à support compact définies sur G, et par μ une mesure de Radon centrale et de type positif sur G (c'est-à-dire, une mesure de Radon définissant une trace sur $\mathbf{L}$). Par exemple, si l'on prend pour μ la mesure ε [masse $+1$ placée à l'élément unité de G, et donnée par $\varepsilon(f) = f(e)$ pour $f \in \mathbf{L}$], le produit scalaire correspondant devient $\tilde{g} \star f(e)$, c'est-à-dire le produit scalaire au sens de l'espace L^2 construit sur la mesure de Haar; par conséquent, dans ce cas, on aboutit à la double représentation « régulière » de G, qui s'effectue de façon évidente dans l'espace L^2.

Si nous voulons maintenant généraliser la notion de caractère, il nous faut trouver un moyen simple de distinguer, parmi les doubles représentations unitaires d'un groupe compact G, celles qui sont définies par les caractères de G. Or si nous reprenons les constructions précédentes, nous voyons que la double représentation unitaire définie par le caractère χ d'une représentation irréduc-

---

([2]) Cette notion n'est pas sans présenter d'analogie avec celle de « H-système » définie par W. Ambrose (cf. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 65, 1949, p. 27-48).

([3]) S est une involution si l'on a

$$S(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = S\mathbf{x} + S\mathbf{y}, \qquad S(\lambda . S\mathbf{x}) = \bar{\lambda} . S\mathbf{x},$$
$$SS\mathbf{x} = \mathbf{x}, \qquad \langle S\mathbf{x}, S\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle.$$

Il serait plus correct de dire « anti-automorphisme involutif ».

tible $\{\mathcal{H}, T_s\}$ d'un groupe compact peut encore être réalisée comme suit : on considère l'algèbre formée par les T_f, c'est-à-dire, puisque cette algèbre est irréductible, l'algèbre $\mathbf{M}$ de *toutes* les matrices définies dans $\mathcal{H}$; sur cette algèbre, on introduit le produit scalaire

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Sp}(B^* A),$$

les opérateurs U_x, V_x et S sont alors définis par les relations

$$U_x(A) = T_x A, \qquad V_x(A) = A T_x^{-1}, \qquad S(A) = A^*.$$

Maintenant, puisque (d'après le théorème de Burnside) les T_x et leurs combinaisons linéaires constituent tout $\mathbf{M}$, et puisque $\mathbf{M}$ est une algèbre *simple*, on a la propriété suivante : *il n'existe aucun sous-espace vectoriel non trivial de* $\mathbf{M}$ *qui soit invariant par les* U_x *et les* V_x *à la fois.*

Une double représentation unitaire possédant cette propriété sera dite *irréductible*; il est facile de voir [ce sera du reste démontré au Chapitre I (§ VI) de ce Mémoire] que, sur un groupe compact, la propriété précédente appartient *seulement* aux caractères de G; par conséquent, nous avons le moyen de généraliser la notion de caractère ([4]) : *soient* G *un groupe localement compact unimodulaire,* $\mathbf{L}$ *l'algèbre des fonctions continues à support compact sur* G, μ *une mesure de Radon sur* G; *on dit que* μ *est un caractère de* G *si* $\mu(f)$ *est une trace sur l'algèbre* $\mathbf{L}$, *et si la double représentation unitaire de* G *définie par* μ *est irréductible.*

Bien entendu, alors que dans le cas des groupes compacts la notion d'irréductibilité est prise dans son sens purement algébrique — puisqu'il s'agit alors nécessairement d'espaces de dimension finie — il faut la comprendre, dans le cas général, au sens topologique utilisé dans la théorie des représentations unitaires de dimension infinie.

2. Classification des caractères. — Dans les groupes compacts, on peut chercher à classer les caractères suivant les dimensions des représentations irréductibles qui leur correspondent; ce problème ne présente, dans ce cas, aucune espèce d'intérêt. Mais il n'en va pas de même dans le cas général.

Soit en effet μ un caractère d'un groupe G, définissant une double représentation unitaire irréductible $\{\mathcal{H}, U_x, V_x, S\}$, en général de dimension infinie. Considérons les *anneaux d'opérateurs* $\mathbf{R}^s$ et $\mathbf{R}^d$ engendrés dans $\mathcal{H}$ par les U_x et les V_x respectivement : R^s est donc l'ensemble des combinaisons linéaires des U_x, et des limites *faibles* de ces combinaisons. Il est clair que ces anneaux

---

([4]) Il n'est naturellement pas *démontré* que la notion générale de caractère soit précisément celle que nous définissons ici : on ne pourra en être certain qu'une fois la théorie complètement établie !

permutent entre eux; en fait, on a une propriété beaucoup plus précise — *valable même si μ n'est pas un caractère* — à savoir que $\mathbf{R}^s$ (resp. $\mathbf{R}^d$) est exactement l'ensemble de tous les opérateurs qui permutent à $\mathbf{R}^d$ (resp. $\mathbf{R}^s$); par conséquent, l'anneau $\mathbf{R}^s \cap \mathbf{R}^d$ est *commutatif* — c'est à la fois le centre de $\mathbf{R}^s$ et de $\mathbf{R}^d$ — et c'est l'ensemble de tous les opérateurs qui permutent à la fois aux U_x et aux V_x. Il s'ensuit que les caractères sont distingués par la propriété suivante : pour que μ soit un caractère, il faut et il suffit que l'anneau $\mathbf{R}^s$ ait pour centre l'ensemble des scalaires, autrement dit, si l'on emploie la terminologie de F. J. Murray et J. von Neumann [5] que $\mathbf{R}^s$ soit un *facteur*.

Or, alors que tous les facteurs de dimension finie donnée sont isomorphes entre eux, il n'en est pas de même pour la dimension infinie, et l'on sait [5] que l'on peut répartir les facteurs en classes [6] au moyen des considérations suivantes.

Soit $\mathbf{R}$ un facteur dans un espace de Hilbert séparable. Soit $\mathbf{R}_p$ l'ensemble des opérateurs de projection contenus dans $\mathbf{R}$; on appelle *dimension relative* sur $\mathbf{R}$ toute fonction $\Delta(E)$ définie sur $\mathbf{R}_p$ et possédant les propriétés suivantes :

(i) $\Delta(E)$ *prend ses valeurs dans* $[0, +\infty]$; $\Delta(E) = 0$ *implique* $E = 0$;

(ii) $\Delta(E + F) = \Delta(E) + \Delta(F)$ *si* E *et* F *sont orthogonaux;*

(iii) *si* E *et* F *sont associés aux sous-espaces* $\mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{N}$, *la relation* $\Delta(E) = \Delta(F)$ *équivaut à l'existence dans* $\mathbf{R}$ *d'un opérateur partiellement isométrique qui applique isomorphiquement* $\mathfrak{M}$ *sur* $\mathfrak{N}$.

Comme l'ont montré F. J. Murray et J. von Neumann, il existe toujours une dimension relative, et une seule à un facteur constant près; on obtient alors la classification cherchée des facteurs en examinant les valeurs que peut prendre la dimension relative, convenablement normée, ce qui donne lieu aux cas suivants :

Cas (I_n) : $\Delta(E)$ prend les valeurs $0, 1, \ldots, n$ $(n \leq +\infty)$;
Cas (II_1) : $\Delta(E)$ prend toute valeur comprise entre 0 et 1;
Cas (II_∞) : $\Delta(E)$ prend toute valeur comprise entre 0 et $+\infty$ (y compris $+\infty$);
Cas (III_∞) : $\Delta(E)$ ne prend que les valeurs 0 et $+\infty$.

Tous ces cas se présentent effectivement; les facteurs (I_n) $(n < +\infty)$ et (II_1) sont dits *de classe finie*; ceux de classe (III_∞) sont dits *purement infinis*, ce sont évidemment les plus étranges!

Revenons maintenant à la théorie des caractères. Sur un groupe séparable, on peut les classer suivant la structure de la dimension relative associée au

---

[5] F. J. MURRAY et J. VON NEUMANN, *On rings of operators*, I (*Ann. of Math.*, t. 37, 1935, p. 116-229).

[6] Il n'est peut-être pas inutile de rappeler que l'appartenance à une même classe est une condition nécessaire—mais en général non suffisante—pour que deux facteurs soient isomorphes.

facteur $\mathbf{R}^s$ (noter que $\mathbf{R}^d$, se déduisant de $\mathbf{R}^s$ par l'involution S, appartient nécessairement à la même classe que $\mathbf{R}^s$). et nous donnerons au Chapitre II (§ I), une construction explicite de cette dimension relative. Il est clair que le premier problème qui se pose dans cette voie est le suivant :

Problème I. — *A quelles classes peuvent appartenir les caractères d'un groupe unimodulaire?*

Nous avons les résultats suivants :

a. les cas (I_n) $(n \leqq +\infty)$, (II_1) et (II_∞) se présentent effectivement;
b. le cas (III_∞) ne se présente jamais [7].

Un autre problème évidemment fondamental est le suivant :

Problème II. — *Si μ est une « mesure-caractère », existe-t-il une fonction $\chi(s)$, sommable sur tout compact pour la mesure de Haar dx, telle que l'on ait*

$$\mu(f) = \int f(s)\chi(s)\,ds \qquad \textit{pour toute } f \in \mathbf{L}\,?$$

Voici nos résultats à ce sujet :

a. tout caractère de classe *finie* est de la forme $\chi(s)\,ds$ où la fonction χ est *continue,* et réciproquement;
b. il existe des caractères de classe (I_∞) qui sont de la forme $\chi(s)\,ds$ (où la fonction χ n'est pas continue); mais il existe aussi des caractères de classe (I_∞) qu'on ne peut pas mettre sous cette forme.

La nécessité de considérer les caractères comme étant *au moins* des *mesures,* et non pas des *fonctions*, est donc établie.

Bien entendu, le problème II n'est qu'un cas particulier du suivant :

Problème II'. — *Existe-t-il une relation entre la forme de la mesure-caractère μ et la classe à laquelle elle appartient?*

3. Quelques autres problèmes. — Si l'on veut poursuivre l'analogie avec les groupes abéliens ou compacts, une foule d'autres problèmes se posent — auxquels nous ne pouvons donner que des réponses partielles — et même, dans certains cas, pas de réponse du tout :

Problème III. — *Existe-t-il une correspondance biunivoque entre les caractères d'un groupe et les classes de représentation unitaires irréductibles de ce groupe?*

---

(7) Tout au moins sur les groupes *unimodulaires*; nous ignorons ce qui peut se passer dans les autres cas.

Nous donnerons à ce problème une réponse affirmative dans le cas (I_∞); mais il ne serait pas invraisemblable que la réponse générale fût négative.

Problème IV. — *Les caractères possèdent-ils une équation fonctionnelle analogue à celle qu'on connaît dans les groupes abéliens :*

$$\chi(xy) = \chi(x)\,\chi(y)$$

et dans les groupes compacts :

$$\int \chi(uxu^{-1}y)\,du = \chi(x)\,\chi(y)\,?$$

Nous donnerons une réponse affirmative à ce problème en ce qui concerne les caractères de classe *finie;* dans les autres cas, nous ne savons rien.

Problème V. — *Les caractères sont-ils distingués par une propriété de nature extrémale ?*

La réponse est affirmative, ici encore, dans le cas des caractères de classe finie. L'existence d'une propriété extrémale dans le cas général est évidente; mais nous ne savons pas si cette propriété caractérise les caractères de classe quelconque.

Problème VI. — *Est-il possible d'introduire sur l'ensemble des caractères d'un groupe, convenablement normés, une topologie naturelle et localement compacte ?*

La réponse est affirmative en ce qui concerne les caractères de classe $(\mathrm{I}_n)\,(n < +\infty)$, c'est-à-dire, en ce qui concerne les caractères associés aux représentations unitaires irréductibles de dimension *finie* de G. Il est d'autre part visible qu'il en est de même dans certains groupes particuliers, le groupe de Lorentz par exemple.

Problème VII. — *Un groupe localement compact unimodulaire possède-t-il toujours un système complet de caractères ?*

Nous résoudrons par l'affirmative ce problème dans les groupes possédant la propriété suivante : tout voisinage de l'unité contient un voisinage invariant par les automorphismes intérieurs. Cette catégorie de groupes, outre les groupes abéliens et les groupes compacts, contient tous les groupes discrets (entre autres). De plus, tous les caractères d'un tel groupe sont de classe finie. En ce qui concerne le cas général, il serait tout à fait extraordinaire que la réponse au problème VII fût négative.

Problème VIII. — *Peut-on décomposer toute mesure centrale et de type positif* — par exemple la mesure ε, qui correspond à la double représentation régulière — *en une somme continue de caractères ?*

La réponse est affirmative dans les groupes dont on a parlé à propos du problème VII. Dans le groupe de Lorentz — et dans d'autres : *voir* le Chapitre II (§ III) — il en est de même d'après les résultats de I. Gelfand et M. Neumark. Dans le cas général, le problème est sans aucun doute étroitement lié au problème analogue résolu par J. von Neumann dans la Partie IV de *Reduction theory* (8); mais l'on ne peut pas utiliser directement les procédés et les résultats de cet auteur, parce que ces procédés — parfaitement adaptés à une étude *en soi* des anneaux d'opérateurs — laissent de côté les circonstances topologiques du problème. D'autre part, le problème spécifique de la théorie des groupes est de décomposer une trace qui, *a priori*, est définie sur une algèbre autoadjointe *non* faiblement fermée (à savoir **L**); or cette algèbre, comme c'est déjà visible sur le cas abélien, possède beaucoup moins de « caractères » que l'anneau d'opérateurs qu'elle engendre. Même si l'on peut résoudre le problème VIII au moyen de la théorie des anneaux d'opérateurs — et l'on verra que c'est effectivement ce qui se produit dans certains cas — il importe de ne considérer cette théorie que comme un instrument, et d'énoncer les résultats définitifs uniquement au moyen de l'algèbre **L**.

Enfin, voici le problème le plus fondamental peut-être, en tous cas le plus difficile, et sur lequel nous n'avons que des idées purement sentimentales que nous nous garderons bien d'expliciter ici :

Problème IX. — *Existe-t-il des relations entre :*

a. la répartition des caractères d'un groupe en classes;
b. la structure de ce groupe ?

Ce problème se décompose en deux :

1° peut-on caractériser par des relations structurales les groupes dont tous les caractères sont de classe finie [ou de classe (I_∞), ou de classe (II_∞)]?

2° si oui, tout autre groupe peut-il être décomposé, d'une façon ou d'une autre, en groupes « purs », c'est-à-dire en groupes appartenant à l'une des trois catégories que l'on vient d'énoncer ?

Nous verrons par exemple que si un groupe G possède un système fondamental de voisinages de l'unité invariants par les automorphismes intérieurs, alors tous ses caractères sont de classe finie; cette propriété admet-elle une réciproque ?

4. L'opération. $\natural$ — Les principaux problèmes de la théorie des caractères étant énoncés, il nous faut dire maintenant quelques mots des méthodes par

(8) *On rings of operators. Reduction theory* (*Ann. of Math.*, t. 50, 1949, p. 401-485).

lesquelles on peut les résoudre ; nous nous bornerons à examiner le problème VIII, dont les relations avec la théorie des anneaux d'opérateurs sont évidentes.

Considérons deux algèbres **A** et **Z** sur le corps complexe (par exemple), la seconde étant supposée en outre commutative. Nous appellerons *application* $\natural$ de **A** dans **Z** toute application $x \to x^\natural$ possédant les propriétés fonctionnelles suivantes :

(I) $x \to x^\natural$ est une application linéaire;

(II) on a $(xy)^\natural = (yx)^\natural$ quels que soient x, y;

(III) on a $(xy)^\natural = x^\natural . y^\natural$ dès que x est dans le centre de **A**.

Lorsque **A** et **Z** sont munies d'une involution $x \to x^\star$, il faut en outre supposer que l'application $\natural$ en question est compatible avec cette involution.

En fait, deux cas *au moins* sont importants, d'une part celui où **Z** est le *centre de* **A**, d'autre part celui où **Z** est le *corps complexe*.

Montrons maintenant en quoi cette notion peut être utilisée dans la théorie des caractères. Soit G un groupe compact, et posons, pour toute fonction continue sur G,

$$f^\natural(x) = \int f(uxu^{-1})\, du,$$

alors on obtient une *application* $\natural$ *de l'algèbre* **L** *sur son centre*, et cette opération possède, comme on le voit immédiatement, la propriété suivante : pour qu'une forme linéaire continue $\sigma(f)$ soit une *trace* sur **L**, il faut et il suffit qu'elle vérifie la condition

$$\sigma(f) = \sigma(f^\natural) \qquad \text{pour toute } f \in \mathbf{L}.$$

Il s'ensuit que l'on peut identifier les traces continues sur l'algèbre *non commutative* **L** aux formes linéaires positives définies sur l'algèbre *commutative* $\mathbf{L}^\natural$, centre de **L**. D'autre part, considérons un caractère χ de G, et associons-lui la trace

$$\chi(f) = \int f(s)\, \chi(s)\, ds,$$

nous allons montrer qu'alors $f \to \chi(f)$ *est une application* $\natural$ *de* **L** *sur le corps complexe*. Tout revient évidemment à vérifier l'axiome (III), c'est-à-dire, puisque l'opération $\natural$ définie plus haut dans **L** se réduit visiblement à l'identité sur le centre de **L**, à vérifier que l'on a

$$(a) \qquad \chi(f^\natural \star g) = \chi(f)\, \chi(g) \qquad \text{quels que soient } f, g \in \mathbf{L};$$

or c'est là une propriété *équivalente à l'équation fonctionnelle des caractères;* en effet, on a d'une part

$$\begin{aligned}\chi(f^\natural \star g) &= \int f^\natural \star g(x)\chi(x)\,dx = \iint \chi(xy) f^\natural(x) g(y)\,dx\,dy \\ &= \iiint \chi(xy) f(uxu^{-1}) g(y)\,dx\,dy\,du \\ &= \iiint \chi(uxu^{-1}y) f(x) g(y)\,dx\,dy\,du,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(b) \qquad \chi(f^\natural \star g) = \iint f(x) g(y)\,dx\,dy \int \chi(uxu^{-1}y)\,du;$$

d'autre part, on a

$$\chi(f)\chi(g) = \int f(x)\chi(x)\,dx \int g(y)\chi(y)\,dy,$$

c'est-à-dire

$$(c) \qquad \chi(f)\chi(g) = \iint f(x) g(y)\,dx\,dy\,\chi(x)\chi(y),$$

il est clair que la comparaison de (b) et (c) prouve notre assertion.

Il est maintenant nécessaire de donner de l'équation fonctionnelle (a) une autre interprétation, à savoir : *les caractères de* G *sont les traces définies sur* $\mathbf{L}$ *qui, sur le centre de* $\mathbf{L}$, *sont multiplicatives*. La nécessité de cette condition est évidente sur (a) si l'on se souvient du fait que l'opération $\natural$ se réduit à l'identité sur le centre de $\mathbf{L}$; cette condition est aussi suffisante, car si une trace χ la vérifie on aura, pour $f, g \in \mathbf{L}$:

$$\chi(f^\natural \star g) = \chi((f^\natural \star g)^\natural) = \chi(f^\natural \star g^\natural) = \chi(f^\natural)\,\chi(g^\natural) = \chi(f)\,\chi(g).$$

En définitive, on obtient comme suit les caractères de G : *on choisit un homomorphisme $f \to \chi(f)$ de l'algèbre commutative $\mathbf{L}^\natural$ sur le corps complexe, et on le prolonge à $\mathbf{L}$ au moyen de la relation*

$$\chi(f) = \chi(f^\natural).$$

Il résulte de tout cela que, dans les groupes compacts, la résolution du problème VIII est ramenée à celle d'un problème analogue relative à l'algèbre COMMUTATIVE $\mathbf{L}^\natural$.

Après ces explications, il est clair que tous nos efforts doivent tendre, dans le cas général, à construire des opérations $\natural$ se rapprochant au maximum de celle qu'on définit dans l'algèbre $\mathbf{L}$ d'un groupe compact; c'est ce qui nous a préoccupé pendant plus de deux ans, et nous n'avons pas encore la réponse générale à ce problème, bien que cette réponse soit en vue. Ce problème se heurte en effet à des difficultés tout à fait sérieuses dès qu'on tente de l'aborder.

Tout d'abord, il arrive souvent que l'algèbre **L** d'un groupe non compact *ne possède pas de centre* : on voit mal alors ce que signifie l'axiome (III) ! D'autre part, même dans le cas où ce centre existe, et où l'on peut définir dans **L** une opération $\natural$ non triviale — c'est le cas par exemple de tous les groupes discrets [9] — la propriété fondamentale $\sigma(f)=\sigma(f^\natural)$ n'est exacte que pour des traces tout à fait particulières, en sorte qu'une utilisation de cette opération $\natural$ apparaît comme très problématique. Il faut donc trouver un moyen de tourner ces difficultés.

Ce moyen, nous croyons — et le démontrerons *en partie* dans le présent travail — qu'il se trouve dans la théorie des anneaux d'opérateurs. Il semble bien en effet que, si la méthode de l'opération $\natural$ est impuissante quand on l'applique à la seule algèbre **L**, c'est parce que cette algèbre est « trop petite » : c'est par exemple pour cette raison que son centre est nul dans beaucoup de cas. On est donc conduit, si l'on veut par exemple étudier la double représentation « régulière » d'un groupe G, à remplacer **L** par l'anneau d'opérateurs engendré dans L^2 par les translations à gauche, soit $\mathbf{R}^s$. Ce qui est certain, c'est que si le centre de $\mathbf{R}^s$ est réduit aux scalaires, alors la mesure ε est un caractère de G (*cf.* n° **2**), auquel cas le problème VIII est résolu — plus précisément, ce problème ne se pose pas. Il y a donc quelques chances pour que les caractères qui interviennent dans la décomposition de la mesure ε proviennent des homomorphismes du centre de $\mathbf{R}^s$ sur le corps complexe (la correspondance entre un caractère de G et un tel homomorphisme n'étant du reste pas biunivoque en général).

C'est en effet ce qui se produit lorsque l'anneau $\mathbf{R}^s$ est « de classe finie » au sens de J. Dixmier [10], cas qui se présente *toujours* lorsque le groupe G est abélien, compact, ou *discret*; dans ce cas, on peut définir une application $\natural$ de l'anneau $\mathbf{R}^s$ sur son centre, application qui possède *toutes* les propriétés de celle qu'on a définie plus haut dans l'algèbre **L** d'un groupe compact, et qui permet du reste de démontrer des propriétés algébriques tout à fait remarquables de ces anneaux. Grâce à cela, nous sommes en mesure de résoudre le problème VIII (ainsi que les problèmes I, II, IV, V et VII) dans les groupes dont il a été question à propos du problème VII.

---

(9) Soit G un groupe discret; pour un $x\in G$, désignons par G_x l'ensemble des conjugués uxu^{-1} de x et par $n(x)$ ($\leqq +\infty$) le nombre d'éléments de G_x; l'opération $\natural$ dans **L** est alors définie comme suit : on pose

$$f^\natural(x)=0 \quad \text{si } n(x)=+\infty; \qquad f^\natural(x)=n(x)^{-1}\sum_{y\in G_x} f(y) \quad \text{si } n(x)<+\infty.$$

(10) J. Dixmier, Les anneaux d'opérateurs de classe finie (*Annales Éc. Norm. Sup.*, t. 66, 1949, p. 209-261).

En ce qui concerne la possibilité de définir une opération $\natural$ satisfaisante dans des anneaux qui ne sont pas de classe finie ([10bis]), il n'est pas du tout invraisemblable qu'on puisse résoudre ce problème, au moins dans le cas des anneaux associés aux groupes unimodulaires, car ces anneaux, selon toutes probabilités (*voir* le résultat *b* relatif au problème I) ne possèdent pas de composantes « purement infinies ». Considérons en effet un anneau d'opérateurs $\mathbf{R}$, et formons, avec J. von Neumann ([8]), la décomposition de $\mathbf{R}$ en une somme continue de facteurs, soit $\mathbf{R} \approx \mathbf{R}(\lambda)$; pour chaque λ, choisissons une dimension relative Δ_λ, variant de façon mesurable avec λ; si l'on désigne par $\mathbf{R}_0(\lambda)$ l'ensemble des opérateurs de rang fini ([11]) dans $\mathbf{R}(\lambda)$, on sait qu'on peut prolonger la fonction Δ_λ en une trace Tr_λ définie sur $\mathbf{R}_0(\lambda)$. Maintenant, désignons par $\mathbf{R}_0$ l'ensemble des $A \in \mathbf{R}$ dont les composantes $A(\lambda)$ possèdent les propriétés suivantes :

a. $\quad A(\lambda) \in \mathbf{R}_0(\lambda)$ presque partout;

b. $\quad \text{vrai max}\, |\mathrm{Tr}_\lambda(A(\lambda))| < +\infty$;

pour un tel A, il est raisonnable d'admettre que la fonction $\mathrm{Tr}_\lambda(A(\lambda))$ est mesurable, de sorte qu'il existe alors dans $\mathbf{R}$ un opérateur $A^\natural$ bien déterminé dont la λ-composante soit précisément le *scalaire* $\mathrm{Tr}_\lambda(A(\lambda))$. Il est facile de voir que $\mathbf{R}_0$ est un idéal bilatère de $\mathbf{R}$, et que, si les opérations dont on vient de parler sont justifiées (ce que nous ignorons pour le moment), l'application $\natural$ qu'on vient de définir dans $\mathbf{R}_0$ vérifie les axiomes (I), (II) et (III); il y a aussi de fortes chances, en raison des résultats de J. von Neumann sur les « weight functions », que toute trace faiblement continue σ définie sur $\mathbf{R}_0$ provienne, par la relation $\sigma(A) = f(A^\natural)$, d'une forme linéaire positive définie sur l'ensemble des $A^\natural$; enfin, si l'anneau $\mathbf{R}$ ne possède pas de composante purement infinie, on peut aussi espérer que l'idéal $\mathbf{R}_0$ soit « suffisamment grand », c'est-à-dire soit partout dense dans $\mathbf{R}$ au sens de la topologie faible.

Les considérations qu'on vient d'exposer sont naturellement tout à fait heuristiques, et nous n'en avons parlé que dans le but de susciter une étude approfondie des anneaux d'opérateurs du point de vue qui nous occupe; il est clair en effet que la solution des problèmes de la théorie des caractères exige la combinaison de procédés algébriques simples et de méthodes topologiques puissantes, et que

---

([10bis]) J. Dixmier, *Applications $\natural$ dans les anneaux d'opérateur* (*C. R. Ac. Sc.*, Paris, t. **230**, 1950, p. 607-608).

([11]) J. von Neumann, *On rings of operators*, III (*Ann. of Math.*, t. **41**, 1940, p. 94-161); pour les applications à la théorie des caractères, il faudrait du reste considérer des opérateurs un peu plus généraux que ceux de rang fini [par exemple, dans le cas (I_∞) les opérateurs d'Hilbert-Schmidt]; étant donné le caractère tout à fait hypothétique des considérations que nous exposons ici il est tout à fait inutile de tenir compte de distinctions aussi subtiles!

ces méthodes, malgré les résultats admirables que l'Algèbre topologique doit par exemple à J. von Neumann et I. Gelfand, sont loin d'être pleinement découvertes à l'heure actuelle. Si le présent Mémoire pouvait contribuer à encourager des recherches sur ces questions, les efforts de l'auteur, et cette Introduction d'une longueur quelque peu exagérée, n'auraient pas été vains, — même si, comme il faut l'espérer, les résultats précis que nous exposons dans ce Mémoire sont destinés à disparaître dans une théorie générale et complète.

L'auteur exprime tous ses remerciements à H. Cartan, qui est à l'origine de la notion de double représentation unitaire ([12]), et à J. Dixmier, dont les observations ont permis d'améliorer et de corriger ce Mémoire sur de nombreux points.

Nancy, Octobre 1949.

NOTATIONS.

a. Les *espaces vectoriels* sont désignés par des lettres telles que $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}$, etc.; les *éléments* de ces espaces par $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, ..., $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, etc.; les *opérateurs linéaires* par A, B, ..., T, U, V, etc.

b. Les *algèbres* sont notées **A**, **L**, **R**, **M**, etc.; les éléments de ces algèbres sont désignés par f, g, ... ou A, B, etc. (la notation f est réservée aux fonctions, la notation A aux opérateurs); il arrivera fréquemment qu'on ait à considérer une application linéaire d'une algèbre **A** dans un espace vectoriel $\mathcal{H}$; on notera alors $\mathbf{f}$ l'image par cette application de l'élément f de **A** — pour éviter des confusions, on emploiera aussi la notation $\mathbf{f}(\chi)$ lorsque l'application et l'espace vectoriel en question dépendront d'un paramètre χ.

c. On désigne par G un groupe localement compact unimodulaire; par x, y, s, t, etc. les éléments de G (e désignant l'élément unité); **L** désignera l'algèbre des fonctions continues complexes à support ([13]) compact définies sur G, munie des opérations habituelles :

$$f \star g(x) = \int f(xy^{-1})\, g(y)\, dy, \qquad \tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})};$$

([12]) La notion de double représentation unitaire pour les algèbres est utilisée implicitement par F. J. Murray et J. von Neumann; voir *On rings of operators*, II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 41, 1937, p. 208-248, en particulier Chap. IV); *On rings of operators*, III (Chap. I).

([13]) Le support d'une fonction est le plus petit ensemble *fermé* en dehors duquel cette fonction est nulle.

des lettres telles que μ, ν, etc. désigneront des *mesures de Radon* de signe quelconque définies sur G : une telle mesure est, par définition ([14]), une forme linéaire définie sur $\mathbf{L}$ et qui est continue, au sens de la topologie de la convergence uniforme, sur chaque sous-espace de $\mathbf{L}$ formé des fonctions nulles en dehors d'un compact fixe, par ailleurs arbitraire. Une mesure μ est dite *de type positif* si elle vérifie

$$\int \tilde{f} \star f(x)\, d\mu(x) \geqq 0,$$

et *centrale* si elle vérifie

$$\int f \star g(x)\, d\mu(x) = \int g \star f(x)\, d\mu(x) \qquad \text{quels que soient } f,\ g \in \mathbf{L}.$$

On supposera que le lecteur est familiarisé avec les résultats fondamentaux de la théorie des représentations unitaires des algèbres et des groupes, tels qu'ils sont exposés par exemple dans les deux Mémoires suivants de l'auteur :

Les fonctions de type positif et la théorie des groupes (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 63, 1948, p. 1-84); Mémoire cité dans la suite : FTP.

Sur la théorie des représentations unitaires (à paraître aux *Annals of Mathematics*, janvier 1951); Mémoire cité : RU.

L'expression *anneau d'opérateurs* est prise dans toute la suite au sens de J. von Neumann (*voir* la définition dans RU, Chap. IV, § I); on suppose le lecteur au courant des principaux résultats de cette théorie, tels qu'ils sont exposés dans les Mémoires de F. J. Murray et J. von Neumann, et dans l'article ([10]) de J. Dixmier; on a pris soin de toujours énoncer clairement les théorèmes qu'on utilise, ce qui est d'ailleurs beaucoup plus facile que de les démontrer.

En ce qui concerne la théorie des caractères dans les groupes abéliens et les groupes compacts, *voir* :

A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* (*Actualités scientifiques et industrielles*, Paris, 1940);

([14]) Cette définition est naturellement équivalente à celle qu'on donne habituellement (combinaison linéaire de mesures positives), mais elle est plus commode pour notre objet.

D. A. Raikov, *Harmonic analysis on commutative groups with the Haar measure and theory of characters* (*Trav. Inst. Math. Stekloff*, t. 14, 1945);

H. Cartan et R. Godement, *Analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 64, 1947, p. 79-99);

R. Godement, *L'analyse harmonique dans les groupes non abéliens* (*Colloques internationaux du C. N. R. S., Analyse harmonique*, Paris, 1949).

CHAPITRE I.

DOUBLES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES. CARACTÈRES DE CLASSE FINIE.

I. — Doubles représentations unitaires.

1. Définition et exemples. — Définition 1. — *Soit* G *un groupe localement compact; on appelle double représentation unitaire* (d. r. u.) *de* G *l'objet* $\{\mathcal{H}, U_s, V_s, S\}$ *formé par :*

a. un espace de Hilbert $\mathcal{H}$;

b. deux représentations unitaires continues $s \rightarrow U_s$ *et* $s \rightarrow V_s$ *de* G *dans* $\mathcal{H}$, *vérifiant*

$$U_x V_y = V_y U_x \qquad \text{quels que soient } x, y \in G; \tag{1}$$

c. une involution S *de* $\mathcal{H}$, *telle que l'on ait*

$$V_x = S U_x S \qquad \text{quel que soit } x \in G \tag{2}$$

Exemple 1. — Soit L^2 l'espace des fonctions de carré sommable pour la mesure de Haar invariante à gauche dx; posons [15]

$$d(xa) = \rho(a)\,dx \tag{3}$$

---

[15] Précisons que dans toute la suite, on suppose G unimodulaire.

[$\rho(a)=1$ si G est unimodulaire]; alors on peut définir une d. r. u. de G dans L^2 comme suit :

$$U_s f(x) = f(s^{-1}x); \tag{4}$$

$$V_s f(x) = \rho^{\frac{1}{2}}(s) f(xs); \tag{5}$$

$$S f(x) = \rho^{-\frac{1}{2}}(x) \overline{f(x^{-1})}. \tag{6}$$

Il faudrait naturellement vérifier que les conditions de la définition 1 sont bien remplies, ce qui est immédiat.

On vient ainsi de définir la d. r. u. *régulière* de G.

Exemple 2. — Considérons l'algèbre $\mathbf{L}$ des fonctions continues à support compact sur G. Disons qu'une mesure de Radon μ définie sur G est *centrale* si elle vérifie

$$\int f\star g(x)\,d\mu(x) = \int g\star f(x)\,d\mu(x) \qquad \text{pour } f, g \in \mathbf{L}, \tag{7}$$

et qu'elle est *de type positif* si l'on a

$$\int \tilde{f}\star f(x)\,d\mu(x) \geqq 0 \qquad \text{pour toute } f\in \mathbf{L}; \tag{8}$$

on va montrer que *toute mesure centrale et de type positif permet de définir une d. r. u. de* G.

En effet, soit $\mathfrak{n}(\mu)$ l'ensemble des $f\in\mathbf{L}$ qui vérifient $\int \tilde{f}\star f\,d\mu = 0$; d'après (8) c'est un idéal à gauche, et d'après (7) il est invariant par l'involution $f\to\tilde{f}$, donc c'est un *idéal bilatère* de $\mathbf{L}$. Comme $\int f\,d\mu = \mu(f)$ est une forme linéaire sur $\mathbf{L}$ qui est continue (au sens de la convergence uniforme) sur le sous-espace formé des f qui sont nulles en dehors d'un compact fixe, on voit immédiatement que l'idéal bilatère $\mathfrak{n}(\mu)$ est invariant par les translations à gauche et à droite de G.

Considérons alors l'algèbre quotient $\mathbf{L}(\mu) = \mathbf{L}/\mathfrak{n}(\mu)$ et soit $f\to \mathbf{f}(\mu)$ l'application canonique de $\mathbf{L}$ sur celle-ci; il est clair que l'expression

$$\langle \mathbf{f}(\mu), \mathbf{g}(\mu)\rangle = \mu(\tilde{g}\star f) \tag{9}$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{L}(\mu)$, d'où, en complétant, un espace de

Hilbert $\mathcal{H}(\mu)$ dans lequel $\mathbf{L}(\mu)$ est partout dense. Comme $\mathfrak{n}(\mu)$ est stable par l'opération $\tilde{}$, on peut définir dans $\mathbf{L}(\mu)$ —et donc, par prolongement, dans $\mathcal{H}(\mu)$— une involution S :

$$(10) \qquad \mathrm{S}\,\mathbf{f}(\mu) = \tilde{\mathbf{f}}(\mu) \qquad \text{pour } f \in \mathbf{L}.$$

Considérons d'autre part l'opération qui consiste à passer d'un $f \in \mathbf{L}$ à sa translatée à gauche [16] $\varepsilon_s \star f$; elle conserve $\mathfrak{n}(\mu)$ comme on l'a dit, et permet donc de définir dans $\mathbf{L}(\mu)$ un opérateur $\mathrm{U}_s(\mu)$; en vertu de l'identité

$$(11) \qquad (\varepsilon_s \star f)^{\sim} \star (\varepsilon_s \star f) = \tilde{f} \star f,$$

les $\mathrm{U}_s(\mu)$ sont isométriques, donc prolongeables à $\mathcal{H}(\mu)$: il est évident qu'on obtient ainsi une représentation unitaire continue de G dans $\mathcal{H}(\mu)$.

Enfin, la mesure μ, étant centrale, est invariante par les automorphismes intérieurs de G (et réciproquement); par conséquent, les translations à droite de G laissent fixe le produit scalaire dans $\mathbf{L}(\mu)$: elles permettent donc de définir dans cet espace, et donc aussi dans $\mathcal{H}(\mu)$, une seconde représentation unitaire continue de G, par la formule

$$(12) \qquad \mathrm{V}_s(\mu)\,\mathbf{f}(\mu) = \mathbf{g}(\mu), \qquad \text{où} \quad g = f \star \varepsilon_{s^{-1}}.$$

Il est évident que les conditions (1) et (2) de la définition 1 sont bien remplies : nous obtenons donc ce que nous nommerons la *d. r. u. de* G *définie par la mesure* (centrale et de type positif) μ.

Si $\mu = \varepsilon$ (masse $+1$ en e), on retrouve la d. r. u. régulière.

Exemple 3. — Reprenons l'exemple 2, et supposons que la mesure μ soit définie au moyen d'une *densité continue* par rapport à la mesure

---

[16] ε_s désigne la mesure formée par une masse $+1$ au point $s \in \mathrm{G}$; les produits de composition d'une mesure μ et d'une fonction f sont les fonctions

$$\mu \star f(x) = \int f(y^{-1}x)\, d\mu(y) \qquad \text{et} \qquad f \star \mu(x) = \int f(xy^{-1})\, d\mu(y).$$

Voir FTP, p. 9-12.

de Haar ds; ceci veut dire qu'il existe une fonction continue φ sur G telle que l'on ait

$$\mu(f) = \int f(s)\,\varphi(s)\,ds \qquad \text{pour toute } f \in \mathbf{L}. \tag{13}$$

Il est clair qu'alors la fonction φ est de type positif — donc bornée — et invariante par les automorphismes intérieurs de G : réciproquement, une fonction continue possédant ces deux propriétés permet de définir une mesure centrale et de type positif.

Ceci étant, appliquons à μ les constructions décrites ci-dessus; si nous ne tenons pas compte du fait que φ est centrale, nous obtenons la représentation unitaire $\{\mathcal{H}(\varphi),\, U_s(\varphi)\}$ de G définie par φ; du fait que φ est continue, l'application $\mathbf{f}(\varphi) \to \int f(s)\,\varphi(s)\,ds$ est, comme on le sait, une forme linéaire *continue* ([17]) sur le sous-espace $\mathbf{L}(\varphi)$ de $\mathcal{H}(\varphi)$; d'où un élément $\mathbf{u} \in \mathcal{H}(\varphi)$ bien déterminé tel que l'on ait

$$\int f(s)\,\varphi(s)\,ds = \langle \mathbf{f}(\varphi),\, \mathbf{u} \rangle \qquad \text{pour toute } f \in \mathbf{L}; \tag{14}$$

introduisons maintenant les *opérateurs de composition*

$$U_f(\varphi) = \int U_s(\varphi)\,f(s)\,ds, \qquad V_f(\varphi) = \int V_s(\varphi)\,f(s^{-1})\,ds \tag{15}$$

définis par les éléments de $\mathbf{L}$; comme il est facile de le voir — et du reste connu — on a

$$U_f(\varphi)\,\mathbf{g}(\varphi) = \mathbf{f} \star \mathbf{g}(\varphi) \qquad \text{pour } f,\, g \in \mathbf{L}; \tag{16}$$

([17]) *Démonstration.* — On considère l'algèbre involutive formée par les mesures de Radon bornées sur G; l'expression $\int \varphi(x)\,d\mu(x)$ est une forme linéaire positive sur cette algèbre [FTP, p. 19, équat. (I.12)], d'où, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la relation

$$\left| \int f(x)\,\varphi(x)\,dx \right|^2 \leqq \varphi(e) \int \tilde{f} \star f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(e).\langle \mathbf{f}(\varphi),\, \mathbf{f}(\varphi) \rangle,$$

qui démontre notre assertion [on assimile toujours une $f \in \mathbf{L}$ à la mesure $f(x)\,dx$].

combinant ceci avec (14) et (9), il vient

$$(17)\qquad \langle \mathbf{f}(\varphi),\, U_g(\varphi)\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{f}(\varphi),\, \mathbf{g}(\varphi) \rangle \qquad \text{pour } f,\, g \in \mathbf{L},$$

d'où

$$(18)\qquad \mathbf{g}(\varphi) = U_g(\varphi)\mathbf{u} \qquad \text{pour toute } g \in \mathbf{L}.$$

Dans ces conditions, (14) s'écrit

$$(19)\qquad \int f(s)\,\varphi(s)\,ds = \int \langle U_s(\varphi)\mathbf{u},\, \mathbf{u} \rangle f(s)\,ds,$$

ce qui, les fonctions considérées étant toutes continues, prouve

$$(20)\qquad \varphi(s) = \langle U_s(\varphi)\mathbf{u},\, \mathbf{u} \rangle;$$

ce résultat n'a bien entendu rien d'original [18].

Maintenant, considérons les opérateurs S et $V_s(\varphi)$; de (15) résulte [on supprime (φ) pour simplifier les notations]

$$(21)\qquad SU_fS = \int SU_xS.\overline{f(x)}\,dx = \int V_x.\overline{f(x)}\,dx = \int V_x.\tilde{f}(x^{-1})\,dx,$$

c'est-à-dire

$$(22)\qquad SU_fS = V_{\tilde{f}} \qquad \text{pour toute } f \in \mathbf{L}.$$

Ceci étant, nous avons tout d'abord, en raison du fait que les U_f permutent aux V_g :

$$(23)\qquad V_gU_f\mathbf{u} = V_g\mathbf{f}(\varphi) = U_fV_g\mathbf{u};$$

mais il est évident que l'on a

$$(24)\qquad V_g\mathbf{f}(\varphi) = U_f\mathbf{g}(\varphi) = \mathbf{h}(\varphi), \qquad \text{où} \quad h = f \star g;$$

donc il vient

$$(25)\qquad U_fV_g\mathbf{u} = V_g\mathbf{f}(\varphi) = U_f\mathbf{g}(\varphi);$$

$f \in \mathbf{L}$ étant arbitraire, il s'ensuit que

$$(26)\qquad V_g\mathbf{u} = \mathbf{g}(\varphi),$$

ce qui complète (18); d'autre part, on a

$$(27)\qquad V_fS\mathbf{u} = SU_{\tilde{f}}S.S\mathbf{u} = SU_{\tilde{f}}\mathbf{u} = S\tilde{\mathbf{f}}(\varphi) = \mathbf{f}(\varphi) = V_f\mathbf{u};$$

---

(18) I. Gelfand et D. Raikov, *Irreducible unitary representations of arbitrary locally bicompact groups* (*Mat. Sb.*, t. **13**, 1943); FTP (p. 21, th. **2**).

$f \in \mathbf{L}$ étant arbitraire, il s'ensuit que

$$\text{(28)} \qquad \mathrm{S}\mathbf{u} = \mathbf{u}.$$

En conclusion, dans le cas où μ est définie par une fonction continue φ, nous voyons qu'on peut trouver un élément $\mathbf{u} \in \mathcal{H}(\varphi)$ possédant les propriétés suivantes :

a. $$\mathrm{S}\mathbf{u} = \mathbf{u};$$

b. $$\mathrm{U}_f(\varphi)\mathbf{u} = \mathrm{V}_f(\varphi)\mathbf{u} = \mathbf{f}(\varphi) \qquad \text{pour toute } f \in \mathbf{L};$$

c. $$\varphi(s) = \langle \mathrm{U}_s(\varphi)\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathrm{V}_s(\varphi)\mathbf{u} \rangle.$$

Nous dirons que $\mathbf{u}$ est l'*élément générateur* de la d. r. u. définie par φ; on notera que l'on peut remplacer la propriété *b* par la suivante :

b'. $$\mathrm{U}_s(\varphi)\mathrm{V}_s(\varphi)\mathbf{u} = \mathbf{u} \qquad \text{pour tout } s \in \mathrm{G};$$

il est essentiel d'autre part d'observer que les $\mathrm{U}_s(\varphi)\mathbf{u}$ soustendent l'espace $\mathcal{H}$ (fait qui ne repose du reste pas sur l'invariance de φ par les automorphismes intérieurs de G : c'est ce qui se passe pour toute fonction continue de type positif).

Exemple 4. — Considérons, sur le groupe produit $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$, une fonction $\Phi(s, t)$ continue, de type positif, vérifiant

$$\text{(29)} \qquad \Phi(s, t) = \Phi(t^{-1}, s^{-1}) = \overline{\Phi(t, s)};$$

sur l'espace $\mathbf{L}$ relatif au groupe $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$, introduisons le produit scalaire habituel :

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle = \iiiint \Phi(x^{-1}z, y^{-1}t)\, \mathrm{F}(x, y)\, \overline{\mathrm{G}(z, t)}\, dx\, dy\, dz\, dt;$$

alors on obtient une double représentation unitaire de G en considérant les opérateurs

$$\mathrm{F}(x, y) \to \mathrm{F}(s^{-1}x, y); \qquad \mathrm{F}(x, y) \to \mathrm{F}(x, s^{-1}y); \qquad \mathrm{F}(x, y) \to \overline{\mathrm{F}(y, x)}.$$

Il existe plusieurs procédés pour fabriquer des fonctions telles que Φ; par exemple, on prend sur G une fonction φ de type positif, et l'on pose

$$\Phi(x, y) = \varphi(x)\, \overline{\varphi(y)};$$

ou encore, on prend une fonction χ, continue, centrale et de type positif, et l'on pose

$$\Phi(x, y) = \chi(xy^{-1}).$$

Il serait peut-être intéressant d'étudier de près cet exemple; dans ce travail, nous n'utiliserons que les exemples 2 et 3.

2. OPÉRATEURS DE COMPOSITION ASSOCIÉS A UNE D. R. U. — Soit $\{\mathcal{H}, U_s, V_s, S\}$ une d. r. u. de G; à toute $f \in \mathbf{L}$ on peut alors associer dans $\mathcal{H}$ deux opérateurs continus, comme on l'a déjà fait dans l'exemple 3, à savoir

$$U_f = \int U_s . f(s)\, ds, \qquad V_f = \int V_s . f(s^{-1})\, ds. \tag{30}$$

Ces opérateurs possèdent de toute évidence les propriétés suivantes :

a. $f \to U_f$ est une représentation unitaire « gauche » de l'algèbre $\mathbf{L}$ dans $\mathcal{H}$, c'est-à-dire qu'on a

$$U_{f+g} = U_f + U_g, \qquad U_{f\star g} = U_f U_g, \qquad U_{\tilde{f}} = U_f^\star; \tag{31}$$

b. $f \to V_f$ est une représentation unitaire « droite » de $\mathbf{L}$:

$$U_{f+g} = V_f + V_g, \qquad V_{f\star g} = V_g V_f, \qquad V_{\tilde{f}} = V_f^\star; \tag{32}$$

c. ces deux représentations sont permutables entre elles :

$$U_f V_g = V_g U_f \qquad \text{quelles que soient } f,\ g \in \mathbf{L}; \tag{33}$$

d. l'involution S les échange :

$$S . U_f . S = V_{\tilde{f}} = V_f^\star. \tag{34}$$

Autrement dit, on peut dire que $\{\mathcal{H}, U_f, V_f, S\}$ est une double représentation unitaire de l'algèbre $\mathbf{L}$, en un sens évident.

Il est évident d'autre part (ceci est du reste valable pour toute représentation unitaire de G) que, pour qu'un opérateur soit permutable aux U_s (resp. V_s), il faut et il suffit qu'il soit permutable aux U_f (resp. V_f); en d'autres termes, l'*anneau d'opérateurs* [19] *engendré*

---

[19] Pour cette notion *voir*, outre les travaux de J. von Neumann, notre Mémoire RU (Chap. IV, § 1), où l'on trouvera toutes les propriétés utilisées dans le présent paragraphe.

par les U_s (resp. V_s) *est identique à l'anneau d'opérateurs engendré par les* U_f (resp. V_f). Si l'on note $\mathbf{R}^s$ (resp. $\mathbf{R}^d$) cet anneau, il est clair que tout élément du premier permute à tout élément du second, autrement dit, que l'on a

$$\mathbf{R}^s \subset (\mathbf{R}^d)', \qquad \mathbf{R}^d \subset (\mathbf{R}^s)'; \tag{35}$$

il n'est pas moins clair que l'application $A \to SAS$ transforme $\mathbf{R}^s$ en R^d.

En général, l'algèbre autoadjointe constituée par les opérateurs $U_f (f \in \mathbf{L})$ ne contient pas l'opérateur unité. Mais elle permet de l'approcher; d'une façon précise, lorsque la mesure $f(x)\,dx$ converge vaguement [20] vers la mesure ε, f restant nulle en dehors d'un compact fixe, l'opérateur U_f converge vers 1 au sens de la topologie *forte* des opérateurs (c'est-à-dire, pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$, $U_f \mathbf{x}$ converge vers $\mathbf{x}$). Cette propriété est bien connue [21].

Nous allons maintenant voir que, si la d. r. u. considérée est définie par une mesure μ centrale et de type positif, on peut améliorer considérablement la relation (35).

3. Relation entre les anneaux $\mathbf{R}^s(\mu)$ et $\mathbf{R}^d(\mu)$. — Nous allons donc dans ce numéro démontrer ceci [22] :

Théorème 1. — *Soit* $\{\mathcal{H}, U_s, V_s, S\}$ *la d. r. u. de* G *définie par une mesure* μ *centrale et de type positif; soient* $\mathbf{R}^s(\mu)$ *et* $\mathbf{R}^d(\mu)$ *les anneaux d'opérateurs engendrés dans* $\mathcal{H}$ *par les* U_s *et* V_s *respectivement; alors on a*

$$\mathbf{R}^s(\mu) = (\mathbf{R}^d(\mu))', \qquad \mathbf{R}^d(\mu) = (\mathbf{R}^s(\mu))'. \tag{36}$$

Autrement dit, il s'agit de montrer que $\mathbf{R}^s$ est exactement l'ensemble de tous les opérateurs qui permutent aux V_s. Puisque l'on a (35), tout revient à montrer l'inégalité opposée, c'est-à-dire, que

---

(20) FTP, p. 6.

(21) FTP, p. 18, prop. 1.

(22) Dans le cas de la d. r. u. *régulière* d'un groupe *discret*, ce résultat est dû à F. J. Murray et J. von Neumann [*On rings of operators*, IV (*Ann. of Math.*, t. 44, 1943, p. 716-808; *voir* Chap. V)].

tout opérateur permutable aux V_s est dans $\mathbf{R}^s$. Nous allons le faire en plusieurs étapes.

Rappelons tout d'abord que l'on a défini une application canonique $f \rightarrow \mathbf{f}(\mu)$ de $\mathbf{L}$ sur un sous-espace partout dense de $\mathcal{H}(\mu) = \mathcal{H}$. Dans tout ce qui suit, nous emploierons, au lieu de $\mathbf{f}(\mu)$, la notation simplifiée $\mathbf{f}$.

Lemme 1. — *Pour f, $g \in \mathbf{L}$ on a*

$$U_f \mathbf{g} = V_g \mathbf{f} = \mathbf{f} \star \mathbf{g}. \tag{37}$$

[U_f et V_g sont définis par (30); au lieu de $U_f \mathbf{g}$, il faudrait pour être précis écrire $U_f \mathbf{g}(\mu)$: *cf.* la remarque précédant le lemme].

Montrons par exemple que $U_f \mathbf{g} = \mathbf{f} \star \mathbf{g}$; ceci veut dire que pour toute $h \in \mathbf{L}$ on a

$$\langle U_f \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle = \langle \mathbf{f} \star \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle, \tag{38}$$

autrement dit, d'après (30) et la définition du produit scalaire, que

$$\int \mu(\tilde{h} \star \varepsilon_s \star g) f(s)\, ds = \mu(\tilde{h} \star f \star g); \tag{39}$$

mais pour f, $g \in \mathbf{L}$ on a

$$f \star g = \int \varepsilon_s \star g . f(s)\, ds, \tag{40}$$

le second membre étant une intégrale « forte » dans l'espace $\mathbf{L}$ muni de la topologie de la convergence uniforme; d'où (39).

Le lemme 1 conduit à introduire la notion suivante ([23]) :

Définition 2. — *On dit qu'un élément $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ est borné à droite (resp. à gauche) s'il existe dans $\mathcal{H}$ un opérateur continu $V_{\mathbf{x}}$ (resp. $U_{\mathbf{x}}$) tel que l'on ait*

$$V_{\mathbf{x}} \mathbf{f} = U_f \mathbf{x} \quad \text{pour toute } f \in \mathbf{L} \tag{41}$$

[*resp.*

$$U_{\mathbf{x}} \mathbf{f} = V_f \mathbf{x} \quad \text{pour toute } f \in \mathbf{L}]; \tag{42}$$

on dit que $\mathbf{x}$ est borné s'il est borné à droite et borné à gauche.

([23]) Dans le cas de la d. r. u. régulière d'un groupe abélien, les éléments « bornés » de L^2 sont ceux dont la transformée de Fourier est essentiellement bornée au sens ordinaire relativement à la mesure de Haar sur le groupe dual de G.

Il est clair d'après le lemme 1 que tout $\mathbf{x}$ de la forme $\mathbf{f}$ ($f \in \mathbf{L}$) est borné, et qu'on a alors $U_{\mathbf{x}} = U_f$, $V_{\mathbf{x}} = V_f$. Noter d'autre part que (41) ou (42) détermine parfaitement l'opérateur $V_{\mathbf{x}}$ ou $U_{\mathbf{x}}$. Notre but est maintenant de montrer que les trois notions définies à l'instant sont *identiques*.

LEMME 2. — *Si un* $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ *est borné à droite, il en est de même de* $S\mathbf{x}$, *et l'on a*

$$V_{S\mathbf{x}} = V_{\mathbf{x}}^{\star}. \tag{43}$$

En effet, pour f, $g \in \mathbf{L}$ on a

$$\langle V_{\mathbf{x}}\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \langle U_f\mathbf{x}, \mathbf{g}\rangle = \langle \mathbf{x}, U_{\tilde{f}}\mathbf{g}\rangle = \langle \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{f}} \star \mathbf{g}\rangle = \langle S(S\mathbf{x}), S(\tilde{\mathbf{g}} \star \mathbf{f})\rangle \tag{44}$$

et puisque S est une involution vérifiant d'une manière générale $\langle S\mathbf{x}, S\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle$, il vient

$$\langle V_{\mathbf{x}}\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \langle \tilde{\mathbf{g}} \star \mathbf{f}, S\mathbf{x}\rangle = \langle U_g^{\star}\mathbf{f}, S\mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{f}, U_g S\mathbf{x}\rangle; \tag{45}$$

les $f \in \mathbf{L}$ étant partout denses dans $\mathcal{H}$, il s'ensuit que l'on a

$$U_g S\mathbf{x} = V_{\mathbf{x}}^{\star}\mathbf{g} \qquad \text{pour toute } g \in \mathbf{L}, \tag{46}$$

ce qui démontre le lemme.

LEMME 3. — *Tout* $\mathbf{x}$ *borné à droite est borné à gauche, et l'on a*

$$V_{S\mathbf{x}} = SU_{\mathbf{x}}S. \tag{47}$$

Supposons en effet $\mathbf{x}$ borné à gauche par exemple. Pour f, $g \in \mathbf{L}$ on a

$$\begin{aligned} \langle SU_{\mathbf{x}}S\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle &= \langle S\mathbf{g}, S^2U_{\mathbf{x}}S\mathbf{f}\rangle = \langle S\mathbf{g}, U_{\mathbf{x}}S\mathbf{f}\rangle = \langle S\mathbf{g}, U_{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{f}}\rangle \\ &= \langle S\mathbf{g}, V_{\tilde{f}}\mathbf{x}\rangle = \langle S\mathbf{g}, V_f^{\star}\mathbf{x}\rangle = \langle V_f\tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{x}\rangle \\ &= \langle \tilde{\mathbf{g}} \star \mathbf{f}, \mathbf{x}\rangle = \langle S\mathbf{x}, S(\tilde{\mathbf{g}} \star \mathbf{f})\rangle = \langle S\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{f}} \star \mathbf{g}\rangle \\ &= \langle S\mathbf{x}, U_{\tilde{f}}^{\star}\mathbf{g}\rangle = \langle U_f S\mathbf{x}, \mathbf{g}\rangle \end{aligned} \tag{48}$$

et comme g est arbitraire, il vient

$$SU_{\mathbf{x}}S\mathbf{f} = U_f S\mathbf{x} \qquad \text{pour toute } f \in \mathbf{L}; \tag{49}$$

ceci prouve que $S\mathbf{x}$ (donc aussi $\mathbf{x}$: lemme 2) est borné à droite et que

$$V_{S\mathbf{x}} = SU_{\mathbf{x}}S, \tag{50}$$

d'où le lemme.

On peut donc maintenant se contenter de parler d'éléments bornés de $\mathcal{H}$, sans préciser davantage.

Lemme 4. — *Pour tout élément borné* $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$, *l'opérateur* $V_{\mathbf{x}}$ *est permutable aux* $U_s (s \in G)$, *c'est-à-dire appartient à l'anneau* $(\mathbf{R}^s)'$; *dans cet anneau, les* $V_{\mathbf{x}}$ *forment un idéal bilatère.*

Tout d'abord, pour f, $g \in \mathbf{L}$ on a

$$V_{\mathbf{x}} U_f \mathbf{g} = V_{\mathbf{x}} (\mathbf{f} \star \mathbf{g}) = U_{f \star g} \mathbf{x} = U_f U_g \mathbf{x} = U_f V_{\mathbf{x}} \mathbf{g}, \tag{51}$$

d'où la permutabilité de $V_{\mathbf{x}}$ aux U_f, et donc aux $U_s (s \in G)$; on a donc bien $V_{\mathbf{x}} \in (\mathbf{R}^s)'$.

Il est clair que dans cet anneau les $V_{\mathbf{x}}$ forment un sous-espace vectoriel; pour montrer que c'est un idéal à gauche, prenons un opérateur A permutable aux U_f; il vient alors

$$A V_{\mathbf{x}} \mathbf{f} = A U_f \mathbf{x} = U_f A \mathbf{x}, \tag{52}$$

ce qui montre que l'élément $A\mathbf{x}$ est borné et qu'on a

$$A V_{\mathbf{x}} = V_{A\mathbf{x}}; \tag{53}$$

on a donc bien un idéal à gauche; c'est aussi un idéal à droite, car on a

$$V_{\mathbf{x}} A = (A^{\star} V_{\mathbf{x}}^{\star})^{\star} = (A^{\star} V_{S\mathbf{x}})^{\star} = (V_{A^{\star} S\mathbf{x}})^{\star} = V_{SA^{\star} S\mathbf{x}}, \tag{54}$$

ce qui démontre le lemme.

Lemme 5. — *Tout opérateur permutable aux* U_s *est limite forte d'opérateurs de la forme* $V_{\mathbf{x}}$, *et réciproquement.*

En effet, pour un tel opérateur A, on voit d'après (53) que, pour $f \in \mathbf{L}$, l'opérateur AV_f est de la forme $V_{\mathbf{x}}$ (avec $\mathbf{x} = A\mathbf{f}$), et comme on peut faire converger fortement V_f vers 1, le lemme est démontré (sauf la réciproque, qui est triviale).

Lemme 6. — *Si* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *sont deux éléments bornés de* $\mathcal{H}$, *on a*

$$U_{\mathbf{x}} V_{\mathbf{y}} = V_{\mathbf{y}} U_{\mathbf{x}}. \tag{55}$$

En effet, pour $f \in \mathbf{L}$ on a

$$U_{\mathbf{x}} V_{\mathbf{y}} \mathbf{f} = U_{\mathbf{x}} U_f \mathbf{y}, \qquad V_{\mathbf{y}} U_{\mathbf{x}} \mathbf{f} = V_{\mathbf{y}} V_f \mathbf{x}; \tag{56}$$

il faut donc montrer que pour toute $f \in \mathbf{L}$ on a

$$(57) \qquad U_{\mathbf{x}} U_f \mathbf{y} = V_{\mathbf{y}} V_f \mathbf{x};$$

or d'après (54) on a

$$(58) \qquad V_{\mathbf{y}} V_f = V_{SV_f^* S\mathbf{y}} = V_{U_f \mathbf{y}};$$

si donc on introduit l'élément borné $\mathbf{z} = U_f \mathbf{y}$, tout revient à prouver que l'on a

$$(59) \qquad U_{\mathbf{x}} \mathbf{z} = V_{\mathbf{z}} \mathbf{x}$$

lorsque $\mathbf{x}$ et $\mathbf{z}$ sont bornés [cette formule généralise (37)].

Or pour $g \in \mathbf{L}$ on a

$$(60) \qquad \begin{aligned} \langle U_{\mathbf{x}} \mathbf{z}, \mathbf{g} \rangle &= \langle \mathbf{z}, U_{\mathbf{x}}^* \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{z}, U_{S\mathbf{x}} \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{z}, V_g S\mathbf{x} \rangle \\ &= \langle V_g^* \mathbf{z}, S\mathbf{x} \rangle = \langle SU_g S\mathbf{z}, S\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, U_g S\mathbf{z} \rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, V_{S\mathbf{z}} \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{x}, V_{\mathbf{z}}^* \mathbf{g} \rangle = \langle V_{\mathbf{z}} \mathbf{x}, \mathbf{g} \rangle, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

Démonstration du théorème 1. — Soit A un opérateur permutable aux U_s : il faut montrer qu'il appartient à l'anneau $\mathbf{R}^d$ engendré par les V_s, ou (ce qui revient au même) par les V_f; d'après le lemme 5, on peut supposer que $A = V_{\mathbf{x}}$; d'après le lemme 6, A permute alors aux $U_{\mathbf{y}}$, donc aussi à leurs limites fortes, donc, d'après l'analogue du lemme 5 pour $(\mathbf{R}^d)'$, à tout opérateur permutable aux V_s; par suite, A appartient à l'anneau engendré par les V_s, et le théorème 1 est démontré.

Remarque. — Dans le cas où la d. r. u. considérée admet un « élément générateur » (*cf.* n° 1, exemple 3), on peut fortement simplifier la démonstration du théorème 1, car alors *tout* opérateur de $\mathbf{R}^s$ est de la forme $U_{\mathbf{x}}$ (d'après le lemme 4 il suffit de le vérifier pour l'opérateur unité : or celui-ci correspond à l'élément générateur $\mathbf{u}$ de la d. r, u., puisqu'on a vu que $V_f \mathbf{u} = f$ pour toute $f \in \mathbf{L}$). C'est ce qui se passe par exemple lorsqu'on étudie la d. r. u. « régulière » d'un groupe *discret*.

La conséquence la plus fondamentale du théorème 1 est celle-ci :

THÉORÈME 2. — *Soit* $\{\mathcal{H}, U_s, V_s, S\}$ *la d. r. u. de* G *définie par une* *mesure centrale et de type positif; alors les opérateurs qui permutent à la fois aux* U_s *et aux* V_s *forment un anneau* COMMUTATIF.

Soit en effet $\mathbf{R}^\natural$ cet anneau; par définition, c'est l'intersection de $(\mathbf{R}^s)'$ et de $(\mathbf{R}^d)'$; d'après le théorème 1, c'est donc aussi l'intersection de $\mathbf{R}^s$ et de $(\mathbf{R}^s)'$ — autrement dit, c'est le *centre* de $\mathbf{R}^s$ (ou de $\mathbf{R}^d$), ce qui prouve le théorème 2.

Comme on le verra, le résultat précédent montre que, dans des cas étendus (et peut-être dans tous les cas), l'étude des d. r. u. est un problème qui, pour parler comme A. Weil, appartient aux Mathémathiques « abéliennes » — et c'est dans la mesure où ceci est exact que nous obtiendrons des résultats précis.

II. — L'opération $\natural$.

Dans tout ce paragraphe, on désigne par μ une mesure centrale et de type positif sur G, et par $\{\mathcal{H}, U_s, V_s, S\}$ la d. r. u. de G qu'elle définit; on rappelle qu'il existe une application canonique de $\mathbf{L}$ sur un sous-espace partout dense de $\mathcal{H}$; pour simplifier les notations tout en évitant les confusions possibles, on notera $\mathbf{f}$ l'image par cette application d'un élément $f \in \mathbf{L}$.

Comme on l'a vu (§ I, n° **1**, exemple 2), on a obtenu dans $\mathcal{H}$ les opérateurs U_s et V_s à l'aide des translations dans $\mathbf{L}$; par conséquent, l'opérateur U_sV_s dépend, non pas de s, mais seulement de *l'automorphisme intérieur de* G *défini par* s*;* ces opérateurs constituent une représentation unitaire dans $\mathcal{H}$ du groupe Γ des automorphismes intérieurs de G (la démonstration est élémentaire, et repose essentiellement sur le fait que les U_s permutent aux V_t). Si l'on veut généraliser la notion de fonction « centrale » il s'impose donc de poser la définition suivante :

DÉFINITION 3. — *On dit qu'un élément* $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ *est central s'il vérifie*

$$U_sV_s\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \textit{pour tout } s \in G; \tag{61}$$

on désigne par $\mathcal{H}^\natural$ *l'ensemble de ces éléments.*

Empressons-nous de dire dès maintenant que l'on peut fort bien avoir $\mathcal{H}^\natural = \{0\}$ [24]; dans ce cas, les méthodes que nous allons exposer par la suite sont totalement impuissantes à dire quoi que ce soit.

De toutes façons, il est clair que $\mathcal{H}^\natural$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$. C'est l'ensemble des « points fixes » du groupe formé par les opérateurs unitaires $U_s V_s$; par conséquent, et en utilisant le plus simple de tous les théorèmes ergodiques actuellement connus [25], nous avons ceci :

THÉORÈME 3. — *Soient* $\mathbf{x}$ *un élément arbitraire de* $\mathcal{H}$, *et* $K_\mathbf{x}$ *le plus petit sous-ensemble convexe et fermé de* $\mathcal{H}$ *contenant les transformés de* $\mathbf{x}$ *par les opérateurs* $U_s V_s$; *alors* $K_\mathbf{x}$ *rencontre* $\mathcal{H}^\natural$ *en un point et un seul* $\mathbf{x}^\natural$, *qui est aussi la projection orthogonale de* $\mathbf{x}$ *sur* $\mathcal{H}^\natural$.

Nous allons étudier les propriétés de cette opération. Tout d'abord, c'est une application linéaire continue de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{H}^\natural$, qui sur $\mathcal{H}^\natural$ se réduit à l'identité. D'autre part, $\mathbf{x}^\natural$ ne change pas si l'on remplace $\mathbf{x}$ par $U_s V_s \mathbf{x}$.

LEMME 7. — *L'opération* $^\natural$ *conserve l'ensemble des éléments bornés de* $\mathcal{H}$; *pour qu'un* $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ *borné soit dans* $\mathcal{H}^\natural$, *il faut et il suffit que l'on ait*

$$U_\mathbf{x} = V_\mathbf{x}, \tag{62}$$

ou encore que $U_\mathbf{x}$ *soit permutable aux* U_s (c'est-à-dire, que $U_\mathbf{x} \in \mathbf{R}^\natural$).

Soit en effet $\mathbf{x}$ un élément borné de $\mathcal{H}$; il existe une constante finie $M = \| U_\mathbf{x} \| \lambda$, telle que l'on ait

$$\| U_f \mathbf{x} \| \leqq M \| \mathbf{f} \| \qquad \text{pour toute } f \in \mathbf{L} \tag{63}$$

(en effet, on doit exprimer que l'application $\mathbf{f} \to U_f \mathbf{x}$ est continue). Il suit de là que, pour tout $s \in G$, on a

$$\| U_f U_s V_s \mathbf{x} \| = \| V_s U_{f \star \varepsilon_s} \mathbf{x} \| = \| U_{f \star \varepsilon_s} \mathbf{x} \| \leqq M \| \mathbf{g} \|, \tag{64}$$

---

[24] Par exemple, l'existence dans L^2 de fonctions centrales non nulles exige la présence sur G de voisinages *compacts* de *e* invariants par les automorphismes intérieurs.

[25] G. BIRKHOFF, *Proc. Nat. Ac. Sc. U. S. A.*, t. 25, 1939, p. 625; FTP, p. 59, lemme.

où l'on pose $g = f \star \varepsilon_s$; mais il est clair que $\mathbf{g} = \mathrm{V}_{s^{-1}}\mathbf{f}$, en sorte qu'il vient

$$\| \mathrm{U}_f \mathbf{y} \| \leqq \mathrm{M} \| \mathbf{f} \| \tag{65}$$

pour toute $f \in \mathbf{L}$ et tout $\mathbf{y}$ de la forme $\mathrm{U}_s \mathrm{V}_s \mathbf{x}$. Ceci s'étend immédiatement aux $\mathbf{y}$ qui appartiennent au convexe engendré par les $\mathrm{U}_s \mathrm{V}_s \mathbf{x}$, puis par continuité à tous les éléments de $\mathrm{K}_{\mathbf{x}}$; en particulier, on a

$$\| \mathrm{U}_f \mathbf{x}^\natural \| \leqq \mathrm{M} \| \mathbf{f} \| \qquad \text{pour toute } f \in \mathbf{L}, \tag{66}$$

ce qui montre que $\mathbf{x}^\natural$ est borné; on voit même que l'on a

$$\| \mathrm{U}_{\mathbf{x}^\natural} \| \leqq \| \mathrm{U}_{\mathbf{x}} \|. \tag{67}$$

Reste à voir (62). Or pour un élément $\mathbf{x} \in \mathcal{H}^\natural$ on a par définition $\mathrm{U}_s \mathrm{V}_s \mathbf{x} = \mathbf{x}$, c'est-à-dire $\mathrm{U}_s \mathbf{x} = \mathrm{V}_{s^{-1}} \mathbf{x}$, d'où en intégrant et en tenant compte du fait que G est unimodulaire :

$$\mathrm{U}_f \mathbf{x} = \mathrm{V}_f \mathbf{x} \qquad (f \in \mathbf{L};\ \mathbf{x} \in \mathcal{H}^\natural); \tag{68}$$

si $\mathbf{x}$ est borné, ceci s'écrit $\mathrm{V}_{\mathbf{x}} \mathbf{f} = \mathrm{U}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}$, et prouve (62). Réciproquement, (62) implique (68), d'où comme on le voit facilement $\mathbf{x} \in \mathcal{H}^\natural$. Montrons enfin que (62) équivaut au fait que $\mathrm{U}_{\mathbf{x}}$ permute aux U_s; tout d'abord, puisque $\mathrm{V}_{\mathbf{x}}$ est toujours permutable aux U_s (lemme 4), (62) implique $\mathrm{U}_s \mathrm{U}_{\mathbf{x}} = \mathrm{U}_{\mathbf{x}} \mathrm{U}_s$; réciproquement, de cette dernière relation résulte

$$\mathrm{U}_f \mathrm{U}_{\mathbf{x}} = \mathrm{U}_{\mathbf{x}} \mathrm{U}_f \tag{69}$$

donc [*cf.* (53)]

$$\mathrm{U}_{\mathrm{U}_f \mathbf{x}} = \mathrm{U}_{\mathrm{U}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}}, \tag{70}$$

donc

$$\mathrm{U}_{\mathbf{x}} \mathbf{f} = \mathrm{U}_f \mathbf{x}, \qquad \text{donc} \quad = \mathrm{V}_{\mathbf{x}} \mathbf{f}, \tag{71}$$

d'où (62), ce qui démontre le lemme.

Nous allons maintenant caractériser autrement les éléments « centraux » de $\mathcal{H}$.

LEMME 8. — *Les $\mathbf{x} \in \mathcal{H}^\natural$ sont caractérisés par la relation*

$$\langle \mathbf{f} \star \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{g} \star \mathbf{f}, \mathbf{x} \rangle \qquad \textit{quels que soient } f, g \in \mathbf{L}. \tag{72}$$

Supposons en effet qu'un $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ soit central; on aura alors, en raison de (68) et de (37) :

$$\langle \mathbf{f} \star \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathrm{U}_f \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{g}, \mathrm{U}_{\tilde{f}} \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{g}, \mathrm{V}_{\tilde{f}} \mathbf{x} \rangle = \langle \mathrm{V}_f \mathbf{g}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{g} \star \mathbf{f}, \mathbf{x} \rangle$$

ce qui prouve (72).

Réciproquement, le calcul qu'on vient de faire à l'instant montre que (72) implique

$$\langle \mathbf{g}, \mathrm{U}_f \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{g}, \mathrm{V}_f \mathbf{x} \rangle \tag{73}$$

quels que soient f, $g \in \mathbf{L}$, d'où (68).

Remarque. — La notation $\mathbf{f} \star \mathbf{g}$ signifie, non seulement l'image dans $\mathcal{H}$ de l'élément $f \star g$ de $\mathbf{L}$, mais aussi le produit des images $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$; en effet, on a pris le quotient de $\mathbf{L}$ par un idéal *bilatère*, en sorte que l'on peut munir le sous-espace de $\mathcal{H}$ formé par les $\mathbf{f}$ ($f \in \mathbf{L}$) d'une structure d'*algèbre*.

Lemme 9. — *Pour* f, $g \in \mathbf{L}$ *on a*

$$(\mathbf{f} \star \mathbf{g})^\natural = (\mathbf{g} \star \mathbf{f})^\natural. \tag{74}$$

En effet, l'opération $^\natural$ étant identique à l'opérateur de projection orthogonale sur $\mathcal{H}^\natural$, on peut encore la *caractériser* par la relation suivante :

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}^\natural, \mathbf{y} \rangle \qquad \text{pour } \mathbf{x} \in \mathcal{H},\ \mathbf{y} \in \mathcal{H}^\natural; \tag{75}$$

(74) résulte alors directement de (72).

Montrons maintenant comment on peut étendre la relation (74) à d'autres éléments. Tout d'abord, on peut introduire dans l'ensemble des éléments bornés de $\mathcal{H}$ une structure d'algèbre; il suffit de prendre pour produit de deux éléments bornés $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ l'élément

$$\mathbf{x} \star \mathbf{y} = \mathrm{U}_{\mathbf{x}} \mathbf{y} = \mathrm{V}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}; \tag{76}$$

d'après (53), cet élément est borné, et l'on a

$$\mathrm{U}_{\mathbf{x} \star \mathbf{y}} = \mathrm{U}_{\mathbf{x}} \mathrm{U}_{\mathbf{y}}, \qquad \mathrm{V}_{\mathbf{x} \star \mathbf{y}} = \mathrm{V}_{\mathbf{y}} \mathrm{V}_{\mathbf{x}}; \tag{77}$$

ces formules prouvent du reste en même temps que la multiplication (76) est associative. Ceci étant, on a le

Lemme 10. — *Si* $\mathbf{x}$ *et* $\mathbf{y}$ *sont bornés, on a*

$$(\mathbf{x} \star \mathbf{y})^\natural = (\mathbf{y} \star \mathbf{x})^\natural. \tag{78}$$

En effet, partons de la relation (74); pour $\mathbf{f}$ donné, chacun des termes de cette relation est une fonction continue de $\mathbf{g}$: donc on en déduit, par passage à la limite, que

$$(79)\qquad (U_f\mathbf{y})^\natural = (V_f\mathbf{y})^\natural \quad \text{quels que soient } f\in\mathbf{L},\ \mathbf{y}\in\mathcal{H};$$

si $\mathbf{y}$ est borné, ceci s'écrit

$$(80)\qquad (V_\mathbf{y}\mathbf{f})^\natural = (U_\mathbf{y}\mathbf{f})^\natural,$$

d'où, $U_\mathbf{y}$ et $V_\mathbf{y}$ étant continus, la relation

$$(81)\qquad (V_\mathbf{y}\mathbf{x})^\natural = (U_\mathbf{y}\mathbf{x})^\natural$$

valable, dès que $\mathbf{y}$ est borné, pour tout $\mathbf{x}\in\mathcal{H}$: ce qui démontre le lemme.

Terminons ce paragraphe en montrant comment le théorème 3 peut se traduire, lorsqu'il s'agit d'éléments bornés, en termes d'opérateurs :

Théorème 4. — *Soit $\mathbf{x}$ un élément borné de $\mathcal{H}$, et considérons, dans l'anneau $\mathbf{R}^s$, le plus petit ensemble convexe faiblement fermé contenant les opérateurs $U_sU_\mathbf{x}U_s^{-1}$; alors cet ensemble rencontre le centre $\mathbf{R}^\natural$ de $\mathbf{R}^s$ en un point unique, à savoir $U_{\mathbf{x}^\natural}$.*

Calculons tout d'abord l'opérateur $U_\mathbf{y}$ défini par $\mathbf{y} = U_sV_s\mathbf{x}$; il est donné, pour $f\in\mathbf{L}$, par $U_\mathbf{y}\mathbf{f} = V_f\mathbf{y}$, c'est-à-dire par

$$(82)\qquad U_\mathbf{y}\mathbf{f} = V_fU_sV_s\mathbf{x} = U_sV_fV_s\mathbf{x} = U_sV_{\varepsilon_{s^{-1}}\star f}\mathbf{x} = U_sU_\mathbf{x}U_{s^{-1}}\mathbf{f};$$

autrement dit, on a

$$(82')\qquad U_{U_sV_s\mathbf{x}} = U_sU_\mathbf{x}U_s^{-1}.$$

Ceci étant, considérons l'enveloppe convexe $K_\mathbf{x}^0$ de l'ensemble des $U_sV_s\mathbf{x}$, et son adhérence $K_\mathbf{x}$ dans $\mathcal{H}$; de même, considérons l'enveloppe convexe $\mathbf{K}_\mathbf{x}^0$ dans $\mathbf{R}^s$ de l'ensemble des opérateurs $U_sU_\mathbf{x}U_s^{-1}$; et l'adhérence faible $\mathbf{K}_\mathbf{x}$ de celle-ci dans l'anneau $\mathbf{R}^s$. Comme on l'a vu au cours de la démonstration du lemme 7, les éléments de $K_\mathbf{x}$ sont bornés, ce qui permet de considérer dans $\mathbf{R}^s$ l'ensemble des opérateurs $U_\mathbf{y}(\mathbf{y}\in K_\mathbf{x})$; d'après (82), $\mathbf{y}\to U_\mathbf{y}$ applique $K_\mathbf{x}^0$ sur $\mathbf{K}_\mathbf{x}^0$; d'autre part, cette application est *faiblement continue;* en effet les $U_\mathbf{y}$ sont uniformément bornés, et pour f, $g\in\mathbf{L}$ l'expression

$$(83)\qquad \langle U_\mathbf{y}\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \langle V_f\mathbf{y}, \mathbf{g}\rangle$$

est une fonction continue de $\mathbf{y}$: d'où notre assertion. Il suit de là que $K_{\mathbf{x}}$, étant convexe et fortement fermé — donc faiblement fermé — donc faiblement compact puisque borné — est transformé, par l'application considérée, en un ensemble faiblement compact; cet ensemble contient $\mathbf{K}_{\mathbf{x}}^{0}$ et est contenu dans l'adhérence faible de $\mathbf{K}_{\mathbf{x}}^{0}$: c'est donc nécessairement $\mathbf{K}_{\mathbf{x}}$.

En définitive, l'application $\mathbf{y} \rightarrow U_{\mathbf{y}}$ transforme $K_{\mathbf{x}}$ en $\mathbf{K}_{\mathbf{x}}$; les éléments « centraux » de $\mathbf{K}_{\mathbf{x}}$ correspondent donc (lemme 7) aux éléments centraux de $K_{\mathbf{x}}$, ce qui, avec le théorème 3, démontre le théorème 4.

De tout ce qui précède, il résulte que, dans l'ensemble $\mathbf{R}_0^s$ des opérateurs de la forme $U_{\mathbf{x}}$, on peut définir une opération $\natural$ possédant les propriétés suivantes :

a. $(U_{\mathbf{x}})^{\natural} = U_{\mathbf{x}^{\natural}}$;

b. $A \rightarrow A^{\natural}$ est une application linéaire de l'algèbre $\mathbf{R}_0^s$ sur son centre; sur ce centre, elle se réduit à l'identité;

c. on a

$$(AB)^{\natural} = (BA)^{\natural} \qquad \text{quels que soient } A, B \in \mathbf{R}_0^s;$$

d. si A est hermitien (resp. hermitien positif), il en est de même de $A^{\natural}$;

e. si A appartient au centre de $\mathbf{R}_0^s$, on a

$$(AB)^{\natural} = A . B^{\natural} \qquad \text{pour tout } B \in \mathbf{R}_0^s.$$

La propriété *b* exprime essentiellement le lemme 7; *c* n'est autre que le lemme 10; enfin, *d* et *e* résultent immédiatement du théorème 4.

On voit que cette opération possède toutes les propriétés formelles d'une *trace*; à ce titre, on ne peut que la considérer avec sympathie; malheureusement, il existe des cas où l'on a $A^{\natural} = 0$ quel que soit A, ce qui limite un peu la portée de nos résultats.

III. — Anneaux, mesures et groupes de classe finie.

Les nos **1**, **2**, **3** du présent paragraphe ont pour but d'exposer des propriétés de certaines catégories d'anneaux d'opérateurs; dans les nos **4** et **5** se trouvent les premières conséquences de ces propriétés pour la théorie des groupes.

1. Anneaux de classe finie. — Nous commencerons par énoncer, sans démonstration, un résultat fondamental [26] :

Théorème de Dixmier. — *Soient* **A** *un anneau d'opérateurs dans un espace de Hilbert arbitraire* $\mathcal{H}$, *et* $\mathbf{A}_u$ *le groupe des opérateurs unitaires de* **A**. *Pour un élément* $T \in \mathbf{A}$, *soit* $\mathbf{K}_T$ *le plus petit sous-ensemble convexe uniformément fermé de* **A** *contenant les* $UAU^{-1}(U \in \mathbf{A}_u)$; *alors pour tout* $T \in \mathbf{A}$, *l'ensemble* $\mathbf{K}_T$ *rencontre le centre de* **A** *en au moins un point.*

Ceci veut donc dire que, pour tout $T \in \mathbf{A}$, il existe T' dans le centre de **A** tel que, quel que soit $\varepsilon > 0$, on puisse trouver des opérateurs unitaires $U_i \in \mathbf{A}$ et des nombres $\alpha_i (\alpha_i \geq 0, \Sigma\alpha_i = 1)$ vérifiant

$$\|\Sigma\alpha_i U_i T U_i^{-1} - T'\| < \varepsilon. \tag{84}$$

Naturellement, ce résultat est loin d'être trivial; précisons aussi qu'il est essentiel pour sa validité que **A** soit un anneau d'opérateurs (c'est-à-dire que **A** soit une algèbre auto-adjointe avec unité et *faiblement fermée*, ou encore que $\mathbf{A} = \mathbf{A}''$); notons enfin que, en général, $\mathbf{K}_T$ contient *plusieurs* opérateurs appartenant au centre de **A**. Nous allons étudier les anneaux pour lesquels, quel que soit T, $\mathbf{K}_T$ ne contient qu'*un seul* opérateur $T^\natural$ appartenant au centre $\mathbf{A}^\natural$ de **A**; nous dirons avec Dixmier qu'un tel anneau est *de classe finie*.

Lemme 11 [27]. — *Soit* **A** *un anneau d'opérateurs de classe finie; alors l'application* $T \to T^\natural$ *de* **A** *dans son centre* $\mathbf{A}^\natural$ *possède les propriétés suivantes :*

a. c'est une application linéaire continue de **A** *sur* $\mathbf{A}^\natural$, *qui se réduit à l'identité sur* $\mathbf{A}^\natural$;

b. si T *est hermitien (resp. hermitien positif) il en est de même de* $T^\natural$;

c. quels que soient $S, T \in \mathbf{A}$ *on a*

$$(ST)^\natural = (TS)^\natural \tag{85}$$

---

[26] *Cf.* [10]

[27] Ce lemme est dû à Dixmier, et les raisonnements utilisés pour le démontrer à J. von Neumann [*Almost periodic functions in a group* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **36**, 1934, p. 445)]. Les lemmes **12** à **15** sont dus à l'auteur.

on a de plus

$$(86)\qquad (ST)^{\natural} = S.T^{\natural} \qquad \textit{pour } S \in \mathbf{A}^{\natural},\ T \in \mathbf{A}.$$

Les propriétés *b* et (86) sont évidentes d'après la formule d'approximation (84), de même que la continuité de l'application $^{\natural}$: on a

$$(87)\qquad \| T^{\natural} \| \leq \| T \| \qquad \text{quel que soit } T.$$

Il est encore évident que l'opération $^{\natural}$ se réduit à l'identité sur le centre de $\mathbf{A}$ (puisque pour un élément T de ce centre, le convexe $\mathbf{K}_T$ est réduit à T), donc que cette application applique $\mathbf{A}$ *sur* son centre. Il reste donc à montrer que l'opération $^{\natural}$ est linéaire, et qu'elle vérifie (85).

Or soient S, T deux éléments de $\mathbf{A}$; choisissons des α_i et des U_i tels que l'on ait

$$(88)\qquad \| \Sigma\alpha_i U_i S U_i^{-1} - S^{\natural} \| < \varepsilon;$$

comme l'élément $\Sigma\alpha_i U_i T U_i^{-1}$ est dans $\mathbf{K}_T$, son image par l'opération $^{\natural}$ est $T^{\natural}$ (ceci repose essentiellement sur l'*unicité*), en sorte qu'on peut réaliser l'inégalité

$$(89)\qquad \left\| \sum_j \beta_j V_j \left(\sum_i \alpha_i U_i T U_i^{-1} \right) V_j^{-1} - T^{\natural} \right\| < \varepsilon$$

ou encore

$$(90)\qquad \| \Sigma\alpha_i\beta_j V_j U_i T U_i^{-1} V_j^{-1} - T^{\natural} \| < \varepsilon;$$

mais il est clair que (88) implique

$$(91)\qquad \| \Sigma\alpha_i\beta_j V_j U_i S U_i^{-1} V_j^{-1} - S^{\natural} \| < \varepsilon;$$

en comparant les deux dernières relations, on voit que $S^{\natural} + T^{\natural}$ peut être approché autant qu'on le désire par des éléments de $\mathbf{K}_{S+T}$, ce qui prouve que $S^{\natural} + T^{\natural} = (S + T)^{\natural}$, d'où la linéarité.

Il ne nous reste plus qu'à démontrer (85). Or il est évident par construction que l'on a

$$(92)\qquad (USU^{-1})^{\natural} = S^{\natural} \qquad \text{pour } S \in \mathbf{A},\ U \in \mathbf{A}_u;$$

en remplaçant S par SU, ceci montre que (85) est vrai lorsque T est unitaire, donc aussi, par linéarité, lorsque T est une combinaison linéaire d'opérateurs unitaires; or ces combinaisons linéaires constituent **A** tout entier; pour le voir on peut supposer que $T \in \mathbf{A}$ vérifie $T^* = T$, $0 \leqq T \leqq I$; si l'on pose alors

$$U = T + i(I - T^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{93}$$

U est dans $\mathbf{A}_u$ comme on le voit facilement, et l'on a

$$T = \frac{1}{2}(U + U^{-1}), \tag{94}$$

ce qui prouve notre assertion, ainsi par conséquent que (85).

Remarque. — Il est facile de voir que les propriétés précédentes de l'opération $\natural$ sont *caractéristiques*.

Nous allons maintenant caractériser les anneaux de classe finie par une propriété « interne » et purement algébrique. Tout d'abord, nous appellerons *trace* sur un anneau **A** (ou plus généralement sur une algèbre involutive) une forme linéaire $\sigma(T)$ définie sur **A** et vérifiant

$$\sigma(ST) = \sigma(TS); \qquad \sigma(S^*S) \geqq 0 \tag{95}$$

(*cf.* les mesures centrales et de type positif : ce sont des traces sur l'algèbre **L** !). Nous dirons que **A** possède un *système complet de traces* lorsque, pour tout $A \in \mathbf{A}$ non nul, il existe une trace σ sur **A** pour laquelle on a $\sigma(A^*A) \neq 0$.

LEMME 12. — *Pour qu'un anneau d'opérateurs* **A** *soit de classe finie, il faut et il suffit qu'il possède un système complet de traces.*

Nécessité de la condition. — Supposons **A** de classe finie; soit f une forme linéaire positive définie sur le centre $\mathbf{A}^\natural$, et prolongeons-la à tout **A** en posant

$$f(A) = f(A^\natural); \tag{96}$$

d'après les points *b* et *c* du lemme 11, on obtient ainsi une trace sur **A**, et du reste ce procédé donne *toutes* les traces définies sur **A**; en effet, une trace σ, étant une forme linéaire positive, est nécessairement *continue;* de (88) résulte donc une relation de la forme

$$|\sigma(\Sigma\alpha_i U_i S U_i^{-1}) - \sigma(S^\natural)| < K\varepsilon, \tag{97}$$

ce qui s'écrit encore, puisque σ est « centrale »,

(98) $$|\sigma(S) - \sigma(S^{\natural})| < K\varepsilon,$$

d'où finalement

(99) $$\sigma(S) = \sigma(S^{\natural})$$

comme annoncé.

Ceci étant, soit un $S \in \mathbf{A}$, et supposons que l'on ait

(100) $$\sigma(S^{\star}S) = 0$$

pour toute trace σ définie sur $\mathbf{A}$; si l'on introduit l'opérateur *hermitien positif* $H = (S^{\star}S)^{\natural}$, il s'ensuit d'après ce qui précède que $f(H) = 0$ pour toute forme linéaire, positive f définie sur $\mathbf{A}^{\natural}$, donc le spectre de H est réduit à zéro, c'est-à-dire qu'on a $H = 0$. Si donc nous voulons montrer que $\mathbf{A}$ possède un système complet de traces, nous sommes ramenés à démontrer ceci :

Lemme 11 *bis*. — *Soient* $\mathbf{A}$ *un anneau de classe finie, et* H *un élément hermitien positif de* $\mathbf{A}$*; la relation*

(101) $$H^{\natural} = 0$$

implique

(102) $$H = 0.$$

On trouvera une démonstration de cette propriété dans l'article de J. Dixmier.

Suffisance de la condition. — Supposons que l'anneau $\mathbf{A}$ possède un système complet de traces; supposons que, pour un $S \in \mathbf{A}$, le convexe $\mathbf{K}_S$ rencontre le centre de $\mathbf{A}$ en deux points distincts au moins, soient S' et S''; la première partie de la démonstration prouve alors qu'on a

(103) $$\sigma(S') = \sigma(S'') = \sigma(S)$$

pour toute trace σ définie sur $\mathbf{A}$.

Or, si H est un élément hermitien positif du centre de $\mathbf{A}$, et si σ est une trace sur $\mathbf{A}$, l'expression

(104) $$\sigma_H(S) = \sigma(HS)$$

est encore une trace sur **A**; en effet, c'est évidemment une forme linéaire; elle est positive car on a

$$\sigma_H(S^*S) = \sigma\left(H^{\frac{1}{2}}S^*SH^{\frac{1}{2}}\right), \tag{105}$$

et elle est « centrale » car

$$\sigma_H(ST) = \sigma(HST) = \sigma(THS) = \sigma(HTS) = \sigma_H(TS). \tag{106}$$

Ceci, étant, revenons à (103); l'opérateur $A = S' - S''$ est dans le centre de **A**, et vérifie $\sigma(A) = 0$ pour toute trace σ; d'après ce qui précède, on aura plus généralement

$$\sigma(HA) = 0 \tag{107}$$

pour toute trace σ et pour tout élément hermitien positif H du centre; mais tout opérateur du centre est une combinaison linéaire d'opérateurs tels que H; donc on aura (107) pour tout H du centre — hermitien positif ou non — et en particulier on aura

$$\sigma(A^*A) = 0; \tag{108}$$

puisqu'on a par hypothèse un système complet de traces, il s'ensuit que $A = 0$, donc que, pour tout $S \in \mathbf{A}$, le convexe $\mathbf{K}_S$ rencontre le centre de **A** en un seul point : **A** est donc bien de classe finie, ce qui termine la démonstration du lemme 12.

Indiquons en passant que J. Dixmier a donné des anneaux de classe finie une autre caractérisation que la précédente, à savoir : pour que **A** soit de classe finie, il faut et il suffit que la relation

$$U^*U = I \qquad (U \in \mathbf{A}), \tag{109}$$

implique

$$UU^* = I; \tag{110}$$

le lemme 12 permet de voir facilement la nécessité de cette condition, mais non sa suffisance.

2. Caractères d'un anneau de classe finie. — Comme nous l'avons vu plus ou moins implicitement dans le numéro précédent, toute forme linéaire continue et centrale f — c'est-à-dire vérifiant

$$f(AB) = f(BA) \tag{111}$$

— est parfaitement déterminée, sur un anneau $\mathbf{A}$ de classe finie, par les valeurs qu'elle prend sur le centre $\mathbf{A}^\natural$ de cet anneau : on a de façon précise la formule

$$f(A)=f(A^\natural) \quad \text{pour tout } A\in\mathbf{A}. \tag{112}$$

Il résulte de là que l'ensemble de ces formes s'identifie à l'ensemble des formes linéaires continues sur l'anneau commutatif $\mathbf{A}^\natural$; par conséquent, on peut leur appliquer les résultats connus sur les anneaux commutatifs [28].

En particulier, on sait que $\mathbf{A}^\natural$ est isomorphe à l'algèbre des fonctions continues définies sur un espace compact convenable Ω, le « spectre » de $\mathbf{A}^\natural$; on obtient un point $\chi\in\Omega$ en considérant un homomorphisme $A\to\chi(A)$ de $\mathbf{A}^\natural$ sur le corps complexe — c'est ce que nous avons appelé un « caractère » de l'algèbre commutative $\mathbf{A}^\natural$. *On appellera caractère de l'anneau de classe finie* $\mathbf{A}$ *toute forme linéaire continue et centrale* χ *définie sur* $\mathbf{A}$ *qui, sur* $\mathbf{A}^\natural$, *coïncide avec un caractère de* $\mathbf{A}^\natural$*;* il est clair que l'on obtient ainsi une correspondance *biunivoque* entre les caractères de $\mathbf{A}$ et ceux de $\mathbf{A}^\natural$, c'est-à-dire, entre les caractères de $\mathbf{A}$ et les points du spectre Ω du centre de $\mathbf{A}$. Les caractères de $\mathbf{A}$ sont des formes linéaires continues, positives, centrales — autrement dit, ce sont des *traces;* et parmi les traces définies sur $\mathbf{A}$, elles sont caractérisées par le fait qu'on a

$$\chi(AB)=\chi(A)\chi(B) \quad \text{pour } A, B\in\mathbf{A}^\natural; \tag{113}$$

en fait, on a une propriété un peu plus forte [29].

Lemme 13 (Équation fonctionnelle des caractères de $\mathbf{A}$). — *Pour qu'une trace* χ *définie sur* $\mathbf{A}$ *soit un caractère de* $\mathbf{A}$, *il faut et il suffit qu'elle vérifie*

$$\chi(AB)=\chi(A)\chi(B) \quad \textit{pour } A\in\mathbf{A}^\natural,\ B\in\mathbf{A}. \tag{114}$$

Que la condition soit suffisante est clair; elle est aussi nécessaire, car on a

$$\chi(AB)=\chi[(AB)^\natural] \tag{115}$$

[28] RU, Chapitre I.

[29] Cette propriété exprime que les caractères de $\mathbf{A}$ sont identiques aux applications $\natural$ de $\mathbf{A}$ sur le corps complexe (*cf.* Introduction).

et ceci, combiné avec (86) et le fait que χ est multiplicative sur $\mathbf{A}^\natural$, conduit immédiatement à (114).

On voit donc que les caractères sont définis par des propriétés « purement algébrique », à savoir (114) et en outre

$$\chi(AB) = \chi(BA), \qquad \chi(A^*A) \geqq 0 \tag{116}$$

(à vrai dire, il faut ajouter $\chi \neq 0$).

Si l'on applique maintenant le théorème sur la représentation intégrale des formes linéaires continues sur un anneau commutatif, on voit immédiatement ceci :

LEMME 14. — *A toute forme linéaire continue et centrale f définie sur* $\mathbf{A}$ *correspond, sur l'espace compact* Ω *formé par les caractères de* $\mathbf{A}$, *une mesure de Radon unique* μ *telle que l'on ait*

$$f(A) = \int_\Omega \chi(A)\, d\mu(\chi) \qquad \textit{pour tout } A \in \mathbf{A}, \tag{117}$$

et réciproquement; pour que f soit une trace, il faut et il suffit que la mesure μ *soit positive.*

D'autre part, le lecteur n'aura aucune peine à démontrer ceci :

LEMME 14 *bis*. — *Soit* K *l'ensemble convexe et compact formé par les traces* σ *qui vérifient* $\sigma(1) \leqq 1$; *alors les points extrémaux non nuls de* K *sont les caractères de* $\mathbf{A}$.

Voici encore une autre caractérisation des caractères. Soit σ une trace sur $\mathbf{A}$; il est clair qu'elle permet de définir une « double représentation unitaire » de l'algèbre involutive $\mathbf{A}$ — bien que nous n'ayons pas défini explicitement cette notion générale, il serait quelque peu ridicule, après ce qui a été dit dans les paragraphes I et II, d'insister lourdement sur ce point. Soit $\{\mathcal{H}, U_A, V_A, S\}$ cette d. r. u.; alors : *pour que* σ *vérifiant* $\sigma(I) = 1$, *soit un caractère de* $\mathbf{A}$, *il faut et il suffit que la d. r. u. correspondante soit irréductible;* ceci signifie, comme on l'expliquera en détail plus loin, que le système formé par les U_A et les V_A est irréductible au sens ordinaire du terme. En ce qui concerne la démonstration de la propriété précédente, on peut la faire sans mal en utilisant les idées de Gelfand et Raikov; tout revient, en raison du lemme 14 *bis*, à montrer qu'il existe une correspondance biunivoque entre les traces « majorées » par σ et les opérateurs hermitiens H définis dans $\mathcal{H}$, vérifiant $0 \leqq H \leqq I$, et permutables aux U_A *et* aux V_A; tout ceci ne présente aucune difficulté (il existe, en effet, du fait que **A** possède un élément unité, un « élément générateur » dans la double représentation en question, ce qui rend l'étude de celle-ci beaucoup plus simple). Bien entendu, et en utilisant le théorème 1 (ou plutôt son analogue pour le cas examiné ici), la condition d'irréductibilité signifie aussi que l'anneau d'opérateurs engendré par les U_A est un *facteur*.

3. Idéaux bilatères maximaux et caractères d'un anneau de classe finie. — Nous allons étendre maintenant aux anneaux de classe finie les propriétés de nature « taubérienne » de l'algèbre **L** d'un groupe compact.

Lemme 15. — *Dans un anneau* **A** *de classe finie, il existe des correspondances biunivoques entre :*

a. les idéaux bilatères maximaux de **A**;

b. les caractères de **A**;

c. les idéaux maximaux du centre $\mathbf{A}^\natural$ *de* **A**;

ces correspondances sont les suivantes : l'idéal bilatère maximal défini par un caractère χ *de* **A** *est donné par l'équation* $\chi(A^*A) = 0$; *l'idéal maximal de* $\mathbf{A}^\natural$ *défini par un idéal bilatère maximal* $\mathfrak{m}$ *de* **A** *est* $\mathfrak{m} \cap \mathbf{A}^\natural$.

On va démontrer ce lemme en plusieurs étapes.

Considérons tout d'abord un idéal bilatère maximal $\mathfrak{m}$ de **A**; sa trace $\mathfrak{m} \cap \mathbf{A}^\natural$ sur le centre de **A** est évidemment un idéal de $\mathbf{A}^\natural$, lequel est distinct de $\mathbf{A}^\natural$ si $\mathfrak{m}$ est distinct de **A**; $\mathfrak{m} \cap \mathbf{A}^\natural$ est d'autre part *l'image de* $\mathfrak{m}$ *par l'application* $\natural$ [en effet, $\mathfrak{m}$ étant maximal est fermé, en sorte que, d'après la formule d'approximation (88), l'image $\mathfrak{m}^\natural$ de $\mathfrak{m}$ par cette application est contenue dans $\mathfrak{m}$, donc dans $\mathfrak{m} \cap \mathbf{A}^\natural$; comme $\mathfrak{m}^\natural$ contient trivialement $\mathfrak{m} \cap \mathbf{A}^\natural$ puisque l'opération $\natural$ se réduit à l'identité sur $\mathbf{A}^\natural$, on a bien en définitive $\mathfrak{m}^\natural = \mathfrak{m} \cap \mathbf{A}^\natural$]. Il suit de là que

$$(118) \qquad A \in \mathfrak{m} \quad \text{implique} \quad (AT)^\natural \in \mathfrak{m} \quad \text{quel que soit } T \in \mathbf{A};$$

en fait, cette propriété *caractérise* les $A \in \mathfrak{m}$; en effet, les A qui la possèdent forment visiblement un idéal bilatère, qui contient $\mathfrak{m}$ et n'est pas confondu avec $\mathbf{A}$ puisque $\mathfrak{m}^\natural$ est distinct de $\mathbf{A}^\natural$: comme $\mathfrak{m}$ est maximal, notre assertion s'ensuit.

Il suit de là que deux idéaux bilatères maximaux *distincts* de $\mathbf{A}$ rencontrent le centre de $\mathbf{A}$ suivant des idéaux *distincts;* pour établir l'existence d'une correspondance biunivoque entre idéaux bilatères maximaux de $\mathbf{A}$ et idéaux maximaux de $\mathbf{A}^\natural$, il nous faut d'abord montrer que l'idéal $\mathfrak{m}^\natural$ défini plus haut est maximal; or, s'il n'en était pas ainsi, $\mathfrak{m}^\natural$ serait contenu dans un idéal maximal $\mathfrak{n}$ de $\mathbf{A}^\natural$; les $A \in \mathbf{A}$ tel que l'on ait

$$(119) \qquad (AT)^\natural \in \mathfrak{n} \quad \text{quel que soit } T \in \mathbf{A}$$

formeraient dans $\mathbf{A}$ un idéal bilatère $\mathfrak{m}'$ distinct de $\mathbf{A}$, contenant à la fois $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ donc distinct de $\mathfrak{m}$ si $\mathfrak{n}$ est distinct de $\mathfrak{m}^\natural$, ce qui est absurde puisque $\mathfrak{m}$ est maximal.

Inversement, si $\mathfrak{n}$ est un idéal maximal de $\mathbf{A}^\natural$, il existe un idéal bilatère maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathbf{A}$ tel que $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap \mathbf{A}^\natural$: c'est l'ensemble des $A \in \mathbf{A}$ qui vérifient (119); en effet, (119) définit un idéal bilatère non trivial $\mathfrak{m}'$, lequel est contenu dans un idéal maximal $\mathfrak{m}$; comme $\mathfrak{m} \cap \mathbf{A}^\natural$ contient l'idéal maximal $\mathfrak{n}$, on a $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap \mathbf{A}^\natural$ en sorte que, d'après la première partie de la démonstration, il vient $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$.

Il nous reste maintenant à montrer l'existence d'une correspondance entre idéaux bilatères maximaux et caractères de $\mathbf{A}$; pour cela, partons d'un tel idéal $\mathfrak{m}$; puisque $\mathfrak{m}^\natural$ est maximal dans $\mathbf{A}^\natural$, il existe un caractère et un seul χ de $\mathbf{A}^\natural$ tel que

$$(120) \qquad A \in \mathfrak{m}^\natural \quad \text{équivaut à} \quad \chi(A) = 0;$$

si l'on prolonge χ en un caractère de $\mathbf{A}$, on voit en utilisant (118) que

$$(121) \qquad A \in \mathfrak{m} \quad \text{équivaut à} \quad \chi((AT)^\natural) = 0 \quad \text{pour tout } T \in \mathbf{A},$$

c'est-à-dire à $\chi(AT) = 0$, donc finalement (Cauchy-Schwarz) que

$$(122) \qquad A \in \mathfrak{m} \quad \text{équivaut à} \quad \chi(A^*A) = 0;$$

inversement, soit χ un caractère de $\mathbf{A}$, et considérons l'idéal bilatère $\mathfrak{m}$ défini par (122); il est aussi défini par (121); si donc on introduit l'idéal $\mathfrak{n}$ de $\mathbf{A}^\natural$ défini par

$$A \in \mathfrak{n} \quad \text{équivaut à} \quad \chi(A) = 0,$$

on voit d'une part que

$$(123)\qquad A \in \mathfrak{m}' \quad \text{équivaut à} \quad (AT)^{\natural} \in \mathfrak{n} \quad \text{quel que soit } T,$$

et d'autre part que $\mathfrak{n}$ est maximal puisque, sur $\mathbf{A}^{\natural}$, la forme linéaire χ est multiplicative : par conséquent, $\mathfrak{m}$ est maximal, et le lemme 15 est entièrement démontré.

On sait, comme l'ont démontré Gelfand et Neumark (30), que si $\mathfrak{a}$ est un idéal à gauche d'une algèbre auto adjointe uniformément fermée $\mathbf{A}$, on peut toujours trouver une forme linéaire positive f sur $\mathbf{A}$ telle que l'on ait $f(A^*A) = 0$ pour tout $A \in \mathfrak{a}$; le lemme 15 présente une analogie visible avec ce résultat, tout en étant beaucoup plus précis (et beaucoup moins général).

Corollaire du lemme 15. — *Dans un anneau de classe finie, l'intersection des idéaux bilatères maximaux est réduite à zéro.*

En raison du lemme 15, cette propriété est en effet équivalente à l'existence sur l'anneau considéré d'un système complet de traces.

On notera que, la démonstration du lemme 15 étant indépendante du lemme 11 *bis*, on obtiendrait une démonstration algébrique de ce dernier si l'on pouvait prouver directement le corollaire ci-dessus.

Une autre conséquence évidente du lemme 15 est que, pour qu'un anneau de classe finie soit une algèbre *simple*, il faut et il suffit que son centre soit de dimension un (31), autrement dit que l'anneau en question soit un *facteur* au sens de J. von Neumann et F. J. Murray; on verra une conséquence importante de ce fait au paragraphe IV, n° **2**.

4. Définition et caractérisation des mesures de classe finie. — Nous revenons maintenant aux considérations des paragraphes I et II.

Définition 4. — *Soient μ une mesure centrale et de type positif sur le groupe* G, $\{\mathcal{H}, U_x, V_x, S\}$ *la d. r. u. de* G *qu'elle définit; on dit que μ est de classe finie lorsque l'anneau d'opérateurs $\mathbf{R}^s$ engendré dans $\mathcal{H}$ par les U_x est de classe finie.*

---

(30) *On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space* (*Mat. Sb.*, t. **12**, 1943, p. 197-212).

(31) Ce résultat est dû à Gelfand et Neumark; *cf.* (30).

Il importe peu de considérer $\mathbf{R}^s$ ou $\mathbf{R}^d$ puisque ces anneaux sont anti-isomorphes par S. On va maintenant donner une caractérisation plus pratique des mesures de classe finie.

Théorème 5. — *Soit* $\{\mathcal{H}, U_s, V_s, S\}$ *la d. r. u. de* G *définie par une mesure* μ; *pour que* μ *soit de classe finie, il faut et il suffit que le plus petit sous-espace fermé de* $\mathcal{H}$, *invariant à gauche et contenant les éléments centraux de* $\mathcal{H}$ (§ II, déf. 3) *soit identique à* $\mathcal{H}$.

Nécessité de la condition. — Soient $\mathcal{H}^\natural$ le sous-espace des éléments centraux de $\mathcal{H}$, et $\mathcal{F}$ le sous-espace fermé engendré par les $U_s\mathbf{x}(s \in G,\ \mathbf{x} \in \mathcal{H}^\natural)$: il faut montrer que si l'anneau $\mathbf{R}^s$ est de classe finie, on a $\mathcal{F} = \mathcal{H}$.

Or si l'anneau $\mathbf{R}^s$ est de classe finie, on peut y définir une opération $^\natural$; en particulier, on pourra définir une telle opération dans l'ensemble des opérateurs de la forme $U_\mathbf{x}$ où $\mathbf{x}$ est un élément borné de $\mathcal{H}$. Nous allons voir que cette opération coïncide nécessairement avec celle qu'on a introduite à la fin du paragraphe II, et qui était alors définie par

$$(U^\mathbf{x})^\natural = U_{\mathbf{x}^\natural}, \tag{124}$$

où $\mathbf{x}^\natural$, rappelons-le, est la projection orthogonale de $\mathbf{x}$ sur le sous-espace $\mathcal{H}^\natural$.

Pour cela, considérons l'opérateur $U_\mathbf{x}$ et l'ensemble convexe qui lui est associé dans $\mathbf{R}^s$: celui-ci est l'ensemble des opérateurs de la forme $\Sigma\alpha_i U_i U_\mathbf{x} U_i^{-1}$ ($\alpha_i \geqq 0$, $\Sigma\alpha_i = 1$, U_i unitaires appartenant à $\mathbf{R}^s$) et de leurs limites *uniformes*; comme on l'a vu au nº **1** de ce paragraphe, $(U_\mathbf{x})^\natural$ est l'élément de ce convexe qui appartient au centre de $\mathbf{R}^s$. Or, dans $\mathbf{R}^s$, les opérateurs définis par les éléments bornés de $\mathcal{H}$ forment un idéal *bilatère* (lemme 4); donc tous les éléments de l'enveloppe convexe des $UU_\mathbf{x}U^{-1}$ ($U \in \mathbf{R}^s$, U unitaire) sont de la forme $U_\mathbf{y}$ — on a du reste de façon précise, comme il résulte des calculs faits pour démontrer le lemme 4, la formule

$$UU_\mathbf{x}U^{-1} = U_\mathbf{y}, \tag{125}$$

avec

$$\mathbf{y} = SUSU\mathbf{x}, \tag{126}$$

en sorte qu'à l'enveloppe convexe des $UU_{\mathbf{x}}U^{-1}$ correspond, dans l'ensemble des éléments bornés de $\mathcal{H}$, l'enveloppe convexe des $SUSU_{\mathbf{x}}$, où U parcourt l'ensemble des éléments unitaires de $\mathbf{R}^s$. De là résulte, par un raisonnement analogue à celui qu'on a utilisé dans la démonstration du théorème 4, que $(U_{\mathbf{x}})^\natural$ est lui-même de la forme $U_{\mathbf{y}}$; $\mathbf{y}$ est dans $\mathcal{H}^\natural$ puisque $U_{\mathbf{y}}$ est « central » et de plus appartient à l'enveloppe convexe fermée dans $\mathcal{H}$ de l'ensemble des $SUSU\mathbf{x}$, donc vérifie en particulier

$$\|\mathbf{y}\| \leqq \|\mathbf{x}\|. \tag{127}$$

Ceci étant, nous pouvons de cette façon définir une application linéaire $\mathbf{x} \to \mathbf{x}' = \mathbf{y}$ de l'ensemble des éléments bornés de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}^\natural$, en posant

$$U_{\mathbf{x}'} = (U_{\mathbf{x}})^\natural, \tag{128}$$

et il est clair que tout revient à montrer que cette application coïncide nécessairement avec l'application $^\natural$ qu'on a définie dans $\mathcal{H}$; c'est ce que nous allons montrer en comparant les propriétés algébriques des deux opérations ainsi obtenues.

Or d'après les propriétés de l'opération $^\natural$ dans $\mathbf{R}^s$, on a nécessairement

$$(U_s V_s \mathbf{x})' = \mathbf{x}' \quad \text{quel que soit } s \in G \tag{129}$$

pour tout $\mathbf{x}$ borné [en effet, à l'élément $\mathbf{y} = U_s V_s \mathbf{x} = U_s S U_s S \mathbf{x}$ est associé dans $\mathbf{R}^s$ l'opérateur $U_{\mathbf{y}} = U_s U_{\mathbf{x}} U_s^{-1}$: *cf.* (125) et (126); on a donc $(U_{\mathbf{y}})^\natural = (U_{\mathbf{x}})^\natural$, c'est-à-dire $\mathbf{x}' = \mathbf{y}'$]; si alors nous appliquons l'opération $'$ à l'inégalité

$$\| \Sigma \alpha_i U_{s_i} V_{s_i} \mathbf{x} - \mathbf{x}^\natural \| < \varepsilon \tag{130}$$

(*cf.* théorème 3), il vient, en tenant compte de la continuité de $'$ [équat. (127)] et du fait de cette opération se réduit évidemment à l'identité sur les éléments centraux :

$$\| \mathbf{x}' - \mathbf{x}^\natural \| < \varepsilon; \tag{131}$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on a bien

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}^\natural \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \text{ borné.} \tag{132}$$

En définitive, nous avons démontré ceci : *si l'anneau* $\mathbf{R}^s$ *est de classe finie, l'opération* $\natural$ *définie dans* $\mathbf{R}^s$ *est compatible avec celle qui est définie dans* $\mathcal{H}$, *en ce sens qu'on a*

$$(133) \qquad (\mathrm{U}_{\mathbf{x}})^{\natural} = \mathrm{U}_{\mathbf{x}^{\natural}}$$

pour tout élément borné $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$.

Ce point étant acquis, il n'y a aucune difficulté à démontrer la nécessité de la condition énoncée; considérons en effet le sous-espace fermé $\mathcal{F}$ engendré par les $\mathrm{U}_s\mathbf{x}(s \in \mathrm{G},\ \mathbf{x} \in \mathcal{H}^{\natural})$, et soit $\mathcal{F}^{\perp}$ le sous-espace orthogonal; pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^{\perp}$, on a évidemment $\mathbf{x}^{\natural} = 0$; d'autre part, soit P l'opérateur de projection sur $\mathcal{F}^{\perp}$; comme $\mathcal{F}^{\perp}$ est invariant à gauche (et même à droite, car on a $\mathrm{U}_s\mathbf{x} = \mathrm{V}_s^{-1}\mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{H}^{\natural}$), P appartenant à $\mathbf{R}^s$; pour tout $\mathbf{x}$ borné, on aura donc aussi $\mathrm{PU}_{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^s$; or on a $\mathrm{PU}_{\mathbf{x}} = \mathrm{U}_{\mathrm{P}\mathbf{x}}$; puisque l'opération $\natural$ est nulle sur $\mathcal{F}^{\perp}$, on aura donc en tenant compte de (133)

$$(134) \qquad (\mathrm{PU}_{\mathbf{x}})^{\natural} = 0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \text{ borné};$$

mais P appartenant au *centre* de $\mathbf{R}^s$, et les $\mathrm{U}_{\mathbf{x}}$ formant dans $\mathbf{R}^s$ un idéal bilatère, il s'ensuivra plus généralement que

$$(135) \qquad [(\mathrm{PU}_{\mathbf{x}})^{\star}(\mathrm{PU}_{\mathbf{x}})]^{\natural} = 0,$$

ce qui exige

$$(136) \qquad \mathrm{PU}_{\mathbf{x}} = 0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \text{ borné},$$

autrement dit $\mathrm{U}_{\mathrm{P}\mathbf{x}} = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{P}\mathbf{x} = 0$ pour tout $\mathbf{x}$ borné : ces $\mathbf{x}$ étant partout denses dans $\mathcal{H}$, il en résulte $\mathrm{P} = 0$, et finalement $\mathcal{F} = \mathcal{H}$ comme annoncé.

Suffisance de la condition. — Supposons que les $\mathrm{U}_s\mathbf{x}(s \in \mathrm{G},\ \mathbf{x} \in \mathcal{H}^{\natural})$ soustendent $\mathcal{H}$; il faut montrer qu'alors $\mathbf{R}^s$ est de classe finie, ce qu'on va faire en construisant explicitement un *système complet de traces* sur $\mathbf{R}^s$ (lemme 12), système que voici : on prend au hasard un $\mathbf{x}$ *central*, et l'on pose

$$(137) \qquad \sigma_{\mathbf{x}}(\mathrm{A}) = \langle \mathrm{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \qquad \text{pour } \mathrm{A} \in \mathbf{R}^s.$$

La formule précédente définit évidemment une forme linéaire positive sur $\mathbf{R}^s$; cette forme est centrale (donc est une trace); en effet, comme on l'a vu [équat. (68)] on a

$$(138) \qquad U_f \mathbf{x} = V_f \mathbf{x} \qquad \text{pour } f \in \mathbf{L},$$

d'où

$$(139) \qquad \begin{aligned} \sigma_{\mathbf{x}}(U_f U_g) &= \langle U_f U_g \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle U_f V_g \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle V_g U_f \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ &= \langle U_f \mathbf{x}, V_{\tilde{g}} \mathbf{x} \rangle = \langle U_f \mathbf{x}, U_{\tilde{g}} \mathbf{x} \rangle = \langle U_g U_f \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ &= \sigma_{\mathbf{x}}(U_g U_f), \end{aligned}$$

ce qui prouve

$$(140) \qquad \sigma_{\mathbf{x}}(AB) = \sigma_{\mathbf{x}}(BA)$$

lorsque A et B sont de la forme U_f; on passe de là au cas général en observant que $\sigma_{\mathbf{x}}(A)$ est une fonction continue de A pour la topologie forte, d'une part, et que d'autre part tout $A \in \mathbf{R}^s$ est limite forte d'opérateurs U_f (ceux-ci forment en effet une algèbre auto-adjointe qui engendre $\mathbf{R}^s$).

Il reste à montrer que l'on a bien ainsi un système *complet* de traces; or dire qu'on a

$$(141) \qquad \sigma_{\mathbf{x}}(A^* A) = 0 \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \mathcal{H}^{\natural},$$

c'est dire que l'opérateur $A \in \mathbf{R}^s$ est nul sur le sous-espace $\mathcal{H}^{\natural}$; il est donc nul aussi sur le sous-espace obtenu en soumettant $\mathcal{H}^{\natural}$ aux translations à droite (on a $AV_s = V_s A$); mais les translatés à droite d'un $\mathbf{x} \in \mathcal{H}^{\natural}$ sont par définition identiques à ses translatés à gauche; donc A est nul sur le sous-espace sous-tendu par les $U_s \mathbf{x}$ ($s \in G$, $\mathbf{x} \in \mathcal{H}^{\natural}$), c'est-à-dire par hypothèse sur tout $\mathcal{H}$, ce qui achève la démonstration du théorème 5.

5. Définition et caractérisation des groupes de classe finie. — Comme on le verra par la suite, les résultats de ce Mémoire donnent une réponse complète aux problèmes I, II, IV, V, VII et VIII posés dans l'Introduction toutes les fois que l'on n'a à considérer que des mesures de classe finie; il importe donc de caractériser les *groupes de classe finie*, c'est-à-dire ceux sur lesquels *toute* mesure centrale et de type positif est de classe finie.

Théorème 6. — *Pour qu'un groupe* G *soit de classe finie, il faut et il* *suffit qu'il existe dans* G *un système fondamental de voisinages de l'unité invariants par les automorphismes intérieurs de* G.

Nécessité de la condition. — On va l'obtenir en exprimant que la d. r. u. *régulière* de G est de classe finie; si Z^2 désigne l'ensemble des fonctions centrales contenues dans L^2, on doit écrire (th. 5) que les translatées des fonctions de Z^2 engendrent tout L^2.

Il en résulte tout d'abord que, étant donné un $s \neq e$, il existe une $f \in Z^2$ telle que $U_s f \neq f$ (car si U_s se réduisait à I sur Z^2, il se réduirait aussi à I sur L^2 tout entier, puisqu'il permute aux translations à droite); si l'on introduit alors la fonction *continue, centrale et tendant vers zéro à l'infini* $g(x) = \langle U_x f, f \rangle$, on a $g(s) \neq g(e)$ en vertu du cas limite de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour un nombre $\alpha > 0$ convenable, l'inégalité $|g(x)| \geqq \alpha$ définit alors un voisinage U de e, invariant et compact, et ne contenant pas s. On voit donc déjà que l'intersection des voisinages invariants compacts de e est réduite à e. Il reste à montrer que tout voisinage V de e contient un tel voisinage. On peut évidemment se borner à le prouver dans le cas où V est ouvert, et est lui-même contenu dans un voisinage invariant compact V_0 de e. Les points de V_0 non situés dans V forment alors un compact K ne contenant pas e. D'après ce qui précède, pour tout $s \in K$ on peut trouver un voisinage invariant compact $U(s)$ de l'unité ne contenant pas s; les complémentaires de ces $U(s)$ forment un recouvrement ouvert de K, de sorte que, en appliquant le lemme de Borel-Lebesgue, on voit que l'on peut trouver des voisinages invariants compacts $U(s_1), \ldots, U(s_n)$ de e tels que $U = U(s_1) \cap \ldots \cap U(s_n)$ ne rencontre pas K; il est clair que U est un voisinage invariant compact de e, de même que $U \cap V_0$, qui est contenu dans V, ce qui prouve la propriété annoncée.

Suffisance de la condition. — Montrons d'abord que, si la condition de l'énoncé est réalisée, on peut, pour tout voisinage V de e, trouver une fonction centrale $f \geqq 0$ appartenant à **L**, nulle en dehors de V, et telle que $\int f(x)\,dx = 1$. Pour cela, on choisit un voisinage compact U de e tel que $U.U \subset V$, puis un voisinage invariant compact U′ tel que $U' \subset U$, et, g désignant la fonction caractéristique de U′ (laquelle est dans Z^2 et n'est pas nulle au sens de L^2), on pose $f(x) = k \langle U_x g, g \rangle$, où k est une constante > 0 convenable : f répond évidemment aux conditions requises.

Maintenant, soit $\mathbf{Z}$ l'ensemble des fonctions centrales contenues dans $\mathbf{L}$ (c'est-à-dire, le centre de l'algèbre $\mathbf{L}$); soit $\mathbf{L}_0$ l'ensemble des combinaisons linéaires de translatées de fonctions de $\mathbf{Z}$: nous allons montrer que toute $f \in \mathbf{L}$ est limite uniforme de fonctions appartenant à $\mathbf{L}_0$ qui restent nulles en dehors d'un compact fixe. C'est évidemment le cas si $f = g \star h$ avec $g \in \mathbf{L}$ et $h \in \mathbf{Z}$; donc, la propriété à démontrer est vraie pour les fonctions $f \star g$ où $g \in \mathbf{Z}$; mais d'après ce qui précède, on peut s'arranger pour que $g \in \mathbf{Z}$ soit nulle en dehors d'un voisinage arbitrairement petit de e, en sorte que f est limite uniforme de fonctions de la forme $f \star g$ ($g \in \mathbf{Z}$) qui sont nulles en dehors d'un voisinage arbitraire du support de f : d'où notre assertion.

Soient alors μ une mesure centrale et de type positif sur G, $\{\mathcal{H}, U_x, V_x, S\}$ la d. r. u. de G qu'elle définit, et $f \to \mathbf{f}$ l'application canonique de $\mathbf{L}$ dans $\mathcal{H}$. Il est clair que, par cette application, les éléments du centre $\mathbf{Z}$ de $\mathbf{L}$ conduisent à des éléments de $\mathcal{H}^\natural$; d'autre part, la formule $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \mu(\tilde{g} \star f)$ qui définit le produit scalaire dans $\mathcal{H}$ montre que, si l'on se borne à considérer des fonctions nulles en dehors d'un compact fixe, l'application $f \to \mathbf{f}$ de $\mathbf{L}$ dans $\mathcal{H}$ est continue au sens de la convergence uniforme sur G; puisqu'on a vu que $\mathbf{Z}$ « engendre » $\mathbf{L}$ tout entier, il s'ensuit que les éléments de $\mathcal{H}$ qui sont de la forme $\Sigma U_{s_i} \mathbf{f}_i (s_i \in G,\ f_i \in \mathbf{Z})$ permettent d'approcher dans $\mathcal{H}$ tous les éléments $\mathbf{f}(f \in \mathbf{L})$, donc sont partout denses dans $\mathcal{H}$: par conséquent, la condition du théorème 5 est vérifiée, et μ est de classe finie, ce qui achève la démonstration.

Remarque. — Il n'est pas invraisemblable que l'on puisse définir les groupes de classe finie de la façon suivante : ce sont les groupes dont tous les *caractères* sont de classe finie. Cette conjecture ne pourra être vérifiée qu'une fois la théorie générale des caractères complètement édifiée.

IV. — **Caractères de classe finie.**

1. Caractères d'un groupe localement compact unimodulaire. — Définition 5. — *On dit qu'une double représentation unitaire*

$$\{\mathcal{H}, U_x, V_x, S\}$$

d'un groupe G *est irréductible lorsque l'algèbre autoadjointe engendrée par les opérateurs* U_x *et* V_x $(x \in G)$ *est irréductible. On appelle caractère de* G *toute mesure de Radon, centrale et de type positif, définissant une double représentation unitaire irréductible de* G.

Que la définition précédente soit en accord avec les notions classiques, c'est ce qu'on montrera plus loin. On notera que, pour nous, un caractère peut fort bien, *a priori*, être une *mesure* et non pas nécessairement une *fonction*; un problème fondamental de la théorie est à ce point de vue le suivant : *si une mesure* μ *est un caractère de* G, *peut-on trouver une fonction* $\chi(x)$, *localement sommable pour la mesure de Haar, telle que l'on ait*

$$d\mu(x) = \chi(x)\,dx\,? \tag{142}$$

On va donner une réponse affirmative à ce problème dans le cas où le caractère μ est de classe finie.

2. Forme des caractères de classe finie. — Théorème 7. — *Pour qu'un caractère* μ *soit de classe finie, il faut et il suffit qu'il soit de la forme*

$$d\mu(x) = \chi(x)\,dx, \tag{143}$$

où χ *est une fonction* continue *sur* G.

Suffisance de la condition. — Si μ a la forme (143), la d. r. u. définie par μ possède un élément générateur $\mathbf{u}$ (§ I, nº **1**, exemple 3); $\mathbf{u}$ est « central », et comme les $U_s\mathbf{u}$ soustendent $\mathcal{H}$, la condition du théorème 5 est réalisée. (Noter que ce raisonnement s'applique même si μ n'est pas un caractère).

Nécessité de la condition. — Considérons la d. r. u. $\{\mathcal{H}, U_x, V_x, S\}$ engendrée par μ; comme les seuls opérateurs permutables aux U_x et aux V_x sont les scalaires, l'anneau $\mathbf{R}^\natural$ défini au paragraphe I, n° 3, est de dimension 1; donc les anneaux $\mathbf{R}^s$ et $\mathbf{R}^d$ sont des *facteurs*, et ceci caractérise évidemment les d. r. u. définies par les caractères de G.

Si la mesure μ est de classe finie, il résulte de là, en utilisant le lemme 15, que ces anneaux sont des algèbres *simples*. Mais nous connaissons un idéal bilatère non nul de $\mathbf{R}^s$: c'est l'ensemble des opérateurs définis par les éléments *bornés* de $\mathcal{H}$ (§ I, lemme 4); par conséquent, les opérateurs ainsi obtenus forment tout $\mathbf{R}^s$, et en particulier l'opérateur unité est défini par un élément borné $\mathbf{u}$ de $\mathcal{H}$. Ceci veut dire que, pour toute $f \in \mathbf{L}$, on a

(144) $$\mathrm{I}.\mathbf{f} = U_{\mathbf{u}}\mathbf{f} = V_f\mathbf{u}$$

(*cf.* § I, déf. 2); si l'on tient compte de la définition des V_f, il vient donc

(145) $$\mathbf{f} = \int V_s\mathbf{u}.f(s^{-1})\,ds \qquad \text{pour toute } f \in \mathbf{L},$$

mais l'opérateur I étant dans $\mathbf{R}^\natural$, l'élément $\mathbf{u}$ est central, et l'on peut tout aussi bien écrire

(146) $$\mathbf{f} = V_f\mathbf{u} = U_f\mathbf{u} = \int U_s\mathbf{u}.f(s)\,ds;$$

ceci étant on aura, pour $f, g \in \mathbf{L}$,

(147) $$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \langle U_f\mathbf{u}, V_g\mathbf{u} \rangle = \langle U_{\tilde{g}\star f}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \int \langle U_s\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \tilde{g} \star f(s)\,ds,$$

et comme on a par définition

(148) $$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int \tilde{g} \star f(s)\,d\mu(s),$$

il vient

(149) $$d\mu(s) = \langle U_s\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle\,ds,$$

ce qui démontre le théorème.

Remarque. — La démonstration repose uniquement sur le fait que l'opérateur unité est de la forme $U_{\mathbf{u}}$. On aurait pu, pour démontrer ce point, se passer du lemme 15; il suffisait en effet de remarquer ceci : puisque la mesure μ est de classe finie, il existe certainement dans $\mathbf{R}^\natural$ des opérateurs de la forme en question, et puisque $\mathbf{R}^\natural$ est réduit aux scalaires, la propriété annoncée de l'opérateur unité en résulte. Mais la démonstration que nous avons donnée est plus intéressante; elle montre en effet que si un caractère n'est pas défini par une fonction continue, les opérateurs $U_{\mathbf{x}}$ forment, dans le facteur $\mathbf{R}^s$, un idéal bilatère *non trivial*; ce facteur *n'est donc pas simple*, en sorte que, si le groupe G est séparable (auquel cas l'espace $\mathcal{H}$ l'est aussi, ce qui permet d'appliquer la classification des facteurs due à Murray et von Neumann), $\mathbf{R}^s$ ne peut appartenir qu'aux classes (I_∞) ou (II_∞) : on sait en effet ([32]) que les facteurs de classe finie et ceux de classe (III_∞) sont simples. En définitive, *les facteurs définis par les caractères d'un groupe unimodulaire séparable ne peuvent pas être « purement infinis »;* on est donc sûr de pouvoir introduire des traces (non nécessairement partout définies) dans ces facteurs ([33]).

3. TRACE ASSOCIÉE A UN CARACTÈRE DE CLASSE FINIE. — Soit

$$d\mu(x) = \chi(x)\,dx$$

un caractère de classe finie, où χ est comme on vient de le voir une fonction continue, centrale et de type positif sur G. Si l'on considère la d. r. u. correspondante, il existe comme on l'a vu un élément $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ tel que l'on ait

$$\mathbf{f} = U_f \mathbf{u} = V_f \mathbf{u} \qquad \text{pour toute } f \in \mathbf{L}, \tag{150}$$

et l'on a en outre

$$\chi(s) = \langle U_s \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle. \tag{151}$$

On peut évidemment supposer la fonction χ normalisée par la condition $\chi(e) = 1$, en sorte qu'alors $\mathbf{u}$ est de module 1.

Puisque l'anneau d'opérateurs $\mathbf{R}^s$ engendré par les U_x est un facteur, l'opération $\natural$ y dégénère en une *trace* : on a de façon précise

$$A^\natural = \mathrm{Sp}(A).I \qquad \text{pour tout } A \in \mathbf{R}^s. \tag{152}$$

([32]) *Cf.* ([30]).

([33]) On trouvera des résultats plus précis dans le Chapitre II (§ I).

Il est facile de déterminer explicitement cette trace. En effet, c'est la *seule et unique* forme linéaire positive et centrale sur $\mathbf{R}^s$ qui prenne la valeur 1 sur l'opérateur I; mais comme $\mathbf{u}$ est central et de norme 1, l'expression $\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle$ possède les mêmes propriétés : on a donc

$$\mathrm{Sp}(A) = \langle A\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle \quad \text{pour tout } A \in \mathbf{R}^s, \tag{153}$$

ce qui montre en passant la continuité faible de la trace, propriété générale aux facteurs de classe finie comme on sait.

4. Propriété extrémale des caractères de classe finie. — Dans l'ensemble des mesures centrales et de type positif définies sur un groupe G, on peut définir une relation d'ordre de façon évidente : on écrit pour cela que l'on a $\mu \leqslant \nu$ lorsque la mesure $\nu - \mu$ est de type positif. Nous allons montrer que cette relation d'ordre permet de distinguer les caractères de classe finie par une propriété extrémale; nous aurons pour cela besoin de la propriété suivante :

Lemme 16. — *Soit* $\{\mathcal{H}, U_s, V_s, S\}$ *la d. r. u. définie par une mesure* μ *de classe finie; pour que* μ *soit un caractère, il faut et il suffit que le sous-espace* $\mathcal{H}^\natural$ *formé des éléments centraux de* $\mathcal{H}$ *soit de dimension* 1.

Tout d'abord, si μ est un caractère, l'anneau $\mathbf{R}^\natural$ est de dimension 1 en sorte que, dans $\mathcal{H}^\natural$, les éléments bornés forment un sous-espace de dimension 0 ou 1; or ces éléments sont partout denses dans $\mathcal{H}^\natural$ (ils comprennent entre autres les $\mathbf{f}^\natural$ où $f \in \mathbf{L}$); donc $\mathcal{H}^\natural$ est de dimension 0 ou 1, et en fait de dimension 1 puisque, μ étant de classe finie, $\mathcal{H}^\natural$ n'est pas nul.

Si réciproquement $\mathcal{H}^\natural$ est de dimension 1, $\mathbf{R}^\natural$ est de dimension 1; en effet, la relation $U_sV_sA\mathbf{x} = AU_sV_s\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ $(A \in \mathbf{R}^\natural,\ \mathbf{x} \in \mathcal{H}^\natural)$ montre que $\mathbf{R}^\natural$ conserve $\mathcal{H}^\natural$; chaque $A \in \mathbf{R}^\natural$ se réduit donc à un scalaire sur $\mathcal{H}^\natural$, donc aussi sur $\mathcal{H}$ tout entier, puisque A permute aux U_s et que les $U_s\mathbf{x}$ $(\mathbf{x} \in \mathcal{H}^\natural)$ soustendent $\mathcal{H}$ lorsque μ est de classe finie : d'où le lemme.

Théorème 8. — *Pour qu'une mesure centrale et de type positif* μ *soit un caractère de* G, *il faut que toute mesure, centrale et de type positif, majorée par* μ *soit proportionnelle à* μ*; cette condition est aussi suffisante lorsque* μ *est de classe finie.*

Nécessité de la condition. — Considérons la d. r. u. $\{\mathcal{H}, U_x, V_x, S\}$ définie par μ, et l'application canonique $f \to \mathbf{f}$ de $\mathbf{L}$ sur un sous-espace partout dense de $\mathcal{H}$; on a par définition

$$(154) \qquad \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int \tilde{g} \star f(s) \, d\mu(s) \qquad (f, g \in \mathbf{L});$$

soit maintenant ν une mesure centrale et de type positif majorée par μ; pour toute $f \in \mathbf{L}$, on a donc

$$(155) \qquad 0 \leqq \nu(\tilde{f} \star f) \leqq \mu(\tilde{f} \star f) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle;$$

on déduit de là, par des raisonnements bien connus, l'existence dans $\mathcal{H}$ d'un opérateur hermitien H, vérifiant $0 \leqq H \leqq I$, tel que

$$(156) \qquad \nu(\tilde{g} \star f) = \langle H\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle \quad \text{pour} \quad f, g \in \mathbf{L}.$$

Si l'on tient compte du fait que les opérateurs U_s et V_s proviennent des translations dans $\mathbf{L}$, on vérifie immédiatement, en tenant compte de ce que ν est centrale, que H permute aux U_s et aux V_s; si donc μ est un caractère de G, H se réduit à un scalaire, et ν est proportionnelle à μ comme annoncé.

Suffisance de la condition. — Supposons maintenant μ de classe finie; on peut alors définir sur l'anneau de classe finie $\mathbf{R}^s$ une opération $\natural$, et un système complet de traces. En particulier, prenons un élément arbitraire $\mathbf{a} \in \mathcal{H}^\natural$, et posons

$$(157) \qquad \mu_{\mathbf{a}}(f) = \langle (U_f)^\natural \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle;$$

on obtient ainsi une mesure centrale et de type positif sur G; en effet, le premier membre est encore donné, puisque $\mathbf{a}$ est central, par

$$(158) \qquad \mu_{\mathbf{a}}(f) = \langle U_f \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \int \langle U_s \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle f(s) \, ds,$$

en sorte que $\mu_{\mathbf{a}}$ n'est autre que la mesure $\langle U_s \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle ds$; que cette mesure soit de type positif est évident, et elle est centrale en vertu par exemple de la relation $(U_{f \star g})^\natural = (U_{g \star f})^\natural$.

Maintenant, supposons $\mathbf{a}$ borné; on aura alors

$$(159) \quad \mu_{\mathbf{a}}(\tilde{f} \star f) = \| U_f \mathbf{a} \|^2 = \| V_{\mathbf{a}} \mathbf{f} \|^2 \leqq \| V_{\mathbf{a}} \|^2 . \| \mathbf{f} \|^2 = \| V_{\mathbf{a}} \|^2 \mu(\tilde{f} \star f),$$

en sorte que la mesure $\mu_{\mathbf{a}}$ est, à un facteur constant près, majorée par μ. Si donc la condition de l'énoncé est remplie, $\mu_{\mathbf{a}}$ est proportionnelle à μ, ce qui signifie évidemment que, pour tout élément *borné* et *central* $\mathbf{a}$ de $\mathcal{H}$, l'opérateur $V_{\mathbf{a}}$ est un scalaire. Comme $V_{\mathbf{a}}$ dépend biunivoquement de $\mathbf{a}$, il s'ensuit que les $\mathbf{a}$ en question forment un sous-espace de dimension 1 de $\mathcal{H}$: or ce sous-espace est partout dense dans $\mathcal{H}^{\natural}$ comme on l'a vu en démontrant le lemme 16; donc $\mathcal{H}^{\natural}$ lui-même est de dimension 1, ce qui montre que μ est un caractère de G d'après le lemme 16.

Corollaire 1 du théorème 8. — *Soit* K *l'ensemble* (convexe et compact) *formé par les fonctions continues, centrales, de type positif, prenant en* e *une valeur* $\leqq 1$; *alors les points extrémaux non nuls de* K *ne sont autres que les caractères* χ *de* G, *de classe finie et vérifiant* $\chi(e) = 1$.

Ce corollaire se démontre identiquement comme la propriété analogue des fonctions « élémentaires » de type positif ([34]).

Corollaire 2 du théorème 8. — *Tout groupe* G *de classe finie possède un système complet de caractères, c'est-à-dire, pour tout* $s \neq e$, *il existe un caractère* χ *de* G *vérifiant* $\chi(s) \neq \chi(e)$.

En effet, s'il n'en était pas ainsi pour un $s \in G$, la translation $x \to xs$ conserverait tous les caractères de G, donc aussi (corollaire 1 combiné avec le théorème de Krein et Milman) toute fonction continue, centrale et de type positif sur G, ce qui est évidemment absurde sur un groupe de classe finie, puisqu'on peut toujours trouver une telle fonction qui soit nulle en dehors d'un voisinage arbitrairement petit de l'unité.

Remarque. — Le corollaire 1 du théorème 8 montre que, sur un groupe abélien, la définition que nous avons donnée des caractères est celle qu'on connaît déjà; il en est de même sur un groupe compact (en effet sur un tel groupe, une fonction continue, centrale et de type

---

([34]) FTP, p. 40, prop. 6.

positif, est développable en une série à coefficients positifs de caractères, ce qui met en évidence la propriété extrémale de ceux-ci).

5. Équation fonctionnelle des caractères de classe finie. — Soit $\chi(s)$ une fonction *continue, centrale et de type positif* sur G, et considérons la mesure (centrale et de type positif)

$$d\mu(x) = \chi(x)\,dx; \tag{160}$$

comme on l'a vu en démontrant le théorème 7, celle-ci est *de classe finie*. Rappelons encore que, si l'on considère la d. r. u. correspondante $\{\mathcal{H}, U_x, V_x, S\}$, il existe (§ I, n° **1**, exemple 3) un $\mathbf{u} \in \mathcal{H}$ vérifiant les conditions suivantes :

$$U_s V_s \mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \text{pour tout } s \in G; \tag{161}$$

$$S\mathbf{u} = \mathbf{u}; \tag{162}$$

$$\chi(s) = \langle U_s \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, V_s \mathbf{u} \rangle; \tag{163}$$

enfin, les $U_s \mathbf{u} (s \in G)$ sous-tendent $\mathcal{H}$ tout entier.

Pour parvenir à l'équation fonctionnelle des caractères, bien connue dans les cas classiques, nous allons introduire *l'espace de la fonction* χ, et y définir, une fois de plus, une opération $\natural$.

Nous appellerons espace de χ l'ensemble $\mathcal{C}(\chi)$ des fonctions qui sont combinaisons linéaires de translatées de χ, ou limites *uniformes sur* G de telles fonctions : c'est donc le *plus petit* espace vectoriel de fonctions définies sur G qui vérifie les conditions suivantes :

a. il contient χ;

b. il est invariant par translation;

c. il est fermé pour la topologie de la convergence uniforme sur G.

On notera que, χ étant centrale, il importe peu de distinguer les translations à gauche des translations à droite; donc, toute fonction appartenant à $\mathcal{C}(\chi)$ est limite uniforme sur G de fonctions de la forme

$$\varphi(s) = \Sigma \alpha_i \chi(a_i^{-1} s), \tag{164}$$

et réciproquement.

Si l'on utilise la formule (163), on peut écrire (164) sous la forme

$$(165)\qquad \varphi(s) = \langle U_s \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle,$$

où l'élément $\mathbf{x}$ est donné par

$$(166)\qquad \mathbf{x} = \Sigma \overline{\alpha}_i U_{a_i} \mathbf{u};$$

si l'on suppose comme nous le ferons $\chi(e) = 1$, on a donc

$$(167)\qquad |\varphi(s)| \leq \|\mathbf{x}\|;$$

comme les $\mathbf{x}$ de la forme (166) sont partout denses dans $\mathcal{H}$, on voit que $\mathcal{C}(\chi)$ contient toutes les fonctions

$$(168)\qquad \chi_{\mathbf{x}}(s) = \langle U_s \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle,$$

où cette fois $\mathbf{x}$ est arbitraire dans $\mathcal{H}$; et les $\chi_{\mathbf{x}}$ sont partout denses dans $\mathcal{C}(\chi)$.

Nous allons maintenant chercher comment l'opération $^\natural$ peut s'interpréter quand on passe du vecteur $\mathbf{x}$ à la fonction $\chi_{\mathbf{x}}$. Rappelons tout d'abord que $\mathbf{x}^\natural$ est le seul élément central de $\mathcal{H}$ contenu dans le convexe fermé $K_{\mathbf{x}}$ engendré par les $U_s V_s \mathbf{x}$.

Par ailleurs, remarquons que, si l'on pose

$$(169)\qquad \mathbf{y} = U_s V_s \mathbf{x},$$

on a

$$(170)\qquad \chi_{\mathbf{y}}(x) = \langle U_x \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle = \langle U_x \mathbf{u}, U_s V_s \mathbf{x} \rangle = \langle V_{s^{-1}} U_{s^{-1}} U_x \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle,$$

d'où, en tenant compte de (161) et du fait que les V permutent aux U :

$$(171)\qquad \chi_{\mathbf{y}}(x) = \chi_{\mathbf{x}}(s^{-1} x s).$$

Ceci étant, disons pour abréger que deux fonctions définies sur G sont *conjuguées* si l'on passe de l'une à l'autre par un automorphisme intérieur de G; nous voyons alors que, aux éléments de l'enveloppe convexe $K_{\mathbf{x}}^0$ de l'ensemble des $U_s V_s \mathbf{x}$ correspondent les fonctions qui appartiennent à l'enveloppe convexe de l'ensemble des fonctions conjuguées de $\chi_{\mathbf{x}}$.

Il s'ensuit, en raison de la relation (167), que les fonctions $\chi_{\mathbf{y}}$ associées aux $\mathbf{y} \in K_{\mathbf{x}}$ (adhérence de $K_{\mathbf{x}}^0$) sont contenues dans l'enveloppe convexe *fermée* de l'ensemble des conjuguées de $\chi_{\mathbf{x}}$; en fait, on obtient *toute* l'enveloppe convexe fermée des conjuguées de $\chi_{\mathbf{x}}$; car si cette enveloppe contient une fonction φ, on peut trouver une suite de points $\mathbf{y}_n \in \mathrm{K}_{\mathbf{x}}$ telle que $\chi_{\mathbf{y}_n}$ converge uniformément sur G vers φ; mais $\mathrm{K}_{\mathbf{x}}$ étant fermé et borné est faiblement compact, en sorte qu'on peut supposer que $\mathbf{y}_n$ converge faiblement vers un $\mathbf{y}_0 \in \mathrm{K}_{\mathbf{x}}$, auquel cas $\chi_{\mathbf{y}_n}$ converge en chaque point de G vers $\chi_{\mathbf{y}_0}$ qui est donc nécessairement égale à φ, d'où notre assertion.

Maintenant, il est clair qu'on a les propriétés suivantes :

a. la correspondance entre le vecteur $\mathbf{x}$ et la fonction $\chi_{\mathbf{x}}$ est biunivoque (puisque les $\mathrm{U}_s\mathbf{u}$ sous-tendent tout $\mathcal{H}$);

b. pour que $\mathbf{x}$ soit un élément central de $\mathcal{H}$, il faut et il suffit que la fonction $\chi_{\mathbf{x}}$ soit centrale (c'est-à-dire invariante par les automorphismes intérieurs de G).

Si donc l'on combine ce qui précède avec le théorème 3 du paragraphe II, on parvient au résultat suivant : *pour toute fonction φ de la forme $\chi_{\mathbf{x}}$ ($\mathbf{x} \in \mathcal{H}$), l'enveloppe fermée convexe de l'ensemble des fonctions conjuguées de φ contient une fonction centrale et une seule.*

Nous désignerons cette fonction centrale par $\varphi^\natural$; on a ainsi défini une opération $^\natural$ dans un sous-espace partout dense de $\mathcal{C}(\chi)$, et il est clair que cette opération est donnée par

$$(\chi_{\mathbf{x}})^\natural = \chi_{\mathbf{x}^\natural} \qquad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \mathcal{H}; \tag{172}$$

maintenant, on peut prolonger cette opération par continuité à $\mathcal{C}(\chi)$ tout entier, puisque $\varphi \to \varphi^\natural$ est évidemment une application linéaire continue pour la topologie de la convergence uniforme sur G. On va voir que la propriété caractéristique de l'opération $^\natural$ a encore lieu dans $\mathcal{C}(\chi)$:

Lemme 17. — *Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}(\chi)$, $\varphi^\natural$ est la seule fonction centrale contenue dans l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble des conjuguées de φ.*

Montrons tout d'abord que $\varphi^\natural$ appartient effectivement à cette enveloppe convexe fermée. Soit $\varepsilon > 0$; on peut trouver un $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ tel que

$$\|\varphi - \chi_{\mathbf{x}}\| < \varepsilon, \tag{173}$$

d'où

$$\| \varphi^\natural - (\chi_{\mathbf{x}})^\natural \| < \varepsilon; \tag{174}$$

d'autre part, on peut trouver des $a_i \in G$ et des nombres $\alpha_i (\alpha_i \geqq 0, \Sigma\alpha_i = 1)$ tels que l'on ait

$$\left| \Sigma\alpha_i \chi_{\mathbf{x}}(a_i x a_i^{-1}) - \chi_{\mathbf{x}}^\natural(x) \right| < \varepsilon \qquad \text{pour tout } x \in G; \tag{175}$$

il vient alors avec les relations précédentes :

$$| \Sigma\alpha_i \varphi(a_i x a_i^{-1}) - \varphi^\natural(x) | < 3\varepsilon \qquad \text{pour tout } x \in G, \tag{176}$$

ce qui est la propriété annoncée.

Reste à montrer que $\varphi^\natural$ est la seule fonction centrale possédant cette propriété; or soit ψ une fonction centrale située dans l'enveloppe fermée convexe des conjugées de φ; pour tout $\varepsilon > 0$, on peut réaliser la condition

$$| \Sigma\alpha_i \varphi(a_i x a_i^{-1}) - \psi(x) | < \varepsilon \qquad \text{pour tout } x \tag{177}$$

(avec $\alpha_i \geqq 0$, $\Sigma\alpha_i = 1$); tenons compte alors du fait que l'opération $^\natural$ est continue, et que $\theta^\natural$ ne change pas si l'on remplace une fonction θ par ses conjuguées, et appliquons cette opération à l'inégalité (177); il vient

$$| \varphi^\natural(x) - \psi^\natural(x) | < \varepsilon \qquad \text{pour tout } x, \tag{178}$$

et comme $\psi^\natural = \psi$ puisque ψ est centrale, on parvient à

$$| \varphi^\natural(x) - \psi(x) | < \varepsilon, \tag{179}$$

ce qui, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, achève la démonstration.

Nous sommes maintenant en mesure de généraliser l'équation fonctionnelle des caractères [35] :

---

[35] Sur un groupe compact, on a visiblement d'après le lemme **17**

$$\varphi^\natural(x) = \int \varphi(uxu^{-1})\, du;$$

la relation (181) se réduit donc bien à l'équation fonctionnelle classique

$$\int \chi(uxu^{-1}s)\, du = \chi(x)\chi(s).$$

THÉORÈME 9. — *Soit χ une fonction continue, centrale, de type positif et vérifiant $\chi(e)=1$; posons*

$$\chi_s(x)=\chi(xs) \qquad \text{pour } s\in G; \tag{180}$$

alors la condition nécessaire et suffisante pour que χ soit un caractère de G *est que l'on ait*

$$(\chi_s)^\natural=\chi(s)\chi \qquad \text{pour tout } s\in G. \tag{181}$$

Nécessité de la condition. — De

$$\begin{aligned}\chi_s(x)&=\langle U_{xs}\mathbf{u},\ \mathbf{u}\rangle=\langle U_x U_s\mathbf{u},\ \mathbf{u}\rangle\\ &=\langle U_x V_{s^{-1}}\mathbf{u},\ \mathbf{u}\rangle=\langle U_x\mathbf{u},\ V_s\mathbf{u}\rangle\end{aligned} \tag{182}$$

résulte, d'après (172) :

$$(\chi_s)^\natural(x)=\langle U_x\mathbf{u},\ (V_s\mathbf{u})^\natural\rangle; \tag{183}$$

si χ est un caractère, le sous-espace $\mathcal{H}^\natural$ des éléments centraux de $\mathcal{H}$ ne contient que les multiples de $\mathbf{u}$ (lemme 16); par conséquent, la fonction $(\chi_s)^\natural$ est proportionnelle à χ, et en tenant compte de la relation évidente

$$\theta^\natural(e)=\theta(e), \tag{184}$$

on voit immédiatement que le facteur de proportionnalité est $\chi(s)$.

Suffisance de la condition. — Puisque la correspondance entre les éléments $\mathbf{x}\in\mathcal{H}$ et les fonctions $\chi_{\mathbf{x}}$ est biunivoque, la relation (180) exprime que, pour tout $s\in G$, le vecteur $(V_s\mathbf{u})^\natural$ est proportionnel à $\mathbf{u}$; comme ces vecteurs soustendent tout $\mathcal{H}^\natural$, il s'ensuit que le sous-espace $\mathcal{H}^\natural$ est de dimension 1, donc que χ est un caractère de G (lemme 16).

V. — Décomposition spectrale des mesures de classe finie.

Le but de ce paragraphe est de montrer que toute mesure centrale, de type positif et de classe finie peut être décomposée en une somme continue de *caractères* de classe finie (au moins si G est séparable). Nous désignerons par μ une telle mesure; par $\{\mathcal{H}, U_s, V_s, S\}$ la d. r. u. correspondante; par $f\to\mathbf{f}$ l'application canonique de $\mathbf{L}$ sur un sous-espace partout dense de $\mathcal{H}$; par $\mathbf{R}^s$ et $\mathbf{R}^d$ les anneaux (de classe finie) engendrés dans $\mathcal{H}$ par les U_s et les V_s respectivement.

On aura par ailleurs à considérer en même temps des fonctions χ continues, centrales et de type positif; pour éviter toute confusion, on emploiera les notations $\mathcal{H}(\chi)$, $U_s(\chi)$, $V_s(\chi)$, $\mathbf{f}(\chi)$, ...

1. Construction du spectre. — Considérons l'anneau de classe finie $\mathbf{R}^s$; il possède un système complet de traces, donc de caractères (§ III, n° **2**), ceux-ci étant les traces qui, sur le centre $\mathbf{R}^\natural$ de $\mathbf{R}^s$, sont multiplicatives.

Soient Ω l'ensemble des caractères de $\mathbf{R}^s$; comme on l'a vu au paragraphe III, c'est un espace compact homéomorphe au spectre de l'anneau commutatif $\mathbf{R}^\natural$. Soient σ un élément de Ω; comme $\mathbf{R}^s$ contient les opérateurs de composition

$$U_f = \int_G U_s f(s)\, ds \qquad (f \in \mathbf{L}), \tag{185}$$

on peut considérer l'expression $\sigma(U_f)$; c'est évidemment une forme linéaire positive et centrale (autrement dit, une trace) sur l'algèbre $\mathbf{L}$; comme de plus σ est de norme 1 sur $\mathbf{R}^s$, on a

$$|\sigma(U_f)| \leq \| U_f \| \leq \int_G |f(s)|\, ds; \tag{186}$$

par suite, on peut associer à σ une fonction $\chi_\sigma(s)$, mesurable et bornée pour la mesure de Haar, telle que l'on ait

$$\sigma(U_f) = \int_G f(s)\, \chi_\sigma(s)\, ds \qquad \text{pour toute } f \in \mathbf{L}; \tag{187}$$

comme χ_σ est évidemment de type positif, on peut la supposer continue ([36]), ce qui la détermine parfaitement.

Comme le premier membre de (187) est, pour toute f, une fonction continue de σ sur Ω, l'application $\sigma \to \chi_\sigma$ est continue pour la topologie faible des fonctions χ; donc les χ_σ ainsi obtenues forment, dans

---

([36]) FTP, p. 26, prop. 4.

l'espace L^∞ [37], un ensemble *faiblement compact*; si l'on ôte de cet ensemble éventuellement la fonction O, il reste donc un ensemble *localement compact*; nous le noterons X, et nous l'appellerons le *spectre de* μ.

Tout point χ de X étant une fonction continue, centrale et de type positif sur G, permet de définir une d. r. u. de G que nous noterons $\{\mathcal{H}(\chi), U_s(\chi), V_s(\chi), S\}$; pour $f, g \in \mathbf{L}$, on a par définition

$$(188) \qquad \langle \mathbf{f}(\chi), \mathbf{g}(\chi) \rangle = \int_G \tilde{g} \star f(s)\, \chi(s)\, ds;$$

si donc on associe à chaque χ l'espace *tangent* $\mathcal{H}(\chi)$, et à chaque $f \in \mathbf{L}$ le *champ de vecteurs* $\mathbf{f}(\chi)$, ces champs de vecteurs forment un espace vectoriel, leurs images dans chaque espace tangent sont partout denses dans cet espace, et le produit scalaire de deux tels champs de vecteurs est une fonction continue sur X (puisqu'on a muni X exactement de la topologie nécessaire pour que cette propriété ait lieu); par suite, les champs de vecteurs $\mathbf{f}(\chi)$ ($\mathbf{f} \in \mathbf{L}$) forment une *famille fondamentale de champs de vecteurs continus* [38], que nous noterons Λ. On remarquera que, si le point $\chi \in X$ s'éloigne à l'infini sur X (c'est-à-dire, converge faiblement vers zéro dans L^∞), le module du vecteur $\mathbf{f}(\chi)$ tend vers zéro pour toute $f \in \mathbf{L}$.

Comme on le verra, le champ de vecteurs $\mathbf{f}(\chi)$ joue un rôle analogue à celui de la *transformée de Fourier* de la fonction f; notre but maintenant est de généraliser le théorème de Plancherel sous la forme suivante :

THÉORÈME 10. — *Il existe sur l'espace localement compact* X *une mesure de Radon positive* $\hat{\mu}$ *possédant les propriétés suivantes :*

a. quels que soient $f, g \in \mathbf{L}$, *la fonction* $\langle \mathbf{f}(\chi), \mathbf{g}(\chi) \rangle$ *est sommable pour* $\hat{\mu}$ *et l'on a*

$$(189) \qquad \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_X \langle \mathbf{f}(\chi), \mathbf{g}(\chi) \rangle \, d\hat{\mu}(\chi);$$

---

[37] Cet espace est comme on sait le dual de l'espace normé obtenu en introduisant sur $\mathbf{L}$ la norme $\int |f(x)|\, dx$. *Voir* FTP, p. 39.

[38] RU, Chap. III, § 1, nº 1.

b. l'espace $\mathcal{H}$ *est isomorphe à l'espace* L^2_Λ *des champs de vecteurs de carré sommable sur* X *relativement à* $\hat{\mu}$ *et à la famille fondamentale* Λ; *cet isomorphisme associe à l'élément* $\mathbf{f} \in \mathcal{H}$ $(f \in \mathbf{L})$ *le champ de vecteurs* $\mathbf{f}(\chi)$;

c. si le groupe G *est séparable, presque tout* $\chi \in X$ *est un caractère de* G.

La démonstration de ce théorème est assez longue et compliquée, sinon dans son principe, tout au moins dans le détail; l'auteur n'est du reste pas certain d'avoir trouvé la meilleure méthode.

2. Construction des opérateurs U_F (F continue tendant vers zéro à l'infini sur X). — Reprenons l'anneau commutatif $\mathbf{R}^\natural$ et son spectre Ω; comme on le sait d'après la théorie spectrale commutative ([39]), tout couple $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ d'éléments de $\mathcal{H}$ définit sur Ω une mesure de Radon $\nu_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$ de telle sorte que l'on ait

$$\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_\Omega \sigma(A)\, d\nu_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\sigma) \qquad \text{pour tout } A \in \mathbf{R}^\natural; \tag{190}$$

de plus, à toute fonction continue φ définie sur Ω correspond un opérateur unique $U_\varphi \in \mathbf{R}^\natural$ tel que l'on ait

$$\langle U_\varphi \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_\Omega \varphi(\sigma)\, d\nu_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\sigma) \qquad \text{quels que soient } \mathbf{x}, \mathbf{y}, \tag{191}$$

et la correspondance entre φ et U_φ est un isomorphisme pour toutes les structures que l'on peut envisager sur $\mathbf{R}^\natural$.

Maintenant, soit $\overline{X}$ l'espace compact obtenu en adjoignant à X le point O; c'est l'image de Ω par l'application continue $\sigma \to \chi_\sigma$ définie au n° **1**; par suite, on peut associer aux mesures spectrales $\nu_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$ leurs images $\mu'_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$ par cette application; comme pour $f \in \mathbf{L}$ on a

$$\sigma(U^\natural_f) = \sigma(U_f) = \int_G f(s)\, \chi_\sigma(s)\, ds, \tag{192}$$

la formule (190) se transforme en

$$\langle U^\natural_f \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_{\overline{X}} \hat{f}(\chi)\, d\mu'_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\chi), \tag{193}$$

([39]) RU, Chap. I.

où l'on pose pour simplifier

$$(194) \qquad \hat{f}(\chi) = \int_G f(s)\chi(s)\,ds.$$

Mais la fonction continue $\hat{f}(\chi)$ étant nulle pour $\chi = 0$, on peut remplacer dans (193) la mesure $\mu'_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ par la mesure $\mu_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ qu'elle induit sur l'espace X; par conséquent, il vient

$$(195) \qquad \langle U_f^\natural \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_X \hat{f}(\chi)\,d\mu_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\chi) \qquad \text{pour } f \in \mathbf{L};\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}.$$

Ceci étant, désignons par F une fonction complexe définie et continue sur X, et tendant vers zéro à l'infini (ou encore : une fonction continue sur $\overline{X}$ nulle pour $\chi = 0$); c'est l'image d'une fonction définie sur Ω, ce qui permet de lui associer un opérateur $U_F \in \mathbf{R}^\natural$, donné par la formule

$$(196) \qquad \langle U_F \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_X F(\chi)\,d\mu_{\mathbf{y},\mathbf{x}}(\chi) \qquad \text{pour } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H};$$

comme on le voit en remontant à Ω, l'application $F \to U_F$ est une représentation unitaire de l'algèbre involutive formée des fonctions F en question; il est clair d'après (195) que l'opérateur associé ainsi à la fonction $\hat{f}(f \in \mathbf{L})$ n'est autre que $U_f^\natural$.

Nous allons maintenant démontrer que, si la fonction F est à support compact, l'opérateur U_F est défini par un élément borné $\mathbf{x}_F$ de $\mathcal{H}^\natural$ (*cf.* § I, déf. 2).

En effet, supposons F nulle en dehors d'un compact $K \subset X$; pour chaque point $\chi_0 \in K$, il existe une $f \in \mathbf{L}$ telle que $\mathbf{f}(\chi_0)$ ne soit pas nul; la fonction continue $\langle \mathbf{f}(\chi), \mathbf{f}(\chi) \rangle = \hat{g}(\chi)$ (où $g = \tilde{f} \star f$) est donc non nulle au voisinage de χ_0; elle est au surplus positive partout; en utilisant le lemme de Borel-Lebesgue, on en déduit la possibilité de trouver un élément $h \in \mathbf{L}$ tel que $\hat{h}$ soit partout positive sur X, et soit par exemple $\geqq 1$ sur K; il est clair que l'on a alors

$$(197) \qquad F = G\hat{h}$$

où G est une fonction continue nulle en dehors de K; par suite il vient

$$(198) \qquad U_F = U_G U_h^\natural;$$

comme

$$\mathrm{U}_{h}^{\natural} = \mathrm{U}_{\mathbf{h}^{\natural}}, \tag{199}$$

on voit, puisque les $\mathrm{U}_{\mathbf{x}}$($\mathbf{x}$ borné) forment un idéal bilatère dans $\mathbf{R}^{s}$, que U_{F} est bien défini par un élément borné $\mathbf{x}_{\mathrm{F}}$ de $\mathcal{H}$, lequel est dans $\mathcal{H}^{\natural}$ puisque U_{F} est dans $\mathbf{R}^{\natural}$: d'où la propriété annoncée.

3. Construction de $\hat{\mu}$; structure de $\mathcal{H}^{\natural}$. — Nous allons maintenant construire la mesure $\hat{\mu}$ en la définissant comme forme linéaire positive sur l'algèbre $\mathbf{L}(\mathrm{X})$ des fonctions continues et à support compact définies sur X. Pour cela, considérons une fonction $\mathrm{F} \in \mathbf{L}(\mathrm{X})$, et soit une fonction réelle $\mathrm{G} \in \mathbf{L}(\mathrm{X})$ telle que $\mathrm{FG} = \mathrm{F}$; posons

$$\mathrm{I}(\mathrm{F}) = \langle \mathbf{x}_{\mathrm{F}}, \mathbf{x}_{\mathrm{G}} \rangle; \tag{200}$$

cette expression *ne dépend que de* F, car si G′ est une autre fonction réelle vérifiant $\mathrm{FG}' = \mathrm{F}$, on aura $\mathrm{FG} = \mathrm{FG}' = \mathrm{FGG}'$, d'où

$$\mathbf{x}_{\mathrm{F}} = \mathrm{U}_{\mathrm{G}} \mathbf{x}_{\mathrm{F}} = \mathrm{U}_{\mathrm{G}'} \mathbf{x}_{\mathrm{F}}, \tag{201}$$

ce qui donne

$$\langle \mathbf{x}_{\mathrm{F}}, \mathbf{x}_{\mathrm{G}} \rangle = \langle \mathrm{U}_{\mathrm{G}'} \mathbf{x}_{\mathrm{F}}, \mathbf{x}_{\mathrm{G}} \rangle = \langle \mathbf{x}_{\mathrm{F}}, \mathrm{U}_{\mathrm{G}'} \mathbf{x}_{\mathrm{G}} \rangle = \langle \mathbf{x}_{\mathrm{F}}, \mathbf{x}_{\mathrm{GG}'} \rangle \tag{202}$$

et ce résultat, étant symétrique en G et G′, prouve notre assertion.

Ceci étant, il est clair que I(F) est une forme linéaire sur $\mathbf{L}(\mathrm{X})$; cette forme est positive, car si F est du type $\mathrm{H}\overline{\mathrm{H}}$, on a

$$\mathrm{I}(\mathrm{H}\overline{\mathrm{H}}) = \langle \mathbf{x}_{\mathrm{H}\overline{\mathrm{H}}}, \mathbf{x}_{\mathrm{G}} \rangle = \langle \mathrm{U}_{\overline{\mathrm{H}}} \mathbf{x}_{\mathrm{H}}, \mathbf{x}_{\mathrm{G}} \rangle = \langle \mathbf{x}_{\mathrm{H}}, \mathrm{U}_{\mathrm{H}} \mathbf{x}_{\mathrm{G}} \rangle = \langle \mathbf{x}_{\mathrm{H}}, \mathrm{U}_{\mathrm{G}} \mathbf{x}_{\mathrm{H}} \rangle \tag{203}$$

et comme on peut évidemment supposer G positive — auquel cas U_{G} est hermitien positif — la propriété annoncée s'ensuit.

De ce qui précède résulte l'existence sur X d'une mesure de Radon positive unique $\hat{\mu}$ telle que l'on ait

$$\mathrm{I}(\mathrm{F}) = \int_{\mathrm{X}} \mathrm{F}(\chi)\, d\hat{\mu}(\chi) \qquad \text{pour toute } \mathrm{F} \in \mathbf{L}(\mathrm{X}); \tag{204}$$

mais un raisonnement analogue à (203) montre que l'on a

$$\mathrm{I}(\mathrm{F}\overline{\mathrm{G}}) = \langle \mathbf{x}_{\mathrm{F}}, \mathbf{x}_{\mathrm{G}} \rangle \qquad \text{pour } \mathrm{F}, \mathrm{G} \in \mathbf{L}(\mathrm{X}); \tag{205}$$

il vient donc

$$(206)\qquad \langle \mathbf{x}_F, \mathbf{x}_G \rangle = \int_X F(\chi)\overline{G(\chi)}\, d\hat{\mu}(\chi).$$

Par conséquent, le plus petit sous-espace fermé de $\mathcal{H}^\natural$ contenant les $\mathbf{x}_F[F \in \mathbf{L}(X)]$ est isomorphe à l'espace L^2 des fonctions complexes de carré sommable pour la mesure $\hat{\mu}$; nous allons montrer que ce sous-espace n'est autre que $\mathcal{H}^\natural$, autrement dit, que *les* $\mathbf{x}_F$ *sont partout denses dans* $\mathcal{H}^\natural$. On va le démontrer en prouvant que, pour toute $f \in \mathbf{L}$, on peut approcher l'élément $\mathbf{f}^\natural$ par des $\mathbf{x}_F$.

Pour cela, reprenons la formule (195), qui s'écrit encore

$$(207)\qquad \langle U_{\mathbf{f}^\natural}\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \int_X \hat{f}(\chi)\, d\mu_{\mathbf{y},\mathbf{z}}(\chi);$$

puisque la fonction continue $\hat{f}$ tend vers zéro à l'infini sur X, on peut trouver une *suite croissante* de fonctions $F_n \in \mathbf{L}(X)$, dont les valeurs sont toutes comprises entre o et 1, de telle sorte que $\hat{f}$ soit limite uniforme sur X des fonctions $F_n\hat{f}$; l'opérateur $U_{\mathbf{f}^\natural}$ sera alors limite uniforme des opérateurs $U_{F_n}U_{\mathbf{f}^\natural} = U_{G_n}$ où l'on pose $G_n = F_n\hat{f}$. Mais G_n étant à support compact, U_{G_n} est défini par un élément borné

$$(208)\qquad \mathbf{x}_{G_n} = U_{F_n}\mathbf{f}^\natural;$$

comme les F_n sont comprises entre o et 1, on voit déjà sur cette relation que les $\mathbf{x}_{G_n}$ restent dans une boule fixe de $\mathcal{H}$; d'autre part, quels que soient $\mathbf{y}$ et $\mathbf{z} \in \mathcal{H}$, on aura, d'après (196) et (207),

$$(209)\qquad \langle U_{\bar{\mathbf{f}}^\natural}\mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \lim_{n\,\infty} \langle U_{G_n}\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle,$$

ce qui s'écrit, si $\mathbf{y}$ est borné,

$$(210)\qquad \langle U_{\mathbf{y}}\mathbf{f}^\natural, \mathbf{z} \rangle = \lim_{n\,\infty} \langle U_{\mathbf{y}}\mathbf{x}_{G_n}, \mathbf{z} \rangle$$

ou enfin

$$(211)\qquad \langle \mathbf{f}^\natural, U_{\mathbf{y}}^{*}\mathbf{z} \rangle = \lim_{n\,\infty} \langle \mathbf{x}_{G_n}, U_{\mathbf{y}}^{*}\mathbf{z} \rangle;$$

ceci étant vrai pour tout $\mathbf{z} \in \mathcal{H}$ dès que $\mathbf{y}$ est borné, et les $U_{\mathbf{y}}^{*}\mathbf{z}$ correspondants engendrant $\mathcal{H}$ tout entier, on en conclut que $\mathbf{f}^\natural$ est limite faible des $\mathbf{x}_{G_n}$, ce qui prouve comme annoncé que les $\mathbf{x}_F$ sont partout denses dans $\mathcal{H}^\natural$.

En définitive, *on peut identifier* $\mathcal{H}^\natural$ *à l'espace* L^2 *des fonctions de carré sommable pour* $\hat{\mu}$; si l'on fait cette identification, l'élément $\mathbf{x}_F$ se transforme en la fonction F, et *l'élément* $\mathbf{f}^\natural$ *se transforme en la fonction* $\hat{f}$: en effet, la démonstration précèdente prouve que $\hat{f}$ est limite uniforme sur X d'une suite G_n de fonctions de L^2 qui est en même temps faiblement convergente dans L^2.

4. Démonstration du théorème 10 : partie *a*. — Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le point *a* du théorème 10.

Puisque l'on peut identiter $\mathcal{H}^\natural$ à L^2 de la façon qu'on vient d'expliquer, on a la formule

$$\langle \mathbf{f}^\natural, \mathbf{x}_F \rangle = \int_X \hat{f}(\chi)\,\overline{F(\chi)}\,d\hat{\mu}(\chi) \tag{212}$$

pour toute $f \in \mathbf{L}$ et toute $F \in \mathbf{L}(X)$; mais $\mathbf{f}^\natural$ étant la projection de $\mathbf{f}$ sur $\mathcal{H}^\natural$, ceci donne aussi

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{x}_F \rangle = \int_X \hat{f}(\chi)\,\overline{F(\chi)}\,d\hat{\mu}(\chi); \tag{213}$$

en remplaçant dans cette relation f par $\tilde{g} \star f$, et en tenant compte du fait qu'alors $\mathbf{f}$ est remplacé par $U_g^\star \mathbf{f}$, et $\hat{f}(\chi)$ par $\langle \mathbf{f}(\chi), \mathbf{g}(\chi) \rangle$, il vient

$$\langle \mathbf{f}, U_g \mathbf{x}_F \rangle = \int_X \langle \mathbf{f}(\chi), \mathbf{g}(\chi) \rangle\,\overline{F(\chi)}\,d\hat{\mu}(\chi), \tag{214}$$

ou enfin, si l'on se souvient de la définition de $\mathbf{x}_F$:

$$\langle \mathbf{f}, U_F \mathbf{g} \rangle = \int_X \langle \mathbf{f}(\chi), \mathbf{g}(\chi) \rangle\,\overline{F(\chi)}\,d\hat{\mu}(\chi). \tag{215}$$

Si l'on compare cette relation avec (196), qui s'écrit en particulier

$$\langle U_F \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_X F(\chi)\,d\mu_{\mathbf{f},\mathbf{g}}(\chi), \tag{216}$$

on voit que la mesure spectrale $\mu_{\mathbf{f},\mathbf{g}}$ est donnée par

$$d\mu_{\mathbf{f},\mathbf{g}}(\chi) = \langle \mathbf{f}(\chi), \mathbf{g}(\chi) \rangle\,d\hat{\mu}(\chi); \tag{217}$$

comme le premier membre est une mesure *bornée* sur X, on en conclut déjà que quels que soient f, g la fonction $\langle \mathbf{f}(\chi), \mathbf{g}(\chi)\rangle$ est sommable pour $\hat{\mu}$; pour achever de démontrer le point a du théorème 10, il nous reste à montrer que l'on a

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_X d\mu_{\mathbf{f},\mathbf{g}}(\chi) \tag{218}$$

[car alors (217) conduira immédiatement à (189)]; nous allons plus généralement prouver qu'on a

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_X d\mu_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\chi) \qquad \text{quels que soient } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}. \tag{219}$$

Pour cela, observons tout d'abord que, de toute évidence, on a

$$\int d\mu_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\chi) = \langle \mathrm{E}\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \tag{220}$$

où E est un opérateur continu dans $\mathcal{H}$; cet opérateur est dans $\mathbf{R}^\natural$ comme on le voit soit sur (217), soit en utilisant le fait qu'il est limite faible d'opérateurs $\mathrm{U}_\mathrm{F}[\mathrm{F} \in \mathbf{L}(\mathrm{X})]$.

Par ailleurs, si l'on reprend la construction des mesures $\mu_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ à partir des mesures spectrales de $\mathbf{R}^\natural$, on constate immédiatement que

$$d\mu_{\mathrm{U}_f^\natural \mathbf{x},\mathbf{y}}(\chi) = \hat{f}(\chi)\, d\mu_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\chi) \qquad \text{pour } f \in \mathbf{L};\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}; \tag{221}$$

combinant ceci avec (220), il vient

$$\langle \mathrm{E}\mathrm{U}_f^\natural \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_X \hat{f}(\chi)\, d\mu_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\chi), \tag{222}$$

d'où, d'après (195) :

$$\langle \mathrm{E}\mathrm{U}_f^\natural \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathrm{U}_f^\natural \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle; \tag{223}$$

par conséquent, on a

$$(\mathrm{I} - \mathrm{E})\,\mathrm{U}_f^\natural = 0 \qquad \text{pour toute } f \in \mathbf{L}, \tag{224}$$

et comme le premier membre de (224) est l'opérateur associé à l'élément $(\mathrm{I} - \mathrm{E})\mathbf{f}^\natural$ de $\mathcal{H}$, on voit que

$$(\mathrm{I} - \mathrm{E})\,\mathbf{f}^\natural = \mathbf{0} \qquad \text{pour toute } f \in \mathbf{L}; \tag{225}$$

il en résulte plus généralement que

$$(226) \qquad (\mathrm{I}-\mathrm{E})\mathbf{x} = \mathbf{O} \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \mathcal{H}^{\natural},$$

donc aussi, puisque $(\mathrm{I}-\mathrm{E})$ permute aux U_s, pour tout $\mathbf{x}$ obtenu en translatant des éléments de $\mathcal{H}^{\natural}$; mais *puisque* μ *est de classe finie* ces $\mathbf{x}$ soustendent $\mathcal{H}$ tout entier, ce qui prouve que $\mathrm{I}-\mathrm{E}$ est nul, et la relation (219) est démontrée.

5. Démonstration du théorème 10 : partie *b*. — Reprenons la famille fondamentale Λ de champs de vecteurs continus formée par les $\mathbf{f}(\chi)$ $(f \in \mathbf{L})$, et soit L^2_Λ l'espace des champs de vecteurs de carré sommable pour $\hat{\mu}$ construit à partir de Λ; d'après la partie *a* du théorème, on peut identifier $\mathcal{H}$ à un sous-espace $\mathcal{F}$ de L^2_Λ en associant aux $\mathbf{f}$ (qui sont partout denses dans $\mathcal{H}$) les champs de vecteurs $\mathbf{f}(\chi)$. Nous avons maintenant à prouver qu'on a $\mathcal{F} = \mathrm{L}^2_\Lambda$.

Pour cela, considérons le sous-espace $\mathcal{M}$ de $\mathcal{H}$ formé des éléments de la forme

$$(227) \qquad \mathbf{x} = \mathrm{U}_{\mathrm{F}_1}\mathbf{f}_1 + \ldots + \mathrm{U}_{\mathrm{F}_n}\mathbf{f}_n \qquad [\mathbf{f}_i \in \mathbf{L};\ \mathrm{F}_i \in \mathbf{L}(\mathrm{X})],$$

et associons à un tel $\mathbf{x}$ le champ de vecteurs

$$(228) \qquad \mathbf{x}(\chi) = \mathrm{F}_1(\chi)\mathbf{f}_1(\chi) + \ldots + \mathrm{F}_n(\chi)\mathbf{f}_n(\chi);$$

ce champ de vecteurs est évidemment continu et à support compact sur X, et il résulte de la formule (215) combinée avec le fait que l'application $\mathrm{F} \to \mathrm{U}_\mathrm{F}$ est multiplicative, que l'on a

$$(229) \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_{\mathrm{X}} \langle \mathbf{x}(\chi), \mathbf{y}(\chi) \rangle \, d\hat{\mu}(\chi) \quad \text{quels que soient } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{M};$$

mais tout champ de vecteurs continus sur X est limite uniforme sur tout compact de champs de vecteurs de la forme (228) ([40]), qu'on peut évidemment supposer nuls en dehors d'un compact fixe si le champ de vecteurs donné est lui-même à support compact; par conséquent, les champs de vecteurs (228) sont partout denses dans L^2_Λ, et d'après (229) on obtient ainsi un isomorphisme entre L^2_Λ et l'adhérence de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{H}$; il nous reste maintenant à montrer que $\mathcal{M}$ est partout

([40]) RU, Chap. III, prop. 6.

dense dans $\mathcal{H}$, et que d'autre part l'isomorphisme que nous venons de définir transforme bien $\mathbf{f}$ en $\mathbf{f}(\chi)$.

Le premier point est évident, car si une $F \in \mathbf{L}(X)$ converge uniformément sur tout compact vers 1, en restant comprise entre 0 et 1, on a

$$\lim \langle U_F \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lim \int_X F(\chi)\, d\mu_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\chi) = \int_X d\mu_{\mathbf{x},\mathbf{y}}(\chi) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

quels que soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$, en sorte que chaque élément de la forme $\mathbf{f}$ est limite faible d'éléments de la forme $U_F\mathbf{f}$. Ce raisonnement prouve aussi le second point; car pour les F considérées, on voit que :

a. l'élément $U_F\mathbf{f}$ de $\mathcal{H}$ converge faiblement vers $\mathbf{f}$;

b. le champ de vecteurs $F(\chi)\,\mathbf{f}(\chi)$ converge uniformément sur X vers le champ de vecteurs $\mathbf{f}(\chi)$:

c'est donc bien que l'isomorphisme considéré transforme $\mathbf{f}$ en $\mathbf{f}(\chi)$, et ceci achève la démonstration de la partie *b* du théorème 10.

6. Démonstration du théorème 10 : partie *c*. — Nous supposons maintenant G *séparable;* il en résulte tout d'abord que l'on peut trouver une suite f_n dans $\mathbf{L}$ telle que, pour *toute* mesure ν centrale et de type positif sur G, les images de ces f_n soient partout denses dans l'espace $\mathcal{H}(\nu)$ correspondant; il suffit pour cela de s'arranger pour que toute $f \in \mathbf{L}$ soit limite uniforme d'une suite partielle formée de fonctions f_{n_p} qui restent nulles en dehors d'un compact fixe de G, ce qui est possible comme on le voit facilement.

Ceci étant, on voit que, pour *chaque* $\chi \in X$, les vecteurs $\mathbf{f}_n(\chi)$ sont partout denses dans $\mathcal{H}(\chi)$: autrement dit, la famille fondamentale Λ vérifie l'axiome de dénombrabilité (Λ_4) [41]. Il n'y a donc pas à faire de distinction entre champs de vecteurs « fortement » et « faiblement » mesurables.

Maintenant les d. r. u. définies par les fonctions continues $\chi(s)$ admettent comme on l'a déjà dit des « éléments générateurs » $\mathbf{u}(\chi)$, de telle sorte que l'on ait

$$\chi(s) = \langle U_s(\chi)\,\mathbf{u}(\chi), \mathbf{u}(\chi) \rangle; \tag{230}$$

---

[41] RU, Chap. III, § 3, nº 11.

il résulte de là que

$$\hat{f}(\chi) = \int_G \chi(s) f(s)\, ds = \langle \mathrm{U}_f(\chi)\, \mathbf{u}(\chi),\, \mathbf{u}(\chi) \rangle \tag{231}$$

et donc

$$\hat{f}(\chi) = \langle \mathbf{f}(\chi),\, \mathbf{u}(\chi) \rangle \qquad \text{pour toute } f \in \mathbf{L}; \tag{232}$$

le premier membre étant une fonction continue de χ, il s'ensuit que le champ de vecteurs $\mathbf{u}(\chi)$ est faiblement continu sur X, donc est localement mesurable ([41]); il en est donc de même par exemple du champ de vecteurs $\hat{f}(\chi)\,\mathbf{u}(\chi)$.

Ceci étant, considérons l'élément $\mathbf{f}^\natural$ de $\mathcal{H}$; $\mathcal{H}$ étant isomorphe à L^2_Λ cet élément peut être identifié à un champ de vecteurs $\mathbf{f}^\natural(\chi)$ déterminé presque partout; on va montrer qu'on a

$$\mathbf{f}^\natural(\chi) = \hat{f}(\chi)\,\mathbf{u}(\chi) \qquad \text{presque partout.} \tag{234}$$

Pour cela, on remarque que, d'après les relations (207) et (217), on a

$$\langle \mathrm{U}_{f^\natural}\mathbf{g},\, \mathbf{h} \rangle = \int_X \langle \mathbf{g}(\chi),\, \mathbf{h}(\chi) \rangle \hat{f}(\chi)\, d\hat{\mu}(\chi) \tag{235}$$

quelles que soient $f, g, h \in \mathbf{L}$; mais comme $\mathrm{U}_{\mathbf{f}^\natural}\mathbf{g} = \mathrm{U}_g \mathbf{f}^\natural$, le premier membre de (235) vaut encore

$$\langle \mathbf{f}^\natural,\, \mathrm{U}_{\tilde{g}}\mathbf{h} \rangle = \langle \mathbf{f}^\natural,\, \tilde{\mathbf{g}} \star \mathbf{f} \rangle; \tag{236}$$

comme la χ —composante de $\tilde{g} \star f$ est $\mathrm{U}_{\tilde{g}}(\chi)\,\mathbf{h}(\chi)$, on a donc en définitive

$$\begin{aligned} \int_X \langle \mathbf{g}(\chi),\, \mathbf{h}(\chi) \rangle \hat{f}(\chi)\, d\hat{\mu}(\chi) &= \int_X \langle \mathbf{u}(\chi),\, \mathrm{U}_{\tilde{g}}(\chi)\,\mathbf{h}(\chi) \rangle \hat{f}(\chi)\, d\hat{\mu}(\chi) \\ &= \int_X \langle \mathbf{f}^\natural(\chi),\, \mathrm{U}_{\tilde{g}}(\chi)\,\mathbf{h}(\chi) \rangle\, d\hat{\mu}(\chi) : \end{aligned} \tag{237}$$

par suite, le champ de vecteurs mesurable $\mathbf{f}^\natural(\chi) - \hat{f}(\chi)\,\mathbf{u}(\chi)$ est orthogonal aux champs de vecteurs associés aux fonctions de la forme $\tilde{g} \star h$, et comme les images de celles-ci sont évidemment partout denses dans $\mathcal{H}$, donc dans L^2_Λ aussi, on en conclut que le champ de vecteurs en question est nul presque partout, ce qui prouve (234).

Nous allons maintenant démontrer que les diverses opérations $\natural$ définies dans $\mathcal{H}$ et dans les $\mathcal{H}(\chi)$ se « raccordent » entre elles; de façon précise, on va prouver que l'on a

$$\mathbf{f}^{\natural}(\chi) = \mathbf{f}(\chi)^{\natural} \quad \text{presque partout} \tag{238}$$

pour toute $f \in \mathbf{L}$. En effet, $\mathbf{f}^{\natural}$ est limite forte dans $\mathcal{H}$ de vecteurs de la forme $\Sigma\alpha_i \mathrm{U}_{s_i}\mathrm{V}_{s_i}\mathbf{f}(\alpha_i \geqq 0,\ \Sigma\alpha_i = 1,\ s_i \in \mathrm{G})$; il en résulte évidemment, en passant aux composantes, que pour presque chaque $\chi \in \mathrm{X}$ le vecteur $\mathbf{f}^{\natural}(\chi)$ appartient au convexe fermé engendré par les $\mathrm{U}_s(\chi)\mathrm{V}_s(\chi)\mathbf{f}(\chi)$, et comme d'après (234) $\mathbf{f}^{\natural}(\chi)$ est pour presque tout χ un élément central de $\mathcal{H}(\chi)$, notre assertion résulte de l'unicité de l'opération $\natural$.

Ceci étant, considérons les fonctions f_n; d'après (234) et (238), on peut trouver des ensembles N_n de mesure nulle dans X tels que

$$\mathbf{f}_n(\chi)^{\natural} = \hat{f}_n(\chi)\,\mathbf{u}(\chi) \quad \text{pour } \chi \notin \mathrm{N}_n; \tag{239}$$

en dehors de l'ensemble de mesure nulle N, réunion des N_n, ces relations sont réalisées simultanément; comme les $\mathbf{f}_n(\chi)$ sont partout denses dans les $\mathcal{H}(\chi)$, on voit que, pour tout $\chi \notin \mathrm{N}$, le sous-espace $\mathcal{H}(\chi)^{\natural}$ est de dimension 1 : par suite, tout $\chi \notin \mathrm{N}$ est un caractère de G (lemme 16), et le théorème 10 est entièrement démontré.

Remarque. — Soit X_0 l'ensemble des caractères contenus dans X; pour un $\chi \in \mathrm{X}_0$, on a [§ 4, équat. (154)] :

$$\langle \mathbf{f}(\chi), \mathbf{g}(\chi) \rangle = \langle \mathrm{U}_f(\chi)\,\mathbf{u}(\chi), \mathrm{U}_g(\chi)\,\mathbf{u}(\chi) \rangle = \mathrm{Sp}[\mathrm{U}_f(\chi)\,\mathrm{U}_g^*(\chi)]; \tag{240}$$

la formule de développement (189) peut donc s'écrire sous la forme suivante :

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_{\mathrm{X}_0} \mathrm{Sp}[\mathrm{U}_f(\chi)\,\mathrm{U}_g^*(\chi)]\,d\hat{\mu}(\chi). \tag{241}$$

Un des problèmes fondamentaux de la théorie des caractères est de savoir si une formule analogue est encore valable lorsque la mesure μ considérée n'est pas de classe finie.

On remarquera que, dans le cas de la d. r. u. régulière du groupe complexe unimodulaire (groupe auquel nos procédés ne sont pas applicables), c'est sous la forme (241) que Gelfand et Neumark [42]

[42] *Voir* leur Mémoire sur le groupe de Lorentz [*Izvestyia Akad. Nauk.*

énoncent le théorème de Plancherel, la seule différence, d'ailleurs inessentielle comme le montrera le Chapitre II, étant que les traces utilisées par eux sont relatives, non à des d. r. u. irréductibles, mais à des représentations unitaires irréductibles au sens habituel de ce terme.

Il est d'autre part utile de préciser que, sauf dans des cas très particuliers, le « spectre » de la d. r. u. régulière, si elle est de classe finie, ne fait pas intervenir *tous* les caractères du groupe; c'est aussi ce qu'on constate sur le groupe complexe unimodulaire, et il y a là un fait probablement très général, qu'on n'avait pas aperçu (et pour cause !) dans les cas classiques.

Autre remarque. — Dans les cas classiques (groupes abéliens et groupes compacts), *tous* les $\chi \in X$ sans exception sont des caractères; on montrera dans un article ultérieur que ce résultat est encore vrai pour d'autres catégories de groupes (par exemple, les groupes discrets donc chaque élément ne possède qu'un nombre fini de conjugués distincts). La raison en est que, dans ces groupes particuliers, on peut définir une application $\natural$ de l'algèbre $\mathbf{L}$ sur son centre de telle sorte que *toutes* les opérations $\natural$ définies dans les diverses d. r. u. de G se déduisent de celle qu'on a définie dans $\mathbf{L}$ — ce qui n'est pas le cas dans les groupes généraux, même de classe finie.

VI. — L'espace des représentations unitaires irréductibles de dimension n d'un groupe.

On se propose de montrer ici comment l'on peut définir, sur l'ensemble $\hat{G}_n$ des classes de représentations unitaires irréductibles de dimension $n < +\infty$ de G, une topologie naturelle et localement compacte.

Soit pour cela $s \to T_s$ une telle représentation, à laquelle correspond

---

S. S. S. R., Série Math., **11**, 1947, p. 411-504; *voir* en particulier équation (138), p. 440]. On trouvera aussi des résultats analogues dans le Chapitre II (§ 3) du présent article.

une représentation unitaire irréductible de l'algèbre **L**, à savoir celle qui associe à $f \in \mathbf{L}$ l'opérateur

$$\mathrm{T}_f = \int \mathrm{T}_s f(s)\, ds. \tag{242}$$

Considérons maintenant le caractère

$$\chi(s) = \mathrm{Sp}(\mathrm{T}_s) \tag{243}$$

de cette représentation; pour toute $f \in \mathbf{L}$ on a

$$\int f(s)\,\chi(s)\, ds = \mathrm{Sp}(\mathrm{T}_f), \tag{244}$$

en sorte que, si l'on introduit la d. r. u. $\{\mathcal{H}, \mathrm{U}_s, \mathrm{V}_s, \mathrm{S}\}$ définie par χ et l'application canonique $f \to \mathbf{f}$ de **L** dans $\mathcal{H}$, il vient

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \mathrm{Sp}(\mathrm{T}_f \mathrm{T}_g^\star); \tag{245}$$

par conséquent, l'espace $\mathcal{H}$ est isomorphe à l'espace des T_f —c'est-à-dire, puisque les T_f forment un système irréductible, à l'algèbre **M** de tous les opérateurs définis dans l'espace de la représentation considérée— muni du produit scalaire $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B} \rangle = \mathrm{Sp}(\mathrm{AB}^\star)$. De plus, si l'on identifie $\mathcal{H}$ et **M**, les opérateurs U_s et V_s peuvent être réalisés comme suit :

$$\mathrm{U}_s(\mathrm{T}_f) = \mathrm{T}_s \mathrm{T}_f, \qquad \mathrm{V}_s(\mathrm{T}_f) = \mathrm{T}_f \mathrm{T}_s^{-1}, \tag{246}$$

comme on l'a dit dans l'introduction.

Il résulte de là que, si la représentation unitaire irréductible T_s est de dimension n, l'espace $\mathcal{H}$ est de dimension n^2, l'anneau $\mathbf{R}^s$ engendré par les U_s étant en outre une algèbre simple, donc étant un *facteur* (*cf.* Introduction); on a donc le résultat suivant : *si* $s \to \mathrm{T}_s$ *est une représentation unitaire irréductible de dimension* n *de* G, *la fonction* $\mathrm{Sp}(\mathrm{T}_s)$ *est un caractère de* G, *définissant une d. r. u. de dimension* n^2.

Soit réciproquement χ un caractère de G, définissant une d. r. u. (irréductible) de dimension n^2, soit $\{\mathcal{H}, \mathrm{U}_s, \mathrm{V}_s, \mathrm{S}\}$: on va montrer qu'il existe une représentation unitaire irréductible $s \to \mathrm{T}_s$ de G, et une seule à une équivalence près, de dimension n, telle que $\chi(s) = \mathrm{Sp}(\mathrm{T}_s)$ [il en résultera l'existence d'une correspondance biunivoque entre les classes de représentations unitaires irréductibles de dimension n et les caractères de dimension ([43]) n^2]. En effet, considérons l'anneau $\mathbf{R}^s$ engendré par les U_s (c'est l'ensemble des combinaisons linéaires de ces U_s, puisqu'on est dans un espace de dimension finie); c'est un facteur, c'est-à-dire une algèbre *simple*; sa dimension est n^2, car si $\mathbf{u}$ est l'élément « générateur » de la d. r. u., et si l'on associe à tout $A \in \mathbf{R}^s$ l'élément $A\mathbf{u} = \mathbf{x}$ de $\mathcal{H}$, on obtient une application linéaire *biunivoque* de $\mathbf{R}^s$ sur $\mathcal{H}$, pour la raison que l'on a, avec les notations du paragraphe I, $A = U_{\mathbf{x}}$. Soit alors $A \to T_A$ une représentation unitaire irréductible de $\mathbf{R}^s$; puisque $\mathbf{R}^s$ est simple, cette représentation est un *isomorphisme* de $\mathbf{R}^s$ *sur* l'algèbre de toutes les matrices d'un espace dont la dimension est nécessairement n; si l'on pose $T_s = T_{U_s}$, on obtient évidemment une représentation unitaire irréductible de G. Par ailleurs, l'expression $\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$, considérée comme fonction de T_A, possède toutes les propriétés formelles d'une trace (c'est en effet une trace sur $\mathbf{R}^s$: *cf.* § IV, n° 3), donc c'est *la* trace définie sur l'algèbre des T_A, ce qui prouve que l'on a

$$\chi(s) = \langle U_s\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \mathrm{Sp}(T_s). \tag{247}$$

Il reste à voir que la correspondance entre χ et la représentation T_s est biunivoque, en d'autres termes que deux représentations unitaires irréductibles de dimension finie qui ont le même caractère sont équivalentes; c'est là une propriété classique ([44]), qu'on peut démontrer par exemple comme suit : soient T_s et T'_s les deux représentations en question, $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}'$ les algèbres de matrices correspondantes; à tout élément $A = \Sigma\alpha_i T_{s_i}$ de $\mathbf{M}$ associons l'élément $A' = \Sigma\alpha_i T'_{s_i}$ de $\mathbf{M}'$; en vertu de la relation $\mathrm{Sp}(AT_s) = \mathrm{Sp}(A'T'_s)$, on obtient ainsi un isomorphisme de $\mathbf{M}$ sur $\mathbf{M}'$, ce qui montre que l'on peut tout d'abord identifier les espaces dans lesquels s'effectuent les représentations en question; cette identification étant faite, l'équivalence des deux représentations considérées résulte du fait que tout automorphisme de l'algèbre de matrices $\mathbf{M}$ est *intérieur*.

([43]) Cette expression signifie : la dimension de l'espace de Hilbert dans lequel s'effectue la d. r. u. définie par le caractère considéré.

([44]) Cette propriété n'a du reste rien à voir avec le fait qu'il s'agit de représentations *unitaires*.

Nous avons donc en définitive le résultat suivant : *il existe une correspondance biunivoque entre les classes de représentation unitaires irréductibles de dimensions n de* G *et les caractères de* G *qui définissent des d. r. u. de dimension* n^2 *de* G.

Dans ces conditions, le problème posé au début de cet appendice : introduire une topologie naturelle dans $\hat{G}_n$, se réduit au suivant : introduire une topologie naturelle dans l'ensemble des caractères de dimension n^2 de G.

Or rien n'est plus facile, et il s'impose de munir l'ensemble de ces caractères, comme toujours, de la topologie *faible :* χ converge vers χ_0 si, pour toute $f \in L$, $\int f(s)\chi(s)\,ds$ converge vers $\int f(s)\chi_0(s)\,ds$. Puisque les caractères considérés prennent tous la valeur 1 en e, cette topologie faible est du reste équivalente ([45]) à celle de la *convergence uniforme sur toute partie compacte de* G. En revenant aux classes de représentations, on peut donc définir comme suit la topologie de $\hat{G}_n$: *une classe variable de représentations* T_s *converge vers une limite* T_s^0 *si la fonction* $\mathrm{Sp}(T_s)$ *converge uniformément sur tout compact vers la fonction* $\mathrm{Sp}(T_s^0)$.

Nous allons maintenant montrer que, muni de cette topologie, G_n est *localement compact*. Le principe de cette démonstration a déjà été exposé dans RU (Chap. II, th. 2).

Soit en effet K l'ensemble des fonctions χ continues, centrales, de type positif, vérifiant $\chi(e) \leqq 1$, et, pour tout entier p, soit K'_p l'ensemble des $\chi \in K$ telles que la d. r. u. correspondante soit de dimension $\leqq p$; muni de la topologie faible, K est *compact;* par ailleurs, on voit comme dans RU (démonstration du théorème 2) que le complémentaire de K'_p est ouvert dans K, donc que K'_p est lui-même compact; par suite, les $\chi \in K$ pour lesquels la d. r. u. correspondante est exactement de dimension p forment un ensemble K_p *localement compact*. Maintenant, soient $\chi \in K_p$, et $\{\mathcal{H}(\chi), U_s(\chi), V_s(\chi), S\}$ la d. r. u. définie par χ; posons comme toujours

$$(248) \qquad U_f(\chi) = \int U_s(\chi) f(s)\,ds, \qquad V_f(\chi) = \int V_s(\chi) f(s^{-1})\,ds$$

([45]) D. Raikov, *Sur divers types de convergence des fonctions de type positif* (*Doklady*, t. 58, 1947, p. 1279-1282).

pour $f \in \mathbf{L}$; dire que χ est un caractère, c'est dire que le système formé par les $U_f(\chi)$ et les $V_f(\chi)$ est irréductible, autrement dit, que les opérateurs $U_f(\chi)\, V_g(\chi)$ et leurs combinaisons linéaires constituent une algèbre de dimension p^2; pour cela, il faut et il suffit que l'on puisse trouver $2p^2$ éléments f_i et $g_i (1 \leqq i \leqq p^2)$ de $\mathbf{L}$, tels que les $U_{f_i}(\chi) V_{g_i}(\chi)$ soient linéairement indépendants. Or, si l'on choisit p fonctions $h_j \in \mathbf{L}$ dont les images $\mathbf{h}_j(\chi)$ soient linéairement indépendantes dans $\mathcal{H}(\chi)$, la condition précédente s'écrit en exprimant que le déterminant d'ordre p^2 de terme général

$$(249) \qquad \langle U_{f_i}(\chi) V_{g_i}(\chi) \mathbf{h}_j(\chi), \mathbf{h}_k(\chi) \rangle = \int \tilde{h}_k \star f_i \star h_j \star g_i(s)\, \chi(s)\, ds$$

n'est pas nul; ce déterminant étant, quand les f_i, g_i, h_j restent fixes, une fonction continue de χ, on en conclut que les *caractères* contenus dans K_p forment un ensemble *ouvert*, donc localement compact, ce qui démontre, en prenant $p = n^2$, que l'espace $\hat{G}_n$ est lui-même localement compact.

On aurait pu, pour définir une topologie sur $\hat{G}_n$, employer une méthode quelque peu différente de la précédente, et qui conduit au même résultat (c'est-à-dire, à la même topologie). Pour cela, désignons par P_n l'ensemble des *fonctions élémentaires normées de type positif* qui définissent des représentations unitaires (irréductibles) de dimension n de G; comme il résulte de RU, l'espace P_n, muni de la topologie faible ou, ce qui revient au même, de celle de la convergence uniforme sur tout compact, est localement compact. Dans P_n, on peut d'autre part définir une relation d'équivalence en écrivant $\varphi \sim \psi$ toutes les fois que les représentations unitaires de G définies par φ et ψ sont équivalentes; on peut alors établir une correspondance biunivoque entre les éléments de $\hat{G}_n$ et les classes d'équivalence ainsi définies dans P_n, et l'on peut dès lors se demander si la topologie qu'on a introduite tout à l'heure dans $\hat{G}_n$ est identique à celle qu'on déduit de P_n par passage au quotient modulo la relation d'équivalence en question; comme on va le montrer, c'est effectivement ce qui a lieu ([46]).

([46]) Ces questions sont visiblement en étroit rapport avec la théorie des

Considérons en effet une fonction $\varphi \in P_n$, la représentation unitaire irréductible $\{\mathcal{H}(\varphi), T_s(\varphi)\}$ qu'elle définit, et l'application canonique $f \to \mathbf{f}(\varphi)$ de $\mathbf{L}$ dans $\mathcal{H}(\varphi)$ $\Big[$noter que $\mathcal{H}(\varphi)$ est réalisé en introduisant le produit scalaire

$$(250) \qquad \langle \mathbf{f}(\varphi), \mathbf{g}(\varphi) \rangle = \int \tilde{g} \star f(s)\, \varphi(s)\, ds \Big].$$

On peut encore définir l'élément de $\hat{G}_n$ qui correspond à φ par son caractère, à savoir la fonction

$$(251) \qquad \varphi^\natural(s) = \mathrm{Sp}(T_s(\varphi));$$

on peut tout aussi bien le caractériser par la trace qu'il permet de définir sur $\mathbf{L}$, à savoir la forme linéaire

$$(252) \qquad \varphi^\natural(f) = \mathrm{Sp}(T_f(\varphi)).$$

Par définition, on a introduit sur $\hat{G}_n$ la topologie la moins fine qui, pour chaque $f \in \mathbf{L}$, rend continue l'expression précédente par rapport à l'élément $\varphi^\natural \in \hat{G}_n$; d'autre part, les classes d'équivalence définies dans P_n sont les ensembles sur lesquels toutes ces fonctions sont *constantes*; si donc on veut montrer que la topologie de $\hat{G}_n$ est identique à la topologie quotient de P_n, il suffit de prouver que, pour chaque $f \in \mathbf{L}$, $\varphi^\natural(f)$ est une fonction *continue* de φ sur P_n.

Or soit φ_0 un élément de P_n; on peut trouver n éléments $f_i \in \mathbf{L}$ tels que les $\mathbf{f}_i(\varphi_0)$ forment une base de $\mathcal{H}(\varphi_0)$; puisque les « champs de vecteurs » $\mathbf{f}(\varphi)$ sont continus sur P_n, les $\mathbf{f}_i(\varphi)$ forment aussi une base de $\mathcal{H}(\varphi)$ pour les φ appartenant à un voisinage U de φ_0 dans P_n. Pour $f \in \mathbf{L}$, posons alors

$$(253) \qquad T_f(\varphi)\, \mathbf{f}_i(\varphi) = \Sigma a_{ij}(\varphi)\, \mathbf{f}_j(\varphi);$$

---

espaces fibrés. Il serait intéressant d'étudier de près la structure de $\hat{G}_n$ au point de vue de la topologie algébrique, dans le cas d'un groupe possédant « beaucoup » de représentations unitaires de dimension finie, par exemple le groupe modulaire arithmétique, pour lequel on peut définir $\hat{G}_n$ d'une façon tout à fait explicite; pour parler de façon heuristique, il n'y a pas moins de raisons d'étudier la structure topologique du « dual » d'un groupe que celle du groupe lui-même !

puisque le « champ d'opérateurs » $T_f(\varphi)$ est continu, les fonctions $a_{ij}(\varphi)$ sont continues dans U; il en est donc de même de

$$\frac{1}{n}\Sigma a_{ii}(\varphi)=\mathrm{Sp}(T_f(\varphi))=\varphi^\natural(f), \tag{254}$$

ce qui démontre notre assertion.

CHAPITRE II.

SUR LES CARACTÈRES DE CLASSE (I_∞).

I. — « **Weight function** » associée à une d. r. u.

Soit $\mathbf{R}$ un anneau d'opérateurs dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. D'après J. von Neumann ([47]), on appelle *weight function* sur $\mathbf{R}$ toute fonction $\Delta(E)$ définie sur l'ensemble des opérateurs de projection appartenant à $\mathbf{R}$, prenant ses valeurs dans $[0, +\infty]$, et vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) $\Delta(E)=0$ équivaut à $E=0$;

(ii) si $E_1, E_2, \ldots$ sont deux à deux orthogonaux, on a

$$\Delta(E_1+E_2+\ldots)=\Delta(E_1)+\Delta(E_2)+\ldots; \tag{255}$$

(iii) si $U\in\mathbf{R}$ est unitaire, on a, pour tout projecteur $E\in\mathbf{R}$,

$$\Delta(UEU^{-1})=\Delta(E). \tag{256}$$

En outre, on dit que la « weight function » Δ est *purement infinie* si l'on a $\Delta(E)=+\infty$ dès que $E\neq 0$.

Théorème 11. — *Soit* $\{\mathcal{H}, U_x, V_x, S\}$ *la d. r. u. d'un groupe* G *définie par une mesure* μ *centrale et de type positif; pour un projecteur* E *appartenant à l'anneau d'opérateurs* $\mathbf{R}^s$ *engendré par les* U_x, *posons*

$$\Delta(E)=\begin{cases}\|\mathbf{x}\|^2 & \text{si } E=U_{\mathbf{x}} \quad (\mathbf{x}\text{ élément borné de }\mathcal{H});\\ +\infty & \textit{dans le cas contraire;}\end{cases} \tag{257}$$

([47]) Voir *Reduction theory*, p. 461.

alors Δ *est une « weight function » sur l'anneau* $\mathbf{R}^s$, *et cette « weight function » n'est pas purement infinie.*

On va démontrer ce théorème en plusieurs étapes.

Tout d'abord, puisque les opérateurs de la forme $U_{\mathbf{x}}$($\mathbf{x}$ élément borné de $\mathcal{H}$) forment un idéal bilatère non nul (Chap. I, § 1, lemme 4), il existe certainement, parmi les opérateurs de cette forme, des projecteurs non nuls; comme d'après (257) la condition (i) est évidemment vérifiée, on voit bien que la fonction Δ n'est pas purement infinie.

Il nous reste donc à prouver les propriétés (ii) et (iii) des « weight functions ».

Démonstration de (iii). — Supposons d'abord $E = U_{\mathbf{x}}$; comme on l'a vu au Chapitre I (§ 1), on aura pour tout $A \in \mathbf{R}^s$ les formules

$$AU_{\mathbf{x}} = U_{A\mathbf{x}}, \qquad U_{\mathbf{x}}A = U_{SA^*S\mathbf{x}}; \tag{258}$$

si A est unitaire, il en résulte évidemment que $AEA^{-1} = U_{\mathbf{y}}$ avec

$$\mathbf{y} = ASAS\mathbf{x}, \tag{259}$$

ce qui prouve (256); si maintenant on a $\Delta(E) = +\infty$, on aura aussi $\Delta(AEA^{-1}) = +\infty$ pour A unitaire, car on a $E = A^{-1}(AEA^{-1})A$, en sorte que $\Delta(AEA^{-1}) < +\infty$ implique $\Delta(E) < +\infty$ d'après ce qu'on a vu à l'instant.

Démonstration de (ii). — Elle va reposer sur plusieurs lemmes.

Lemme *a*. — *Soit* $\mathbf{x}$ *un élément borné de* $\mathcal{H}$; *alors le plus petit sous-espace fermé de* $\mathcal{H}$ *contenant les vecteurs* $U_{\mathbf{x}}\mathbf{y}$($\mathbf{y} \in \mathcal{H}$) *contient* $\mathbf{x}$.

En effet, soit $f \to \mathbf{f}$ l'application canonique de $\mathbf{L}$ dans $\mathcal{H}$; le sous-espace en question contient les vecteurs $U_{\mathbf{x}}\mathbf{f} = V_f\mathbf{x}$; puisque l'opérateur I est limite forte d'opérateurs de la forme V_f($f \in \mathbf{L}$), le lemme *a* est démontré.

Lemme *b*. — *Si* E, $F \in \mathbf{R}^s$ *sont des projecteurs orthogonaux, on a*

$$\Delta(E + F) = \Delta(E) + \Delta(F). \tag{260}$$

Supposons tout d'abord que $E = U_{\mathbf{x}}$, $F = U_{\mathbf{y}}$, d'où $E + F = U_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}$; d'après le lemme *a*, $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont orthogonaux, de sorte que

$$(261) \qquad \Delta(E + F) = \| \mathbf{x} + \mathbf{y} \|^2 = \| \mathbf{x} \|^2 + \| \mathbf{y} \|^2 = \Delta(E) + \Delta(F);$$

si maintenant on a par exemple $\Delta(E) = +\infty$, on a aussi $\Delta(E + F) = +\infty$; en effet, E appartient visiblement à l'idéal bilatère engendré par $E + F$; si donc $E + F$ était de la forme $U_{\mathbf{x}}$, il en serait de même de E : d'où le lemme *b*.

On déduit du lemme *b* que la relation (255) est vraie pour un nombre fini de termes; il nous reste maintenant à passer au cas d'une somme infinie; en considérant les sommes partielles de cette suite, on est évidemment ramené à prouver le

Lemme *c*. — *Si* $(E_n)_{n \geq 1}$ *est une suite croissante de projecteurs dont la borne supérieure est* E, *on a*

$$(262) \qquad \Delta(E) = \sup \Delta(E_n).$$

Tout d'abord, on peut se limiter à examiner le cas où tous les E_n sont de la forme $U_{\mathbf{x}}$, car de $E_n \leqq E$ résulte (lemme *b*) $\Delta(E_n) \leqq \Delta(E)$, en sorte que si l'un des $\Delta(E_n)$ vaut $+\infty$, la relation (262) est triviale. On peut même supposer que les nombres $\Delta(E_n)$ ont une borne supérieure *finie*, puisque $\Delta(E)$, d'après ce qu'on vient de dire, est au moins égal à cette borne supérieure.

Supposons donc que

$$(263) \qquad \sup \Delta(E_n) < +\infty;$$

si l'on pose $E_n = U_{\mathbf{x}_n}$, on voit que les $\mathbf{x}_n$ sont tous contenus dans une *boule* de $\mathcal{H}$.

Pour tout $\mathbf{z} \in \mathcal{H}$, on a, d'autre part,

$$(264) \qquad E\mathbf{z} = \lim_{n\, \infty} E_n \mathbf{z};$$

en particulier, pour f, $g \in \mathbf{L}$, la suite de terme général

$$\langle E_n \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \langle U_{\mathbf{x}_n} \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \langle V_f \mathbf{x}_n, \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{x}_n, \mathbf{g} \star \tilde{\mathbf{f}} \rangle$$

converge vers $\langle E\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$; comme les éléments de la forme $\mathbf{f} \star \mathbf{g}$ sont partout denses dans $\mathcal{H}$, on en conclut que la suite $\mathbf{x}_n$ converge faiblement vers une limite $\mathbf{x}$, qui vérifie nécessairement

$$\langle \mathbf{Ef}, \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{g} \star \tilde{\mathbf{f}} \rangle = \langle V_f \mathbf{x}, \mathbf{g} \rangle; \tag{265}$$

il s'ensuit que $\mathbf{x}$ est borné et que $E = U_{\mathbf{x}}$; comme les nombres $\|\mathbf{x}_n\|$ vont en croissant, on a de plus

$$\Delta(E) = \|\mathbf{x}\|^2 \leqq \sup \|\mathbf{x}_n\|^2 = \sup \Delta(E_n); \tag{266}$$

comme l'inégalité opposée est évidente, la relation (262) est démontrée, ainsi par conséquent que le lemme c et le théorème 11.

Exemple : cas de la d. r. u. régulière. — Dans l'espace L^2 construit sur la mesure de Haar, les éléments bornés sont évidemment les fonctions $\varphi \in L^2$ telles que l'on ait

$$\|\varphi \star f\|_2 \leqq M \|f\|_2 \quad \text{pour toute } f \in \mathbf{L}, \tag{267}$$

où M est une constante finie convenable (c'est par exemple le cas si $\varphi \in L^2 \cap L^1$). L'opérateur U_φ correspondant est alors donné par

$$U_\varphi f = \varphi \star f \quad \text{pour toute } f \in L^2. \tag{268}$$

Si U_φ est un projecteur, on aura donc les relations

$$\tilde{\varphi} = \varphi, \qquad \varphi \star \varphi = \varphi, \tag{269}$$

et réciproquement; la fonction φ est alors continue et de type positif, et c'est une *unité* au sens que nous avons donné à ce mot dans un travail antérieur ([48]); comme on a alors d'après (269)

$$\varphi(e) = \int |\varphi(x)|^2 \, dx, \tag{270}$$

on voit que la « weight function » associée à la d. r. u. régulière peut encore être définie comme suit :

a. si $E = U_\varphi$ *où* φ *est une unité, on pose* $\Delta(E) = \varphi(e)$;

b. dans le cas contraire, on pose $\Delta(E) = +\infty$.

([48]) FTP, p. 77.

Cas où μ est un caractère. — Dans ce cas, l'anneau $\mathbf{R}^s$ est un *facteur*; par conséquent, la « weight function » Δ n'est pas autre chose que la *dimension relative* que l'on peut associer, d'après F. J. Murray et J. von Neumann, à ce facteur. Comme cette dimension relative n'est pas purement infinie, on retrouve le fait que les facteurs $\mathbf{R}^s$ (ou $\mathbf{R}^d$) associés aux caractères ne sont jamais purement infinis. Il suit de là que, sur un groupe séparable, les caractères ne peuvent appartenir qu'aux classes suivantes : (I_n), (II_1), (I_∞), (II_∞). Nous allons dans les deux prochains paragraphes étudier les caractères de classe (I_∞); auparavant, montrons que *tous les cas énumérés à l'instant peuvent se produire*.

a. Cas (I_n) : ce sont les caractères associés aux représentations unitaires irréductibles de dimension n de G (*cf.* Chap. I, § 6);

b. Cas (II_1) : on prend par exemple un groupe discret infini G, tel que tout $x \neq e$ possède dans G une *infinité* de conjugués distincts (par exemple, on peut prendre pour G le groupe modulaire arithmétique); alors, les seules fonctions centrales contenues dans L^2 sont les fonctions de la forme $k\varepsilon$, en sorte que la mesure ε est alors un caractère de classe (II_1); c'est du reste de cette façon —entre autres— que F. J. Murray et J. von Neumann ([49]) ont formé des exemples de facteurs de classe (II_1);

c. Cas (I_∞) : *voir* § II et III;

d. Cas (II_∞) ([50]) : on prend deux groupes G et H, possédant respectivement un caractère λ de classe (I_∞) et un caractère μ de classe (II_1); sur le groupe produit $\mathrm{G} \times \mathrm{H}$, on considère la mesure produit $d\lambda(x)\,d\mu(y)$: alors celle-ci est un caractère de classe (II_∞) de $\mathrm{G} \times \mathrm{H}$. En effet, la d. r. u. de $\mathrm{G} \times \mathrm{H}$ qu'elle définit s'obtient, comme on le voit facilement, en effectuant le *produit tensoriel* des d. r. u. de G, H définies par λ et μ respectivement; or on sait ([51]) que lorsque l'on « compose » de la sorte un facteur de classe (I_∞) et un

---

([49]) *On rings of operators*, IV (*Annals of Math.*, t. 44, 1943, p. 716-808; *voir* en particulier p. 785-793).

([50]) La construction qui suit a été indiquée à l'auteur par G. W. Mackey.

([51]) F. J. Murray et J. von Neumann, *On rings of operators*, I; *voir* p. 192 de ce Mémoire la remarque qui termine la Partie III.

facteur de classe (II_1), on obtient un facteur de classe (II_∞) : notre assertion est donc démontrée.

II. — Caractères de classe (I_∞).

1. Énoncé du théorème. — Considérons le *groupe complexe unimodulaire de degré* 2*;* soit $\{\mathcal{F}, \mathrm{T}_x\}$ une représentation unitaire irréductible quelconque de ce groupe; comme l'ont démontré I. Gelfand et M. Neumark [52], on a les propriétés suivantes :

a. pour toute $f \in \mathbf{L}$, l'opérateur

$$\mathrm{T}_f = \int \mathrm{T}_x f(x)\, dx \tag{271}$$

est dans la classe d'Hilbert-Schmidt;

b. il existe une fonction $\chi(x)$, sommable sur tout compact pour dx, telle que l'on ait

$$\int \tilde{g} \star f(x)\, \chi(x)\, dx = \mathrm{Tr}(\mathrm{T}_g^\star \mathrm{T}_f) \qquad \text{pour } f,\ g \in \mathbf{L}. \tag{272}$$

Il est clair que la mesure $\chi(x)\,dx$ est centrale et de type positif; nous allons prouver que c'est un caractère de classe (I_∞) : l'existence de tels caractères sera donc établie.

En fait, on va démontrer beaucoup plus, à savoir le

Théorème 12. — *Soient* G *un groupe localement compact unimodulaire et séparable, et* μ *une mesure centrale et de type positif sur* G*; pour que* μ *soit un caractère de classe* (I_∞) *de* G, *il faut et il suffit que l'on puisse trouver une représentation unitaire irréductible* $\{\mathcal{F}, \mathrm{T}_x\}$ *de* G, *de dimension infinie, possédant les propriétés suivantes :*

a. *pour toute* $f \in \mathbf{L}$, *l'opérateur* (271) *est du type d'Hilbert-Schmidt;*

b. *quelles que soient* f, $g \in \mathbf{L}$, *on a*

$$\int \tilde{g} \star f(x)\, d\mu(x) = \mathrm{Tr}(\mathrm{T}_g^\star \mathrm{T}_f); \tag{273}$$

---

[52] *Voir* l'article cité dans la Note [42]. On notera que, selon toute probabilité, et comme Gelfand et Neumark l'ont eux-mêmes annoncé en partie, tous les groupes de Lie semi-simples complexes possèdent des propriétés analogues.

dans ces conditions, la représentation $\{\mathcal{F}, T_x\}$ *est entièrement déterminée à une équivalence près.*

Naturellement, pour être correct, il faudrait dire que la relation (273) n'est valable qu'à un facteur constant près !

2. Première partie de la démonstration. — Dans ce numéro, nous allons prouver que les conditions énoncées sont *suffisantes*.

Nous allons tout d'abord construire la d. r. u. de G définie par μ. Pour cela, désignons par $\mathbf{R}_0$ l'ensemble des opérateurs du type d'Hilbert-Schmidt définis dans $\mathcal{F}$, et munissons-le du produit scalaire

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{Tr}(B^* A); \tag{274}$$

on obtient ainsi un espace de Hilbert [cet espace est complet en vertu de la relation bien connue

$$\| A \| \leqq \operatorname{Tr}(A^* A)^{\frac{1}{2}}]. \tag{275}$$

Dans cet espace, on peut définir une d. r. u. $\{\mathbf{R}_0, U_x, V_x, S\}$ de G de la façon suivante : on pose

$$U_x(A) = T_x A, \qquad V_x(A) = A T_x^{-1}, \qquad S(A) = A^*; \tag{276}$$

nous allons tout d'abord démontrer que cette d. r. u. est *irréductible*.

Choisissons en effet une base orthonormale $\mathbf{e}_i$ de $\mathcal{F}$; formons l'espace de Hilbert $\mathcal{L}$, somme directe d'une infinité dénombrable d'espaces isomorphes à $\mathcal{F}$, et associons à tout $A \in \mathbf{R}_0$ l'élément de $\mathcal{L}$ dont les « composantes » sont les vecteurs $A\mathbf{e}_i$ [cette construction a un sens puisque les $A \in \mathbf{R}_0$ sont précisément caractérisés par le fait que

$$\Sigma \| A\mathbf{e}_i \|^2 < +\infty]. \tag{277}$$

On obtient ainsi un isomorphisme de l'espace de Hilbert $\mathbf{R}_0$ sur $\mathcal{L}$.

Maintenant, soit $\mathbf{R}$ l'anneau de tous les opérateurs de $\mathcal{F}$, et associons à un $A \in \mathbf{R}$ l'opérateur $\tilde{A}$ défini dans $\mathcal{L}$ par

$$\tilde{A}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots) = (A\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2, \ldots), \tag{278}$$

on obtient ainsi une représentation unitaire de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{L}$; il est clair que, si l'on identifie $\mathcal{L}$ et $\mathbf{R}_0$, cette représentation transforme T_x en l'opérateur U_x défini par (276). Nous allons montrer que l'anneau d'opérateurs engendré dans $\mathcal{L}$ par ces U_x est précisément formé des $\tilde{A}(\in \mathbf{R})$. En effet, cet anneau est l'ensemble des opérateurs qui permutent à tous les opérateurs permutables aux U_x; or si l'on représente un opérateur A défini dans $\mathcal{L}$ par sa matrice (A_{ij}), ce qui signifie qu'on a

$$A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots), \tag{279}$$

avec

$$\mathbf{y}_i = \Sigma A_{ij} \mathbf{x}_j, \tag{280}$$

la condition nécessaire et suffisante pour que A permute aux U_x est évidemment que les A_{ij} permutent aux T_x, donc se réduisent à des scalaires puisque les T_x forment par hypothèse un système irréductible dans $\mathcal{F}$; par conséquenr, l'anneau engendré par les U_x contient tous les $\tilde{A}(A \in \mathbf{R})$, et il est facile de voir qu'il ne contient que ces opérateurs, ce qui démontre notre assertion ([53]).

Il résulte de là, si l'on revient à la réalisation de $\mathcal{L}$ au moyen de $\mathbf{R}_0$, que l'anneau d'opérateurs $\mathbf{R}^s$ engendré par les U_x n'est autre que l'ensemble des endomorphismes de l'espace $\mathbf{R}_0$ qui sont de la forme $A \to BA$ où $B \in \mathbf{R}$; comme l'involution S transforme les U_x en les V_x, l'anneau d'opérateurs $\mathbf{R}^d$ engendré par les V_x est donc formé des opérateurs $A \to AB$, où $B \in \mathbf{R}$. Par conséquent, les opérateurs qui permutent à la fois aux U_x et aux V_x doivent permuter aux opérateurs $A \to BA$ et $A \to AB$, où B est arbitraire dans $\mathbf{R}$: ce qui implique visiblement l'irréductibilité du système des opérateurs U_x et V_x.

Ce point étant démontré, il est facile de prouver que la d. r. u. définie par la mesure μ est précisément $\{\mathbf{R}_0, U_x, V_x, S\}$; en effet, si l'on désigne par $\mathcal{H}$ l'espace dans lequel s'effectue cette d. r. u., et par $f \to \mathbf{f}$ l'application canonique de $\mathbf{L}$ dans $\mathcal{H}$, on doit avoir la relation

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int \tilde{g} \star f(x)\, d\mu(x) = \mathrm{Tr}(T_g^* T_f) \qquad \text{pour } f, g \in \mathbf{L}, \tag{281}$$

([53]) La démonstration qui précède est évidemment en rapport avec celle du théorème de densité « superforte » de J. von Neumann; voir RU, Chap. IV, § 1, prop. 15.

ce qui montre déjà qu'on peut identifier $\mathcal{H}$ à un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $\mathbf{R}_0$, à savoir le sous-espace engendré par les T_f; or ce sous-espace est visiblement invariant par les U_x et les V_x, donc coïncide avec $\mathbf{R}_0$ tout entier, et notre assertion découle immédiatement de cette constatation.

Il est clair maintenant que la mesure μ est un *caractère* de G; comme l'anneau $\mathbf{R}^s$ engendré par les U_x —anneau qui a été construit plus haut— est le prototype même des facteurs de classe (I_∞), la première partie de la démonstration est achevée : les conditions énoncées sont suffisantes pour que μ soit un caractère de classe (I_∞); la démonstration donne en outre des renseignements extrêmement précis sur la façon dont on peut construire la d. r. u. définie par μ.

3. Unicité de la représentation $\{\mathcal{F}, T_x\}$. — Nous devons maintenant montrer que la représentation irréductible $\{\mathcal{F}, T_x\}$ de G qui nous a servi est parfaitement déterminée à une équivalence près; on pourrait le faire rapidement en observant que, si l'on considère la d. r. u. $\{\mathcal{H}, U_x, V_x, S\}$ définie par μ, $\{\mathcal{F}, T_x\}$ s'obtient en prenant dans $\mathcal{H}$ un sous-espace fermé appartenant à l'anneau $\mathbf{R}^d$ et *minimal* parmi ces sous-espaces, et en restreignant les U_x à ce sous-espace; comme l'on sait, d'après F. J. Murray et J. von Neumann ([54]), que deux sous-espaces minimaux d'un facteur de classe (I_∞) peuvent toujours être appliqués isomorphiquement l'un sur l'autre au moyen d'opérateurs appartenant à ce facteur, la propriété annoncée s'ensuit.

Nous allons donner une autre démonstration qui, tout en étant plus élémentaire que la précédente, va nous permettre d'énoncer un résultat intéressant en soi, à savoir le

Théorème 13. — *Soient $\mathcal{F}$ un espace de Hilbert séparable, et $\mathbf{R}_1$ l'algèbre involutive formée des opérateurs complètement continus dans $\mathcal{F}$; toute représentation unitaire irréductible de $\mathbf{R}_1$ est triviale* (c'est-à-dire semblable à la représentation « identique » de $\mathbf{R}_1$ dans $\mathcal{F}$).

([54]) *On rings of operators* I (la propriété en question est du reste une conséquence de celles de la « dimension relative »).

Soit en effet $\{\mathcal{E}, T_A\}$ une telle représentation; pour tout élément $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ de $\mathcal{E}$, l'expression

$$(282) \qquad \varphi(A) = \langle T_A \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$$

est une forme linéaire positive sur $\mathbf{R}_1$, et la représentation en question peut encore se définir en munissant $\mathbf{R}_1$ du produit scalaire $\varphi(B^\star A)$, T_A étant alors réalisé par les translations $B \to AB$ dans $\mathbf{R}_1$; il est clair alors que tout revient à prouver que l'on a

$$(283) \qquad \varphi(A) = \langle A\mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$$

pour un $\mathbf{a} \in \mathcal{F}$ convenable.

Or, puisque $\mathbf{R}_1$ est une algèbre normée complète munie d'une involution continue, $A \to T_A$ est une application continue pour la norme des opérateurs; donc la forme positive $\varphi(A)$ est continue; si on la considère sur l'idéal bilatère $\mathbf{R}_0$ de $\mathbf{R}_1$, on aura donc une relation de la forme

$$(284) \qquad |\varphi(A)| \leqq M.\mathrm{Tr}(A^\star A)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{pour tout } A \in \mathbf{R}_0$$

[*cf.* équat. (275)]; puisque $\mathbf{R}_0$ est un espace *complet* pour la norme ci-dessus il existe donc un $H \in \mathbf{R}_0$ pour lequel on a [55].

$$(285) \qquad \varphi(A) = \mathrm{Tr}(HA) \qquad \text{quel que soit } A \in \mathbf{R}_0$$

La forme φ devant être positive, l'opérateur H est nécessairement *hermitien positif*, en sorte que l'on peut écrire, en introduisant dans $\mathcal{F}$ une base orthonormale $(\mathbf{e}_i)$:

$$(286) \qquad \varphi(A) = \mathrm{Tr}\left(H^{\frac{1}{2}} A H^{\frac{1}{2}}\right) = \Sigma \langle A H^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_i, H^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_i \rangle = \Sigma \langle A\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \rangle;$$

considérons alors la forme $\varphi_i(A) = \langle A\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \rangle$; d'après ce qui précède on a $0 \leqq \varphi_i(A^\star A) \leqq \varphi(A^\star A)$ pour tout $A \in \mathbf{R}_0$, donc aussi, par raison de continuité, pour tout $A \in \mathbf{R}_1$; puisque la forme φ définit une

(55) Ce raisonnement est emprunté à M. Neumark [*Anneaux d'opérateurs dans les espaces de Hilbert* (*Uspekhi Mat. Nauk*, t. IV, n° 4, 1949, p. 83-147); *voir* en particulier le Chapitre I (§ 1)], dans la mesure où l'on peut le considérer comme dû à cet auteur.

représentation *irréductible* de $\mathbf{R}_1$, la forme φ_i est nécessairement proportionnelle à φ ([56]), et ceci démontre le théorème 13.

Le théorème 13 étant prouvé, soit μ un caractère de classe (I_∞), et supposons que, pour deux représentations unitaires irréductibles $\{\mathcal{F}, T_x\}$ et $\{\mathcal{F}', T'_x\}$ de G, vérifiant la condition *a* du théorème 12, on ait

$$\int \tilde{g} \star f(x)\, d\mu(x) = \mathrm{Tr}(T_g^\star T_f) = \mathrm{Tr}(T_g'^\star T'_f); \tag{287}$$

la correspondance $T_f \to T'_f$ est alors un isomorphisme de l'algèbre des T_f sur celle des T'_f; d'autre part, si l'on considère, dans la d. r. u. définie par μ, l'algèbre formée par les U_f, on vérifie aisément que l'on a

$$\| U_f \| = \| T_f \| = \| T'_f \| \tag{288}$$

(il suffit pour cela de se reporter aux constructions du n° 2); par suite, l'application $T_f \to T'_f$ est isométrique; on peut donc la prolonger par continuité à l'ensemble des opérateurs qui sont limites uniformes d'opérateurs T_f; or il résulte du n° 2 que les T_f sont partout denses dans $\mathbf{R}_0$ au sens de la norme $\mathrm{Tr}(A^\star A)^{\frac{1}{2}}$, donc *a fortiori* au sens de la norme $\| A \|$: par suite, ces T_f sont partout denses dans $\mathbf{R}_1$. En définitive, l'application $T_f \to T'_f$ est prolongeable à l'algèbre $\mathbf{R}_1$ des opérateurs complètement continus de $\mathcal{F}$, et conduit visiblement à une représentation unitaire irréductible de celle-ci. D'après le théorème 13, on peut donc construire un isomorphisme de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{F}'$ qui transforme T_f en T'_f : il est clair que cet isomorphisme transformera T_x en T'_x, ce qui démontre que les représentations $\{\mathcal{F}, T_x\}$ et $\{\mathcal{F}', T'_x\}$ de G sont équivalentes.

4. Nécessité des conditions. — Pour achever la démonstration du théorème 12, il nous reste à montrer qu'il n'existe pas d'autres moyen de former des caractères de classe (I_∞) que celui qu'on a décrit jusqu'ici.

([56]) On s'appuie ici sur le fait bien connu que les formes positives « élémentaires » sont aussi « extrémales ».

Soit donc μ un caractère de classe (I_∞) définissant une d. r. u. irréductible $\{\mathcal{H}, \mathrm{U}_x, \mathrm{V}_x, \mathrm{S}\}$; les facteurs $\mathbf{R}^s$ et $\mathbf{R}^d$ sont alors de classe (I_∞), ce qui veut dire : *l'ensemble des sous-espaces fermés non nuls appartenant à $\mathbf{R}^d$ possède des éléments minimaux.*

Soit $\mathcal{F}$ un tel sous-espace minimal. Puisque les opérateurs de $\mathbf{R}^d$ sont ceux qui permutent aux U_x, il est clair que les restrictions T_x des U_x à $\mathcal{F}$ forment une représentation unitaire *irréductible* de G. On sait d'autre part d'après F. J. Murray et J. von Neumann ([57]) que les restrictions à $\mathcal{F}$ des opérateurs de $\mathbf{R}^s$ constituent l'anneau de *tous* les opérateurs de $\mathcal{F}$; plus précisément, si l'on désigne par $\mathring{\mathrm{A}}$ la restriction à $\mathcal{F}$ d'un $\mathrm{A} \in \mathbf{R}^s$, l'application $\mathrm{A} \to \mathring{\mathrm{A}}$ est un *isomorphisme isométrique* de $\mathbf{R}^s$ sur l'anneau $\mathbf{R}$ des opérateurs continus de $\mathcal{F}$.

Puisque les opérateurs de la forme U_x($\mathbf{x}$ élément borné de $\mathcal{H}$), forment un idéal bilatère non trivial de $\mathbf{R}^s$ (Chap. I, § 1, lemme 4), les restrictions à $\mathcal{F}$ de ces opérateurs forment de même un idéal bilatère non trivial de $\mathbf{R}$; or il est bien connu qu'un tel idéal :

a. contient tous les opérateurs de rang fini;

b. est contenu dans l'idéal $\mathbf{R}_1$ des opérateurs complètement continus;

nous voyons donc déjà que, pour toute $f \in \mathbf{L}$, l'opérateur défini dans $\mathcal{F}$ par la relation

$$\mathrm{T}_f = \int \mathrm{T}_x f(x)\, dx = \mathring{\mathrm{U}}_f \tag{289}$$

est *complètement continu*, ainsi plus généralement que les $\mathring{\mathrm{U}}_{\mathbf{x}}$ pour tout élément borné $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$.

En fait, nous allons prouver plus, à savoir que *les $\mathring{\mathrm{U}}_{\mathbf{x}}$ sont du type d'Hilbert-Schmidt et que l'on a*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathrm{Tr}(\mathring{\mathrm{U}}_{\mathbf{y}}^* \mathring{\mathrm{U}}_{\mathbf{x}}) \tag{290}$$

quels que soient les éléments bornés $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$. Cette propriété entraînera évidemment le théorème 12. Naturellement, on suppose μ normé de

([57]) *On rings of operators*, I, lemme 2.3.4.

telle sorte que la « dimension relative » des sous-espaces minimaux tels que $\mathcal{F}$ soit égale à 1.

Pour cela, considérons un élément borné $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$, et formons l'opérateur

$$H = (U_{\mathbf{x}}^* U_{\mathbf{x}})^{\frac{1}{2}}; \tag{291}$$

on a $H = W U_{\mathbf{x}}$ où $W \in \mathbf{R}^s$ est partiellement isométrique, et est même isométrique sur le sous-espace de $\mathcal{H}$ soustendu par les $U_{\mathbf{x}}\mathbf{z}$, sous-espace qui contient $\mathbf{x}$ (lemme a); on a donc

$$H = U_{\mathbf{y}}, \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \tag{292}$$

puisque $\mathbf{y} = W\mathbf{x}$.

Maintenant, considérons dans $\mathcal{F}$ l'opérateur $\mathring{H}$; il est hermitien positif et complètement continu, donc possède une décomposition spectrale de la forme

$$\mathring{H} = \Sigma \lambda_i F_i, \tag{293}$$

où les F_i sont, dans l'espace de Hilbert $\mathcal{F}$, des projecteurs deux à deux orthogonaux et de rang fini, et où les λ_i sont des nombres > 0 tendant vers zéro. Puisque les anneaux $\mathbf{R}^s$ et $\mathbf{R}$ sont isomorphes, on peut poser

$$F_i = \mathring{E}_i \tag{294}$$

où les $E_i \in \mathbf{R}^s$ sont des projecteurs bien déterminés, deux à deux orthogonaux comme les F_i. Puisque la série (293) converge au sens de la norme des opérateurs ([58]), et puisque l'on a toujours, comme on l'a dit $\|A\| = \|\mathring{A}\|$, on obtient donc la relation

$$H = \Sigma \lambda_i E_i. \tag{295}$$

Maintenant, l'application $A \to \mathring{A}$ de $\mathbf{R}^s$ sur $\mathbf{R}$ transforme ([54]) la notion de « dimension relative » en la notion ordinaire de « rang »; puisque les F_i sont de rang fini, les E_i sont donc de dimension relative finie; en raison du théorème 11 du paragraphe I, on peut donc écrire

$$E_i = U_{\mathbf{a}_i}, \tag{296}$$

([58]) En raison du fait que les λ_i tendent vers zéro.

où les $\mathbf{a}_i$ sont des éléments bornés de $\mathcal{H}$ vérifiant

$$(297) \qquad \|\mathbf{a}_i\|^2 = \Delta(\mathrm{E}_i) = \text{rang de } \mathrm{F}_i = \mathrm{Tr}(\mathrm{F}_i).$$

Si l'on pose $\mathbf{b}_i = \lambda_i \mathbf{a}_i$, on aura donc en définitive la relation

$$(297') \qquad \mathrm{H}^2 = \mathrm{U}_{\mathbf{x}}^* \mathrm{U}_{\mathbf{x}} = \Sigma\, \mathrm{U}^* \mathbf{b}_i \mathrm{U}\, \mathbf{b}_i;$$

en raison de (297), il est clair que, pour démontrer (290), tout revient à prouver que l'on a

$$(298) \qquad \|\mathbf{x}\|^2 = \Sigma \|\mathbf{b}_i\|^2.$$

Or, les projecteurs E_i étant deux à deux orthogonaux, il en est de même des éléments $\mathbf{b}_i$ (lemme *a*); d'autre part, de

$$(299) \qquad \mathrm{H} = \mathrm{U}_{\mathbf{y}} = \Sigma\, \mathrm{U}_{\mathbf{b}_i}$$

résulte que l'on a, pour tout entier n,

$$(300) \qquad \sum_{1 \leq i \leq n} \mathrm{U}_{\mathbf{b}_i} = \mathrm{W}_n \mathrm{U}_{\mathbf{y}},$$

où $\mathrm{W}_n \in \mathbf{R}^s$ est partiellement isométrique; donc il vient, en tenant compte de $\mathbf{b}_1 + \ldots + \mathbf{b}_n = \mathrm{W}_n \mathbf{y}$ et de l'orthogonalité des $\mathbf{b}_i$:

$$(301) \qquad \sum_{1 \leq i \leq n} \|\mathbf{b}_i\|^2 \leqq \|\mathbf{y}\|^2;$$

par suite, la série de terme général $\mathbf{b}_i$ converge fortement vers un élément $\mathbf{y}' \in \mathcal{H}$ vérifiant

$$(302) \qquad \|\mathbf{y}'\|^2 = \Sigma \|\mathbf{b}_i\|^2.$$

Pour f, $g \in \mathbf{L}$ il vient alors

$$(303) \qquad \langle \mathbf{y}, \mathbf{f} \star \tilde{\mathbf{g}} \rangle = \langle \mathrm{V}_g \mathbf{y}, \mathbf{f} \rangle = \langle \mathrm{U}_{\mathbf{y}} \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle = \langle \mathrm{H}\mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle = \sum_i \langle \mathrm{U}_{\mathbf{b}_i} \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle$$
$$= \sum_i \langle \mathrm{V}_g \mathbf{b}_i, \mathbf{f} \rangle = \langle \mathrm{V}_g \mathbf{y}', \mathbf{f} \rangle = \langle \mathbf{y}', \mathbf{f} \star \tilde{\mathbf{g}} \rangle,$$

en sorte qu'on a $\mathbf{y} = \mathbf{y}'$, ce qui, conjugué avec (302) et (292), démontre (298) et donc le théorème 12.

Remarque. — Il est facile de voir, au moyen des raisonnements qu'on vient d'exposer, que les U_x sont les *seuls* opérateurs de $\mathbf{R}^s$ ayant pour restriction à $\mathcal{F}$ des opérateurs du type d'Hilbert-Schmidt. Il y a tout lieu de croire que, dans le cas (II_∞), ces U_x sont de même les opérateurs « normés » au sens de J. von Neumann ([59]).

5. Structure des caractères de classe (I_∞). — Soit μ un caractère de classe (I_∞), associée comme on l'a vu à une représentation unitaire irréductible $\{\mathcal{F}, \mathrm{T}_x\}$ de G; si l'on prend dans $\mathcal{F}$ une base orthonormale $(\mathbf{e}_i)$, et si l'on introduit les fonctions *élémentaires normées* de type positif

$$\varphi_i(x) = \langle \mathrm{T}_x \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle, \tag{304}$$

on aura, pour f, $g \in \mathbf{L}$:

$$\int \tilde{g} \star f(x)\, d\mu(x) = \mathrm{Tr}(\mathrm{T}_g^\star \mathrm{T}_f) = \Sigma \langle \mathrm{T}_f \mathbf{e}_i, \mathrm{T}_g \mathbf{e}_i \rangle \tag{305}$$

et par conséquent

$$\int \tilde{g} \star f(x)\, d\mu(x) = \sum_{i=1}^{i=+\infty} \int \tilde{g} \star f(x)\, \varphi_i(x)\, dx; \tag{306}$$

on peut donc dire qu'*un caractère de classe* (I_∞) *est une somme* (discrète) *de fonctions élémentaires normées appartenant à une classe de représentations parfaitement déterminée.*

On pourrait être tenté de déduire de là qu'un tel caractère est nécessairement — comme c'est le cas sur le groupe de Lorentz — de la forme $\chi(x)\,dx$, où χ est sommable sur tout compact pour la mesure de Haar dx; mais nous allons précisément montrer dans le prochain paragraphe que cette conjecture est fausse !

III. — Où l'on répond au problème II.

Dans ce paragraphe, on va étudier en détail la d. r. u. *régulière* du groupe G formé des matrices

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ g_{21} & 1 & 0 \\ g_{31} & g_{32} & 1 \end{pmatrix}; \tag{307}$$

([59]) *On rings of operators*, III, Chap. I.

où les g_{ij} sont des nombres réels arbitraires. On va voir que, dans ce groupe, la mesure ε qui définit la d. r. u. régulière se décompose en une somme continue de caractères de classe (I_∞); cette étude va en même temps nous fournir un contre-exemple pour le problème II posé dans l'Introduction.

1. Construction des translations bilatères. — Étant donnés deux éléments a, $b \in \mathrm{G}$, la translation bilatère $g \to g' = agb$ est donnée explicitement par les formules

$$(308)\qquad \begin{cases} g'_{21} = g_{21} + a_{21} + b_{21}, \\ g'_{31} = g_{31} + a_{32}g_{21} + b_{21}g_{32} + a_{31} + a_{32}b_{21} + b_{31}, \\ g'_{32} = g_{32} + a_{32} + b_{32}; \end{cases}$$

lorsque a et b varient, on obtient donc exactement l'ensemble des transformations $g \to g'$ de la forme

$$(309)\qquad \begin{cases} g'_{21} = g_{21} + c_1, \\ g'_{31} = g_{31} + c_3 + c_4 g_{21} + c_5 g_{32}, \\ g'_{32} = g_{32} + c_2, \end{cases}$$

où les c_i sont des constantes réelles arbitraires.

Il est visible sur ces formules que la mesure

$$(310)\qquad dg = dg_{21}\,dg_{31}\,dg_{32}$$

est invariante à droite et à gauche sur G : c'est donc la mesure de Haar, et G est unimodulaire. L'espace L^2 dans lequel s'effectue la d. r. u. régulière est donc l'ensemble des fonctions $\mathrm{F}(g_{21}, g_{31}, g_{32})$ vérifiant

$$(311)\qquad \iiint |\mathrm{F}(x, y, z)|^2\,dx\,dy\,dz < +\infty.$$

Dans cet espace, les translations U_x et V_x sont données par les formules suivantes :

$$(312)\qquad \mathrm{U}_a^{-1}\mathrm{F}(x, y, z) = \mathrm{F}(x + a_{21},\ y + a_{31} + a_{32}x,\ z + a_{32}),$$

$$(313)\qquad \mathrm{V}_b\mathrm{F}(x, y, z) = \mathrm{F}(x + b_{21},\ y + b_{31} + b_{21}z,\ z + b_{32});$$

si l'on veut décomposer ε en une somme continue de caractères, il faut décomposer le système formé par les U_a et les V_b, autrement dit par les opérateurs $U_a V_b$, ou enfin, d'après (309), par les opérateurs

$$T_c F(x, y, z) = F(x + c_1, y + c_3 + c_4 x + c_5 z, z + c_2). \tag{314}$$

Pour faire cette décomposition, il faut chercher des opérateurs qui permutent aux T_c; or il est facile d'en trouver, car le sous-groupe Z formé des matrices

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{315}$$

n'est autre que le *centre* de G : on est donc sûr que les $U_z (z \in Z)$ permutent aux T_c (et il se trouve, comme on le constatera, qu'il n'y a essentiellement que ces opérateurs qui soient permutables aux T_c).

2. Construction des caractères. — Ce qui précède nous conduit à effectuer une transformation de Fourier par rapport à g_{31}. Pour une $F \in \mathbf{L}$, nous poserons donc

$$F_\chi(g_{21}, g_{32}) = \int F(g_{21}, g_{31}, g_{32}) \overline{\chi(g_{31})} \, dg_{31}, \tag{316}$$

où

$$\chi(z) = e^{2\pi i \lambda z} \tag{317}$$

est un caractère du sous-groupe abélien Z. En utilisant le théorème de Plancherel, le produit scalaire (au sens de L^2) de deux fonctions F, $G \in \mathbf{L}$ s'écrit alors

$$\langle F, G \rangle = \iiint F_\chi(x, y) \overline{G_\chi(x, y)} \, d\chi \, dx \, dy; \tag{318}$$

si l'on introduit l'espace $\mathcal{H}$ des fonctions $H(x, y)$ vérifiant

$$\iint |H(x, y)|^2 dx \, dy < +\infty,$$

on voit que toutes les fonctions F_χ sont dans $\mathcal{H}$, et la formule précédente s'écrit

$$\langle F, G \rangle = \int \langle F_\chi, G_\chi \rangle \, d\chi; \tag{319}$$

on a ainsi décomposé L^2 en une somme continue d'espaces de Hilbert tous isomorphes à $\mathcal{H}$. On va voir que les T_c se décomposent aussi.

Pour cela, il suffit de poser $T_c F = F'$ et de calculer d'aprés (316) les composantes de F'; il vient immédiatement la formule

$$(320)\qquad F'_\chi(g_{21}, g_{32}) = \chi(c_3 + c_4 g_{21} + c_5 g_{32}) F_\chi(g_{21} + c_1, g_{32} + c_2);$$

par conséquent, si l'on introduit dans $\mathcal{H}$ les opérateurs unitaires

$$(321)\qquad T_{\chi;c} H(x, y) = \chi(c_3 + c_4 x + c_5 y) H(x + c_1, y + c_2),$$

on voit que T_c se décompose suivant les $T_{\chi;c}$, et l'on peut compléter (319) en écrivant

$$(322)\qquad \langle T_c F, G \rangle = \int \langle T_{\chi;c} F_\chi, G_\chi \rangle d\chi.$$

Il n'est pas sans intérêt de noter au passage que les « champs de vecteurs » $F_\chi (F \in \mathbf{L})$ forment une *famille fondamentale* au sens que nous avons donné à cette expression dans (RU); on laisse au lecteur le soin de vérifier ce point, peu important pour ce qui nous occupe.

Lemme *d*. — *Si le caractère χ de Z n'est pas constant, les opérateurs* $T_{\chi;c}$ *forment un système irréductible.*

En effet, ce système contient visiblement :

a. les opérateurs $H(x, y) \to H(x + a, y + b)$;

b. et si χ n'est pas constant, les opérateurs $H(x,y) \to \chi'(x,y) H(x,y)$, où χ' est un caractère arbitraire du groupe R^2;

l'irréductibilité de ce système est donc évidente.

Chaque χ permet de définir une d. r. u. $\{\mathcal{H}, U_{\chi;g}, V_{\chi;g}, S\}$ de G de la façon suivante : on pose

$$(323)\qquad U_{\chi;g} = T_{\chi;c}, \quad \text{où} \quad T_c = U_g;$$

$$(324)\qquad V_{\chi;g} = T_{\chi;c}, \quad \text{où} \quad T_c = V_g;$$

$$(325)\qquad SH(x, y) = \overline{H(-x, -y)};$$

d'après le lemme *d*, cette d. r. u. est irréductible pour χ non constant; on va montrer qu'on peut la définir au moyen d'une mesure centrale et de type positif définie sur G, mesure qui sera nécessairement un caractère de G.

Pour cela, calculons à l'aide de (316) le produit scalaire

$$(326)\quad \langle F_\chi, G_\chi \rangle = \iint F_\chi(x, y)\overline{G_\chi(x, y)}\,dx\,dy$$
$$= \iiiint F(x, z, y)\,\overline{G(x, z', y)}\,\overline{\chi(z)}\,\chi(z')\,dx\,dy\,dz\,dz'$$
$$= \iiiint F(x, z, y)\,\overline{G(x, z', y)}\,\chi(z'-z)\,dx\,dy\,dz\,dz'$$
$$= \iiiint F(x, z, y)\,\overline{G(x, z+z', y)}\,\chi(z')\,dx\,dy\,dz\,dz';$$

il vient visiblement

$$(327)\quad \langle F_\chi, G_\chi \rangle = \int \widetilde{G} \star F(z)\,\chi(z)\,dz;$$

considérons alors la mesure μ_χ qui, à une $F \in \mathbf{L}$, associe le nombre

$$(328)\quad \int_G F(g)\,d\mu_\chi(g) = \int_Z F(z)\,\chi(z)\,dz;$$

cette mesure est évidemment de type positif; elle est centrale, puisque son support dans G est le sous-groupe Z, centre de G; d'après (327) la d. r. u. de G définie par μ_χ s'effectue dans le sous-espace fermé de $\mathcal{H}$ soustendu par les F_χ ($F \in \mathbf{L}$), et donc, puisque ce sous-espace est invariant par les $T_{\chi;c}$, dans $\mathcal{H}$ tout entier en vertu du lemme *d*. Il résulte immédiatement de là que, si χ n'est pas constant, la d. r. u. définie par μ_χ n'est autre que $\{\mathcal{H}, U_{\chi;g}, V_{\chi;g}, S\}$; la formule (319) nous fournit alors la décomposition cherchée de la mesure ε en somme continue de caractères de G, puisqu'elle s'écrit

$$(329)\quad \widetilde{G} \star F(e) = \int_{\chi \neq 1} d\chi \int \widetilde{G} \star F(g)\,d\mu_\chi(g)$$

(on intègre sur l'ensemble des χ non constants de façon à ne faire intervenir que des caractères de G — c'est évidemment justifié puisque le point 1 est de mesure nulle pour $d\chi$).

Il nous reste maintenant à déterminer la classe à laquelle appartiennent les caractères que nous venons de former. Auparavant, il faut remarquer que la forme des caractères que nous venons de construire prouve ceci : IL EXISTE DES GROUPES DONT LES CARACTÈRES NE SONT PAS TOUS

ABSOLUMENT CONTINUS PAR RAPPORT A LA MESURE DE HAAR. Le problème II admet donc une réponse *négative*.

5. DÉCOMPOSITION DES $U_{\chi;g}$. — Avant de déterminer la classe de μ_χ, nous allons décomposer l'ensemble des opérateurs $U_{\chi;g}$ en une somme continue de représentations unitaires irréductibles.

Pour cela, il nous faut trouver, dans l'anneau $\mathbf{R}^d(\chi)$ des opérateurs permutables aux $U_{\chi;g}$, une sous-algèbre commutative *maximale*. Or cet anneau est engendré — on le sait d'une manière générale (Chap. I, § I, th. 1) — par les opérateurs $V_{\chi;g}$, lesquels sont donnés explicitement par

$$V_{\chi;g}H(x, y) = \chi(g_{31} + g_{21}y)\,H(x + g_{21}, y + g_{32}) \tag{330}$$

[*cf.* (308), (309) et (321)]; il y a tout lieu de croire que l'algèbre engendrée par les opérateurs $H(x, y) \to H(x, y + b)$ va convenir. Par suite, nous allons effectuer une transformation de Fourier par rapport à la variable y.

Considérons donc deux fonctions continues et à support compact H et H′ définies sur R^2, et, pour un caractère $\zeta(y)$ du groupe R, posons

$$H_\zeta(x) = \int H(x, y)\,\overline{\zeta(y)}\,dy; \tag{331}$$

d'après la formule de Plancherel, le produit scalaire dans $\mathcal{H}$ est alors donné par

$$\langle H, H' \rangle = \iint H_\zeta(x)\,\overline{H'_\zeta(x)}\,dx\,d\zeta; \tag{332}$$

si nous introduisons l'espace $\mathcal{F}$ des fonctions $L(x)$ telles que

$$\int |L(x)|^2\,dx < +\infty,$$

on voit que $H_\zeta \in \mathcal{F}$ pour tout ζ, et (332) s'écrit

$$\langle H, H' \rangle = \int \langle H_\zeta, H'_\zeta \rangle\,d\zeta. \tag{333}$$

Maintenant il s'agit de décomposer les $U_{\chi;g}$, lesquels sont donnés explicitement par

$$U_{\chi;g}^{-1}H(x, y) = \chi(g_{31} + g_{32}x)\,H(x + g_{21}, y + g_{32}); \tag{334}$$

pour cela, posons $U_{\chi;g}^{-1}H = H'$, et calculons les composantes de H'; il vient immédiatement

$$H'_\zeta(x) = \zeta(g_{32})\,\chi(g_{31} + g_{32}x)\,H_\zeta(x + g_{21}). \tag{335}$$

Nous sommes donc conduit à introduire dans l'espace $\mathcal{F}$ les représentations unitaires de G définies par

$$U_{\chi;\zeta;g}^{-1}L(x) = \zeta(g_{32})\,\chi(g_{31} + g_{32}x)\,L(x + g_{21}), \tag{336}$$

grâce à quoi la formule (333) nous donne la décomposition cherchée :

$$\langle U_{\chi;g}H, H' \rangle = \int \langle U_{\chi;\zeta;g}H_\zeta, H'_\zeta \rangle\, d\zeta. \tag{337}$$

Lemme *e*. — *Si le caractère χ n'est pas constant, les représentations $U_{\chi;\zeta;g}$ sont irréductibles et deux à deux équivalentes.*

L'irréductibilité des représentations (336) se démontre comme le lemme *d*. Pour voir que ces représentations sont équivalentes, posons

$$\chi(z) = e^{2\pi i\lambda z}, \qquad \zeta(z) = e^{2\pi i\alpha z}, \tag{338}$$

et comparons la représentation définie par le caractère ζ à celle qui est définie par le caractère constant, correspondant donc à $\alpha = 0$; on a les formules suivantes :

$$U_{\chi;\zeta;g}^{-1}L(x) = e^{2\pi i(\alpha g_{32} + \lambda g_{31} + \lambda g_{32}x)}\,L(x + g_{21}), \tag{339}$$

$$U_{\chi;1;g}^{-1}L(x) = e^{2\pi i(\lambda g_{31} + \lambda g_{32}x)}\,L(x + g_{21}); \tag{340}$$

il est alors clair que l'automorphisme $L(x) \to L\left(x + \frac{\alpha}{\lambda}\right)$ de l'espace $\mathcal{F}$ transforme la représentation (339) en la représentation (340).

4. Classe des caractères μ_χ. — Nous allons maintenant montrer que les caractères μ_χ sont de classe (I_∞) à l'aide du théorème 12.

Pour cela, considérons la représentation (340), que nous écrirons encore, pour simplifier les notations, sous la forme $T_{\chi;g}$; on a donc

$$T_{\chi;g}^{-1}L(x) = \chi(g_{31} + g_{32}x)\,L(x + g_{21}); \tag{341}$$

et, pour une fonction $F(g)$ continue et à support compact sur G, calculons l'opérateur de composition

$$T_{\chi;F} = \int T_{\chi;g}^{-1}\,F(g)\,dg; \tag{342}$$

il vient

$$(343)\quad T_{\chi;F}L(x) = \iiint \chi(g_{31}+g_{32}x)\, L(x+g_{21})\, F(g_{21}, g_{31}, g_{32})\, dg_{21}\, dg_{31}\, dg_{32}$$
$$= \iiint \chi(g_{31}+g_{32}x)\, L(g_{21})\, F(g_{21}-x, g_{31}, g_{32})\, dg_{21}\, dg_{31}\, dg_{32}$$

et par suite

$$(344)\qquad T_{\chi;F}L(x) = \int L(y)\, K_{\chi;F}(y, x)\, dy$$

où le noyau $K_{\chi;F}$ est donné par la formule

$$(345)\qquad K_{\chi;F}(x, y) = \iint \chi(g_{31}+g_{32}y)\, F(x-y, g_{31}, g_{32})\, dg_{31}\, dg_{32}.$$

Lemme f. — *Les opérateurs* $T_{\chi;F}(F \in \mathbf{L})$ *sont du type d'Hilbert-Schmidt.*

Pour le montrer, il faut prouver que l'on a

$$(346)\qquad \iint |K_{\chi;F}(x, y)|^2\, dx\, dy < +\infty \quad \text{pour toute } F \in \mathbf{L},$$

ou, ce qui revient évidemment au même, que

$$(347)\qquad \iint |K_{\chi;F}(x+y, y)|^2\, dx\, dy < +\infty.$$

Pour cela, considérons F comme une fonction définie sur le groupe abélien R^3 et calculons sa transformée de Fourier

$$(348)\quad \hat{F}(u, v, w) = \iiint e^{2\pi i(ug_{21}+vg_{31}+wg_{32})}\, F(g_{21}, g_{31}, g_{32})\, dg_{21}\, dg_{31}\, dg_{32};$$

en comparant avec (345), il vient la relation

$$(349)\qquad \hat{F}(u, v, w) = \int e^{2\pi iux}\, K_{v;F}\left(x+\frac{w}{v}, \frac{w}{v}\right) dx$$

[le symbole $K_{v;F}$ représente $K_{\chi;F}$ pour le caractère $\chi(z) = e^{2\pi ivz}$]; par conséquent, si le caractère χ est donné par (338), nous avons

$$(350)\qquad \int e^{2\pi iux}\, K_{\chi;F}(x+y, y)\, dx = \hat{F}(u, \lambda, \lambda y).$$

Ceci étant, il est clair que $K_{\chi;F}(x+y, y)$ est, pour χ et y donnés, une fonction continue et à support compact en x; la formule (350) combinée avec le théorème de Plancherel donne donc

$$(351)\qquad \int |K_{\chi;F}(x+y, y)|^2\,dx = \int |\hat{F}(u, \lambda, \lambda y)|^2\,du,$$

et dans ces conditions la démonstration de (347) se trouve ramenée à celle de la relation

$$(352)\qquad \iint |\hat{F}(u, \lambda, \lambda y)|^2\,du\,dy < +\infty.$$

Or considérons, pour λ donné, la fonction

$$(353)\qquad F_1(g_{21}, g_{32}) = \int e^{2\pi i\lambda g_{31}} F(g_{21}, g_{31}, g_{32})\,dg_{31};$$

comme F, c'est une fonction continue et à support compact, donc de carré sommable sur R^2; comme sa transformée de Fourier est évidemment $\hat{F}(x, \lambda, y)$, la relation (352) résulte du théorème de Plancherel : le lemme f est donc démontré.

D'après (351) et (352), on a

$$(354)\quad \mathrm{Tr}(T^*_{\chi;F}T_{\chi;F}) = \iint |\hat{F}(u, \lambda, \lambda y)|^2\,du\,dy = |\lambda|^{-1}\iint |\hat{F}(u, \lambda, y)|^2\,du\,dy,$$

d'où en appliquant une nouvelle fois le théorème de Plancherel,

$$(355)\qquad \mathrm{Tr}(T^*_{\chi;F}T_{\chi;F}) = |\lambda|^{-1}\iint |F_1(g_{21}, g_{32})|^2\,dg_{21}\,dg_{32};$$

d'après (353), ceci s'écrit encore [*cf.* (316) et (326)]

$$(356)\qquad \mathrm{Tr}(T^*_{\chi;F}T_{\chi;F}) = |\lambda|^{-1}\int \tilde{F}\star F(g)\,d\mu_\chi(g);$$

par conséquent, il est bien démontré que *les caractères* μ_χ *sont de classe* (I_∞). On a, en outre, au lieu de (329), la formule

$$(357)\qquad \langle F, G\rangle = \int_{\lambda\neq 0} \mathrm{Tr}(T_{\chi;F}T^*_{\chi;G})\,|\lambda|\,d\lambda,$$

formule qu'il y a lieu de considérer comme constituant l'analogue du théorème de Plancherel pour le groupe G considéré ici. On pourrait évidemment, comme le font Gelfand et Neumark pour le groupe de

Lorentz, en déduire une décomposition de la représentation régulière gauche $\{L^2, U_g\}$ de G en somme continue de représentations unitaires irréductibles; mais ce n'est pas notre but ici.

APPENDICE.

UNE OPÉRATION $\natural$ LIÉE AUX GROUPES DE LIE SEMI-SIMPLES.

Soit G un groupe de Lie à paramètres réels (ce qui n'exclut naturellement pas la possibilité pour G d'avoir une structure complexe). Désignons par $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact définies sur G; c'est un sous-espace (et même un idéal bilatère) de l'algèbre $\mathbf{L}$ de G.

Soit $t \to x_t$ un sous-groupe à un paramètre de G, plus exactement, un homomorphisme continu et donc analytique du groupe additif des nombres réels dans G; pour toute $f \in \mathcal{D}$, la fonction $f(x_t)$ est indéfiniment différentiable sur la droite, ce qui permet d'associer au sous-groupe en question un opérateur linéaire X défini dans $\mathcal{D}$ par la formule

$$\mathrm{X}f(s) = \left[\frac{d}{dt} f(sx_t)\right]_{t=0}; \tag{358}$$

comme il est bien connu, les opérateurs X ainsi obtenus constituent une réalisation de l'algèbre de Lie (réelle) de G, le produit de deux opérateurs étant leur crochet de Jacobi ([60]).

Nous désignerons par $\mathbf{D}_1$ l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients *complexes* des X en question; si G est de dimension réelle égale à n, $\mathbf{D}_1$ est de dimension complexe n.

Les éléments de $\mathbf{D}_1$ étant des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathcal{D}$, on peut considérer l'algèbre associative d'opérateurs qu'ils engendrent dans $\mathcal{D}$; cette algèbre $\mathbf{D}$ est l'ensemble des polynomes (non commutatifs) par rapport aux éléments de $\mathbf{D}_1$, en sorte que $\mathbf{D}$ possède un nombre fini de générateurs. Il est clair que tout élément de $\mathbf{D}$ peut être considéré comme un opérateur différentiel sur G,

---

([60]) *Voir* le livre de C. CHEVALLEY, *Theory of Lie Groups* (Princeton, 1946).

opérateur qui, d'après la loi de formation des $X \in \mathbf{D}_1$, est permutable avec les translations à gauche définies par les éléments de G.

Si par exemple G est le groupe additif des nombres réels, $\mathbf{D}$ est l'ensemble des opérateurs de la forme $a_1 D + a_2 D^2 + \ldots + a_n D^n$, où $D = \frac{d}{dt}$ et où les a_i sont des constantes arbitraires.

Désignons par $\mathbf{D}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathbf{D}$ qu'on peut décomposer en une somme de produits d'au plus n éléments de $\mathbf{D}_1$; $\mathbf{D}_n$ est un sous-espace de dimension finie de $\mathbf{D}$, et l'on a

$$\mathbf{D}_1 \subset \mathbf{D}_2 \subset \ldots \subset \mathbf{D}_n \subset \ldots,$$

$\mathbf{D}$ étant en outre la réunion des $\mathbf{D}_n$.

Pour X, $Y \in \mathbf{D}$, posons comme il est habituel de le faire,

$$[X, Y] = XY - YX;$$

à tout $X \in \mathbf{D}_1$ on peut alors associer un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{D}$, à savoir $Y \rightarrow [X, Y]$; ces endomorphismes prolongent à $\mathbf{D}$ la représentation « adjointe » de l'algèbre de Lie $\mathbf{D}_1$, et ils conservent chaque sous-espace $\mathbf{D}_n$ en vertu de la formule

$$(359) \qquad [X, X_1 X_2 \ldots X_n] = [X, X_1] X_2 \ldots X_n + X_1 [X, X_2] \ldots X_n + \ldots;$$

enfin, le centre de $\mathbf{D}$, que nous noterons $\mathbf{D}^\natural$, est l'ensemble des éléments sur lesquels tous ces opérateurs sont nuls.

Supposons maintenant que G soit *semi-simple*; d'après une propriété fondamentale de cette classe de groupes, toute représentation linéaire de l'algèbre de Lie $\mathbf{D}_1$ dans un espace de dimension finie est *complètement réductible* : en particulier, la représentation adjointe qu'on vient de définir sera complètement réductible ([61]) dans chaque $\mathbf{D}_n$.

Nous allons maintenant démontrer un lemme fort probablement connu :

Lemme. — *Soient* $\mathcal{E}$ *un espace vectoriel sur un corps arbitraire,* $\mathbf{A}$ *une*

([61]) Comme c'est uniquement ce fait qu'on va utiliser dans la suite, on peut supposer non pas que G est semi-simple, mais simplement que le quotient de G par son centre est semi-simple, cas qui couvre tous les groupes de Lie compacts, par exemple.

famille complètement réductible d'endomorphismes de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}^\natural$ *l'ensemble des* $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ *tels que* $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *pour tout* $\mathrm{A} \in \mathbf{A}$, $\mathcal{E}^0$ *le sous-espace engendré par les éléments de la forme* $\mathrm{A}\mathbf{x}(\mathrm{A} \in \mathbf{A},\ \mathbf{x} \in \mathcal{E})$; *alors on a*

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^\natural \oplus \mathcal{E}^0, \tag{360}$$

c'est-à-dire que tout $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ *admet une décomposition unique*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^\natural + \mathbf{x}^0, \qquad \text{avec} \quad \mathbf{x}^\natural \in \mathcal{E}^\natural, \qquad \mathbf{x}^0 \in \mathcal{E}^0. \tag{362}$$

En effet, $\mathcal{E}^\natural$ étant invariant par $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}$ étant complètement réductible, on peut trouver un sous-espace invariant $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ tel que l'on ait $\mathcal{E} = \mathcal{E}^\natural \oplus \mathcal{F}$; il est clair que pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ on a $\mathrm{A}\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ quel que soit A, donc que $\mathcal{F} \supset \mathcal{E}^0$, ce qui montre déjà que les sous-espaces $\mathcal{E}^\natural$ et $\mathcal{E}^0$ ne se rencontrent qu'en $\mathbf{0}$; il nous reste à prouver qu'en fait on a $\mathcal{F} = \mathcal{E}^0$. Pour cela, désignons par $\mathcal{N}$ un sous-espace invariant supplémentaire de $\mathcal{E}^0$, et pour un $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ posons $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ avec $\mathbf{y} \in \mathcal{E}^0$, $\mathbf{z} \in \mathcal{N}$; pour tout $\mathrm{A} \in \mathbf{A}$, on a $\mathrm{A}\mathbf{z} = \mathbf{0}$ car $\mathrm{A}\mathbf{z}$ est à la fois dans $\mathcal{N}$ (puisque $\mathcal{N}$ est invariant) et dans $\mathcal{E}^0$; donc on a $\mathbf{z} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{E}^\natural$, et finalement $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, ce qui prouve comme annoncé que $\mathcal{F} = \mathcal{E}^0$: d'où le lemme.

Revenons maintenant à l'algèbre $\mathbf{D}$; pour chaque n, soit $\mathbf{D}_n^\natural = \mathbf{D}^\natural \cap \mathbf{D}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathbf{D}_n$ sur lesquels s'annule la représentation adjointe, et soit $\mathbf{D}_n^0$ le sous-espace de $\mathbf{D}_n$ soustendu par les $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}](\mathrm{X} \in \mathbf{D}_1,\ \mathrm{Y} \in \mathbf{D}_n)$; d'après le lemme on peut écrire

$$\mathbf{D}_n = \mathbf{D}_n^\natural \oplus \mathbf{D}_n^0; \tag{363}$$

il est clair que les $\mathbf{D}_n^0$ forment dans $\mathbf{D}$ une suite croissante de sous-espaces vectoriels; leur réunion est le sous-espace $\mathbf{D}^0$ soustendu par les crochets $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}](\mathrm{X} \in \mathbf{D}_1,\ \mathrm{Y} \in \mathbf{D})$, et l'on aboutit finalement au résultat suivant :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^\natural \oplus \mathbf{D}^0. \tag{364}$$

il est facile de voir qu'en fait $\mathbf{D}^0$ contient les crochets de tous les couples d'éléments de $\mathbf{D}$, en sorte que *tout opérateur* $\mathrm{X} \in \mathbf{D}$ *admet une décomposition et une seule sous la forme*

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}^\natural + \Sigma[\mathrm{Y}_i, \mathrm{Z}_i] \qquad \textit{avec} \quad \mathrm{X}^\natural \in \mathbf{D}^\natural. \tag{365}$$

Il est clair que l'application $X \to X^{\natural}$ possède les propriétés suivantes :

a. c'est une application linéaire de l'algèbre $\mathbf{D}$ sur son centre $\mathbf{D}^{\natural}$, qui se réduit à l'identité sur $\mathbf{D}^{\natural}$;

b. quels que soient X, $Y \in \mathbf{D}$ on a

(366) $$(X.Y)^{\natural} = (Y.X)^{\natural};$$

c. si $X \in \mathbf{D}^{\natural}$ on a

(367) $$(X.Y)^{\natural} = X.Y^{\natural} \qquad \text{pour tout } Y \in \mathbf{D};$$

d. pour qu'une forme linéaire $f(X)$ définie sur $\mathbf{D}$ soit centrale, c'est-à-dire vérifie $f(XY) = f(YX)$, il faut et il suffit que l'on ait

(368) $$f(X) = f(X^{\natural}) \qquad \text{pour tout } X.$$

Ces propriétés sont évidemment remarquables, et présentent une analogie complète avec celles des anneaux de classe finie ou des algèbres $\mathbf{L}$ des groupes compacts. On va montrer comment on peut, de même que dans le cas des groupes compacts, en déduire une correspondance biunivoque entre les représentations linéaires irréductibles de dimension finie du groupe G et certains « caractères » de l'algèbre $\mathbf{D}$.

Considérons pour cela une représentation linéaire [62] irréductible $s \to T_s$ de G, s'effectuant dans un espace de dimension finie $\mathcal{E}$. Il est bien connu que cette représentation est définie par des matrices dont les coefficients sont des fonctions *analytiques* sur G, et qu'on peut lui associer une représentation linéaire de $\mathbf{D}$, que nous noterons $X \to T_X$; considérons maintenant le caractère

(369) $$\chi(s) = \mathrm{Sp}(T_s)$$

de cette représentation; c'est aussi une fonction analytique sur G, à laquelle on peut donc appliquer les opérateurs différentiels $X \in \mathbf{D}$; comme il est facile de le voir, on obtient alors le résultat suivant :

(370) $$X\chi(s) = \mathrm{Sp}(T_X T_s).$$

Il s'ensuit que l'expression $X\chi(e)$ est une forme linéaire centrale sur $\mathbf{D}$, donc que

(371) $$X\chi(e) = X^{\natural}\chi(e) \qquad \text{pour tout } X \in \mathbf{D};$$

---

[62] Non nécessairement unitaire.

mais pour $X \in \mathbf{D}^\natural$, l'opérateur T_X permute aux T_s, donc est un *scalaire* puisque la représentation considérée est irréductible; ce scalaire est nécessairement égal à $X\chi(e)$, et définit un homomorphisme du centre $\mathbf{D}^\natural$ sur le corps complexe. Si donc l'on introduit sur $\mathbf{D}$ la forme linéaire

$$\chi(X) = X\chi(e) = \mathrm{Sp}(T_X), \tag{372}$$

on voit que celle-ci vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$\chi(X^\natural Y) = \chi(X)\chi(Y) \qquad \text{quels que soient } X,\ Y \in \mathbf{D}; \tag{373}$$

l'analogie avec l'équation fonctionnelle des caractères d'un groupe compact :

$$\int \chi(uxu^{-1}y)\,du = \chi(x)\chi(y) \tag{374}$$

est évidente, et il s'impose de dire que la forme linéaire $\chi(X)$ est un *caractère de l'algèbre* $\mathbf{D}$.

Nous allons maintenant montrer que, si le groupe G est *connexe*, la correspondance que nous venons de définir entre classes de représentations linéaires irréductibles de G et caractères de $\mathbf{D}$ est *biunivoque*, en d'autres termes que si deux représentations T_s et T'_s de G définissent le même caractère de $\mathbf{D}$, elles sont équivalentes. En effet, les fonctions

$$\chi(s) = \mathrm{Sp}(T_s), \qquad \chi'(s) = \mathrm{Sp}(T'_s) \tag{375}$$

vérifient alors les relations suivantes :

$$\chi(e) = \chi'(e) = 1, \qquad X\chi(e) = X\chi'(e) \qquad \text{pour tout } X \in \mathbf{D}; \tag{376}$$

en d'autres termes, la fonction *analytique* $\chi - \chi'$ est nulle ainsi que toutes ses dérivées successives pour $s = e$, ce qui prouve, puisque G est connexe, que les caractères χ et χ' des représentations en question sont identiques sur G, et donc que les représentations considérées sont équivalentes.

Naturellement, toute représentation unitaire irréductible (en général, de dimension infinie) de G conduit aussi à un homomorphisme de $\mathbf{D}^\natural$ sur le corps complexe, donc à un caractère de l'algèbre $\mathbf{D}$; on peut se demander si, ici encore, la correspondance entre classes de représentations et caractères de $\mathbf{D}$ est biunivoque; ce qui est certain, c'est que le raisonnement qu'on a développé pour le cas des représentations de dimension finie ne s'applique plus au cas des représentations unitaires de dimension infinie. De toutes façons, il serait probablement utile d'examiner les relations entre les représentations irréductibles de G et l'algèbre $\mathbf{D}$ correspondante, et nous pensons que les résultats précédents, malgré leur caractère notoirement insuffisant, sont de nature à éclairer, par exemple, le rôle joué dans les recherches classiques par l'*opérateur de Casimir*; cet opérateur, comme on le sait, appartient à ce que nous désignons par $\mathbf{D}_2^\natural$, en sorte que toute représentation linéaire irréductible de G donne naissance à une fonction propre de cet opérateur; si, dans de nombreux cas, les valeurs propres correspondantes de l'opérateur de Casimir ne suffisent pas à « séparer » les classes de représentations, c'est parce que l'opérateur de Casimir ne suffit pas à engendrer le centre $\mathbf{D}^\natural$ tout entier; il est facile de voir par exemple que, si G est le groupe linéaire réel de dimension n, l'algèbre $\mathbf{D}^\natural$ possède n générateurs algébriquement indépendants, en sorte que, pour séparer les classes de représentations (de dimension finie) on doit prendre en considération, non seulement l'opérateur de Casimir, mais encore $n-2$ autres opérateurs analogues de degrés $3, 4, \ldots, n$.

On notera d'autre part que l'on peut définir sur l'algèbre $\mathbf{D}$ une involution, de telle sorte que les opérateurs X définis par (358) vérifient $X^* = -X$ [si l'on munit l'espace $\mathcal{D}$ dont il a été question au début du produit scalaire de L^2, on obtient un espace « pré-hilbertien »; on peut alors considérer les éléments de $\mathbf{D}$ comme des endomorphismes « réguliers » de cet espace au sens de RU (Chap. II, n° 1), et l'involution en question n'est autre que celle qui consiste à passer d'un opérateur régulier à son adjoint]. Il est facile de voir que l'opération $^\natural$, qu'on a définie dans $\mathbf{D}$ est compatible avec cette involution; on pourrait donc être tenté de chercher sur $\mathbf{D}$ des traces « positives »; or, sauf dans le cas des groupes compacts, *il n'en existe pas*; car si l'on pouvait trouver une trace non nulle σ, on pourrait former une représentation *unitaire* de dimension *finie* de G en munissant $\mathbf{D}_1$ du produit scalaire $\sigma(Y^*X)$ et en considérant la représentation adjointe de G dans $\mathbf{D}_1$.

Tout ce qu'on peut dire en général, c'est qu'une représentation unitaire irréductible de G permet de définir sur **D** une trace qui n'est positive que sur le *centre* de **D**.

REMARQUES FINALES

(rédigées en janvier 1951).

1. La définition que nous donnons des caractères d'un groupe unimodulaire *n'est pas assez générale*; G. W. Mackey a en effet construit en 1950 des groupes qui, possédant « visiblement » des caractères, n'en possèdent cependant pas au sens adopté ici; cette circonstance profondément triste provient du fait que, dans une représentation irréductible, il peut arriver que les opérateurs $U_f (f \in \mathbf{L})$ soient du type d'Hilbert-Schmidt, mais non de trace finie; on peut alors définir seulement $\mathrm{Tr}(U_f U_g^*)$ pour *deux* éléments de **L**. On est donc obligé de prendre en considération, dans les groupes généraux, non seulement les mesures centrales de type positif, mais plus généralement ce que nous appellerons les *traces* sur **L**; ce sont des formes hermitiennes positives $\sigma(f, g)$ vérifiant les axiomes suivants :

$$\sigma(f \star g, h) = \sigma(g, \tilde{f} \star h), \qquad \sigma(f, g) = \sigma(\tilde{g}, \tilde{f})$$

[exemple : $\sigma(f, g) = \mu(f \star \tilde{g})$, où μ est une mesure centrale de type positif], ainsi que des propriétés de continuité assurant qu'on peut les utiliser pour définir des d. r. u. *continues* de G (la nature exacte de ces propriétés reste encore assez vague). Bien entendu, et dans la mesure où ces traces possèdent des propriétés non pathologiques, la démonstration que nous donnons du théorème 1 subsiste (ce théorème et sa démonstration sont du reste valables pour tous les « H-systèmes » de W. Ambrose), ainsi que le théorème 12 sur les caractères de classe (I_∞). On notera que cette généralisation de la notion de caractère aurait l'avantage majeur de permettre la résolution — par l'affirmative — du problème V posé dans l'Introduction; car si l'on pose (notations évidentes!)

$$\sigma(f, g) = (\mathbf{f}, \mathbf{g}),$$

et, pour un opérateur hermitien $\mathrm{H}(0 \leqq \mathrm{H} \leqq 1)$ permutable aux U_s et aux V_s :

$$\sigma_{\mathrm{H}}(f, g) = (\mathrm{H}\mathbf{f}, \mathbf{g}),$$

alors σ_{H} est une trace « majorée » par σ et en correspondance biunivoque avec H, de sorte que les caractères sont bien, dans ces conditions, *caractérisés* par leur propriété extrémale. On espère revenir plus en détail sur cette question dans l'avenir.

2. Dans le cas de la d. r. u. *régulière* d'un groupe *séparable*, le théorème 1 a été trouvé indépendamment par I. E. Segal (*Annals of Math.*, t. 51, 1950, p. 293-298); dans les mêmes circonstances, Segal a aussi construit la « weight function » correspondante, et obtenu un théorème du type de Plancherel (*Annals of Math.*, t. 52, 1950, p. 272-292); mais ce théorème, obtenu comme il était facile de le prévoir à l'aide de la Partie IV de la *Reduction theory* de J. von Neumann, est purement « measure theorectic », donc a peu de chances de constituer un résultat définitif. Notons que des résultats du même genre ont aussi été publiés par F. I. Mautner dans les *Annals of Math.* de 1950. Au contraire, nos résultats, quoique moins généraux, se réduisent *trivialement* aux résultats connus dans les cas classiques (groupes abéliens et groupes compacts).

3. Concernant le problème III de l'Introduction, *voir* une réponse à peu près satisfaisante dans un article de Mautner (*Annals of Math.*, t. 51, 1950, p. 1-25; en particulier le théorème 1.5).

4. Avec l'aide de G. W. Mackey, nous avons pu construire des caractères de classe (II_∞) autrement que par le procédé décrit à la fin du Chapitre II (§ 1); il suffit pour en obtenir de décomposer la d. r. u. régulière du groupe des transformateurs de la forme

$$(z, z') \to (e^{ia}z + b,\ e^{i\alpha a}z' + c),$$

où b, c sont des paramètres complexes, a un paramètre réel, α une constante réelle *irrationnelle*. Une analyse détaillée de ce groupe et de quelques autres exemples sera publiée ailleurs.

5. Nous avons dit dans le cours de cet article que, à en juger par les résultats de Gelfand et Neumark, les caractères des groupes semi-simples *complexes* sont de la forme $\chi(s)\,ds$, où la fonction χ est localement sommable pour ds et de plus (c'est en tout cas ce qui se produit sur le groupe de Lorentz) est partout $\neq 0$; autrement dit, ces caractères sont des mesures *équivalentes* à la mesure de Haar. Il est curieux de constater que, dans le cas du groupe *réel* unimodulaire à deux variables étudié par V. Bargmann, on obtient encore des caractères de la forme $\chi(s)\,ds$; mais ces mesures sont concentrées soit sur l'ensemble des matrices elliptiques, soit sur l'ensemble des matrices hyperboliques du groupe en question.

6. Soit $\{\mathcal{H}, \mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{S}\}$ la d. r. u. d'un groupe G définie par une mesure μ; on a montré au Chapitre I (§ **1**) comment on pouvait construire canoniquement une weight function dans l'anneau $\mathbf{R}^s$; J. Dixmier a trouvé entre temps un procédé qui permet de prolonger cette weight function en une véritable *trace* (laquelle sera nécessairement la trace relative de von Neumann dans le cas où μ est un caractère); le résultat est le suivant : soit $\mathrm{H} \in \mathbf{R}^s$, H hermitien positif; si $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}} = \mathrm{U}_{\mathbf{x}}$, où $\mathbf{x}$ est un élément borné de $\mathcal{H}$, on pose $\mathrm{Tr}(\mathrm{H}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$; dans le cas contraire, on pose $\mathrm{Tr}(\mathrm{H}) = +\infty$. Il est facile de voir que la fonction ainsi définie sur l'ensemble des opérateurs hermitiens positifs de $\mathbf{R}^s$ est *complètement* additive, et invariante par les opérateurs unitaires de cet anneau. Dans le cas de la d. r. u. régulière, on peut encore l'obtenir comme suit, en vertu des résultats démontrés précédemment par l'auteur (*F. T. P.*, p. 73, th. 17) : si H est la forme $f \to \varphi \star f$, où φ est *continu* (et nécessairement de type positif) on pose $\mathrm{Tr}(\mathrm{H}) = \varphi(e)$; sinon, on pose $\mathrm{Tr}(\mathrm{H}) = +\infty$.

7. Notre résultat concernant l'inexistence de caractères de classe (III_∞) est à rapprocher du théorème suivant de I. E. Segal (*Annals of Math.*, t. 52, 1950, p. 272-292) : si l'on décompose la d. r. u. régulière d'un groupe séparable en somme de facteurs, les composantes qui sont de classe (III_∞) forment un ensemble de mesure nulle. Bien entendu, toute la question est maintenant de savoir si l'on peut attacher à ces composantes des *caractères !*

8. Notons enfin, à propos des résultats que nous démontrons en Appendice, un article de Harish-Chandra (*Annals of Math.*, t. 50, 1949, p. 900-915), ainsi qu'un article de I. Gelfand (*Mat. Sbornik*, t. 26, 1950, p. 103-112); par ailleurs, des résultats beaucoup plus précis sur la structure de l'algèbre $\mathbf{D}$ et de son centre ont été trouvés en 1950, à propos de la cohomologie des espaces homogènes, par H. Cartan, C. Chevalley, J. L. Koszul et A. Weil; il y a lieu de croire (et d'espérer) que ces résultats seront publiés; enfin, les relations entre représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie semi-simple complexe et celles de son algèbre $\mathbf{D}$ ont été étudiées en 1950 par Harish-Chandra dans un article qui paraitra prochainement.