JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PIERRE SAMUEL

La notion de multiplicité en algèbre et en géométrie algébrique

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 30 (1951), p. 159-274.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1951_9_30__159_0>

La notion de multiplicité en Algèbre et en Géométrie algébrique ;

PAR PIERRE **SAMUEL**.

« L'Algèbre est une langue
bien faite et c'est la seule. »
(CONDILLAC.)

INTRODUCTION [1].

I. Les querelles d'école ont fleuri de tout temps et dans toutes les branches des Mathématiques. Comme il s'agit ici de Géométrie algébrique, le lecteur croira peut-être qu'il est fait allusion à la querelle entre l'école italienne et les algébristes modernes; il n'en est rien. Toute une lignée de chercheurs en effet, depuis Dedekind et Weber jusqu'à C. Chevalley, A. Weil, O. Zariski et leurs élèves, a montré qu'il était possible d'appliquer à la Géométrie algébrique les méthodes de l'Algèbre abstraite. On s'est également aperçu que maints résultats obtenus par « des éclairs d'intuition d'Italiens privilégiés » se pouvaient démontrer par les méthodes rigoureuses de l'Algèbre; ainsi s'est tempérée peu à peu la méfiance éprouvée par les algébristes vis-à-vis des méthodes italiennes; et le temps n'est peut-

(1) La seconde Partie de ce Mémoire, consacrée aux applications géométriques des notions algébriques exposées ici, paraîtra dans un prochain numéro de ce *Journal*. L'introduction et la bibliographie publiées ici sont communes aux deux Parties.

être pas si éloigné où une méthode universelle de traduction permettra, sans en changer les idées générales, de faire rentrer toute démonstration « italienne » dans le cadre rigoureux de l'Algèbre. Ce temps verra probablement une floraison de Mémoires « d'exploitation » assez analogue à la surproduction contemporaine des hyperaxiomatiseurs en mal de généralisations.

Il y a dix ans se créait outre Atlantique, sous l'impulsion de deux Français et d'un transfuge de l'École italienne, un centre de Géométrie algébrique auquel sont dus les plus importants résultats contemporains dans cette branche. Mais, comme il est coutumier dans un groupe de mathématiciens en effervescence de production, deux tendances opposées se firent jour; il s'agissait de déterminer quelles portions de l'Algèbre moderne étaient nécessaires au développement de la Géométrie algébrique. La querelle est récente, mais il n'est que de lire l'Introduction des *Foundations of Algebraic Geometry* de A. Weil et l'analyse qu'en fait O. Zariski dans le *Bulletin de la Société mathématique américaine* pour voir qu'elle est assez animée.

Le lecteur s'apercevra bien vite que l'auteur de ce travail a pris parti dans cette querelle, et qu'il a trouvé prématuré, ou peut-être au-dessus de ses forces, de s'interdire maint recours à l'arsenal varié et séduisant de l'Algèbre commutative. Il a donc indifféremment utilisé, selon les nécessités, et la technique des spécialisations de A. Weil, et la technique analytique des anneaux locaux de C. Chevalley. Il est vrai que quelques remarques dans les deux derniers Chapitres de ce travail, les seuls consacrés à la théorie des intersections excédentaires et singulières, les quatre premiers développant les préliminaires algébriques et géométriques nécessaires, montreront au lecteur qu'une partie de cette théorie aurait pu être développée en s'en tenant strictement aux méthodes de A. Weil. Si nous n'avons pas suivi cette voie, c'est d'une part afin de laisser la porte ouverte à une généralisation vers les variétés algébroïdes, généralisation qu'une simple comparaison entre ce travail et le Mémoire des *Intersections* de C. Chevalley laisse prévoir facile. C'est d'autre part et surtout que nous pensons que la Géométrie algébrique moderne est encore en état de gestation, qu'il est prématuré d'en entreprendre la systématisation simplificatrice, et qu'il sera utile au systématisateur futur d'avoir à sa disposition les résultats les plus variés et les plus complets possibles afin d'en opérer la synthèse.

Le travail qui va suivre est donc de nature très algébrique. Il trouve sa place dans une « maison pleine à la fois d'anneaux, d'idéaux et de valuations, et aussi de spécialisations, d'extensions de spécialisations, et de corps linéairement disjoints », en somme dans une réunion de la maison de Chevalley-Zariski et de la maison de Weil. Si donc, à en croire Zariski, le géomètre classique appellera « a plague on both these houses », ce travail sera une des premières victimes de sa malédiction.

Le lecteur aura déjà compris tout ce que je dois à Claude Chevalley, André Weil et Oscar Zariski. Sans les contacts que j'ai eu le bonheur d'avoir avec eux, en France et en Amérique, ce travail n'aurait jamais vu le jour. Et, malgré les divergences qui les séparent, qu'ils soient unis ici dans la ferveur de ma reconnaissance.

Je tiens également à remercier M. A. Châtelet qui a bien voulu me faire l'honneur de présider mon jury, M. P. Dubreil qui a apporté à à son rôle de rapporteur toute sa compétence et toute sa conscience, et M. Henri Cartan dont les conseils et l'exemple ont été pour moi, comme pour tant d'autres de ma génération, le guide le plus précieux sur les chemins, souvent étroits et bordés de précipices, de la Mathématique axiomatique.

II. L'objet principal de ce travail est de généraliser aux composantes excédentaires et singulières des intersections de variétés algébriques la théorie des multiplicités d'intersection due à C. Chevalley et à A. Weil, et relative aux composantes propres. Pour atteindre partiellement ce but, trois Chapitres préliminaires (I, II, et IV) nous ont été nécessaires.

Le Chapitre I commence par un rappel de faits bien connus relatifs aux anneaux et algèbres commutatifs. Il contient surtout une théorie généralisant celle des polynomes de Hilbert, et qui sera notre outil principal; cette généralisation comprend trois étapes : les idéaux homogènes d'un anneau de polynomes sur un anneau d'Artin, les idéaux primaires pour l'idéal maximal d'un anneau local, les idéaux primaires quelconques d'un anneau noethérien. Outre les théorèmes exprimant que la longueur de certains anneaux ou modules dépendant d'un entier n est un polynome en n pour n assez grand, sont démontrés des théorèmes montrant que, à partir d'un certain n, certains transporteurs (ou idéaux quotients) sont exactement ce que l'on peut croire à première vue. Nous constatons ainsi l'existence d'une régularité, assez inattendue si l'on étudie quelques exemples d'idéaux.

Dans les anneaux locaux, qui sont l'objet du Chapitre II, le degré et le coefficient dominant de ces polynomes en n définissent les notions de dimension et de multiplicité; ces définitions coïncident avec celles de C. Chevalley lorsque ces dernières ont un sens; et notre définition de la multiplicité d'un idéal primaire pour l'idéal maximal s'applique à tous les cas. Nous avons souvent supposé que nous nous trouvions dans le cas d'égales caractéristiques et sur un corps de base infini, hypothèses qui se trouvent vérifiées dans les questions géométriques, mais dont il serait utile de se passer d'un point de vue d'Algèbre pure. Le paragraphe 3 de ce Chapitre, montre essentiellement que les irrégularités observées pour les petites valeurs de n sont dues à la présence de composantes immergées de certains idéaux, et que, dans de nombreux cas simples, la multiplicité d'un idéal primaire coïncide avec sa longueur, ce qui explique le succès, au moins partiel, de théories du genre de celle de Van der Waerden où les multiplicités d'intersection sont définies par des longueurs d'idéaux. Notre paragraphe 4 contient une généralisation de la notion, due à C. Chevalley, d'anneau local géométrique, et permet de simplifier, tout en la généralisant, la démonstration de son « theorem of transition » qui permet le passage des variétés algébriques aux variétés algébroïdes. Le paragraphe 5 traite des produits kronéckériens d'anneaux locaux complets, utiles dans l'étude des variétés produits. Le paragraphe 6 enfin met sous une forme maniable dans les applications géométriques un des résultats principaux du Chapitre II.

Le Chapitre III n'est nullement indispensable au déroulement logique de ce travail. Il donne quelques applications géométriques, assez élémentaires, des théories algébriques des Chapitres I et II : multiplicité d'un point sur une hypersurface, certains cas où l'on peut définir les multiplicités d'intersection par des longueurs d'idéaux avec, comme application, le théorème de Bezout dans le plan, et la notion de degré d'une variété. Le paragraphe 3 montre *a priori* que les définitions des multiplicités d'intersection dues à C. Chevalley et A. Weil sont équivalentes; ceci est fait en interprétant, dans une terminologie plus classique, certains passages du traité de A. Weil.

Le Chapitre IV donne les préliminaires géométriques nécessaires pour les Chapitres suivants. Il y est d'abord montré que certains phénomènes algébriques et géométriques sont « ceux qui se passent sur un sous-ensemble algébrique de la variété représentative des données » : bases non séparantes, éléments non primitifs, projections d'indice > 1, composantes excédentaires. La plus grande partie du Chapitre est consacrée aux spécialisations de cycles de dimension arbitraire : la solution donnée satisfait aux conditions posées par A. Weil dans le Chapitre IX, n° 6 de son Traité, et permet de mettre le principe de conservation du nombre sous la forme plus générale d'un principe de spécialisation des cycles. La fin du Chapitre donne une démonstration algébrique d'un théorème de F. Severi permettant d'exprimer tout cycle de l'espace projectif comme intersection de diviseurs.

Le Chapitre V traite des composantes excédentaires d'intersection, c'est-à-dire de dimension strictement supérieure à $u+v-n$, u et v étant les dimensions des variétés intersectées et n celle de l'espace ambiant. Après quelques préliminaires sur des questions de dimensions, nous définissons de façon algébrique la multiplicité d'une composante excédentaire, et donnons, au moyen de cylindres génériques passant par les variétés intersectées, une interprétation géométrique de ces multiplicités qui montre que notre définition coïncide avec une définition suggérée par F. Severi. Ces résultats sont ensuite appliqués à la multiplicité d'une sous-variété; nous y traitons aussi des cônes des tangentes et de l'espace tangent de Zariski. Nous montrons ensuite que nos multiplicités d'intersection satisfont à la formule des variétés produits et à celle de projection, et sont des invariants par transformation birationnelle birégulière; par contre la formule d'associativité n'est valable que sous des conditions fort restrictives; quant au principe de spécialisation des cycles il était absurde *a priori* de compter sur sa généralisation.

Le Chapitre VI traite des composantes singulières : on se place une fois pour toutes sur une variété ambiante A et l'on cherche à généraliser aux composantes d'intersection M qui sont singulières sur A la théorie des multiplicités des composantes simples. Nous ne donnons de définition que dans le cas particulier suivant, qui englobe d'ailleurs celui des composantes simples : les variétés ou cycles intersectés X et Y sont, au voisinage de M, des sous-multiples d'intersections complètes de A avec des variétés de l'espace ayant la dimension qu'il faut. Ceci nous amène à introduire des multiplicités d'intersection fractionnaires. Les propriétés fondamentales se généralisent toutes : formule des variétés produits, associativité, invariance birationnelle, formule de projection, principe de spécialisation. Nous introduisons enfin les groupes d'holotomie, groupes quotients (locaux ou globaux) des groupes des cycles de A par les sous-groupes des cycles intersections complètes (locales ou globales); nous en donnons quelques propriétés élémentaires, et en calculons quelques-uns.

III. Nous allons maintenant énumérer divers problèmes qui se posent à propos de ce travail; certains de ces problèmes nous ont été suggérés oralement par A. Weil et C. Chevalley.

1. Étudier si le théorème 5 (Chap. II) est encore valable avec un corps $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}}$ fini.

2. Supprimer la restriction d'équidimensionalité de $\overline{F(\mathfrak{q})}$ dans le théorème 11 (Chap. II).

3. (A propos du Chap. IV, § 1). Dans la plupart des exemples donnés est défini un entier f (degré d'un corps sur un autre, dimension) fonction des données du problème; le résultat est que les assertions suivantes « f est strictement supérieur à son minimum » « les données du problème sont situées sur certain sous-ensemble algébrique » sont équivalentes. Il s'agirait d'axiomatiser, au moyen d'axiomes faciles à vérifier, les fonctions « naturelles » f donnant lieu à l'équivalence ci-dessus.

4. Trouver un exemple où l'on soit forcé d'introduire des diviseurs radiciels sur le corps de base dans l'application du théorème de Severi (remarque au th. 3, § 5, Chap. IV).

5. Montrer que la définition dissymétrique proposée en remarque à la fin du paragraphe **1** (Chap. IV) est cohérente.

6. Étudier les sous-variétés singulières M de A telles que, au voisinage de $M^{\underline{\Delta}}$, la diagonale $A^{\underline{\Delta}}$ de $A \times A$ soit une intersection complète; ceci est-il lié à la locale normalité de A? Une réponse positive au problème 7 permettrait alors de généraliser considérablement la théorie développée au Chapitre VI.

7. Lever les restrictions du théorème 2 (§ **3**, Chap. VI).

8. (A propos de la fin du paragraphe **1**, Chap. VI). Montrer que la multiplicité d'intersection absolue est au plus égale au produit de la multiplicité d'intersection relative par la multiplicité de la composante M sur la variété ambiante.

9. Faire de la proposition 1 (§ **4**, Chap. VI) une condition nécessaire et suffisante de locale normalité.

10. Les groupes d'holotomie ont-ils des liens avec les groupes d'homologie (locaux et globaux) lorsque le domaine universel est le corps des nombres complexes?

11. Dans ce dernier cas peut-on munir ces groupes d'holotomie de topologies naturelles? Nature topologique de ces groupes?

12. Étudier si le produit d'intersection local d'un cycle holotomique à zéro avec un cycle quelconque (si le problème 7 admet une réponse positive), ou tout au moins avec un cycle dont la classe d'holotomie est périodique, est un cycle holotomique à zéro; ceci définirait un produit d'intersection d'éléments périodiques des groupes d'holotomie; voir si ce produit ne pourrait pas s'étendre aux éléments quelconques.

IV. Nous allons terminer cette Introduction en indiquant la terminologie et les notations employées. Nous nous sommes en général conformé à l'usage de M. Bourbaki et de ses collaborateurs; ayant eu accès à des Notes non encore publiées de cet auteur, nous devons anticiper quelque peu.

Le nombre de permutations de p objets q à q ($q \leqq p$) sera noté ici $\binom{p}{q}$ et non C_p^q.

L'anneau des *séries formelles* à n variables sur un anneau commutatif A sera noté $A[[X_1, \ldots, X_n]]$ et son corps des quotients $K((X_1, \ldots, X_n))$; le degré de la forme de plus bas degré d'une série formelle F est appelé l'*ordre* de F.

Le mot corps signifiera ici « corps commutatif »; l'*exposant caractéristique* d'un corps K de caractéristique p est, par définition, l'entier p si $p > 0$, l'entier 1 si $p = 0$. Les éléments d'une extension E d'un corps K d'exposant caractéristique p qui satisfont à des équations de la forme $X^{p^f} - a = 0 (a \in K)$ sont dits *radiciels* sur K. Un corps qui n'a d'autre extension algébrique que lui-même sera dit *algébriquement clos;* l'épithète *algébriquement fermé* est réservé à la notion relative : K est dit algébriquement fermé dans une extension E si tout élément de E qui est algébrique sur K appartient à K. La *clôture algébrique* de k est l'extension algébrique algébriquement close de k (définie à un isomorphisme près); elle sera souvent notée $\bar{k}$.

Les isomorphismes $\frac{G_1}{G_2} \approx \frac{\frac{G_1}{G_3}}{\frac{G_2}{G_3}} (G_3 \subset G_2 \subset G_1)$ et $\frac{G_1 + G_2}{G_1} \approx \frac{G_2}{G_1 \cap G_2}$ seront appelés *premier* et *second théorèmes d'isomorphisme*.

Un élément x d'un anneau B est dit *intégral* sur un sous-anneau A de B s'il satisfait à une équation de la forme $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ avec $a_i \in A$; un anneau d'intégrité A est dit *intégralement fermé* (« ganz abgeschlossen », « integrally closed ») si tout élément du corps des quotients de A qui est intégral sur A appartient à A. Si S est un ensemble multiplicativement stable d'éléments non diviseurs de zéro d'un anneau A, nous noterons A_S et nous appellerons *anneau des quotients* de A par rapport à S, l'ensemble des classes de fractions $\frac{a}{s}$ où $a \in A$ et $s \in S$, avec les identifications et les lois de composition classiques; S sera souvent le complément d'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, auquel cas A_S sera noté $A_{\mathfrak{p}}$ est appelé l'*anneau des quotients* de A par rapport à l'idéal premier $\mathfrak{p}$, ou encore l'anneau des quotients de $\mathfrak{p}$. Si S est l'ensemble de *tous* les éléments non diviseurs de zéro de A, A_S prendra le non d'*anneau total des quotients* de A. Il faut se garder de confondre cette notion avec celle d'anneau quotient $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ de A par un idéal $\mathfrak{p}$; il serait peut-être préférable de parler d' « anneaux des fractions » afin d'avoir deux expressions de consonances différentes, comme les expressions anglaises « factor ring » et « quotient ring ».

Le reste de la terminologie a été, ou bien défini en son lieu, ou bien, lorsque la traduction était immédiate, traduit de la terminologie anglaise correspondante, celle de C. Chevalley [I, LR] pour les notions algébriques, ou celle de A. Weil [WF] pour les notions géométriques : par exemple « système de paramètres » est l'équivalent de « system of parameters », et « spécialisation » celui de « specialisation »; sinon l'équivalent anglais a été indiqué.

Nous avons suivi la méthode du « domaine universel » de A. Weil, sans cependant nous conformer à toutes ses conventions; par exemple les « anneaux des quotients de sous-variétés » seront pris avec le domaine universel comme corps de base, et sont donc distincts des « anneaux de spécialisation » de A. Weil (*voir* Chap. III, § 3). Lorsque nous avons employé l'épithète *générique* nous nous sommes parfois permis de ne pas préciser le corps K sur lequel les êtres géométriques en question sont génériques, étant entendu que K est n'importe quel corps de définition commun à toutes les variétés précédemment définies. Une variété linéaire ou une direction de variétés linéaires (direction d'un cylindre, direction d'une projection) est dite générique sur k si cette variété, ou la variété linéaire passant par l'origine et parallèle à la direction donnée, peut être définie par un système d'équations linéaires dont les coefficients sont des variables indépendantes (c'est-à-dire algébriquement indépendants) sur k; nous parlerons alors de *projection générique* et de *cylindre générique* sur k.

CHAPITRE I.

LONGUEURS D'IDÉAUX PRIMAIRES.

Nous entendrons dans tout ce travail par « anneau » un anneau commutatif ayant un élément unité noté 1. Un anneau A satisfaisant à la condition maximale pour ses idéaux (c'est-à-dire le « Teilerkettensatz » : tout ensemble non vide d'idéaux de A, ordonné par inclusion, possède un élément maximal », qui est équivalent au « Basissatz » : tout idéal de A possède une base finie) sera appelé un *anneau noethérien* [1]. Un anneau satisfaisant à la condition minimale pour ses idéaux (tout ensemble non vide d'idéaux de A, ordonné par inclusion possède un élément minimal) sera appelé un *anneau d'Artin*; tout anneau fini, toute algèbre de dimension finie sur un corps est un anneau d'Artin.

1. STRUCTURE DES ANNEAUX D'ARTIN [2]. — Soit A un anneau d'Artin; tout anneau quotient de A est un anneau d'Artin; d'autre part un anneau d'intégrité d'Artin B est un corps, car, pour tout $a \in B$, on a, pour n assez grand, $Ba^n = Ba^{n+1}$, donc $a^n = ba^{n+1}$ et $ba = 1$; par conséquent tout idéal premier de A est maximal. Soit $\mathfrak{R}$ l'intersection de tous les idéaux maximaux de A (le « radical » de A); puisque A est un anneau d'Artin, $\mathfrak{R}$ est déjà l'intersection d'un nombre fini d'entre eux $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$; si $\mathfrak{v}$ est un idéal premier distinct de ceux-ci, on a $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{v}$ et il existe $x_i \in \mathfrak{p}_i$ tel que $x_i \notin \mathfrak{v}$; alors $y = x_1 \ldots x_n \notin \mathfrak{v}$, mais $y \in \mathfrak{R}$, ce qui contredit la définition de $\mathfrak{R}$; donc A ne possède qu'un nombre *fini* d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$, et $\mathfrak{a}_j = \bigcap_{i \neq j} \mathfrak{p}_i$ est un idéal distinct du radical $\mathfrak{R}$.

LEMME. — *Le radical $\mathfrak{R}$ d'un anneau* A *est l'ensemble des éléments $a \in$ A tels que $1 + xa$ soit inversible pour tout $x \in$ A.*

a. Soit $a \in \mathfrak{R}$; considérons l'idéal $A(1 + xa)$; s'il était contenu dans un idéal maximal $\mathfrak{m}$, on aurait $1 + xa \in \mathfrak{m}$, $xa \in \mathfrak{R} \subset \mathfrak{m}$, donc $1 \in \mathfrak{m}$, ce qui est absurde. Donc $A(1 + xa) = A$, et $1 + xa$ est inversible.

b. Si, réciproquement, $1 + xa$ est inversible pour tout $x \in A$, supposons que a n'appartienne pas à un idéal maximal $\mathfrak{m}$; alors

---

[1] Pour la théorie élémentaire des anneaux noethériens, nous renvoyons le lecteur au Chapitre XII de la *Moderne Algebra* de Van Der Waerden.

[2] Ce n'est qu'un rappel de résultats bien connus [*cf.* JACOBSON, *Theory of rings* et *Radical and semi-simplicity for arbitrary rings* (*Amer. J. Math.*, vol. **67**, 1945, p. 300 à 320)].

$\mathfrak{m} + Aa = A$, et il existe $x \in A$ tel que $1 + xa \in \mathfrak{m}$, ce qui est absurde. Donc a appartient à tout idéal maximal et par conséquent à $\mathfrak{R}$.

D'après l'identité $(1 - xa)(1 + xa + \ldots + x^n a^n) = 1$, qui a lieu si $x^{n+1} a^{n+1} = 0$, on voit que tout élément *nilpotent* a appartient à $\mathfrak{R}$. Si, réciproquement, a est un élément du radical d'un anneau d'Artin A, la considération de la chaîne descendante d'idéaux (Aa^n) montre qu'il existe $x \in A$ tel que $a^n = xa^{n+1}$; mais $1 - ax$ est inversible, soit $(1 - ax)(1 + y) = 1$ ou $xa(1 + y) - y = 0$; multipliant par a^n il vient $xa^{n+1} = a^n = 0$. Donc, dans un anneau d'Artin, le *radical est l'ensemble des éléments nilpotents*. C'est donc le plus grand nilidéal de A, si l'on entend par nilidéal un idéal dont tous les éléments sont nilpotents.

THÉORÈME 1 (Hopkins). — *Dans un anneau d'Artin* A *tout nilidéal* $\mathfrak{a}$ *est nilpotent.*

La suite d'idéaux, $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}^2, \ldots, \mathfrak{a}^q, \ldots$ étant décroissante, on a, à partir d'un certain exposant n, $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}^{n+1} = \ldots$. Supposons que $\mathfrak{b} \neq 0$ et considérons la famille Φ des idéaux $\mathfrak{v}$ tels que $\mathfrak{b}\mathfrak{v} \neq (0)$; puisque $\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{b} \neq (0)$, $\mathfrak{b} \in \Phi$ et Φ n'est pas vide. Soit $\mathfrak{v}$ un élément minimal de Φ; il existe $c \in \mathfrak{v}$ tel que $\mathfrak{b}c \neq (0)$, donc $Ac \in \Phi$ et l'on a $\mathfrak{v} = Ac$. D'autre part $\mathfrak{b}^2\mathfrak{v} = \mathfrak{b}\mathfrak{v} = \mathfrak{b}c \neq (0)$; donc $\mathfrak{b}\mathfrak{v} \in \Phi$ et l'on a $\mathfrak{b}\mathfrak{v} = \mathfrak{b}c = Ac$. On peut donc écrire $c = bc$ avec $b \in \mathfrak{b}$; d'où $c = bc = b^2 c = \ldots = b^n c = \ldots$; mais b est un élément nilpotent; donc $b^q = 0$ et $c = 0$, en contradiction avec $\mathfrak{b}c \neq (0)$.

Soit donc A un anneau d'Artin et $\mathfrak{R}$ son radical; on a $\mathfrak{R}^s = (0)$. Exprimons $\mathfrak{R}$ comme intersection $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$ d'idéaux maximaux $\mathfrak{p}_i$. Puisque $\mathfrak{p}_j \not\subset \mathfrak{p}_i$, soit $x_{ij} \in \mathfrak{p}_j$ tel que $x_{ij} \notin \mathfrak{p}_i$; posons $x_i = \prod_{j \neq i} x_{ij}$; on a $x_i \notin \mathfrak{p}_i$ et $x_i \in \prod_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$. Puisque $\frac{A}{\mathfrak{p}_i}$ est un corps, il existe $c_i \in A$ tel que $c_i x_i \equiv 1(\mathfrak{p}_i)$. Soit $\eta_{ir} = 1 - (1 - (c_i x_i)^r)^r$; il est clair que $\eta_{ir} \equiv 1(\mathfrak{p}_i^r)$ et $\eta_{ir} \equiv 0\left(\prod_{j \neq i} \mathfrak{p}_j^r\right)$.

Posons $e_i = \eta_{is}$. On a $e_i e_j \in \prod_{k=1}^{n} \mathfrak{p}_k^s \subset \mathfrak{R}^s$, donc $e_i e_j = 0$ si $i \neq j$. De même

$e_i(1-e_i)=0$, c'est-à-dire $e_i=e_i^2$, et $e_1+\ldots+e_n=1$. L'anneau A est ainsi *composé direct* des anneaux Ae_i; Ae_i a évidemment pour radical $e_i\mathfrak{p}_i=e_i\mathfrak{R}$, et c'est le seul idéal maximal (et premier) de cet anneau. Donc, en appelant *anneau primaire* un anneau où l'idéal (O) est primaire, on a le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — *Tout anneau d'Artin est composé direct d'anneaux d'Artin primaires.*

Considérons un anneau d'Artin primaire A, d'idéal maximal $\mathfrak{p}$ tel que $\mathfrak{p}^n=(O)$, $\mathfrak{p}^{n-1}\neq(O)$. Considérons les A-modules $\frac{A}{\mathfrak{p}}, \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}^2}, \ldots, \frac{\mathfrak{p}^{n-1}}{\mathfrak{p}^n}$. Comme ils sont annulés par $\mathfrak{p}$, ce sont des $\frac{A}{\mathfrak{p}}$-modules, c'est-à-dire des espaces vectoriels sur le corps $\frac{A}{\mathfrak{p}}$; ceux-ci sont de dimension finie puisque les $\frac{\mathfrak{p}^i}{\mathfrak{p}^{i+1}}$ satisfont à la condition minimale pour leurs sous-modules. Donc A, considéré comme module sur lui-même, a, d'après le premier théorème d'isomorphisme, une série de composition finie. Donc tout ensemble, totalement ordonné par inclusion, d'idéaux de A est fini d'après le théorème de Jordan-Hölder. On obtient donc, par passage au composé direct, le résultat suivant :

THÉORÈME 3. — *Dans un anneau d'Artin toute chaîne d'idéaux est finie. En particulier tout anneau d'Artin est noethérien.*

DÉFINITION. — *On appelle longueur d'un anneau d'Artin* (*resp. d'un module* E) *la longueur d'une chaîne maximale d'idéaux de* A (*resp. de sous-modules de* E).

2. ALGÈBRES PRIMAIRES. — Soit A une algèbre primaire de dimension finie sur un corps K, et $\mathfrak{p}$ son unique idéal premier. Comme on peut compléter la chaîne $A\supset\mathfrak{p}\supset\mathfrak{p}^2\supset\ldots\supset\mathfrak{p}^n=(O)$ en une chaîne maximale d'idéaux, la longueur de A est égale à la somme des longueurs des A-modules $\frac{\mathfrak{p}^i}{\mathfrak{p}^{i+1}}$. Mais ceux-ci sont canoniquement des espaces vectoriels sur le corps $\frac{A}{\mathfrak{p}}$. Donc longueur $A=\sum_i\left[\frac{\mathfrak{p}^i}{\mathfrak{p}^{i+1}}:\frac{A}{\mathfrak{p}}\right]$. Mais comme $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ est une extension finie de K on a le résultat suivant :

THÉORÈME 4. — *Soit* A *une algèbre primaire de dimension finie sur un corps* K, *et soit* $\mathfrak{p}$ *son idéal maximal; on a*

$$(\text{longueur } A).\left[\frac{A}{\mathfrak{p}}:K\right]=[A:K].$$

Soit maintenant L une extension séparable (algébrique ou non) de K, et soit A_L l'algèbre obtenue à partir de A par extension du corps de base. L'idéal $\mathfrak{p}A_L$ de A_L est nilpoltent; d'autre part $\frac{A_L}{\mathfrak{p}A_L}$ est isomorphe à $\left(\frac{A}{\mathfrak{p}}\right)_L$ qui, comme L est séparable, est une algèbre semi-simple, composée directe de corps; donc $\mathfrak{p}A_L$ est le radical de A_L. D'après l'étude du paragraphe 1, A_L est composée directe des algèbres primaires A_Le_i (où les e_i sont des idempotents orthogonaux), et A_Le_i a pour idéal maximal $\mathfrak{p}A_Le_i$. Considérons une chaîne maximale d'idéaux de A : $(O)=\mathfrak{v}_0, \mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_{l-1}=\mathfrak{p}, \mathfrak{v}_l=A$; $\frac{\mathfrak{v}_s}{\mathfrak{v}_{s-1}}$ est un espace vectoriel de dimension 1 sur $\frac{A}{\mathfrak{p}}$ et l'on a $\mathfrak{p}\mathfrak{v}_s\subset\mathfrak{v}_{s-1}$; soit $\bar{\mathfrak{v}}_s$ l'idéal $A_L\mathfrak{v}_se_i$ de A_Le_i; c'est un module sur A_Le_i; tout élément de $\mathfrak{p}A_Le_i$ transporte $\bar{\mathfrak{v}}_s$ dans $\bar{\mathfrak{v}}_{s-1}$; donc $\frac{\bar{\mathfrak{v}}_s}{\bar{\mathfrak{v}}_{s-1}}$ est un espace vectoriel sur le corps $Z_i=\frac{A_Le_i}{\mathfrak{p}A_Le_i}$, engendré par n'importe quel générateur $\left(\text{sur } \frac{A}{\mathfrak{p}}\right)$ de l'espace vectoriel $\frac{\mathfrak{v}_s}{\mathfrak{v}_{s-1}}$; il est donc de dimension 0 ou 1. On a donc

$$m_i=\text{longueur }(A_Le_i)\leq m=\text{longueur }(A).$$

Mais, d'après le théorème 4, on a

$$m\left[\frac{A}{\mathfrak{p}}:K\right]=[A:K] \qquad \text{et} \qquad m_i[Z_i:L]=[A_Le_i:L];$$

d'autre part

$$\sum_i[A_Le_i:L]=[A_L:L]=[A:K] \qquad \text{et} \qquad \sum_i[Z_i:L]=\left[\left(\frac{A}{\mathfrak{p}}\right)_L:L\right]=\left[\frac{A}{\mathfrak{p}}:K\right].$$

On a donc $m_i=m$ pour tout i. Par conséquent :

THÉORÈME 5. — *L'algèbre* A_L *obtenue par extension séparable* L *du* *corps de base d'une algèbre primaire* A *est composée directe d'algèbres primaires de même longueur que* A.

5. COMPOSANTES PRIMAIRES DANS LES ANNEAUX NOETHÉRIENS. — Rappelons que, dans un anneau noethérien, A, tout idéal $\mathfrak{a}$ s'exprime comme intersection d'idéaux primaires : $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$; soit $\mathfrak{p}_i$ l'idéal premier associé à $\mathfrak{q}_i$. Si l'on suppose que cette représentation est minimale, les composantes primaires $\mathfrak{q}_i$ sont déterminées de façon unique à condition que $\mathfrak{p}_i$ ne contienne aucun autre idéal $\mathfrak{p}_j (j \neq i)$; de telles composantes sont dites *isolées;* si $\mathfrak{p}_i \supset \mathfrak{p}_j$, on dit que la composante $\mathfrak{q}_i$ est *immergée*. Rappelons qu'une composante primaire isolée $\mathfrak{q}_i$ de $\mathfrak{a}$ est l'ensemble des éléments de A transportés dans $\mathfrak{a}$ par un multiplicateur n'appartenant pas à $\mathfrak{p}_i$; rappelons aussi que $\bigcup_i \mathfrak{p}_i$ est l'ensemble des diviseurs de zéro de A, et $\bigcap_i \mathfrak{p}_i$ l'ensemble de ses éléments nilpotents, si les $\mathfrak{p}_i$ sont les idéaux premiers associés à toutes les composantes primaires (isolées et immergées) de (O).

On montre par des exemples que, si $\mathfrak{q}$ est primaire pour $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}^n$ n'est pas nécessairement primaire pour $\mathfrak{p}$; nous appellerons *puissance symbolique $n^{\text{ième}}$* de $\mathfrak{q}$ et noterons $\mathfrak{q}^{(n)}$ la composante primaire de $\mathfrak{q}^n$ selon $\mathfrak{p}$. Comme tout idéal premier contenant $\mathfrak{q}^n$ doit contenir $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}^{(n)}$ est la seule composante isolée de $\mathfrak{q}^n$. A propos de ces puissances symboliques nous allons démontrer les résultats suivants :

THÉORÈME 6. — *Si $\mathfrak{q}$ est composante primaire isolée de $\mathfrak{a}$ selon $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}^{(n)}$ est composante primaire de $\mathfrak{a}^n$ selon $\mathfrak{p}$.*

Soit $\mathfrak{v}$ la composante primaire de $\mathfrak{a}^n$ selon $\mathfrak{p}$; puisque $\mathfrak{a}^n \subset \mathfrak{q}^n$, il est clair que $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{q}^{(n)}$. Soit inversement $y \in \mathfrak{q}^{(n)}$; pour certain $t \notin \mathfrak{p}$, on a $ty \in \mathfrak{q}^n$; prenons $u \notin \mathfrak{p}$ et appartenant au produit des composantes primaires de $\mathfrak{a}$ autres que $\mathfrak{q}$, et soit $v = u^n t$; on a $v \notin \mathfrak{p}$ et $vy = tyu^n \in \mathfrak{a}^n$. Donc $y \in \mathfrak{v}$ d'après le résultat ci-dessus.

THÉORÈME 7. — *Soit $\bar{\mathfrak{o}}$ un anneau noethérien, $\mathfrak{o}$ un sous-anneau noethérien de $\bar{\mathfrak{o}}$, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathfrak{o}$ et $\mathfrak{q}$ un idéal de $\mathfrak{o}$ primaire pour $\mathfrak{p}$.*

Si $\bar{\mathfrak{p}}$ est un idéal premier isolé de $\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{p}$ dans $\bar{\mathfrak{o}}$ tel que $\bar{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{p}$, et si, pour tout idéal $\mathfrak{v}$ de $\mathfrak{o}$ primaire pour $\mathfrak{p}$, $\tilde{\mathfrak{v}}$ désigne la composante primaire de $\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{p}$ selon $\mathfrak{p}$, on a $\tilde{\mathfrak{q}}^{(n)} = \widetilde{\mathfrak{q}^{(n)}}$.

D'après le théorème 6, $\tilde{\mathfrak{q}}^{(n)}$ est la composante primaire de $(\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{q})^n = \bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{q}^n$ selon $\bar{\mathfrak{p}}$. D'autre part $\widetilde{\mathfrak{q}^{(n)}}$ est l'ensemble des éléments $x \in \bar{\mathfrak{o}}$ transportés dans $\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{q}^{(n)}$ par quelque $u \notin \bar{\mathfrak{p}}$; puisque $\mathfrak{q}^{(n)}$ est transporté dans $\mathfrak{q}^n$ par un élément $t \in \mathfrak{o}$, $t \notin \mathfrak{p}$, on voit que $tu\widetilde{\mathfrak{q}^{(n)}} \subset \bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{q}^n$ avec $tu \notin \bar{\mathfrak{p}}$ puisque $\bar{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{p}$; ceci montre que $\widetilde{\mathfrak{q}^{(u)}}$ est la composante primaire de $\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{q}^n$ selon $\bar{\mathfrak{p}}$.

4. Anneaux de polynomes sur un anneau d'Artin. — Considérons l'anneau $\mathfrak{o} = A[X_1, \ldots, X_s]$ des polynomes à s indéterminées sur l'anneau d'Artin A. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal *homogène* de $\mathfrak{o}$, c'est-à-dire un idéal qui, avec tout polynome, contient toutes les composantes homogènes de celui-ci; il revient au même de dire que $\mathfrak{a}$ peut être engendré par des polynomes homogènes, ou formes. Nous noterons $\mathfrak{a}(n)$ l'ensemble des formes de degrés n contenues dans $\mathfrak{a}$; $\mathfrak{a}(n)$ est un sous-module du A-module de toutes les formes de degré n, $\mathfrak{f}(n)$; $\mathfrak{f}(n)$ est un A-module libre à $\binom{n+s-1}{s-1}$ générateurs; si m désigne la longueur de A, $\mathfrak{f}(n)$ a pour longueur $m\binom{n+s-1}{s-1}$.

Théorème 8. — *La longueur $\varphi_{\mathfrak{a}}(n)$ du module $\mathfrak{a}(n)$ est un polynome en n pour n suffisamment grand.*

Ce théorème généralise le théorème de postulation de Hilbert [1], qui traite du cas où l'anneau A est un corps. Nous procéderons à partir de là par récurrence sur la longueur m de A. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal minimal de A; d'après le second théorème d'isomorphisme les A-modules $\frac{\mathfrak{a}(n) + \mathfrak{m}\mathfrak{f}(n)}{\mathfrak{m}\mathfrak{f}(n)}$ et $\frac{\mathfrak{a}(n)}{\mathfrak{m}\mathfrak{f}(n) \cap \mathfrak{a}(n)}$ sont isomorphes; donc

$$\text{longueur}(\mathfrak{a}(n)) = \text{longueur}\left(\frac{\mathfrak{a}(n) + \mathfrak{m}\mathfrak{f}(n)}{\mathfrak{m}\mathfrak{f}(n)}\right) + \text{longueur}(\mathfrak{m}\mathfrak{f}(n) \cap \mathfrak{a}(n)).$$

---

(1) *Über die Theorie der Algebraischen Formen* (*Math. Ann.*, t. 36, 1890, p. 473-534).

Le module $\frac{\mathfrak{a}(n)+\mathfrak{m}\mathfrak{f}(n)}{\mathfrak{m}\mathfrak{f}(n)}$, étant annulé par $\mathfrak{m}$, a une structure canonique de $\frac{A}{\mathfrak{m}}$-module; sa longueur est un polynome en n pour n assez grand par hypothèse inductive, car il est obtenu à partir de $\mathfrak{a}(n)$ par réduction des coefficients modulo $\mathfrak{m}$. Étudions maintenant $\mathfrak{m}\mathfrak{f}(n)_\cap \mathfrak{a}(n)$; c'est le module des formes de degré n contenues dans l'idéal $\mathfrak{m}\mathfrak{o}_\cap \mathfrak{a}$, qui, comme intersection d'idéaux homogènes, est homogène; soit $(F_1, \ldots, F_q)$ une base de cet idéal composée de formes; toute forme de $\mathfrak{m}\mathfrak{f}(n)_\cap \mathfrak{a}(n)$ peut donc s'écrire $F = A_1F_1 + \ldots + A_qF_q$ où les A_i sont des formes de degré convenable. Si $\mathfrak{b}$ est l'annulateur de $\mathfrak{m}$ dans A, le module $\mathfrak{a}(n)_\cap \mathfrak{m}\mathfrak{f}(n)$ est annulé par $\mathfrak{b}$; c'est donc canoniquement un $\frac{A}{\mathfrak{b}}$-module; c'est le module des formes de degré n de l'idéal de $\frac{A}{\mathfrak{b}}[X_1, \ldots, X_s]$ engendré par les formes $\overline{F}_i$ obtenues à partir des F_i par réduction des coefficients mod $\mathfrak{b}$; $\mathfrak{m}$ étant minimal est principal et engendré par n'importe lequel de ses éléments non nuls α; si $xy \in \mathfrak{b}$ et $y \notin \mathfrak{b}$, alors $xy\alpha = 0$; $y\alpha \neq 0$, sinon $y \in \mathfrak{b}$; donc $x \in \mathfrak{b}$; $\mathfrak{b}$ est premier, donc maximal, et $\frac{A}{\mathfrak{b}}$ est un corps. Ainsi la longueur du $\frac{A}{\mathfrak{b}}$ module $\mathfrak{a}(n)_\cap \mathfrak{m}\mathfrak{f}(n)$ est un polynome en n pour n assez grand d'après le théorème de Hilbert. C. Q. F. D.

Étant donnés deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ d'un anneau quelconque $\mathfrak{o}$, nous noterons $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})$ et appellerons *transporteur* de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{a}$ l'ensemble des $x \in \mathfrak{o}$ tels que $x\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$. Considérons à nouveau l'anneau $\mathfrak{o} = A[X_1, \ldots, X_s]$ où A est un anneau d'Artin; nous noterons $\mathfrak{X}$ l'idéal engendré par $X_1, \ldots, X_s$ dans $\mathfrak{o}$; un idéal $\mathfrak{q}$ contenant une puissance de $\mathfrak{X}$ sera dit *irrelevant*; ceci veut dire que $\varphi\mathfrak{q}(n) = \binom{n+s-1}{s-1} m$ pour n assez grand. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal homogène de $\mathfrak{o}$, et $\mathfrak{a} = \bigcap_i \mathfrak{q}_i$ une représentation primaire minimale de $\mathfrak{a}$; soit $\mathfrak{r}$ l'intersection (irrelevante) des $\mathfrak{q}_i$ qui sont irrelevants, et soit $\mathfrak{S}$ l'intersection des autres composantes primaires de $\mathfrak{a}$: $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}_\cap \mathfrak{S}$. Soit $\mathfrak{b} = \mathfrak{S}_\cap(\mathfrak{r}:\mathfrak{X})$; il est clair que $\mathfrak{b} \subset (\mathfrak{a}:\mathfrak{X})$; soit réciproquement F tel que $FX_i \in \mathfrak{a}$ pour tout i; puisque l'idéal premier de toute composante non irrelevante de $\mathfrak{a}$ ne contient pas tous les X_i, on déduit de $FX_i \in \mathfrak{a}$ pour tout i que $F \in \mathfrak{S}$; puisque

$F \in (\mathfrak{r} : \mathfrak{X})$, on a donc $F \in \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b} = \mathfrak{S}_{\cap}(\mathfrak{r} : \mathfrak{X}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{X})$. Le second théorème d'isomorphisme nous donne

$$\varphi_{\mathfrak{r}}(n) + \varphi_{\mathfrak{s}}(n) = \varphi_{\mathfrak{r}+\mathfrak{s}}(n) + \varphi_{\mathfrak{a}}(n),$$
$$\varphi_{(\mathfrak{r}:\mathfrak{X})}(n) + \varphi_{\mathfrak{s}}(n) = \varphi_{(\mathfrak{r}:\mathfrak{X})+\mathfrak{s}}(n) + \varphi_{(\mathfrak{a}:\mathfrak{X})}(n).$$

Mais $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r} + \mathfrak{S}$, $(\mathfrak{r} : \mathfrak{X})$ et $(\mathfrak{r} : \mathfrak{X}) + \mathfrak{S}$ sont irrelevants; donc leurs $\varphi(n)$ sont tous égaux à $m\binom{n+s-1}{s-1}$ pour n assez grand. On a donc, pour n assez grand, la *formule des idéaux irrelevants*

$$(1) \qquad \boxed{\varphi_{\mathfrak{a}}(n) = \varphi_{(\mathfrak{a}:\mathfrak{X})}(n) = \varphi_{\mathfrak{s}}(n)}.$$

5. Longueurs d'idéaux primaires dans les anneaux locaux. — Un anneau noethérien $\mathfrak{o}$ est appelé un *anneau local* (1) si les éléments non inversibles de $\mathfrak{o}$ forment un idéal $\mathfrak{m}$; tout idéal non trivial de $\mathfrak{o}$ est alors contenu dans l'unique idéal maximal $\mathfrak{m}$. Rappelons d'abord les résultats suivants :

a. $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{m}^n = (0)$ (théorème de Krull); les puissances de $\mathfrak{m}$ définissent donc sur $\mathfrak{o}$ une topologie d'anneau séparé; on montre que la complétion $\bar{\mathfrak{o}}$ de l'anneau topologique $\mathfrak{o}$ est un anneau local, que tout idéal d'un anneau local est fermé, et que tout élément qui n'est pas un diviseur de zéro dans $\mathfrak{o}$ n'est pas un diviseur de zéro dans $\bar{\mathfrak{o}}$.

b. (Théorème de Cohen). Si l'anneau local complet $\mathfrak{o}$ contient un corps, il contient un corps K isomorphe à $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}}$ par l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{o}$ sur $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}}$; un tel corps sera appelé un *corps de Cohen* de $\mathfrak{o}$. Ce résultat, l'un des plus profonds de la théorie des anneaux locaux, sera peu utilisé dans la suite de ce travail.

Tout idéal $\mathfrak{q}$ tel que $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{q} \supset \mathfrak{m}^s$ est *primaire pour* $\mathfrak{m}$; en effet, de $ab \in \mathfrak{q}$, $a \in \mathfrak{m}$, on déduit, a étant inversible, que $b \in \mathfrak{q}$; la réciproque

(1) *Voir* [K], [LR] et [C].

est évidente. Je dis que $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}}$ est alors un *anneau d'Artin;* il nous suffira de le montrer pour $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}^s}$; soit $(x_1, \ldots, x_s)$ une base de $\mathfrak{m}$; les $\mathfrak{o}$-modules $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}}, \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}, \ldots, \frac{\mathfrak{m}^{s-1}}{\mathfrak{m}^s}$, qui sont annulés par $\mathfrak{m}$, sont canoniquement des espaces vectoriels sur le corps $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}}$; dans $\frac{\mathfrak{m}^j}{\mathfrak{m}^{j+1}}$ les monomes $(x_1^{j_1} \ldots x_s^{j_s})$ $(j_1 + \ldots + j_s = j)$, réduits modulo $\mathfrak{m}^{j+1}$ forment un système de générateurs; donc les espaces $\frac{\mathfrak{m}^j}{\mathfrak{m}^{j+1}}$ sont de dimensions finies sur $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}}$; et notre assertion est alors une conséquence immédiate du théorème de Jordan-Hölder.

Soit $\mathfrak{q}$ un idéal primaire pour l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ d'un anneau local $\mathfrak{o}$; par une $\mathfrak{q}$-*forme de degré n sur* $\mathfrak{o}$ nous entendrons un élément du module $\frac{\mathfrak{q}^n}{\mathfrak{q}^{n+1}}$; nous noterons $F_n(\mathfrak{q})$ le groupe abélien $\frac{\mathfrak{q}^n}{\mathfrak{q}^{n+1}}$ muni de sa structure canonique de $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}}$-module; soit A l'anneau d'Artin $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}}$. Considérons la somme directe $F(\mathfrak{q}) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\mathfrak{q})$; nous munissons $F(\mathfrak{q})$ de la structure suivante d'anneau : si $\bar{x} \in F_n(\mathfrak{q})$ et $\bar{y} \in F_p(\mathfrak{q})$, $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont classés modulo $\mathfrak{q}^{n+1}$ et $\mathfrak{q}^{p+1}$ d'éléments $x \in \mathfrak{q}^n$ et $y \in \mathfrak{q}^p$; on vérifie immédiatement que la classe de xy mod $\mathfrak{q}^{n+p+1}$ ne dépend que de $\bar{x}$ et $\bar{y}$; en la notant $\bar{x}.\bar{y}$, et en étendant cette multiplication par linéarité, on obtient, sur $F(\mathfrak{q})$, la structure d'anneau annoncée. La longueur de $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}^n}$ est égale à celle du A-module $\sum_{j=0}^{n-1} F_j(\mathfrak{q})$. Soit maintenant $(x_1, \ldots, x_s)$ une base de $\mathfrak{q}$, $\bar{x}_i$ l'image de x_i dans $F_1(\mathfrak{q})$; les monomes en $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_s$ engendreront alors les A-modules $F_j(\mathfrak{q})$, et nous pourrons écrire $F(\mathfrak{q}) = A[\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_s]$, ce qui montre que $F(\mathfrak{q})$ est un anneau noethérien. Si nous prenons s indéterminées $X_1, \ldots, X_s$, nous voyons que $F(\mathfrak{q})$ est isomorphe au quotient de $A[X_1, \ldots, X_s]$ par l'idéal homogène $\mathfrak{a}$ des relations algébriques entre les $\bar{x}_i$. Puisque A est un anneau d'Artin, nous déduisons du théorème 8 le résultat suivant :

THÉORÈME 9. — *Si* $\mathfrak{q}$ *est un idéal primaire pour l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *d'un* *anneau local* $\mathfrak{o}$, *la longueur* $P_{\mathfrak{q}}(n)$ *de* $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}^n}$ *est un polynome en n pour n suffisamment grand.*

Remarques. — 1. Au Chapitre II le degré et le coefficient dominant du polynome $P_{\mathfrak{q}}(n)$ définiront les notions de dimension et de multiplicité, qui seront importantes pour les applications à la Géométrie algébrique.

2. Remarquons que la formation de l'anneau $F(\mathfrak{q})$ à partir de $\mathfrak{o}$ et de la suite d'idéaux $(\mathfrak{q}^n)$ est un cas particulier de la formation d'un anneau gradué à partir d'un anneau filtré (ou valué), souvent utilisée par l'École française de Topologie algébrique [1].

3. Soit $\bar{\mathfrak{o}}$ la complétion de $\mathfrak{o}$; on vérifie sans peine que $\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{q}^n$ est primaire pour l'idéal maximal $\bar{\mathfrak{m}} = \bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{m}$ de $\bar{\mathfrak{o}}$, et que $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}^n}$ et $\frac{\bar{\mathfrak{o}}}{\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{q}^n}$ sont isomorphes ($\mathfrak{q}^n$ étant un idéal ouvert de $\mathfrak{o}$); donc $P_{\mathfrak{q}}(n) = P_{\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{q}}(n)$.

4. La définition, due à Krull des « p-Reihenringe » [1] signifie que l'anneau $F(\mathfrak{m})$ est isomorphe à l'anneau de polynomes $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}}[X_1, \ldots, X_s]$ lorsque $(x_1, \ldots, x_s)$ est une base minimale de $\mathfrak{m}$.

Lorsque $y \in \mathfrak{m}^n$ et $y \notin \mathfrak{m}^{n+1}$, la classe $\bar{y}$ de y mod $\mathfrak{m}^{n+1}$ est appelée la *forme initiale* de y; si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{o}$, l'idéal $\bar{\mathfrak{a}}$ de $F(\mathfrak{m})$ engendré par les formes initiales des éléments de $\mathfrak{a}$ est appelé l'*idéal directeur* de $\mathfrak{a}$ (« Leitideal » de Krull).

THÉORÈME 10 (théorème des transporteurs). — *Si* $\mathfrak{q}$ *est primaire pour l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de l'anneau local* $\mathfrak{o}$ *et si* $\mathfrak{m}$ *ne se compose pas uniquement de diviseurs de zéro, on a* $(\mathfrak{q}^{n+1} : \mathfrak{q}) = \mathfrak{q}^n$ *pour n assez grand.*

Puisqu'il s'agit d'une propriété de $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}^{n+1}}$, il nous suffira de démontrer le théorème 10 dans le cas d'un anneau local *complet* $\mathfrak{o}$; en effet tout élément qui n'est pas diviseur de zéro dans un anneau local, n'est pas diviseur de zéro dans sa complétion. Il est clair que $\mathfrak{q}^n \subset (\mathfrak{q}^{n+1} : \mathfrak{q})$; nous allons étudier si $(\mathfrak{q}^{n+1} : \mathfrak{q})$ est, ou non, strictement plus grand que $\mathfrak{q}^n$, c'est-à-dire, en passant à $F(\mathfrak{q})$ et à $A[X_1, \ldots, X_s]$, s'il existe des formes de degré $n - r (r > 0)$, $G(X)$ telles que $GX_i \in \mathfrak{a} + \mathfrak{X}^{n+1}$

[1] *Voir*, par exemple, H. CARTAN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 148.

[1] *Dimensionstheorie in Stellenringe* (*J. Reine Angew. Math.*, t. **179**, 1938, p. 209).

pour tout i (les notations sont les mêmes que pour le théorème 9, et $\mathfrak{X}$ désigne l'idéal engendré par les X_i); puisque GX_i est de degré $n-r+1$ et que $\mathfrak{a}$ est homogène, ceci implique $G \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{X})$. D'après la formule des idéaux irrelevants [formule (1), § 4] ceci implique, si $n-r$ est suffisamment grand, que $G \in \mathfrak{a}$, c'est-à-dire que la forme correspondante de $F_{n-r}(\mathfrak{q})$ est nulle. Nous avons donc démontré que, si $n-r$ est supérieur à une constante c indépendante de n, on a

$$(\mathfrak{q}^{n+1} : \mathfrak{q}) \cap \mathfrak{q}^{n-r} = \mathfrak{q}^n. \tag{2}$$

Restent à étudier les éléments de $(\mathfrak{q}^{n+1} : \mathfrak{q})$ qui sont en dehors de $\mathfrak{q}^c$, c'est-à-dire le module $\mathfrak{J}_n = \frac{(\mathfrak{q}^{n+1} : \mathfrak{q}) + \mathfrak{q}^c}{\mathfrak{q}^c}$, il est clair que $\mathfrak{J}_{n+1} \subset \mathfrak{J}_n$; puisque $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}^c}$ est un anneau d'Artin, la suite décroissante $(\mathfrak{J}_n)$ s'arrête, et, pour certain p, on a $\mathfrak{J}_p = \mathfrak{J}_{p+1} = \ldots$. Soit $\bar{y} \in \mathfrak{J}_p$; si $\bar{y} \neq 0$ il existe $y \notin \mathfrak{q}^c$ tel que $(y + \mathfrak{q}^c) \cap (\mathfrak{q}^{n+1} : \mathfrak{q}) \neq \emptyset$ pour tout $n \geqq p$, c'est-à-dire qu'il existe $z_n \in \mathfrak{q}^c$ tel que $(y + z_n)\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}^{n+1}$; de $(y + z_n)\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}^{n+1}$ et de $(y + z_{n+1})\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}^{n+2}$, on déduit $(z_{n+1} - z_n)\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}^{n+1}$, d'où $z_{n+1} - z_n \in (\mathfrak{q}^{n+1} : \mathfrak{q}) \cap \mathfrak{q}^c = \mathfrak{q}^n$; la suite (z_n) est donc une suite de Cauchy; comme $\mathfrak{o}$ est complet elle a une limite $z \in \mathfrak{q}^c$ et l'on a $z - z_n \in \mathfrak{q}^n$. Alors $(y+z)\mathfrak{q} \subset (y + z_n)\mathfrak{q} + (z - z_n)\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}^{n+1}$, et, puisque $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{q}^n = (0)$ d'après le théorème de Krull, on en déduit $(y+z)\mathfrak{q} = (0)$; mais, puisque $y \notin \mathfrak{q}^c$ et $z \in \mathfrak{q}^c$, on a $y + z \neq 0$; ainsi tout élément de $\mathfrak{q}$, donc de $\mathfrak{m}$ car $\mathfrak{m}^s \subset \mathfrak{q}$, est un diviseur de zéro contrairement aux hypothèses. Ceci veut dire que, pour n assez grand, on a $\mathfrak{J}_n = (0)$, donc $(\mathfrak{q}^{n+1} : \mathfrak{q}) \subset \mathfrak{q}^c$ et le théorème 10 en déduit aussitôt de la formule (2).

Remarque. — Par applications répétées de la formule $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) : \mathfrak{c} = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}\mathfrak{c})$ on voit que $(\mathfrak{q}^{n+h} : \mathfrak{q}^h) = \mathfrak{q}^n$ pour n assez grand.

6. Passage aux anneaux noethériens généraux. — Soient $\mathfrak{o}$ un anneau noethérien, $\mathfrak{q}$ un idéal primaire pour l'idéal $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{o}$. On appelle *longueur de l'idéal primaire* $\mathfrak{q}$ la longueur d'une chaîne maximale d'idéaux *primaires pour* $\mathfrak{p}$ joignant $\mathfrak{o}$ à $\mathfrak{q}$. L'étude des idéaux primaires pour $\mathfrak{p}$, que, pour d'évidentes raisons géométriques, l'on pourrait appeler la « localisation » à l'idéal premier $\mathfrak{p}$, est facilitée par la considération de *l'anneau des quotients* $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ de l'idéal premier $\mathfrak{p}$. Rappelons-en les principaux résultats (¹) : soit $\mathfrak{S}$ l'intersection de tous les idéaux de $\mathfrak{o}$ primaires pour $\mathfrak{p}$ [ou, ce qui revient au même, l'intersection des composantes primaires de (O) contenues dans $\mathfrak{p}$]; dans l'anneau $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{S}}$ tout élément en dehors de $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{S}}$ n'est pas un diviseur de zéro; soit $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ l'anneau des fractions $\frac{\alpha}{\beta}$, où $\alpha \in \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{S}}$, $\beta \in \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{S}}$, $\beta \notin \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{S}}$; si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{o}$, nous noterons $\mathfrak{a}\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ l'idéal engendré dans $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ par l'image $\varphi(\mathfrak{a})$ de $\mathfrak{a}$ par l'homomorphisme canonique φ de $\mathfrak{o}$ sur $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{S}}$; si $\mathfrak{a}^\star \subset \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ nous noterons $\mathfrak{a}^\star_\cap \mathfrak{o}$, par abus de langage, l'idéal $\overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{a}^\star)$. On montre que :

1° $(\mathfrak{a}^\star_\cap \mathfrak{o})\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = \mathfrak{a}^\star$.

2° Si l'idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{o}$ a pour représentation primaire minimale $\mathfrak{a} = \mathfrak{v}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{v}_r \cap \mathfrak{v}_{r+1} \cap \ldots \cap \mathfrak{v}_s$ où $\mathfrak{v}_i$ est primaire pour $\mathfrak{p}_i$, avec $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}$ pour $i \leqq r$ et $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}$ pour $i > r$, alors l'idéal $\mathfrak{a}\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ a $\mathfrak{v}_1\mathfrak{o}_\mathfrak{p} \cap \ldots \cap \mathfrak{v}_r\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ pour représentation primaire minimale.

3° $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ est un anneau local ayant $\mathfrak{p}\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ pour idéal maximal.

Donc, si $\mathfrak{q}$ est primaire pour $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ est primaire pour $\mathfrak{p}\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$, et il y a correspondance biunivoque monotone entre les idéaux primaires pour $\mathfrak{p}$ et les idéaux primaires pour $\mathfrak{p}\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$; à $\mathfrak{q}^{(n)}$ correspondra évidemment l'idéal $\mathfrak{q}^n\mathfrak{o}_\mathfrak{p} = (\mathfrak{q}\mathfrak{o}_\mathfrak{p})^n$. Les théorèmes 9 et 10 donnent alors les résultats suivants :

THÉORÈME 11. — *Soit $\mathfrak{q}$ un idéal primaire d'un anneau noethérien $\mathfrak{o}$; la longueur $P_\mathfrak{q}(n)$ de la puissance symbolique $n^{\text{ième}}$ $\mathfrak{q}^{(n)}$ de $\mathfrak{q}$ est un polynome en n pour n suffisamment grand. Si $\mathfrak{S}$ est l'intersection de tous les idéaux de $\mathfrak{o}$ qui sont primaires pour l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{q}$, et $\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{S}}$ n'est pas un idéal premier de (O) dans $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{S}}$ on a, pour n suffisamment grand,* $(\mathfrak{q}^{(n+h)} : \mathfrak{q}^{(h)}) = \mathfrak{q}^{(n)}$.

(¹) C. CHEVALLEY, *On the notion of the ring of quotients of a prime ideal* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 50, 1944, p. 93).

CHAPITRE II.

ANNEAUX LOCAUX.

1. Notion de dimension. — Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux primaires pour l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ d'un anneau local $\mathfrak{o}$. Il existe évidemment deux entiers a et b tels que $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}^a$ et $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}^b$; donc $\mathfrak{a}^n \supset \mathfrak{b}^{bn}$, $\mathfrak{b}^n \supset \mathfrak{a}^{an}$, c'est-à-dire $P_{\mathfrak{a}}(n) \leqq P_{\mathfrak{b}}(bn)$ et $P_{\mathfrak{b}}(n) \leqq P_{\mathfrak{a}}(an)$. Ceci prouve que les polynomes $P_{\mathfrak{a}}(n)$ et $P_{\mathfrak{b}}(n)$ ont *même degré d;* ce degré commun sera appelé la *dimension* de $\mathfrak{o}$; il est clair que $\mathfrak{o}$ a même dimension que sa complétion.

Théorème 1. — *Tout idéal $\mathfrak{q}$ primaire pour $\mathfrak{m}$ est engendré par au moins d éléments.*

Soit en effet $(x_1, \ldots, x_q)$ une base de $\mathfrak{q}$ et soit m la longueur de l'anneau d'Artin $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}} = A$; nous reprenons les notations du théorème 9 (Chap. I); la longueur du A-module $F_n(\mathfrak{q})$ des $\mathfrak{q}$-formes de degré n est évidemment inférieure à la longueur du A-module des formes de degré n dans l'anneau de polynomes $A[X_1, \ldots, X_q]$; celle-ci est égale à $m\binom{n+q-1}{q-1}$. Donc la longueur $P_{\mathfrak{q}}(n)$ de $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}^n}$ est inférieure à

$$m\sum_{i=1}^{n-1}\binom{i+q-1}{q-1} = m\binom{n+q}{q}.$$

En comparant les degrés on voit que celui, d, de $P_{\mathfrak{q}}(n)$ est inférieur à q, ce qui démontre le théorème 1.

Théorème 2. — *Soient $\mathfrak{o}$ un anneau local, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, $\mathfrak{q}$ un idéal primaire pour $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_t$ des idéaux de $\mathfrak{o}$ ne contenant pas $\mathfrak{q}$. Si le corps résiduel $K = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}}$ est infini* [1], *il existe $a \in \mathfrak{q}$, $a \notin \mathfrak{b}_i$, $(i = 1, \ldots, t)$ tel que $(\mathfrak{q}^n : \mathfrak{o}a) \cap \mathfrak{q}^c = \mathfrak{q}^{n-1}$, pour n assez grand et c indépendant de n.*

---

[1] Cette condition sera toujours vérifiée dans les applications géométriques.

Lemme. — *Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal homogène de l'anneau de polynomes* $A[X_1, \ldots, X_s]$, A *étant un anneau d'Artin primaire d'idéal premier* $\mathfrak{p}$ *tel que* $K = \frac{A}{\mathfrak{p}}$ *soit un corps infini. Il existe une forme linéaire* F *telle que* $\varphi_{\mathfrak{a}}(n)$ *et* $\varphi_{(\mathfrak{a}:F)}(n)$ *soient égaux pour n assez grand, et l'on peut prendre* F *en dehors d'un nombre fini de sous-modules propres du* A-*module* $\mathfrak{L}$ *des formes linéaires de* $A[X_1, \ldots, X_s]$.

D'après la formule des idéaux irrelevants [formule (1) § 4, Chap. I] nous pouvons remplacer $\mathfrak{a}$ par sa composante non irrelevante $\mathfrak{S}$; soit $\mathfrak{S} = \bigcap_i \mathfrak{q}_i$ avec $\mathfrak{q}_i$ primaire pour $\mathfrak{p}_i$ et $\mathfrak{X} \not\subset \mathfrak{p}_i$; $\mathfrak{p}_i \cap \mathfrak{L}$ est alors un sous-module propre de $\mathfrak{L}$. Nous chercherons ainsi à prendre F en dehors d'un nombre fini de sous-modules propres $\mathfrak{M}_k$ de $\mathfrak{L}$, les $\mathfrak{p}_i \cap \mathfrak{L}$ et les sous-modules donnés. De $\mathfrak{M}_k + \mathfrak{p}\mathfrak{L} = \mathfrak{L}$ on déduirait, pour $1 \leqq r \leqq s$, $X_r \in \mathfrak{M}_k + \mathfrak{p}\mathfrak{L}$, donc $X_r = \sum_{u=1}^{s} \mu_u X_u + \sum_{u=1}^{s} \pi_u X_u$ avec $\Sigma \mu_u X_u \in \mathfrak{M}_k$ et $\pi_u \in \mathfrak{p}$; on a donc, pour $1 \leqq r \leqq s$, $Y_r = X_r - \Sigma \pi_u X_u$ et $Y_r \in \mathfrak{M}_k$; le déterminant des s formes Y_r est donc de la forme $1 + \pi$ avec $\pi \in \mathfrak{p}$; il est par conséquent inversible dans A puisque A est un anneau d'Artin primaire; donc $X_r \in \mathfrak{M}_k$ et $\mathfrak{M}_k = \mathfrak{L}$, contrairement aux hypothèses. On en déduit donc que $\mathfrak{M}_k + \mathfrak{p}\mathfrak{L} \neq \mathfrak{L}$. Si nous réduisons les coefficients mod $\mathfrak{p}$, les sous-espaces vectoriels $V_k = \frac{\mathfrak{M}_k + \mathfrak{p}\mathfrak{L}}{\mathfrak{p}\mathfrak{L}}$ de $V = \frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{p}\mathfrak{L}}$ sont propres; comme V est un espace vectoriel sur le corps infini $K = \frac{A}{\mathfrak{p}}$, il existe $\overline{F} \in V$ qui n'appartient à aucun sous-espace V_k. Nous prendrons pour F un représentant de la classe $\overline{F}$.

Ceci étant, soit P un polynome tel que $FP \in \mathfrak{S}$; alors $FP \in \mathfrak{q}_i$, $F \notin \mathfrak{p}_i$, donc $P \in \mathfrak{q}_i$ et $P \in \mathfrak{S}$. Ainsi $\mathfrak{S} = (\mathfrak{S} : F)$ et

$$\varphi_{\mathfrak{a}}(n) = \varphi_{\mathfrak{S}}(n) = \varphi_{(\mathfrak{S}:F)}(n);$$

mais comme $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{S}$, on a $(\mathfrak{a}:F) \subset (\mathfrak{S}:F)$; d'autre part $\mathfrak{a} \subset (\mathfrak{a}:F)$. Donc $\varphi_{(\mathfrak{a}:F)}(n) = \varphi_{\mathfrak{a}}(n) = \varphi_{(\mathfrak{S}:F)}(n)$, ce qui démontre le lemme.

Pour démontrer le théorème 2 nous prendrons $A = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}}$, $K = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}}$, pour $\frac{A[X_1, \ldots, X_s]}{\mathfrak{a}}$ l'anneau de formes $F(\mathfrak{q})$, et pour a un élément de $\mathfrak{q}$ ayant la forme linéaire F du lemme pour forme initiale. Nous aurons en effet à éviter les images dans $F(\mathfrak{q})$ des modules $\frac{\mathfrak{q}^2+\mathfrak{b}_i}{\mathfrak{q}^2}$; or le lemme le permet car, si l'on avait $\mathfrak{q}^2+\mathfrak{b}_i \supset \mathfrak{q}$, on en déduirait $\mathfrak{q}^2 \subset \mathfrak{q}^3+\mathfrak{b}_i\mathfrak{q}$ d'où $\mathfrak{q}^2 \subset \mathfrak{q}^3+\mathfrak{b}_i\mathfrak{q}+\mathfrak{b}_i = \mathfrak{q}^3+\mathfrak{b}_i$, et, par récurrence, $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}^r+\mathfrak{b}_i$ pour tout r; comme $\bigcap_{i=1}^{\infty}(\mathfrak{b}_i+\mathfrak{q}^r) = \mathfrak{b}_i$, on en déduirait $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{b}_i$ contrairement aux hypothèses. Il est clair que $\mathfrak{q}^{n-1} \subset (\mathfrak{q}^n : \mathfrak{o}a)$; soit $x \notin \mathfrak{q}^{n-1}$ tel que $ax \in \mathfrak{q}^n$ et soit G un représentant dans $A[X_1, \ldots, X_s]$ de la forme initiale de x dans $F(\mathfrak{q})$; le degré p de G est $\leqq n-2$. On a alors $FG \in \mathfrak{X}^n+\mathfrak{a}$; comparant les degrés on voit que $FG \in \mathfrak{a}$, donc $G \in (\mathfrak{a} : F)$. Si donc, d'après le lemme, p est supérieur à un entier c ne dépendant que de $\mathfrak{q}$, on a $G \in \mathfrak{a}$; ceci montre que si $n > c+1$, on a $(\mathfrak{q}^n : \mathfrak{o}a) \cap \mathfrak{q}^c = \mathfrak{q}^{n-1}$.

Remarque. — En considérant les formes de degré k au lieu des formes linéaires, on voit qu'il existe $b \in \mathfrak{q}^k$ tel que $(\mathfrak{q}^n : \mathfrak{o}b) \cap \mathfrak{q}^c = \mathfrak{q}^{n-k}$ pour $n > c+k$.

Un élément $a \in \mathfrak{q}$ tel que $(\mathfrak{q}^n : \mathfrak{o}a) \cap \mathfrak{q}^c = \mathfrak{q}^{n-1}$ sera appelé un élément *superficiel* par rapport à $\mathfrak{q}$. Un élément $b \in \mathfrak{q}^k$ tel que $(\mathfrak{q}^n : \mathfrak{o}b) \cap q^c = \mathfrak{q}^{n-k}$ sera dit superficiel de degré k.

Corollaire. — *Si* $\mathfrak{m}$ *ne se compose pas uniquement de diviseurs de zéro, il existe un élément superficiel* a, *non diviseur de zéro, et l'on a, pour* $n > c+1$ $(\mathfrak{q}^n : \mathfrak{o}a) = \mathfrak{q}^{n-1}$.

Nous pouvons en effet prendre a en dehors des idéaux premiers de (O) car aucun ne contient $\mathfrak{q}$. La démonstration du fait que $(\mathfrak{q}^n : \mathfrak{o}a) \subset \mathfrak{q}^c$ se fait exactement comme à la fin du théorème 10 (Chap. I).

Exemple d'élément superficiel. — Soit $\mathfrak{o}$ l'anneau de séries formelles $K[[a_1, \ldots, a_s]]$, et soit $\mathfrak{q}$ un idéal (non nécessairement primaire pour l'idéal maximal) de $\mathfrak{o}$; on montre facilement que l'on a $(\mathfrak{q}^{n+1} : \mathfrak{o}a_1) = \mathfrak{q}^n$ pour tout n, lorsque $\mathfrak{q}$ contient a_1.

Nous allons maintenant considérer un anneau quotient $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}x}$ de $\mathfrak{o}$, et donner une formule reliant les polynomes $P_{\mathfrak{q}}(n)$ et $P_{\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{o}x}}(n)$.

Soit $\bar{\mathfrak{q}} = \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{o}x} (x \in \mathfrak{q})$. On a

$$P_{\bar{\mathfrak{q}}}(n) = \text{longueur}(\mathfrak{q}^n + \mathfrak{o}x);$$

donc

$$P_{\mathfrak{q}}(n) - P_{\bar{\mathfrak{q}}}(n) = \text{longueur}\left(\frac{\mathfrak{q}^n + \mathfrak{o}x}{\mathfrak{q}^n}\right) = \text{longueur}\left(\frac{\mathfrak{o}x}{\mathfrak{q}^n \cap \mathfrak{o}x}\right)$$

d'après le second théorème d'isomorphisme. Considérons l'homomorphisme de ($\mathfrak{o}$-modules) $\varphi : y \to yx$. On a

$$\mathfrak{o} = \overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{o}x) \quad \text{et} \quad (\mathfrak{q}^n : \mathfrak{o}x) = \overset{-1}{\varphi}(\mathfrak{q}^n \cap \mathfrak{o}x);$$

donc

(1) $$\boxed{P_{\bar{\mathfrak{q}}}(n) = P_{\mathfrak{q}}(n) - \text{longueur}(\mathfrak{q}^n : \mathfrak{o}x).}$$

Corollaire 1. — *Pour tout* $x \in \mathfrak{m}$, *on a* $\dim \mathfrak{o} \geqq \dim \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}x} \geqq \dim \mathfrak{o} - 1$.

La première inégalité vient du fait que longueur $(\mathfrak{q}^n : \mathfrak{o}x) \geqq 0$. D'autre part on a $(\mathfrak{q}^n : \mathfrak{o}x) \supset \mathfrak{q}^{n-1}$, donc

$$\text{longueur}(\mathfrak{q}^n : \mathfrak{o}x) \leqq P_{\mathfrak{q}}(n-1) \quad \text{et} \quad P_{\bar{\mathfrak{q}}}(n) \geqq P_{\mathfrak{q}}(n) - P_{\mathfrak{q}}(n-1)$$

ce qui démontre la seconde inégalité.

Corollaire 2. — *Si x est un élément superficiel par rapport à $\mathfrak{q}$, on a*

$$P_{\mathfrak{q}}(n) - P_{\mathfrak{q}}(n-1) \leqq P_{\bar{\mathfrak{q}}}(n) \leqq P_{\mathfrak{q}}(n) - P_{\mathfrak{q}}(n-1) + P_{\mathfrak{q}}(c),$$

et donc $\dim \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}x} = \dim \mathfrak{o} - 1$.

On a en effet $(q^n : \mathfrak{o}x) \cap \mathfrak{q}^c = \mathfrak{q}^{n-1}$; donc

$$P_{\mathfrak{q}}(n-1) \geqq \text{longueur}(\mathfrak{q}^n : \mathfrak{o}x) \geqq P_{\mathfrak{q}}(n-1) - P_{\mathfrak{q}}(c);$$

comme $P_{\mathfrak{q}}(c)$ est une constante, le polynome $P_{\bar{\mathfrak{q}}}(n)$ est de degré $\dim \mathfrak{o} - 1$.

Théorème 3. — *Si d est la dimension d'un anneau local $\mathfrak{o}$, il existe un idéal $\mathfrak{q}$ primaire pour l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{o}$, et engendré par d éléments.*

Nous procéderons par récurrence sur d. Si $d=\mathrm{O}$ on a longueur $\mathfrak{m}^n =$ const, pour n assez grand, donc $\mathfrak{m}^n=(\mathrm{O})$ et (O) est primaire pour $\mathfrak{m}$. Prenons, dans le cas général, un élément $x_d \in \mathfrak{m}$ tel que $\dim \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}x_d} = d-1$ [corollaire 2 de la formule (1)]. Soit, dans $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}x_d}$, $\bar{\mathfrak{q}}$ un idéal primaire pour $\bar{\mathfrak{m}} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{o}x_d}$ et engendré par $d-1$ éléments $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{d-1}$; soit $\bar{\mathfrak{q}} \supset \bar{\mathfrak{m}}^n$; si x_i est un représentant de la classe $\bar{x}_i$, on a

$$\mathfrak{m}^n \subset \mathfrak{o}x_1 + \ldots + \mathfrak{o}x_{d-1} + \mathfrak{o}x_d;$$

donc l'idéal engendré par $(x_1, \ldots, x_d)$ est primaire pour $\mathfrak{m}$.

Les théorèmes 1 et 3 montrent que notre définition de la dimension d'un anneau local *coïncide avec celle de C. Chevalley* (« nombre minimum de générateurs d'un idéal primaire pour l'idéal maximal »). Rappelons que cette définition est équivalente à la définition suivante, due à Krull : augmentée d'une unité la dimension d'un anneau local $\mathfrak{o}$ est égale à la longueur d'une chaîne maximale d'idéaux premiers de $\mathfrak{o}$. Avec C. Chevalley nous appellerons *système de paramètres* de $\mathfrak{o}$ tout ensemble de d éléments engendrant un idéal primaire pour l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{o}$. Il est clair que les éléments x de $\mathfrak{o}$ que l'on peut introduire dans un système de paramètres sont ceux tels que

$$\dim \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}x} = \dim \mathfrak{o} - 1.$$

Remarque. — Le théorème 3 est encore valable si $\mathrm{K} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}}$ est un corps *fini*. Nous reprenons les notations du lemme au théorème 2; une forme F de degré k prise en dehors des idéaux premiers non irrelevants $\mathfrak{p}_i$ de $\mathfrak{a}$ provient d'éléments x superficiels de degré k; pour ceux-ci un raisonnement analogue au corollaire 2 de la formule (1) montre que

$$\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(n) - \mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(n-k) \leqq \mathrm{P}_{\bar{\mathfrak{q}}}(n) \leqq \mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(n) - \mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(n-k) + \mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(c),$$

donc $\dim \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}x} = \dim \mathfrak{o} - 1$; et la démonstration du théorème 3 peut se faire. Il s'agit donc de montrer l'existence d'une telle forme. Or on a $\mathfrak{p}_i \not\supset \mathfrak{X}$; nous pourrons supposer, en supprimant certains $\mathfrak{p}_i$, que l'on a $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}_{i'}$ pour $i \neq i'$. Soit $A_{ii'}$ tel que $A_{ii'} \in \mathfrak{p}_{i'}$, $A_{ii'} \notin \mathfrak{p}_i$; si $B_i = \prod_{i' \neq i} A_{i'}$ on a $B_i \notin \mathfrak{p}_i$, $B_i \in \mathfrak{p}_{i'}$ pour $i \neq i'$. Nous prendrons pour éléments $A_{ii'}$ des formes, ce qui est possible car les $\mathfrak{p}_i$ sont des idéaux homogènes; puisque $\mathfrak{p}_i \not\supset \mathfrak{X}$, il existe une forme linéaire F_i telle que $F_i \notin \mathfrak{p}_i$; en remplaçant éventuellement $A_{ii'}$ par $A_{ii'} F_i^{n(i,i')}$, nous pourrons supposer que toutes les formes $A_{ii'}$ ont *même degré*. Alors les formes B_i ont toutes même degré, et la forme $B = \sum_i B_i$ est telle que $B \notin \mathfrak{p}_i$ pour tout i.

Nous supposerons désormais que, sauf mention expresse du contraire, $K = \dfrac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}}$ est un corps *infini*.

THÉORÈME 4. — *Tout idéal $\mathfrak{q}$ engendré par un système de paramètres $(y_1, \ldots, y_d)$ peut être aussi engendré par un système de paramètres $(x_1, \ldots, x_d)$ ayant la propriété suivante : posant*

$$\mathfrak{q}_i = \mathfrak{o} x_1 + \ldots + \mathfrak{o} x_i \qquad (i = 0, \ldots, d-1),$$
$$\mathfrak{o}_i = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}_i}$$

et x_{ji} = classe de x_j mod $\mathfrak{q}_i$, on a

$$\left(\left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}^i}\right)^n : \mathfrak{o}_i x_{i+1,i}\right)_{\cap} \left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}_i}\right)^{c_i} = \left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}_i}\right)$$

pour $n > c_i$, c_i étant un entier fixe, et $i = 0, 1, \ldots, d$.

Un tel système de paramètres $(x_1, \ldots, x_d)$ sera appelé un *système superficiel de paramètres.*

Reprenons les notations du théorème 2 et de son lemme. En évitant les formes linéaires dont le coefficient de Y_1 appartient à $\dfrac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{q}}$, on peut trouver un élément superficiel $x_1 \in \mathfrak{q}$ de la forme

$$x_1 = u y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_d y_d$$

avec u inversible; alors $(x_1, y_2, \ldots, y_d)$ est un système de paramètres engendrant $\mathfrak{q}$, et l'on a $(\mathfrak{q}^n : \mathfrak{o} x_1)_{\cap} \mathfrak{q}^{c_0} = \mathfrak{q}^{n-1}$ pour $n > c_0$. Le théorème 4 s'en déduit par applications successives aux anneaux quotients successifs $\dfrac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}_i}$.

2. Notion de multiplicité. — Soit $\mathfrak{q}$ un idéal primaire pour l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ d'un anneau local $\mathfrak{o}$. Considérons le terme de plus haut degré du polynome $P_{\mathfrak{q}}(n)$; comme ce polynome ne prend que des valeurs entières (pour $n > c$, et donc pour tout n), ce terme est de la forme $\frac{e(\mathfrak{q})n^d}{d!}$ où $e(\mathfrak{q})$ est un entier. L'entier $e(\mathfrak{q})$ est appelé la *multiplicité de l'idéal* $\mathfrak{q}$; $e(\mathfrak{m})$ est aussi appelé la *multiplicité de l'anneau local* $\mathfrak{o}$.

Théorème 5. — *Soit $\mathfrak{o}$ un anneau local de dimension d; si $\mathfrak{q}$ est un idéal primaire pour son idéal maximal $\mathfrak{m}$, il existe un idéal $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}$, engendré par un système de paramètres, et de même multiplicité que $\mathfrak{q}$.*

Si $d = 0$, $\mathfrak{o}$ est un anneau d'Artin de longueur m; on a $\mathfrak{q}^n = (0)$ pour n assez grand, donc $P_{\mathfrak{q}}(n) = m$ pour n assez grand; mais l'idéal (0) est engendré par un système vide de paramètres, et $P_{(0)}(n) = m$; ceci montre que le théorème 5 est vrai pour $d = 0$. Procédons maintenant par récurrence sur d; prenant x_d superficiel par rapport à $\mathfrak{q}$, le corollaire 2 de la formule (1) montre que, avec $\bar{\mathfrak{q}} = \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{o}x_d}$, $P_{\bar{\mathfrak{q}}}(n) = P_{\mathfrak{q}}(n) - P_{\mathfrak{q}}(n-1) + k$ [k étant un entier fixe, puisque c'est un polynome borné par $P_{\mathfrak{q}}(c)$], donc que $e(\bar{\mathfrak{q}}) = e(\mathfrak{q})$ puisque $d \geq 1$. Soit, d'après l'hypothèse de récurrence $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{d-1})$ un système de paramètres de $\bar{\mathfrak{o}} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}x_d}$ engendrant un idéal $\bar{\mathfrak{q}}' \subset \bar{\mathfrak{q}}$ tel que $e(\bar{\mathfrak{q}}) = e(\bar{\mathfrak{q}}')$; soit x_j un représentant dans $\mathfrak{o}$ de la classe $\bar{x}_j$, et soit $\mathfrak{q}'$ l'idéal, primaire pour $\mathfrak{m}$, engendré par $(x_1, \ldots, x_d)$ dans $\mathfrak{o}$. On a $e(\mathfrak{q}) = e(\bar{\mathfrak{q}}) = e(\bar{\mathfrak{q}}')$. Comme $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{q}$, on a $e(\mathfrak{q}') \geq e(\mathfrak{q})$; enfin comme $\bar{\mathfrak{q}}' = \frac{\mathfrak{q}'}{\mathfrak{o}x_d}$ on a $P_{\bar{\mathfrak{q}}'}(n) \geq P_{\mathfrak{q}'}(n) - P_{\mathfrak{q}'}(n-1)$ [corollaire 1 de la formule (1)], ce qui implique $e(\bar{\mathfrak{q}}') \geq e(\mathfrak{q}')$, d'où $e(\mathfrak{q}') \leq e(\mathfrak{q})$.

C. Q. F. D.

Remarquons que la condition d'homogénéité imposée dans notre Note AL n'est pas nécessaire.

A la fin de ce Chapitre nous donnerons un *scholie* à ce théorème 5, qui nous sera de grande utilité dans les applications géométriques.

Nous allons maintenant montrer que notre définition de la multiplicité généralise celle due à C. Chevalley. En effet :

THÉORÈME 6. — *Soit* $\mathfrak{o}$ *un anneau local complet contenant un corps* L *sur lequel* $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}}$ *est fini, et soit* $(x_1, \ldots, x_d)$ *un système de paramètres de* $\mathfrak{o}$ *engendrant l'idéal* $\mathfrak{q}$. *Posons* $\mathfrak{o}' = \mathrm{L}[[x_1, \ldots, x_d]]$ *et supposons que* $\mathfrak{o}$ *soit un* $\mathfrak{o}'$*— module régulier. Alors* $[\mathfrak{o} : \mathfrak{o}'] = e(\mathfrak{q}).\left[\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}} : \mathrm{L}\right]$.

On sait [LR] que $(x_1, \ldots, x_d)$ sont analytiquement indépendants sur L. Les hypothèses montrent que $\mathfrak{o}$ est équidimensionnel ([I], prop. 2, p. 13). On entend par $[\mathfrak{o} : \mathfrak{o}']$ le nombre maximum d'éléments de $\mathfrak{o}$ linéairement indépendants sur $\mathfrak{o}'$, ou, ce qui revient au même, la dimension de l'anneau total des quotients de $\mathfrak{o}$ sur le corps des quotients de $\mathfrak{o}'$; $\mathfrak{o}'$ est évidemment un anneau de séries formelles sur L.

Il est clair que l'on a

$$\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(n) = \frac{1}{\left[\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}} : \mathrm{L}\right]}.\dim_{\mathrm{L}}\left(\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}^n}\right) \quad \text{et} \quad \dim_{\mathrm{L}}\left(\frac{\mathfrak{o}'}{\mathfrak{o}' \cap \mathfrak{q}^n}\right) = \binom{n+d}{d}.$$

Donc

$$\frac{\dim_{\mathrm{L}}\left(\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}^n}\right)}{\dim_{\mathrm{L}}\left(\frac{\mathfrak{o}'}{\mathfrak{o}' \cap \mathfrak{q}^n}\right)} \to \mathrm{N} = e(\mathfrak{q}).\left[\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}} : \mathrm{L}\right] \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

On sait [LR] que $\mathfrak{o}$ est un $\mathfrak{o}'$— module de type fini. Soit $q = [\mathfrak{o} : \mathfrak{o}']$ et soit $(\eta_1, \ldots, \eta_q)$ un système libre maximal de $\mathfrak{o}$ sur $\mathfrak{o}'$; soit enfin $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}'\xi_1 + \ldots + \mathfrak{o}'\xi_t (t \geqq q)$. Pour tout ξ_j il existe $c_j \in \mathfrak{o}'$ tel que $c_j \xi_j \in \sum \mathfrak{o}'\eta_i$; posons $\mathfrak{M} = \sum \mathfrak{o}'\eta_i$. Si $c = c_1 \ldots c_t$, on aura, pour tout $\alpha \in \mathfrak{o}$, $c\alpha \in \mathfrak{M}$, c'est-à-dire $c\alpha = \sum_i a_i \eta_i$ avec $a_i \in \mathfrak{o}'$. On a

$$\begin{aligned} \dim_{\mathrm{L}}\left(\frac{\mathfrak{o}c + \mathfrak{q}^n}{\mathfrak{q}^n}\right) &= \left[\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}} : \mathrm{L}\right].\text{longueur}\left(\frac{\mathfrak{o}c + \mathfrak{q}^n}{\mathfrak{q}^n}\right) \text{(th. 4, Chap. I)} \\ &= \left[\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}} : \mathrm{L}\right].\left(\mathrm{P}_{\mathfrak{q}}(n) - \mathrm{P}_{\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{o}c}}(n)\right); \end{aligned}$$

mais, comme c n'est pas un diviseur de zéro dans $\mathfrak{o}$, $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}c}$ est de dimension $d-1$ ([LR], prop. 6, p. 702) et $P_{\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{o}c}}(n)$ est un polynome de degré $d-1$; ainsi $\dim_L\left(\frac{\mathfrak{o}c+\mathfrak{q}^n}{\mathfrak{q}^n}\right)$ commence par un terme en $\frac{Nn^d}{d!}$, si nous avons pris soin de ne pas prendre c inversible.

On a évidemment $c\mathfrak{o}\subset\mathfrak{M}\subset\mathfrak{o}$. Donc

$$\dim_L\left(\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}^n}\right)\geqq\dim_L\left(\frac{\mathfrak{M}+\mathfrak{q}^n}{\mathfrak{q}^n}\right)\geqq\dim\left(\frac{\mathfrak{o}c+\mathfrak{q}^n}{\mathfrak{q}^n}\right).$$

Mais $\frac{\mathfrak{M}+\mathfrak{q}^n}{\mathfrak{q}^n}$ est isomorphe à $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}\cap\mathfrak{q}^n}$. Si $\mu\in\mathfrak{M}\cap\mathfrak{q}_n$ nous pouvons écrire

$$\mu=\sum_j P_j(x)\eta_j=\sum_\alpha \lambda_\alpha x_1^{n_1}\ldots x_d^{n_d}\qquad(n=n_1+\ldots+n_d,\ \lambda_\alpha\in\mathfrak{o});$$

soit

$$c\lambda_\alpha=\sum_j a_{\alpha j}\eta_j\qquad(a_{\alpha j}\in\mathfrak{o}').$$

Alors

$$\sum_j cP_j(x)\eta_j=\sum_{\alpha,j} a_{\alpha j}x_1^{n_1}\ldots x_d^{n_d}\eta_j;$$

comme les η_j sont linéairement indépendants sur $\mathfrak{o}'$, il vient

$$cP_j(x)=\sum_\alpha a_{\alpha j}x_1^{n_1}\ldots x_d^{n_d}.$$

Si donc k désigne l'ordre de la série formelle c, on a $P_j(x)\in(\mathfrak{o}'\cap\mathfrak{q})^{n-k}$. Donc $\mathfrak{M}(\mathfrak{o}'\cap\mathfrak{q})^n\subset\mathfrak{M}\cap\mathfrak{q}^n\subset\mathfrak{M}(\mathfrak{o}'\cap\mathfrak{q})^{n-k}$. On en tire

$$\begin{aligned}\dim_L\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}(\mathfrak{o}'\cap\mathfrak{q})^n}\right)=q\binom{n+d}{d}\geqq\dim_L\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}\cap\mathfrak{q}^n}\right)&\geqq\dim_L\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}(\mathfrak{o}'\cap\mathfrak{q})^{n-k}}\right)\\&=q\binom{r-k+d}{d}.\end{aligned}$$

Comparant avec la double inégalité

$$\dim_L\left(\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}^n}\right)\geqq\dim_L\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}\cap\mathfrak{q}^n}\right)\geqq\dim_L\left(\frac{\mathfrak{q}^n+\mathfrak{o}c}{\mathfrak{q}^n}\right),$$

où les termes extrêmes sont équivalents à $\frac{Nn^d}{d!}$, on voit que $N=q$.

C. Q. F D.

THÉORÈME 7. — *Tout anneau local régulier est de multiplicité* 1, *et tout anneau équidimensionnel de multiplicité* 1 *est régulier.*

Si $\mathfrak{o}$ est régulier, l'anneau de formes $F(\mathfrak{m})$ est isomorphe à $K[X_1, \ldots, X_d]$ où $K = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}}$; donc $P_{\mathfrak{m}}(n) = \binom{n+d}{d}$, sans irrégularités au début, et $e(\mathfrak{m}) = 1$. Si $\mathfrak{o}$ est de multiplicité 1, il existe (th. 5) un système de paramètres $(x_1, \ldots, x_d)$ engendrant $\mathfrak{q}$ et tel que $e(\mathfrak{q}) = 1$; supposons $\mathfrak{o}$ complet, et soit L un corps de Cohen de $\mathfrak{o}$; si $\mathfrak{o}$ est équidimensionnel nous pouvons appliquer le théorème 6 qui montre que $[\mathfrak{o} : L[[x_1, \ldots, x_d]]] = L$. Comme un anneau de x séries formelles est intégralement fermé dans son corps des quotients, ceci implique $\mathfrak{o} = L[[x_1, \ldots, x_d]]$, donc que $\mathfrak{o}$ est régulier.

Remarques. — 1. La démonstration du théorème 7 montre aussi que $\mathfrak{m}$ est le seul idéal de multiplicité 1 d'un anneau local régulier.

2. L'équidimensionalité est essentielle, comme le montre l'exemple de l'anneau $K[[x]] + Kt$ où $t^2 = tx = 0$ qui est évidemment de multiplicité 1.

3. SYSTÈMES DISTINGUÉS DE PARAMÈTRES. — Soit $(x_1, \ldots, x_d)$ un système superficiel de paramètres engendrant l'idéal $\mathfrak{q}$. Nous reprenons les notations du théorème 4. Le corollaire 2 de la formule (1) montre que l'on a

$$e(\mathfrak{q}) = e\left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}_1}\right) = \ldots = e\left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}_{d-1}}\right).$$

Dans $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}_{d-1}$, qui est de dimension 1, $\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}_{d-1}}$ est engendré par le paramètre $x = x_{d,d-1}$, et l'on a

$$(\bar{\mathfrak{o}}x^n : \bar{\mathfrak{o}}x) \cap (\bar{\mathfrak{o}}x)^c = \bar{\mathfrak{o}}x^{n-1}.$$

La formule (1) montre que, pour tout n, on a

$$m = P_{\bar{\mathfrak{o}}x}(n) - \text{longueur}(\bar{\mathfrak{o}}x^n : \bar{\mathfrak{o}}x),$$

où m désigne la longueur de l'anneau d'Artin $\frac{\bar{\mathfrak{o}}}{\bar{\mathfrak{o}}x} = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}}$; donc, k étant un entier fixe, on a

$$m = P_{\bar{\mathfrak{o}}x}(n) - P_{\bar{\mathfrak{o}}x}(n-1) + k(k \leqq P_{\bar{\mathfrak{o}}x}(c));$$

on a donc $m \geqq e(\mathfrak{q})$: *la longueur d'un idéal engendré par un système de paramètres est supérieure à sa multiplicité.*

Voyons dans quels cas on a $m = e(\mathfrak{q})$. Ceci veut dire que, pour n assez grand, on a $(\bar{\mathfrak{o}}x^n : \bar{\mathfrak{o}}x) = \bar{\mathfrak{o}}x^{n-1}$; si x était un diviseur de zéro dans $\bar{\mathfrak{o}}$, on aurait $xy = 0$, avec $y \neq 0$, donc $y \in \bar{\mathfrak{o}}x^q$ pour certain entier q ; alors $xy \in \bar{\mathfrak{o}}x^n$, mais $y \notin \bar{\mathfrak{o}}x^{n-1}$ pour $n > q-1$. Ainsi x doit ne pas être un diviseur de zéro; réciproquement on a dans ce cas $(\bar{\mathfrak{o}}x^n : \bar{\mathfrak{o}}x) = \bar{\mathfrak{o}}x^{n-1}$ pour tout n, car de $xz \in \bar{\mathfrak{o}}x^n$, on déduit $xz = x^n a$ d'où $z = ax^{n-1} \in \bar{\mathfrak{o}}x^{n-1}$. Si d'ailleurs l'avant-dernier quotient $\bar{\mathfrak{o}} = \mathfrak{o}_{d-1}$ est tel que (O) n'ait que des composantes primaires isolées (c'est-à-dire si $\bar{\mathfrak{o}}$ est équidimensionnel), le paramètre x ne peut appartenir à aucun idéal premier $\mathfrak{p}_i$ de (O), sinon, pour tout $y \in \mathfrak{m}$ on aurait $y^s \in \bar{\mathfrak{o}}x \subset \mathfrak{p}_i$, donc $y \in \mathfrak{p}_i$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_i$ contrairement au fait que $\bar{\mathfrak{o}}$ est de dimension 1 ; ainsi x n'est pas un diviseur de zéro. Un système superficiel de paramètres tel que $\mathfrak{o}_{d-1}$ est équidimensionnel sera appelé un *système distingué de paramètres.*

Théorème 8 (« théorème de régularité »). — *Si* $\mathfrak{q}$ *est engendré par un système distingué de paramètres* $(x_1, \ldots, x_d)$, *l'anneau de formes* $F(\mathfrak{q})$ *est isomorphe à l'anneau de polynomes* $A[X_1, \ldots, X_d]$ *où* $A = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}}$ · *On a* $P_\mathfrak{q}(n) = m\binom{n+d}{d}$ *sans irrégularités au début, m désignant la longueur de l'anneau d'Artin* A; *en particulier on a* $e(\mathfrak{q}) = m$, *l'anneau local* $\mathfrak{o}$ *est équidimensionnel dans le cas d'égales caractéristiques ;*

En effet l'anneau de formes $F(\mathfrak{q})$ est isomorphe à $\frac{A[X_1, \ldots, X_d]}{\mathfrak{a}}$ où $\mathfrak{a}$ est un idéal homogène. Soit $\mathfrak{f}_n$ le module des formes de degré n de $A[X_1, \ldots, X_d]$ et $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{f}_n \cap \mathfrak{a}$; $\mathfrak{f}_n$ et $\frac{\mathfrak{f}_n}{\mathfrak{a}_n}$ sont des A-modules de longueurs respectives $m\binom{n+d-1}{d-1}$ et $P_\mathfrak{q}(n) - P_\mathfrak{q}(n-1)$. Mais, comme le système de paramètres envisagé est distingué, $P_\mathfrak{q}(n) - P_\mathfrak{q}(n-1)$ admet $\frac{mn^{d-1}}{(d-1)!}$ comme terme de plus haut degré. Si $\mathfrak{a}$ contenait une forme $P \neq 0$ de degré c, $\mathfrak{a}$ contiendrait les formes

$$PX_1^{n_1}, \quad \ldots, \quad X_d^{n_d} \qquad (n_1 + \ldots + n_d = n - c)$$

dont les combinaisons linéaires forment un module de longueur au moins égale au nombre des monomes $X_1^n \ldots X_d^n (n_1 + \ldots + n_d = n - c)$; or celui-ci est égal à $\binom{n-c+d-1}{d-1}$, polynome de degré $d-1$ en n. Ceci contredit le fait que les longueurs de $\mathfrak{f}_n$ et de $\frac{\mathfrak{f}_n}{\mathfrak{a}_u}$ ont même terme de plus haut degré $\frac{mn^{d-1}}{(d-1)!}$. Donc $\mathfrak{a} = (O)$ et la première assertion est démontrée; la seconde s'en déduit aussitôt. Quant à l'équidimensionalité, soit L un sous-corps de $\mathfrak{o}$ sur lequel $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}}$ soit fini; il s'agit de montrer que $\varphi(x_1 \ldots, x_d)\alpha \neq 0$ si $\varphi(x) \neq 0$ et $\alpha \neq 0$ ([I], prop. 1, p. 12) avec $\varphi(x) \in L[[x_1, \ldots, x_d]]$ et $\alpha \in \mathfrak{o}$; or les formes initiales F(X) et G(X) de $\varphi(x)$ et de α sont deux formes non nulles à coefficients dans L et dans A respectivement; il suffit de montrer que l'on a

$$F(X)G(X) \neq 0;$$

or ceci est évident avec une variable $(d = 1)$; le cas général s'en déduit par récurrence sur d, en considérant le produit des termes de F et de G qui sont de plus bas degré en X_d.

Il peut sembler que la condition « $x_{d,d-1}$ non diviseur de zéro », pour qu'un système superficiel de paramètres soit distingué n'est pas très restrictive; il n'en est rien. Le théorème 8 montre que l'équidimensionalité de $\mathfrak{o}$ est nécessaire. Mais elle n'est nullement suffisante comme le montre l'exemple suivant, dû à Macaulay :

Considérons le cône de représentation paramétrique $x = u^4$, $y = u^3 v$, $z = uv^3$; $t = v^4$ et le sous-anneau $\mathfrak{o} = K[[u^4, u^3 v, uv^3, v^4]]$ de l'anneau de séries formelles $K[[u, v]]$; la fermeture intégrale $\mathfrak{o}^\star$ de $\mathfrak{o}$ se compose de toutes les séries formelles en u et v qui n'ont que des termes de degré total multiple de 4; on a donc $\mathfrak{o}^\star = \mathfrak{o} + Ku^2v^2$; si l'on pose $u^2v^2 = w$, on voit aussitôt que l'on a $wx = y^2$, $wy = xz$, $wz = yt$, $wt = z^2$. Donc le conducteur de la fermeture intégrale de $\mathfrak{o}$ est l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{o}$. Pour tout élément $a \in \mathfrak{m}$ on a donc $a' = aw \in \mathfrak{o}$; mais $a' \notin \mathfrak{o}a$, sinon $a' = ba = wa$ et $w = b \in \mathfrak{o}$ car $\mathfrak{o}$ est un anneau d'intégrité. Donc, dans $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}a}$, la classe $\overline{a'}$ de a' n'est pas nulle; mais on a $a'x, a'y, a'z, a't \in \mathfrak{o}a$, donc $\overline{a'}c = 0$ pour tout élément c de l'idéal maximal $\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{o}a}$ de $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}a}$. Ainsi aucun anneau quotient $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}a}$ $(a \in \mathfrak{o}, a \neq 0)$ n'est équidimensionnel, et il n'existe dans $\mathfrak{o}$ aucun système distingué de paramètres.

Nous allons cependant énumérer certaines situations dans lesquelles on peut affirmer l'existence de systèmes distingués de paramètres.

1° *Équidimensionalité des quotients successifs.* — Au moyen du théorème de Macaulay ([V. d. W.], Chap. XII, p. 71) ou de sa généralisation due à I. S. Cohen ([C], th. 21, p. 99), on peut affirmer dans certains cas que l'anneau de dimension 1 $\mathfrak{o}_{d-1}$ est équidimensionnel. Pour les applications géométriques nous renvoyons le lecteur au Chapitre III. Au moyen du théorème de I. S. Cohen nous pouvons énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 9. — *Si $\mathfrak{o}$ est un anneau local de dimension d, quotient d'un anneau local régulier de dimension d' par un idéal engendré par $d'-d$ éléments, tout idéal $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{o}$ engendré par un système de paramètres est aussi engendré par un système distingué de paramètres.*

Dans ce cas, où la multiplicité de $\mathfrak{q}$ est égale à sa longueur m, nous voyons que notre notion de multiplicité généralise celle de « ramification degree » due à I. S. Cohen, et que notre théorème 6 généralise alors son théorème 23.

2° *Existence d'une base minimale.* — Soit $\mathfrak{o}$ un anneau local complet, fini sur un anneau de séries formelles $\mathfrak{o}' = K[[x_1, \ldots, x_d]]$. Supposons qu'il existe une « *base minimale* » de $\mathfrak{o}$ sur $\mathfrak{o}'$ c'est-à-dire que $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}'\eta_1 + \ldots + \mathfrak{o}'\eta_q$ où les η_i sont linéairement indépendants sur $\mathfrak{o}'$. Alors $\mathfrak{o}$ est un $\mathfrak{o}'$ — module régulier, et est donc équidimensionnel. Après un changement linéaire de variables on peut supposer que, dans $\mathfrak{o}$, le système de paramètres $(x_1, \ldots, x_d)$ est superficiel. Alors, si $\mathfrak{q} = \sum_{i=1}^{d} \mathfrak{o}x_i$, on a $e(\mathfrak{q}) = e\left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{o}x_1}\right)$; ainsi (th. 6)

$$[\mathfrak{o}:\mathfrak{o}'] = \left[\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}x_1} : \frac{\mathfrak{o}'}{\mathfrak{o}'x_1}\right].$$

Comme les classes $(\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_q)$ des η_i mod $\mathfrak{o}x_1$ forment un système de générateurs de $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}x_1}$ sur $\frac{\mathfrak{o}'}{\mathfrak{o}'x_1}$, elles constituent une base minimale de $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}x_1}$ sur $\frac{\mathfrak{o}'}{\mathfrak{o}'x_1}$. Ainsi les quotients successifs $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}_1 = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}x_1}$, $\ldots$, $\mathfrak{o}_{d-1}$ sont équidimensionels et le système de paramètres $(x_1, \ldots, x_d)$ est distingué.

Soit $\mathfrak{q}$ un idéal primaire pour l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ d'un anneau local $\mathfrak{o}$. Au lieu de l'anneau de formes $F(\mathfrak{q})$ on peut considérer sa *complétion* $\overline{F(\mathfrak{q})}$ par rapport à la topologie définie par les idéaux $\sum_{n=p}^{\infty} \frac{\mathfrak{q}^n}{\mathfrak{q}^{n+1}}$; $\overline{F(\mathfrak{q})}$ est l'ensemble des *sommes infinies* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ d'éléments $\alpha_n \in \frac{\mathfrak{q}^n}{\mathfrak{q}^{n+1}}$. La théorie développée au Chapitre I s'applique à $\overline{F(\mathfrak{q})}$ sans y changer un mot. $\overline{F(\mathfrak{q})}$ est *un anneau local complet* dont les éléments inversibles $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ sont ceux tels que α_0 soit inversible dans l'anneau d'Artin primaire $A = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}}$.

THÉORÈME 10. — *Soit $\mathfrak{q}$ un idéal primaire pour l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ d'un anneau local $\mathfrak{o}$, et a un élément de $\mathfrak{q}$ tel que* $\dim \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o}a} = \dim \mathfrak{o} - 1$, *par exemple un élément non diviseur de zéro. Si $\overline{F(\mathfrak{q})}$ est équidimensionnel, il existe un entier k tel que $(\mathfrak{q}^n : \mathfrak{o}a) \subset \mathfrak{q}^{n-k}$ pour tout n.*

Ce théorème correspond au résultat 4° de notre Note [AL], avec cependant des hypothèses plus restrictives, et la connaissance préalable du fait que les définitions de la dimension d'un anneau local dues à Krull et à C. Chevalley sont équivalentes. Sous la forme énoncée le résultat 4° de [AL] est erroné.

Reprenons la démonstration du théorème 2. On obtient des éléments superficiels d'ordre s par rapport à $\mathfrak{q}$ comme éléments dont la forme initiale n'est contenue dans aucun idéal premier $\mathfrak{p}_i$ de (O) dans $\overline{F(\mathfrak{q})}$; par hypothèse $\bar{\mathfrak{a}}$ n'a, dans $A[[X_1, \ldots, X_s]]$, aucune composante irrelevante; si donc b est un de ces éléments superficiels d'ordre s particuliers, on a $(\mathfrak{q}^n : \mathfrak{o}b) = \mathfrak{q}^{n-s}$. D'après l'équidimensionalité de $\overline{F(\mathfrak{q})}$, $\frac{\overline{F(\mathfrak{q})}}{\mathfrak{p}_i}$ a même dimension d que $\mathfrak{o}$; si $\varphi_i(s)$ désigne la différence des longueurs du module $\mathfrak{f}_s$ de toutes les formes de degré s de $\overline{F(\mathfrak{q})}$ et du module $\mathfrak{p}_{i,s}$ de celles qui appartiennent à $\mathfrak{p}_i$, $\varphi_i(s)$ est un polynome de degré $d-1$ en s pour s assez grand. D'autre part $\overline{F\left(\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{o}a}\right)}$ est un anneau quotient $\frac{\overline{F(\mathfrak{q})}}{\mathfrak{b}}$ de $\overline{F(\mathfrak{q})}$, où $\mathfrak{b}$ est l'idéal homogène engendré par les formes initiales des multiples de a; par hypothèse si $\mathfrak{b}_s$ désigne le module des formes de degré s appartenant à $\mathfrak{b}$, $\chi(s) = \text{longueur}\left(\frac{\mathfrak{f}_s}{\mathfrak{b}_s}\right)$ est un polynome de degré $d-2$ en s pour s assez grand. Par conséquent, si s est assez grand, les modules $\mathfrak{b}_s \cap \mathfrak{p}_{is}$ sont des sous-modules *propres* de $\mathfrak{b}_s$. Employant la méthode du lemme au théorème 2 (c'est-à-dire en considérant $\mathfrak{b}_s$ comme un module quotient d'un module libre), nous voyons qu'il existe un élément $\beta \in \mathfrak{f}_s$, $\beta \notin \mathfrak{p}_i$, $\beta \in \mathfrak{b}$; β est la forme initiale d'un élément $b \in \mathfrak{o}a$, soit $b = aa'$, superficiel d'ordre s. On a donc $(\mathfrak{q}^n : \mathfrak{o}b) = \mathfrak{q}^{n-s}$, s étant un entier fixe; puisqu'on a évidemment $(\mathfrak{q}^n : \mathfrak{o}a) \subset (\mathfrak{q}^n : \mathfrak{o}aa') = (\mathfrak{q}^n : \mathfrak{o}b)$, le théorème est démontré.

4. Anneaux a noyau et anneaux locaux géométriques. — Nous allons maintenant étudier certains types d'anneaux locaux qui comprennent tous ceux rencontrés en Géométrie algébrique et algébroïde. Nous allons suivre une méthode très voisine de celle employée par C. Chevalley dans [I] (§ 1), et nous renverrons le lecteur à ce Mémoire pour les démonstrations de nombreux résultats que nous allons rappeler. D'autres résultats, notés [CCP], ont été extraits d'un cours fait à Princeton par C. Chevalley en 1946-1947.

Soit K un corps infini d'exposant caractéristique p, et tel que $[K : K^p]$ soit fini. Nous noterons $\mathfrak{r}(n, K)$ l'anneau des quotients de l'anneau des polynomes $K[x_1, \ldots, x_n]$ par l'idéal premier engendré par $(x_1, \ldots, x_n)$; c'est un anneau local régulier de dimension n; si $\mathfrak{p}_i$ est l'idéal premier de $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(n, K)$ engendré par $(x_1, \ldots, x_{n-i})$, $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{p}_i}$ est isomorphe à $\mathfrak{r}(i, K)$, et $\mathfrak{r}_{\mathfrak{p}_i}$ est isomorphe à $\mathfrak{r}(n-i, K(x_{n-i+1}, \ldots, x_n))$; ainsi $\dim \mathfrak{r} = \dim \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{p}_i} + \dim \mathfrak{r}_{\mathfrak{p}_i}$. Nous noterons $\overline{\mathfrak{r}}(n, m, K)$ $(m \leq n)$ l'anneau de séries formelles $K((x_1, \ldots, x_m))[[x_{m+1}, \ldots, x_n]]$; c'est un anneau local régulier et complet de dimension $n-m$. Les anneaux du type $\mathfrak{r}(n, \mathrm{K})$ et $\bar{\mathfrak{r}}(n, m, \mathrm{K})$ recevront le nom de *noyaux*. Si l'on pose $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(n, \mathrm{K})$, on a les relations suivantes :

$$\bar{\mathfrak{r}} = \bar{\mathfrak{r}}(n, \mathrm{O}, \mathrm{K}), \qquad \frac{\bar{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{p}_i} = \bar{\mathfrak{r}}(i, \mathrm{O}, \mathrm{K});$$

$\bar{\mathfrak{r}}_{\bar{\mathfrak{p}}_i}$ n'est pas complet; sa complétion est $\bar{\mathfrak{r}}(n, i, \mathrm{K})$.

Soit $\mathfrak{o}$ un anneau local, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, $\mathfrak{r}$ un sous-anneau local de $\mathfrak{o}$ ayant $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{r}$ comme idéal maximal, et tel qu'aucun élément de $\mathfrak{r}$ ne soit diviseur de zéro dans $\mathfrak{o}$. Nous dirons que $\mathfrak{o}$ est *quasi fini* sur $\mathfrak{r}$ s'il existe un anneau intermédiaire $\mathfrak{J}(\mathfrak{r} \subset \mathfrak{J} \subset \mathfrak{o})$ tel que $\mathfrak{J}$ soit un $\mathfrak{r}$-module de type fini, et que $\mathfrak{o}$ soit l'anneau des quotients de $\mathfrak{J}$ par un idéal maximal $\mathfrak{M}$.

(α) $\mathfrak{J}$ est un anneau semi-local; si $\mathfrak{r}$ est complet, $\mathfrak{J}$ est complet.

Démonstration : voir [LR], prop. 3, p. 694.

(β) (Transitivité). Si $\mathfrak{o}$ est quasi fini sur $\mathfrak{r}'$ et si $\mathfrak{r}'$ est quasi fini sur $\mathfrak{r}$, alors $\mathfrak{o}$ est quasi fini sur $\mathfrak{r}$.

Démonstration [CCP]. — Soient $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{J}$ les anneaux intermédiaires : $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{S} \subset \mathfrak{r}' \subset \mathfrak{J} \subset \mathfrak{o}$; écrivons $\mathfrak{J} = \sum_{i=1}^{m} \mathfrak{r}' x_i$ et soit $x_i x_j = \sum_k c_{ijk} x_k$ avec $c_{ijk} \in \mathfrak{r}'$.

Comme $\mathfrak{r}'$ est un anneau de quotients de $\mathfrak{S}$ par un idéal premier, soit $\gamma \in \mathfrak{S}$ un dénominateur commun tel que $\gamma c_{ijk} \in \mathfrak{S}$ pour tous i, j, k. On a

$$\gamma x_i \cdot \gamma x_j = \sum_k \gamma c_{ijk} \cdot \gamma x_k;$$

donc $\mathfrak{J}' = \sum_i \gamma x_i \mathfrak{S}$ est un anneau, fini sur $\mathfrak{S}$, donc sur $\mathfrak{r}$. Tout $x \in \mathfrak{o}$ s'écrit $x = \frac{a}{b}$, $a \in \mathfrak{S}$, $b \in \mathfrak{S}$; soient $b = \sum \rho_i x_i$, $a = \sum \rho'_i x_i$ avec $\rho_i \in \mathfrak{r}'$, $\rho'_i \in \mathfrak{r}'$; on peut trouver δ inversible dans $\mathfrak{r}'$, tel que $\delta\rho_i \in \mathfrak{S}$, $\delta\rho'_i \in \mathfrak{S}$ pour tous i; alors $b\gamma\delta = \sum_i (\delta\rho_i)(\gamma x_i) \in \mathfrak{J}'$ et $a\gamma\delta \in \mathfrak{J}'$; ainsi

$x = \frac{a\gamma\delta}{b\gamma\delta}$ où $b\gamma\delta$ est inversible dans $\mathfrak{o}$. Ceci montre que, si $\mathfrak{m}$ désigne l'idéal maximal de $\mathfrak{o}$, on a $\mathfrak{o} = (\mathfrak{J}')_{\mathfrak{m}\cap\mathfrak{J}'}$.

(γ) si $\mathfrak{o}$ est quasi fini sur $\mathfrak{r}$, et si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $\mathfrak{o}$, alors $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ est quasi fini sur $\mathfrak{r}_{\mathfrak{p}\cap\mathfrak{r}}$.

Démonstration : *voir* [I], lemme 7 (première partie), p. 8.

(δ) si $\mathfrak{o}$ est quasi fini sur $\mathfrak{r}$, et si $\mathfrak{a}$ est un idéal équidimensionnel de $\mathfrak{o}$, alors $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{a}}$ est quasi fini sur $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{r}}$ lorsque $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{r}$ est premier.

Démonstration (inspirée de [I], lemmes 6 et 9, p. 7 et 9). — Il s'agit d'abord de montrer qu'aucun élément de $\mathfrak{r}' = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{r}}$ n'est un diviseur de zéro dans $\mathfrak{o}' = \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{a}}$. Passons aux complétions, et soit $\mathfrak{J}$ un anneau intermédiaire ; on a $\bar{\mathfrak{r}} \subset \bar{\mathfrak{J}}$ ([LR], prop. 7, p. 699) et $\bar{\mathfrak{o}}$ est isomorphe à $\bar{\mathfrak{J}}\varepsilon$ où ε est un idempotent de $\bar{\mathfrak{J}}$; comme $\mathfrak{r} \rightarrow \mathfrak{r}\varepsilon$ est un isomorphisme de $\mathfrak{r}$ dans lui-même (aucun élément de $\mathfrak{r}$ n'est en effet diviseur de zéro dans $\bar{\mathfrak{J}}$), $\bar{\mathfrak{r}}\varepsilon$ est isomorphe à $\bar{\mathfrak{r}}$; donc $\bar{\mathfrak{o}}$ est fini sur $\bar{\mathfrak{r}}$. Par conséquent $\bar{\mathfrak{o}}'$ est fini sur $\bar{\mathfrak{r}}'$; nous supposerons, ce qui est toujours le cas en vertu du théorème de Cohen que, $\bar{\mathfrak{r}}'$ contient un corps L sur lequel $\frac{\bar{\mathfrak{r}}'}{\bar{\mathfrak{m}}'}$ est fini, $\bar{\mathfrak{m}}'$ désignant l'idéal maximal de $\bar{\mathfrak{r}}'$; alors $\bar{\mathfrak{r}}'$ est fini sur $L[[x_1, \ldots, x_s]]$ où $(x_1, \ldots, x_s)$ désigne un système de paramètres de $\bar{\mathfrak{r}}'$; ainsi $\bar{\mathfrak{o}}'$ est fini sur $L[[x_1, \ldots, x_s]]$, et [LR] (corollaire de la proposition 7, p. 703), montre que $\bar{\mathfrak{o}}'$ et $\bar{\mathfrak{r}}'$ ont même dimension s. Si $\mathfrak{n}$ est un idéal premier de zéro dans $\bar{\mathfrak{o}}'$, $\frac{\bar{\mathfrak{o}}'}{\mathfrak{n}}$ a même dimension que $\frac{\bar{\mathfrak{r}}'}{\bar{\mathfrak{r}}'\cap\mathfrak{n}}$ puisque l'un est fini sur l'autre ; comme $\bar{\mathfrak{o}}'$ est équidimensionnel, ceci prouve que $\bar{\mathfrak{r}}'\cap\mathfrak{n}$ est un idéal premier de zéro dans $\bar{\mathfrak{r}}'$; ainsi $\mathfrak{r}'\cap\mathfrak{n} = (0)$ puisque $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{r}$ est premier, et aucun élément de $\mathfrak{r}'$ n'est diviseur de zéro dans $\mathfrak{o}'$.

Soit maintenant $\mathfrak{J}$ un anneau intermédiaire ; $\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{J}}$ est fini sur $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{a}}$, et $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{a}}$ est évidemment l'anneau des quotients de $\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{J}}$ par l'idéal maximal $\frac{\mathfrak{m}\cap\mathfrak{J}}{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{J}}$.

Nous avons montré en cours de route que :

(ε) si $\mathfrak{o}$ est quasi fini sur $\mathfrak{r}$, on a $\dim \mathfrak{o} = \dim \mathfrak{r}$ (au moins dans le cas d'égales caractéristiques).

(ζ) si $\mathfrak{o}$ est quasi fini sur $\mathfrak{r}$, et si $\mathfrak{I}$ est un anneau intermédiaire, $\overline{\mathfrak{I}}$ est un $\overline{\mathfrak{r}}$ — module régulier de type fini; si R et $\overline{\mathrm{R}}$ sont les corps des quotients de $\mathfrak{r}$ et $\overline{\mathfrak{r}}$, et si Z et $\overline{\mathrm{Z}}$ sont les anneaux totaux des quotients de $\mathfrak{o}$ et $\overline{\mathfrak{o}}$ (c'est-à-dire aussi de $\mathfrak{I}$ et $\overline{\mathfrak{I}}$), on a $\overline{\mathrm{Z}} = \mathrm{Z}_{\overline{\mathrm{R}}}$, algèbre par extension en $\overline{\mathrm{R}}$ du corps de base R de Z.

Démonstration : voir [I], lemme 8, p. 9.

Un anneau local $\mathfrak{o}$ est appelé *anneau à noyau* s'il existe un sous-anneau $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{o}$, qui est un noyau, et sur lequel $\mathfrak{o}$ est quasi fini. L'étude de la structure des noyaux et les résultats précédents montrent que la classe des anneaux à noyau est *fermée par rapport à l'opération de complétion*. Nous allons montrer qu'elle est aussi *fermée par rapport aux opérations de quotient par un idéal équidimensionnel et de formation de l'anneau des quotients d'un idéal premier*. Tenant compte de la transitivité (β), de (γ) et de (δ), il nous suffira de montrer que, si $\mathfrak{r}$ est un noyau, $\mathfrak{a}$ un idéal équidimensionnel de $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathfrak{r}$, $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{a}}$ et $\mathfrak{r}_{\mathfrak{p}}$ sont des anneaux à noyau.

LEMME 1 (lemme de normalisation de E. Noether généralisé). — *Soit* K *un corps infini,* $\mathfrak{b}$ *un idéal de l'anneau de polynomes* $\mathrm{K}[x_1, \ldots, x_n]$; *il existe n polynomes* $y_1, \ldots, y_n$ *de* $\mathrm{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *tels que :*

1° $\mathrm{K}[x_1, \ldots, x_n]$ *est un module de type fini sur* $\mathrm{K}[y_1, \ldots, y_n]$;

2° $\mathfrak{b} \cap \mathrm{K}[y_1, \ldots, y_n]$ *est engendré par* $[y_{m+1}, \ldots, y_n]$.

Nous appellerons système d'intégrité tout système de n polynomes satisfaisant à la première condition. Montrons d'abord que tout polynome non constant y peut être inclus dans un système d'intégrité; soit $y = \mathrm{P}(x_1, \ldots, x_n)$ et soit F sa forme de plus haut degré; nous pouvons trouver, comme K est infini, des éléments $a_2, \ldots, a_n$

de K tels que $F(1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0$; posons $y_1 = y$, $y_j = x_j - a_j x_1$; alors $y = P(x_1, y_2 + a_2 x_1, \ldots, y_n + a_n x_1)$ a pour terme de plus haut degré en x_1 le terme $x_1^n F(1, a_2, \ldots, a_n)$; donc x_1 est intégral sur $K[y_1, y_2, \ldots, y_n]$, et par conséquent les autres x_j aussi; ceci prouve que $(y_1, \ldots, y_n)$ est un système d'intégrité. Considérons maintenant, parmi les parties finies de $\mathfrak{b}$ que l'on peut inclure dans un système d'intégrité, une partie maximale $(y_{m+1}, \ldots, y_n)$ incluse dans $(y_1, \ldots, y_n)$; considérons $\mathfrak{b} \cap K[y_1, \ldots, y_n]$; s'il contient $y'_1 \neq 0$, y'_1 ne peut être constant en tant qu'élément d'un idéal non trivial $\mathfrak{b}$, donc peut être inclus dans un système d'intégrité $(y'_1, \ldots, y'_m)$ de $K[y_1, \ldots, y_m]$; ainsi $K[x_1, \ldots, x_n]$ est fini sur $K[y'_1, \ldots, y'_m, y_{m+1}, \ldots, y_n]$ et $\mathfrak{b}$ contient $(y'_1, y_{m+1}, \ldots, y_n)$ contrairement à la maximalité de $(y_{m+1}, \ldots, y_n)$; ainsi $\mathfrak{b} \cap K[y_1, \ldots, y_m] = (0)$, et la condition 2° est vérifiée.

Remarque. — Lorsque K est *parfait* et $\mathfrak{b}$ *premier*, on peut ajouter la condition (S) que $K(x_1, \ldots, x_n)$ est séparable sur $K(y_1, \ldots, y_n)$. On montre d'abord que tout élément y non constant et non puissance $p^{ième}$ peut être inclus dans un système d'intégrité ayant la propriété (S); en effet la non-séparabilité de x_1 sur $K(y, y_2, \ldots, y_n)$ entraînerait, pour tous $a_2, \ldots, a_n$ tels que $F(1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0$, donc pour tous $(a_2, \ldots, a_n)$, que l'on ait

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial P}{\partial x_2} + \ldots + a_n \frac{\partial P}{\partial x_n} = 0,$$

d'où $\dfrac{\partial P}{\partial x_i} = 0$ pour tous i, et P serait une constante ou une puissance $p^{ième}$ puisque K est parfait; comme un idéal premier $\mathfrak{b}$ contient z avec z^p, on peut continuer la démonstration.

Lemme 2. — *Soit $\mathfrak{b}$ un idéal non trivial de l'anneau de séries formelles $\mathfrak{r} = K[[x_1, \ldots, x_n]]$; on peut trouver un système de paramètres $(y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathfrak{r}$ tel que $\mathfrak{b} \cap K[[y_1, \ldots, y_n]]$ soit l'idéal engendré par $(y_{m+1}, \ldots, y_n)$.*

Remplaçant les mots « système d'intégrité » par « système de paramètres » il suffit de remarquer que tout élément non nul y de $\mathfrak{o}$ peut être inclus dans un système de paramètres car il n'est pas diviseur de zéro; la démonstration est alors identique à celle du lemme 1.

(η) si $\mathfrak{r}$ est un noyau et si $\mathfrak{a}$ est un idéal équidimensionnel de $\mathfrak{r}$, $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{a}}$ est un anneau à noyau.

Soit d'abord $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(n, K)$ et soit $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}_\cap K[x_1, \ldots, x_n]$. Prenons $(y_1, \ldots, y_n)$ comme dans le lemme 1 ; soit $\mathfrak{X}$ l'idéal engendré par $(x_1, \ldots, x_n)$ dans $K[x_1, \ldots, x_n]$, $\mathfrak{Y}$ l'idéal engendré par $(y_1, \ldots, y_n)$ dans $K[y_1, \ldots, y_n]$ et $\mathfrak{r}'=(K[y_1, \ldots, y_n])_{\mathfrak{Y}}$; $\mathfrak{a}_\cap \mathfrak{r}'$ est engendré par $(y_{m+1}, \ldots, y_n)$. Soit $\mathfrak{J}=\mathfrak{r}'[x_1, \ldots, x_n]$; $\mathfrak{J}$ est fini sur $\mathfrak{r}'$ et $\mathfrak{r}$ est l'anneau des quotients de $\mathfrak{J}$ par l'idéal maximal $\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{J} x_i$; ainsi $\mathfrak{r}$ est quasi fini sur $\mathfrak{r}'$. D'après (δ) $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{a}}$ sera quasi fini sur $\frac{\mathfrak{r}'}{\mathfrak{a}_\cap \mathfrak{r}'}$ car $\mathfrak{a}_\cap \mathfrak{r}'$ est premier dans $\mathfrak{r}'$; et $\frac{\mathfrak{r}'}{\mathfrak{a}_\cap \mathfrak{r}'}$ est évidemment un noyau. Si $\mathfrak{r}$ est de la forme $K[[x_1, \ldots, x_n]]$, on prend $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$, $\mathfrak{r}'=K[[y_1, \ldots, y_n]]$ où $(y_1, \ldots, y_n)$, sont choisis comme dans le lemme 2, et l'on applique (δ).

(θ) si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier du noyau $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}_\mathfrak{p}$ est un anneau à noyau. Si $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}(n, K)$, on prend $\mathfrak{b}=\mathfrak{p}_\cap K[x_1, \ldots, x_n]$, et l'on utilise les mêmes notations que dans (η); alors $\mathfrak{r}_\mathfrak{p}$ est quasi fini sur $\mathfrak{r}'_{\mathfrak{p}\cap\mathfrak{r}'}$ d'après (γ) et $\mathfrak{r}'_{\mathfrak{p}\cap\mathfrak{r}'}$ est évidemment un noyau. De même si $\mathfrak{r}$ est un anneau de séries formelles.

Remarque. — D'après (ε) nous voyons immédiatement que, si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier d'un anneau à noyau $\mathfrak{o}$, on a $\dim \mathfrak{o} = \dim \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{p}} + \dim \mathfrak{o}_\mathfrak{p}$; les anneaux à noyau sont donc *homogènes*; (δ) montre qu'ils sont aussi *équidimensionnels*, ce qui est plus restrictif.

On appelle *anneaux locaux géométriques* les anneaux que l'on obtient à partir des noyaux par répétition des trois opérations suivantes : complétion, formation de l'anneau des quotients d'un idéal premier, formation de l'anneau quotient par un idéal *premier*. L'étude précédente montre que tout anneau local géométrique est un *anneau à noyau*. La réciproque est fausse à cause de la restriction aux idéaux premiers, et non plus seulement équidimensionnels, dans la formation des anneaux quotients.

LEMME 3. — *Soit* $\mathfrak{r}$ *un noyau,* $\bar{\mathfrak{r}}$ *sa complétion,* R *et* $\overline{\mathrm{R}}$ *les corps des quotients de* $\mathfrak{r}$ *et* $\bar{\mathfrak{r}}$; *alors* $\overline{\mathrm{R}}$ *est une extension séparable de* R.

Démonstration : voir [I], milieu de la page 10.

Nous allons maintenant démontrer une généralisation du « theorem of transition » de C. Chevalley ([I], th. 4, p. 22). Soient $\mathfrak{o}$ un anneau à noyau et $\mathfrak{q}$ un idéal de $\mathfrak{o}$ primaire pour un idéal premier $\mathfrak{p}$; $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}}$ est un anneau à noyau puisque $\mathfrak{q}$ est équidimensionnel. Soient $\bar{\mathfrak{o}}$ la complétion de $\mathfrak{o}$, $\bar{\mathfrak{p}}$ un idéal premier de $\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{p}$, $\tilde{\mathfrak{q}}$ la composante primaire de $\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{q}$ suivant $\mathfrak{p}$. Soient $\mathfrak{r}$ un noyau de $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}}$, $\bar{\mathfrak{r}}$ le noyau de $\frac{\bar{\mathfrak{o}}}{\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{q}}$ obtenu par complétion de $\mathfrak{r}$, R et $\bar{\mathrm{R}}$ les corps des quotients de $\mathfrak{r}$ et $\bar{\mathfrak{r}}$, Z et $\bar{\mathrm{Z}}$ les anneaux totaux des quotients de $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}}$ et $\frac{\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{q}}{\mathfrak{o}}$. D'après ($\zeta$) $\bar{\mathrm{Z}}$ est l'algèbre étendue $\mathrm{Z}_{\bar{\mathrm{R}}}$. Si $\bar{\mathfrak{p}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{p}}_n$ sont les idéaux premiers de $\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{p}$, et $\tilde{\mathfrak{q}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{q}}_n$ les idéaux primaires respectifs de $\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{q}$, l'algèbre $\bar{\mathrm{Z}}$ est composée directe (Chap. I, th. 2) des algèbres primaires $\left(\frac{\bar{\mathfrak{o}}}{\tilde{\mathfrak{q}}_i}\right)_{\left(\frac{\bar{\mathfrak{p}}_i}{\tilde{\mathfrak{q}}_i}\right)}$. Comme $\bar{\mathrm{R}}$ est séparable sur R, ces algèbres primaires ont même longueur que l'algèbre $\mathrm{Z} = \left(\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}}\right)_{\left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}}\right)}$ (Chap. I, th. 5). Nous avons donc prouvé la formule suivante (« formule de transition ») :

$$\boxed{\text{Longueur } \tilde{\mathfrak{q}} = \text{Longueur } \mathfrak{q}.}$$

Nous en déduisons les conséquences suivantes :

1° Si $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, on a longueur $\tilde{\mathfrak{p}}$ = longueur $\mathfrak{p} = 1$; donc $\bar{\mathfrak{p}}$ est composante primaire de $\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{p}$, et $\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{p}$ est intersection d'idéaux premiers. Ainsi *tout anneau local géométrique sans diviseurs de zéro est analytiquement non ramifié.*

2° Prenons pour $\mathfrak{q}$ une puissance symbolique, $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}^{(n)}$. Puisque $\tilde{\mathfrak{p}}^{(n)} = \widetilde{\mathfrak{p}^{(n)}}$ (Chap. I, th. 7) nous en déduisons :

$$\text{Longueur } \mathfrak{p}^{(n)} = \text{Longueur } \tilde{\mathfrak{p}}^{(n)}. \tag{3}$$

En d'autres termes : *soit $\mathfrak{o}$ un anneau à noyau, $\bar{\mathfrak{o}}$ sa complétion,*

$\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* $\mathfrak{o}$, $\bar{\mathfrak{p}}$ *un idéal premier de* $\bar{\mathfrak{o}}\mathfrak{p}$, *et* $\mathfrak{q}$ *un idéal primaire pour* $\mathfrak{p}$; *on a alors* $P_{\mathfrak{q}\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}}(n) = P_{\mathfrak{q}\bar{\mathfrak{o}}_{\bar{\mathfrak{p}}}}(n)$. En particulier les *multiplicités* des idéaux engendrés par $\mathfrak{q}$ dans $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ et $\bar{\mathfrak{o}}_{\bar{\mathfrak{p}}}$ sont égales; c'est en cette dernière affirmation, appliquée dans le cas où $\mathfrak{q}\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ est engendré par un système de paramètres, que consiste le « theorem of transition » de C. Chevalley.

5. Multiplicités dans les produits kronéckériens d'anneaux locaux. — Soient $\mathfrak{o}$ et $\mathfrak{o}'$ deux anneaux locaux complets de corps de base K et K′ et soit M un corps contenant K et K′. Rappelons ([I], p. 15 et suiv.) que le produit kronéckérien de $\mathfrak{o}$ et $\mathfrak{o}'$ sur M est un anneau semi-local complet A. A sera un anneau local si, et seulement si le produit kronéckérien sur M des algèbres $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}}$ et $\frac{\mathfrak{o}'}{\mathfrak{m}'}$ est un corps.

Théorème 12. — *Si* $\mathfrak{q}$ *et* $\mathfrak{q}'$ *sont des idéaux primaires pour les idéaux maximaux* $\mathfrak{m}$ *et* $\mathfrak{m}'$ *de* $\mathfrak{o}$ *et* $\mathfrak{o}'$ *l'idéal* $\mathfrak{b}$ *engendré par* $\mathfrak{q}$ *et* $\mathfrak{q}'$ *dans le produit kronéckérien* A *de* $\mathfrak{q}$ *et de* $\mathfrak{q}'$, *est, lorsque* A *est local, primaire pour l'idéal maximal de* A *et l'on a* $e(\mathfrak{b}) = e(\mathfrak{q})e(\mathfrak{q}')$.

La première assertion est évidente. Soit $f(i)$ la longueur de $\frac{\mathfrak{q}^i}{\mathfrak{q}^{i+1}}$ $g(j)$ celle de $\frac{\mathfrak{q}'^j}{\mathfrak{q}'^{j+1}}$; si i et j sont assez grands $f(i)$ et $g(j)$ sont des polynomes de termes dominants $\frac{e(\mathfrak{q})\,i^{d-1}}{(d-1)!}$ et $\frac{e(\mathfrak{q}').j^{d'-1}}{(d'-1)!}$ d et d' désignant les dimensions de $\mathfrak{o}$ et de $\bar{\mathfrak{o}}'$; les dimensions de ces deux modules sur K et K′ sont donc $rf(i)$ et $r'g(j)$, où $r = \left[\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}} : K\right]$ et $r' = \left[\frac{\mathfrak{o}'}{\mathfrak{m}'} : K'\right]$ (Chap. I, th. 4); puisque $\mathfrak{b} = A\mathfrak{q} + A\mathfrak{q}'$, on a

$$\mathfrak{b}^n = A\mathfrak{q}^n + A\mathfrak{q}^{n-1}\mathfrak{q}' + \ldots + A\mathfrak{q}'^n.$$

On voit donc que la dimension sur M de l'espace vectoriel $\frac{A}{\mathfrak{b}^n}$ est égale à

$$\psi(n) = rr' \sum_{i+j<n} f(i)\,g(j)\cdot$$

Comme l'idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A est engendré par $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$, on a

$\left[\frac{A}{\mathfrak{M}} : M\right] = rr'$ ([I], lemme 3, p. 18); donc la longueur $\varphi_{\mathfrak{b}}(n)$ de $\frac{A}{\mathfrak{b}^n}$ est égale à

$$\varphi_{\mathfrak{b}}(n) = \sum_{i+j<n} f(i)g(j).$$

Comme il s'agit seulement de calculer le terme dominant du polynome $\varphi_{\mathfrak{b}}(n)$, nous pouvons remplacer $f(i)$ et $g(j)$, — soit par les quantités équivalentes $e(\mathfrak{q})\binom{i+d-1}{d-1}$ et $e(\mathfrak{q}')\binom{j+d'-1}{d'-1}$ et appliquer une formule d'Analyse combinatoire, — soit par leurs termes dominants et remplacer la somme finie $\frac{e(\mathfrak{q})\,e(\mathfrak{q}')}{(d-1)!\,(d'-1)!}\sum_{i+j<n} i^{d-1}j^{d'-1}$ par une intégrale double. Nous sommes ainsi ramené à calculer $\int_0^n y^{d'-1}dy\int_0^{n-y} x^{d-1}dx$, c'est-à-dire $\frac{1}{d}\int_0^n y^{d'-1}(n-y)^d dy$ que nous poserons $I(d, d'-1)$; l'intégrale $I(s, s')$ se calcule en intégrant par parties, ce qui donne

$$(s'+1)I(s, s') = sI(s-1, s'+1),$$

d'où, par applications répétées,

$$(s+s'+1)!\,I(s, s') = s!\,.s'!\,.n^{s+s'+1};$$

ici $s = d$, $s' = d'-1$, donc $\varphi_{\mathfrak{b}}(n)$ a pour terme dominant $\frac{e(\mathfrak{q})\,e(\mathfrak{q}).n^{d+d'}}{(d+d')!}$, ce qui prouve notre seconde assertion.

Remarque. — Dans le cas où $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}'$ sont engendrés par des systèmes de paramètres, nous déduisons immédiatement le lemme 4, I, p. 19 du théorème précédent.

6. Scholie au théorème 5. — Les anneaux locaux que nous considérerons ultérieurement seront les anneaux des quotients $\mathfrak{o} = Q_V(U)$ d'une sous-variété U^u sur une variété V^v. Nous entendrons ceci au sens de C. Chevalley, c'est-à-dire que $Q_V(U)$ sera construit sur le « domaine universel » algébriquement clos Ω. $\mathfrak{o}$ contient alors isomorphiquement une extension transcendante pure de Ω soit $\Omega(X_1, \ldots, X_{v-u})$, qui est un corps de base pour la complétion $\bar{\mathfrak{o}}$ de $\mathfrak{o}$; soit $\mathfrak{q}$ un idéal primaire pour l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{o}$, engendré par $(y_1, \ldots, y_n)$. Soit k un sous-corps de Ω sur lequel U, V et les y_i soient définies; la construction parallèle à celle de $\mathfrak{o}$ et de $\mathfrak{q}$, menée cette fois sur k au lieu de Ω, nous fournit un sous-anneau local $\mathfrak{o}'$ de $\mathfrak{o}$ et un idéal $\mathfrak{q}'$ de $\mathfrak{o}'$, primaire pour l'idéal maximal $\mathfrak{m}'$, et engendrant $\mathfrak{q}$ dans $\mathfrak{o}$; comme $\Omega(X_1, \ldots, X_{v-u})$ est une extension de $k(X_1, \ldots, X_{v-u})$ linéairement disjointe de $\frac{\mathfrak{o}'}{\mathfrak{m}'}$, $\overline{\mathfrak{o}}$ s'obtient à partir de $\overline{\mathfrak{o}'}$ par extension du corps de base $k(X_1, \ldots, X_{v-u})$ en $\Omega(X_1, \ldots, X_{v-u})$. En vertu du théorème 2 on obtiendra un élément z superficiel par rapport à $\mathfrak{q}$ sous la forme $z = \sum_i a_i y_i$ $(a_i \in \mathfrak{o})$, les restes des $\bar{a}_i$ des a_i mod $\mathfrak{m}$ évitant un nombre fini de sous-espaces vectoriels $V_j (j = 1, 2, \ldots, s)$. Du fait que $\overline{\mathfrak{o}}$ se déduit de $\overline{\mathfrak{o}'}$ par extension du corps de base, les V_j s'obtiennent à partir de leurs analogues V'_j, relatifs à $\mathfrak{o}'$, par extension de $\frac{\mathfrak{o}'}{\mathfrak{m}'}$ en $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}}$. Soient (c_i) n éléments de Ω linéairement indépendants sur k; si $\sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ appartenait à V_j, les c_i satisferaient aux équations $\sum \lambda_{\mu i} c_i = 0$ définissant V_j; mais comme V_j, extension de V'_j, est défini sur $\frac{\mathfrak{o}'}{\mathfrak{m}'}$, les $\lambda_{\mu i}$ peuvent être supposés appartenir à $\frac{\mathfrak{o}'}{\mathfrak{m}'}$; or $\frac{\mathfrak{o}'}{\mathfrak{m}'}$ et $k(c)$ sont linéairement disjoints sur k; ceci prouve que les c_i ne peuvent satisfaire qu'à des équations $\sum \lambda_{\mu i} c_i = 0$ qui sont conséquences d'équations linéaires à coefficients dans k, ce qui n'est pas possible. Par conséquent l'élément $z = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ sera superficiel par rapport à $\mathfrak{q}$. En procédant de même dans $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{o} z}$, avec cette fois $k(c)$ pour corps de définition au lieu de k, nous voyons que :

SCHOLIE AU THÉORÈME 5. — *Soit* $\mathfrak{o} = Q_V(U)$ *l'anneau des quotients d'une sous-variété* U *d'une variété* V, *et* $\mathfrak{q}$ *un idéal primaire pour l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de* $\mathfrak{o}$ *et engendré par* $(y_1, \ldots, y_n)$; *si* k *est un corps de* *définition de* U, *de* V *et des* (y_i), *les éléments* $z_r = \sum_{i=1}^{n} c_{ri} y_i (r = 1, \ldots, v - u,\ c_{ri} \in \Omega)$ *forment un système de paramètres de* $\mathfrak{o}$ *engendrant un idéal* $\mathfrak{q}'$ *de même multiplicité que* $\mathfrak{q}$, *ceci à condition que les* c_{1i} *soient linéairement indépendants sur* k, *les* c_{2i} *sur* $k(c_{11}, \ldots, c_{1n})$, *et les* c_{ri} *sur* $k(c_{si})$ *où* $s < r$. *En particulier on pourra prendre pour coefficients* (c_{ri}) $n(v-u)$ *variables indépendantes sur* k.

(*A suivre.*)

BIBLIOGRAPHIE.

Les résultats des Chapitres I, II, V et VI ont été annoncés dans les quatre Notes suivantes :

[PH] *Une généralisation des polynomes de Hilbert* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **225**, 1947, p. 1111-1113).

[AL] *Sur les anneaux locaux* (*Ibid.*, p. 1244-1245).

[CE] *Multiplicités des composantes excédentaires d'intersection* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **228**, 1949, p. 158-159).

[CS] *Multiplicités des composantes singulières d'intersection* (*Ibid.*, p. 292-294).

Pour la théorie des anneaux locaux :

[K] Krull, *Dimensionstheorie in Stellenringen* (*J. Reine Angew. Math.*, t. **179**, 1938, p. 209 et suiv.).

[LR] Chevalley, *On the theory of local rings* (*Ann. of Math.*, t. **44**, 1943, p. 690-708).

[I] Chevalley, *Intersections of algebraic and algebroïd varieties* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **57**, 1945, p. 1-85).

[C] I. S. Cohen, *On the structure and ideal theory of complete local rings* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **59**, 1946, p. 54-106).

Pour les notions géométriques et la théorie classique des multiplicités d'intersection :

[I] et [WF] Weil, *Fundations of Algebraic Geometry* (*Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, New-York, 1946).

Pour les notions générales d'Algèbre commutative :

VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra* (Chap. XII), New-York, 1946.

KRULL, *Idealtheorie* (*Ergebnisse*, IV, t. 3, 1935, Berlin).

Enfin les travaux suivants ont été occasionnellement utilisés :

HILBERT, *Über die Theorie der algebraischen Formen* (*Math. Ann.*, t. **36**, 1898, p. 473-534).

MACAULAY, *The algebraic theory of modular systems* (*Cambridge Tract.*, t. **19**, 1916).

SPERNER, *Über einen kombinatorischen Satz von Macaulay* (*Hamb. Abh.*, t. **7**, p. 199 et suiv.).

VAN DER WAERDEN, *Der Multiplizitätsbegriff der algebraischen Geometrie* (*Math. Ann.*, t. **97**, 1927, p. 756); *Eine Verallgemeinerung des Bezoutschen Satz* (*Math. Ann.*, t. **99**, 1929, p. 497)

CHOW et VAN DER WAERDEN, *Zur algebraischen Geometrie* IX (*Math. Ann.*, t. **113**, 1937).

DUBREIL, *Quelques propriétés des variétés algébriques* (*Exposés Herbrand*, Paris-Hermann, 1935).

SEVERI, *Über die Grundlagen der algebraischen Geometrie* (*Hamb. Abh.*, t. **9**, 1933, p. 335 et suiv.); *Serie, sistemi di equivalenza e corrispondenze algebriche sulle variete algebriche* (Rome, Cremonese, 1941).

VAN DER WAERDEN, *Algebraische Geometrie* (New-York, Dover, 1945).

CHEVALLEY, *On the notion of the ring of quotients of a prime ideal* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. **56**, 1944, p. 93 et suiv.).

JACOBSON, *Theory of rings* (New-York, 1943).

ZARISKI, *Algebraic varieties over ground fields of characteristic zero* (*Amer. J. Math.*, 1940, p. 187-221); *Foundations of a general theory of birational correspondences* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **53**, 1943, p. 490-542); *On the concept of a simple point of an abstract algebraic variety* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **62**, 1947, p. 1-52).

La notion de multiplicité en Algèbre et en Géométrie algébrique ;
(suite et fin).

PAR **PIERRE SAMUEL.**

CHAPITRE III (¹).

PREMIÈRES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

Le but de ce Chapitre est de donner, à la lumière des considérations algébriques de nos deux premiers Chapitres, quelques compléments à la théorie, maintenant classique, des multiplicités d'intersections telle qu'elle a été développée par C. Chevalley [I] et A. Weil [WF]. Le paragraphe **1** ne suppose du lecteur que la connaissance des notions géométriques les plus élémentaires; le paragraphe **2** demande la connaissance des méthodes de C. Chevalley; enfin le paragraphe **3**, qui montre le lien entre les méthodes de C. Chevalley et de A. Weil, suppose connues du lecteur les méthodes de ces deux auteurs.

1. MULTIPLICITÉ D'UN POINT SUR UNE HYPERSURFACE. — Soient V une variété algébrique et W une sous-variété de V. Nous verrons au Chapitre V que la multiplicité de l'anneau des quotients de W dans V donne une définition raisonnable de la multiplicité de W sur V. Dans ce paragraphe nous nous bornerons à constater que cette définition coïncide avec la définition la plus élémentaire dans le cas où V est une hypersurface et W un point que nous pouvons supposer être l'origine O des coordonnées.

(¹) Ceci est la suite d'un Mémoire publié dans ce *Journal de Mathématiques* (**30**, fasc. II, 1951, p. 159). L'introduction, la bibliographie et l'explication de la terminologie et des notations employées se trouvent dans le premier Mémoire.

Soit $F(X_1, \ldots, X_{s+1}) = 0$ l'équation de V; dans $K[X_1, \ldots, X_{s+1}]$ l'idéal (F) est premier; considérons l'anneau de coordonnées

$$\frac{K[X_1, \ldots, X_{s+1}]}{(F)} = K[x_1, \ldots, x_{s+1}]$$

où x_i désigne la classe de $X_i \bmod F$; l'idéal engendré par $(x_1, \ldots, x_{s+1})$ est maximal dans cet anneau. L'anneau des quotients $\mathfrak{o}$ de cet idéal maximal est, par définition, l'anneau des quotients de O sur V; soit $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, engendré par $(x_1, \ldots, x_{s+1})$. Nous désignerons par m la multiplicité « élémentaire » de O sur V, c'est-à-dire le degré de la forme non nulle de plus bas degré du polynome F. Si $\mathfrak{q}$ est un idéal primaire pour l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ d'un anneau local $\mathfrak{o}$, nous appellerons *exposant* de $\mathfrak{q}$ le plus petit entier σ tel que $\mathfrak{m}^\sigma \subset \mathfrak{q}$; nous avons alors le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Le plus petit exposant σ d'un idéal de $\mathfrak{o}$ engendré par un système de paramètres est égal à la multiplicité m de* O *sur* V.

Soit $F = F_m + F_{m+1} + \ldots$, F_{m+h} étant une forme de degré $m+h$; nous pouvons supposer, après changement linéaire de coordonnées (K, étant algébriquement clos, est un corps infini), que F_m contient un terme en x_1^m. On a donc

$$x_1^m(1 + P(x)) = \sum_{i=2}^{s+1} x_i Q_i(x) \qquad \text{et} \qquad x_1^m \in \mathfrak{q} = \sum_{i=2}^{m} \mathfrak{o} x_1.$$

Comme $\mathfrak{o}$ est de dimension s, $\mathfrak{q}$ est engendré par le système de paramètres $(x_2, \ldots, x_{s+1})$; comme l'exposant de $\mathfrak{q}$ est évidemment m, on a $\sigma \leqq m$.

Supposons réciproquement que $(y_1, \ldots, y_s)$ engendre un idéal $\mathfrak{q}$ primaire pour $\mathfrak{m}$ et d'exposant $\sigma < m$; nous pouvons supposer que les (y_i) sont des polynomes $Y_i(x)$. Si nous désignons par $(M_\alpha(x))$ l'ensemble des monomes de degré $m - 1$ en $x_1, \ldots, x_{s+1}$, ceux-ci appartiennent à $\mathfrak{q}$ par hypothèse, et l'on a, en prenant un commun dénominateur P non dans $\mathfrak{m}$,

$$M_\alpha(x)(1 + P(x)) = \sum_{i=1}^{s} Q_{\alpha i}(x) Y_i(x),$$

les $Q_{\alpha i}(x)$ étant des polynomes; ou encore

$$M_\alpha(X)(1+P(X)) = \sum_{i=1}^{s} Q_{\alpha i}(X)\,Y_i(X) + G(X)\,F(X);$$

écrivons l'égalité des termes de degré $m-1$, et soit $\mathfrak{X}$ l'idéal de $K[[X_1, \ldots, X_{s+1}]]$ engendré par $(X_1, \ldots, X_{s+1})$; comme $P(O)=0$ il vient

$$M_\alpha(X) \equiv \sum_{i=1}^{s} Q_{\alpha i}(X)\,Y_i(X) \qquad (\operatorname{mod} \mathfrak{X}^m).$$

Soit $\mathfrak{Y}$ l'idéal engendré par $(Y_1, \ldots, Y_s)$ dans $K[[X_1, \ldots, X_{s+1}]]$. On voit que $\mathfrak{X}^{m-1} \subset \mathfrak{Y} + \mathfrak{X}^m$; d'où $\mathfrak{X}^{m-1} \subset \mathfrak{Y}\mathfrak{X} + \mathfrak{X}^{m+1} + \mathfrak{Y} = \mathfrak{Y} + \mathfrak{X}^{m+1}$; par applications répétées on voit que $\mathfrak{X}^{m-1} \subset \mathfrak{Y} + \mathfrak{X}^{m+n}$, donc

$$\mathfrak{X}^{m-1} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{Y} + \mathfrak{X}^{m+n}) = \mathfrak{Y}.$$

Ceci montre que $\mathfrak{Y}$ est primaire pour l'idéal $\mathfrak{X}$, contrairement aux faits qu'il est engendré par s éléments et que $K[[X_1, \ldots, X_{s+1}]]$ est un anneau local de dimension $s+1$:

THÉORÈME 2. — *La multiplicité m de l'origine sur l'hypersurface* V *est égale à la multiplicité $e(\mathfrak{m})$ de l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de l'anneau des quotients $\mathfrak{o}$ de* O *sur* V.

Il existe dans $\mathfrak{o}$ (Chap. II, th. 5) un idéal $\mathfrak{q}$ engendré par un système superficiel de paramètres et tel que $e(\mathfrak{m}) = e(\mathfrak{q})$. Nous pouvons, après changement linéaire de coordonnées [scholie au théorème 5, (Chap. II)] supposer que $\mathfrak{q}$ est engendré par $(x_2, \ldots, x_{s+1})$; alors, comme l'idéal $(F, X_2, \ldots, X_s)$ de $K[X_1, \ldots, X_{s+1}]$ est équidimensionnel en vertu du théorème de Macaulay, donc aussi l'anneau $\frac{\mathfrak{o}}{(\mathfrak{o}x_2 + \ldots + \mathfrak{o}x_s)}$, la multiplicité $e(\mathfrak{q})$ est égale à la longueur de l'anneau d'Artin $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}}$ (th. 8, Chap. II). Comme $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}} = K$, la longueur de $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}}$ est égale à sa dimension sur K (th. 4, Chap. I). Il est clair que $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}}$ est engendré sur K par les m monomes $(1, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_1^{m-1})$, car, comme dans le théorème 1, on peut supposer que $x_1^m \in \mathfrak{q}$. Il nous suffira donc de montrer que $(1, x_1, \ldots, x_1^{m-1})$ sont linéairement indépendants sur K mod $\mathfrak{q}$; s'il n'en était pas ainsi on aurait

$$x_1^{m-i}(1 + P(x)) \in \mathfrak{q} \quad \text{avec} \quad i \geqq 1,$$

donc $x_1^{m-} \in \mathfrak{q}$ ce qui montre, contrairement au théorème 1, que $\mathfrak{m}^{m-i} \subset \mathfrak{q}$.

2. Intersections ponctuelles. Degré d'une variété. — Nous adopterons dans ce paragraphe le point de vue géométrique de C. Chevalley. Soit V une variété de dimension d plongée dans un espace projectif de dimension n, L une variété de dimension $n-d$, *intersection complète de d hypersurfaces* $(F_i = 0)$; ce sera en particulier le cas si L^{n-d} est linéaire. Nous supposerons que toutes les composantes de $L \cap V$ sont propres, c'est-à-dire ici des points (M_j). Soient $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{v}$ les idéaux premiers associés à V et L dans l'anneau de polynomes $\mathfrak{o} = K[X_1, \ldots, X_n]$ les x_i étant les coordonnées non homogènes de l'espace.

Les composantes de $V \cap L$ correspondent aux idéaux premiers minimaux, $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_s$ de l'idéal $\mathfrak{p} + \mathfrak{v}$, $\mathfrak{m}_j$ étant associé au point M_j. Soient $\mathfrak{q}_j$ la composante primaire de $\mathfrak{p} + \mathfrak{v}$ selon $\mathfrak{m}_j$ et $\mathfrak{r}_j$ l'anneau des quotients $\left(\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{\mathfrak{m}_j}{\mathfrak{p}}\right)$ de M_j dans V. D'après [I] (prop. 4, p. 35), la multiplicité d'intersection $i(M_j; V.L)$ est égale à

$$e(\mathfrak{r}_j; F_1^V, \ldots, F_d^V) = e\left(\mathfrak{r}_j \frac{\mathfrak{p} + \mathfrak{v}}{\mathfrak{p}}\right).$$

Comme $\mathfrak{q}_j$ est composante isolée de $\mathfrak{p} + \mathfrak{v}$, on a

$$\mathfrak{r}_j \frac{\mathfrak{p} + \mathfrak{v}}{\mathfrak{p}} = \frac{\mathfrak{r}_j \mathfrak{q}_j}{\mathfrak{p}}, \qquad \text{donc} \quad i(M_j; V.L) = e\left(\frac{\mathfrak{r}_j \mathfrak{q}_j}{\mathfrak{p}}\right).$$

Si nous supposons que V est aussi intersection complète de $n-d$ hypersurfaces, le théorème d'équidimensionalité de Macaulay s'applique et l'on a

$$e\left(\mathfrak{r}_j \frac{\mathfrak{q}_j}{\mathfrak{p}}\right) = \text{longueur}\left(\frac{\mathfrak{r}_j}{\frac{\mathfrak{q}_j}{\mathfrak{p}} \mathfrak{r}_j}\right) \qquad \text{(th. 8, Chap. II).}$$

Ainsi $i(M_j;\, V.L)$ est *égale à la longueur de l'idéal primaire* $\mathfrak{q}_j$.

Comme $\mathfrak{p}+\mathfrak{v}=\bigcap_{j=1}^{n}\mathfrak{q}_j$, et que les idéaux $\mathfrak{m}_j$ sont maximaux dans $\mathfrak{o}$, $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{p}+\mathfrak{v}}$ est une algèbre de dimension finie sur K, isomorphe au composé direct des algèbres primaires $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}_j}$ (th. 2, Chap. I). K étant algébriquement clos on a $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}_j}=K$ pour tout j, donc longueur $\left(\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}_j}\right)=\left[\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{q}_j}:K\right]$ (th. 4, Chap. I). On en déduit le théorème suivant :

Théorème 3. — *Si* V *et* L *sont des variétés de dimensions d et $n-d$, d'idéaux premiers $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{v}$, toutes deux intersections complètes de $n-d$ et d hypersurfaces, et si toutes les composantes de* $V_\cap L$ *sont des points* (M_j) *à distance finie, on a*

$$\sum_{i=1}^{s} i(M_j;\, V.L)=\dim_K\left(\frac{K[X_1,\, \ldots,\, X_n]}{\mathfrak{p}+\mathfrak{v}}\right).$$

Nous allons, comme première application du théorème 3, donner une démonstration du *théorème de Bezout* dans le plan. Soient V et L deux courbes planes d'équations $F=0$ et $G=0$ et de degrés m et n. Nous supposerons que V et L n'ont pas de point commun à l'infini, c'est-à-dire que les formes de plus haut degré F_n et G_m de F et G n'ont pas de facteur commun. D'après le théorème 3, il nous suffira de montrer que l'algèbre $\frac{K[X,\, Y]}{(F)+(G)}$ est de dimension mn sur K. Nous allons le démontrer sans supposer que F et G sont irréductibles, sous la seule condition que F_n et G_m n'ont pas de facteur commun. Nous supposerons, avec des axes convenables, que X ne divise pas F_n.

a. Soit, par exemple $m \leqq n$. Je dis que $\dim_K\left(\frac{(F)+(G)}{(F)+(xG)}\right)=n$. Il s'agit de montrer que $\mathbf{B}=(G,\, YG,\, \ldots,\, Y^{n-1}G)$ est une base de ce module. Comme F contient un terme non nul en Y^n, on peut, mod F, réduire tout polynome à ne contenir d'autres puissances de Y que Y, Y^2, ..., Y^{n-1}. Ainsi tout polynome $P\in(F)+(G)$ peut s'écrire $P=AF+(B_0(Y)+XB_1(X,\, Y))G$ où les degrés de B_0 et de B_1 en Y sont $\leqq n-1$; donc, mod(F, XG), P sera congru à $B_0(Y)G$, combinaison linéaire d'éléments de **B**. Si d'autre part on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i G Y^i \in (F, XG) \qquad (a_i \in K),$$

cela s'écrit

$$G \sum_{i=0}^{n-1} a_i Y^i = AF + CXG.$$

Mais, F et G n'ayant pas de facteur commun, cela implique que $XC - \sum_{i=0}^{n-1} a_i Y^i$ est un multiple QF de F; d'où

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i Y^i = Q(O, Y)\, F(O, Y);$$

mais $F(O, Y)$ est de degré n, ce qui implique $a_i = 0$ pour tous i, et **B** est la base cherchée.

b. Par multiplication de G par X^{n-m} nous sommes donc ramenés à montrer que, si F et G sont des polynomes de degré n dont les formes de plus haut degré n'ont pas de facteur commun, on a

$$\dim_K \left(\frac{K[X, Y]}{(F, G)} \right) = n^2;$$

nous allons d'abord former les polynomes de degré $\leqq 2n-2$ qui appartiennent à (F, G). Soit $P = AF + BG$ de degré $\leqq 2n-2$; si A et B sont de degrés supérieurs à $n-1$, ils sont de même degré $n-1+h \, (h \geqq 0)$ afin que $AF + BG$ n'ait pas de termes de degré $\geqq 2n-2$; soient A_h et B_h les formes de plus haut degré de A et B; on doit avoir $A_h F_h + B_h G_n = 0$; comme F_n et G_n n'ont pas de facteur commun, cela implique $A_h = CG_n$ et $B_h = -CF_n$; on a alors $P = (A - CG)F + (B + CF)G$ avec $A - CG$ et $B + CF$ de degrés $< n-1+h$. Par applications répétées de ce procédé nous pourrons écrire $P = AF + BG$ où A et B sont des polynomes de degrés $\leqq n-2$. Si $AF + BG = A'F + B'G$, les degrés de A, B, A', B' étant $\leqq n-2$, on en déduit $(A - A')F = (B - B')G$;

comme F et G n'ont pas de facteur commun, cela implique que $A - A'$ est multiple de G et $B - B'$ de F; l'hypothèse sur les degrés montre donc que $A = A'$ et $B = B'$. La représentation

$$P = AF + BG \qquad (d^0 A \leqq n - 2,\ d^0 B \leqq n - 2)$$

est donc unique, et l'espace vectoriel W des polynomes de degré $\leqq 2n - 2$ qui appartiennent à (F, G) est de dimension $n(n-1)$; comme l'espace vectoriel de tous les polynomes de degré $\leqq 2n - 2$ est de dimension $n(2n - 1)$, il est somme directe de W et d'un espace W′ de dimension n^2.

c. Il reste alors à montrer que $W' + (F, G)$ est l'anneau $K[X, Y]$ tout entier, c'est-à-dire que $W + (F, G) = K[X, Y]$. Or $W + (F, G)$ contient tous les monomes de degré $\leqq 2n - 2$; supposons, par induction, qu'il contienne tous les monomes de degré $\leqq h (h \geqq 2n - 2)$. Comme F_n et G_n n'ont pas de facteur commun, tous les monomes de degré $2n - 1$ sont dans (F_n, G_n) d'après l'identité de Bezout; donc tout monome M de degré $h + 1$ est dans (F_n, G_n) et s'écrit

$$M = AF_n + BG_n,$$

où A et B sont des formes de degré $h + 1 - n$. Alors $M - (AF + BG)$ est de degré $\leqq h$, donc appartient à $W + (F, G)$; ainsi $M \in W + (F, G)$ et le théorème est démontré.

Comme seconde application du théorème 3, nous allons voir comment la définition du *degré d'une variété* V [1] se relie à la théorie de C. Chevalley. Soit V une variété de dimension d dans l'espace projectif de dimension s, et soit $\mathfrak{p}$ l'idéal homogène associé à V dans $\mathfrak{o} = K[X_0, \ldots, X_s]$. La théorie des polynomes de Hilbert montre que le nombre de relations linéaires indépendantes que doivent satisfaire les coefficients d'une forme F de degré n afin qu'elle appartienne à $\mathfrak{p}$ est un polynome $\chi_{\mathfrak{p}}(n)$ pour n assez grand; le degré de $\chi_{\mathfrak{p}}(n)$ est égal à la dimension de V; si son terme de plus haut

(1) VANDER WAERDEN, *Eine Verallgemeinerung des Bezoutschen Satz* (*Math. Ann.*, t. **99**, 1928, p. 497); KRULL, *Idealtheorie* (*Ergebnisse* IV, 3, Berlin, 1935).

degré est $\frac{mn^d}{d!}$, on appelle m le *degré* de la variété V. Si $\mathfrak{X}$ désigne l'idéal de $\mathfrak{o}$ engendré par $(X_0, \ldots, X_s)$, il est clair que l'on a

$$\chi_{\mathfrak{p}}(n) = \dim_K\left(\frac{\mathfrak{p} + \mathfrak{X}^n}{\mathfrak{p} + \mathfrak{X}^{n-1}}\right).$$

Soit $\mathfrak{r}$ l'anneau des quotients de l'idéal maximal $\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{p}}$ dans $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{p}}$; comme $\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{p}}$ est maximal tous les idéaux entre $\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{p}}$ et $\frac{\mathfrak{X}^n + \mathfrak{p}}{\mathfrak{p}}$ sont primaires pour $\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{p}}$. Comme d'autre part $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{X}} = K$, on déduit du théorème 4 (Chap. I), que, si $P_{\mathfrak{m}}(n)$ est la longueur de la puissance $n^{\text{ième}}$ de l'idéal maximal $\mathfrak{m} = \mathfrak{r}\frac{\mathfrak{X}}{\mathfrak{p}}$ de $\mathfrak{r}$, on a

$$P_{\mathfrak{m}}(n) - P_{\mathfrak{m}}(n-1) = \chi^{\mathfrak{p}}(n).$$

Mais [scholie du théorème 5 (Chap. II)] l'idéal $\mathfrak{q}$ engendré par les fonctions induites sur V par $d+1$ formes linéaires génériques $(F_0, \ldots, F_d)$ des X_i a même multiplicité que $\mathfrak{m}$. Si $\mathfrak{v}$ est l'idéal de $K[X_0, \ldots, X_s]$ engendré par celles-ci, on aura $m = e\left(\mathfrak{r}\frac{\mathfrak{p} + \mathfrak{v}}{\mathfrak{p}}\right)$. Nous voyons ainsi ([I], prop. 4, p. 35) que m est égale à la multiplicité de l'origine O dans l'intersection du cône V^{d+1} représentatif de la variété projective V^d et d'une variété linéaire L^{s-d} générique. Soit L^{s-d+1} une variété linéaire passant par L^{s-d} et intersectant proprement V. Alors $V.L^{s-d+1}$ se compose d'un nombre fini de droites D_j passant par O; soit $V.L^{s-d+1} = \sum_j m_j D_j$. Nous pouvons d'autre part écrire $L^{s-d} = H.L^{s-d+1}$, H étant un hyperplan convenable. Le principe d'associativité des intersections donne alors

$$mO = V.L^{s-d} = (V.L^{s-d+1}).H = \left(\sum_j m_j D_j\right).H = \left(\sum_j m_j\right)O.$$

Ainsi *le degré m de V^d est égal au nombre de points d'intersection, comptés chacun avec sa multiplicité, de V^d avec une variété linéaire L^{s-d} générique.*

3. Lien entre les méthodes de A. Weil et de C. Chevalley [1]. — Il est montré dans l'appendice III de [WF] que les deux définitions des multiplicités d'intersection coïncident. Mais ceci est une vérification *a posteriori*; nous allons chercher une raison *a priori* de cette coïncidence. Nous avons déjà remarqué que notre théorie algébrique du Chapitre II ne fait que généraliser et préciser celle de C. Chevalley. Il s'agit donc seulement de traduire dans notre terminologie les résultats de A. Weil. Le cas général des intersections se déduisant d'un cas particulier par des opérations géométriques (changement de coordonnées, passage au produit, prise de paramètres uniformisants) qui sont essentiellement les mêmes chez Weil et chez Chevalley, nous nous bornerons à ce cas : soit (x, y) un point générique de V sur un corps k, les (x) étant des variables indépendantes sur k, et les (y) étant algébriques sur $k(x)$; si (x', y') est une spécialisation de (x, y) sur k telle que les (y') soient algébriques sur $k(x')$ [c'est-à-dire si $P = (x', y')$ est une composante isolée de l'intersection L.V, L étant la variété linéaire $X = x'$], alors la multiplicité $i(P; L.V)$ est définie comme étant la multiplicité de la spécialisation (y') de (y) sur $(x) \rightarrow (x')$ avec référence à k. Cette dernière notion est définie au début du paragraphe **4** (Chap. III) de [WF]; nous ne reviendrons pas sur les Chapitres I et II de [WF]; notre travail se borne donc à traduire dans notre langage les paragraphes **1**, **2** et **3** de [WF].

Le paragraphe **1**, composé de divers lemmes de théorie générale des idéaux ne nécessite ni traduction, ni commentaires. Au paragraphe **2** le lemme 5 veut dire que, si $\mathfrak{p}$, idéal premier de (y) sur k, est associé à une composante primaire isolée $\mathfrak{q}$ de l'idéal $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{q}$ est l'ensemble des éléments de $k[X]$ transportés dans $\mathfrak{a}$ par un multiplicateur qui n'appartient pas à $\mathfrak{p}$; ceci est un cas particulier d'un résultat rappelé au Chapitre I (§ **3**). Au lemme 6, $(\alpha) = (y)$ est algébrique sur k, donc $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de $k[X]$ tel que $\dfrac{k[X]}{\mathfrak{p}} = k(a)$; $\mathfrak{o}'$ est l'anneau des quotients $(k[X])_{\mathfrak{p}}$; l'idéal $\mathfrak{q}' = \mathfrak{a}\mathfrak{o}'$ est primaire pour

[1] Les résultats de ce paragraphe ont été trouvés indépendamment par M. Igusa (*Proc. Royal Acad. Tokyo*, 1949).

l'idéal maximal $\mathfrak{p}\mathfrak{o}'$ d'après le lemme précédent; et notre théorème 4 (Chap. I), précise un peu le lemme 6 en montrant que

$$\left[\frac{\mathfrak{o}'}{\mathfrak{q}'} : k\right] = [k(\alpha):k].\text{longueur}(\mathfrak{q}').$$

Passons maintenant au paragraphe 3 de Weil. Soit Ω le corps des quotients de l'anneau de séries formelles $\mathfrak{o} = k[[x]]$, et soit (η) un ensemble de quantités d'un corps $\Omega_1 \supset \Omega$. Se donner une spécialisation finie de (η) au centre de $\mathfrak{o}$ revient à se donner un homomorphisme canonique de l'anneau $\mathfrak{o}[\eta]$ sur un anneau quotient $\frac{\mathfrak{o}[\eta]}{\mathfrak{v}}$, $\mathfrak{v}$ étant un idéal premier de $\mathfrak{o}[\eta]$ tel que $\mathfrak{o}_\cap\mathfrak{v}$ soit l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ [engendré par $(x_1, \ldots, x_r)$] de $\mathfrak{o}$. Dire que cette spécialisation est isolée, donc propre, équivaut à dire que $\mathfrak{v}$ est un idéal premier minimal de $\mathfrak{o}[\eta]\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{o}[\eta]$. Soit $\mathfrak{o}'$ l'anneau des quotients de l'idéal premier $\mathfrak{v}$ dans $\mathfrak{o}[\eta]$, $\mathfrak{m}'$ son idéal maximal; la spécialisation donnée est induite par l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{o}'$ sur $\frac{\mathfrak{o}'}{\mathfrak{m}'}$; on a $\mathfrak{o}_\cap\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}$; comme la spécialisation est isolée, $\mathfrak{m}'$ est un idéal premier minimal de $\mathfrak{o}'\mathfrak{m}$; donc $\mathfrak{q}' = \mathfrak{o}'\mathfrak{m}$ est primaire pour $\mathfrak{m}'$. Si $(\eta) \to (\alpha)$ est la spécialisation donnée, supposons que (η) est algébrique sur Ω, donc que (α) est algébrique sur k, ce qui est implicitement supposé dans [WF]; on a alors $\frac{\mathfrak{o}'}{\mathfrak{m}'} = \frac{\mathfrak{o}[\eta]}{\mathfrak{v}} = k(\alpha)$; comme $k(\alpha)$ est fini sur k et que $(x_1, \ldots, x_r)$ sont analytiquement indépendants sur k, ils forment un système de paramètres de $\mathfrak{o}'$ ([LR], corollaire de la proposition 7, p. 703). La première partie de la proposition 3 est alors une conséquence de notre théorème 4 (Chap. I) :

$$\left[\frac{\mathfrak{o}'}{\mathfrak{q}'} : k\right] = \left[\frac{\mathfrak{v}'}{\mathfrak{m}'} : k\right].\text{longueur}(\mathfrak{q}') = [k(\alpha):k].\text{longueur}(\mathfrak{q}');$$

la seconde partie de cette proposition 3 montre, au moyen de notre théorème 6 (Chap. II), que $e(\mathfrak{q}') = \frac{[\mathfrak{o}':\mathfrak{o}]}{[k(\alpha):k]}$ est inférieur à la longueur de $\mathfrak{q}'$, ce que nous savions (§ 3, Chap. II). L'affirmation « $[\Omega(\eta):\Omega]$ est multiple de $[k(\alpha):k]$ » (théorème 2, p. 57 de [WF]) est une conséquence de notre théorème 6; Weil la démontre d'abord en dimension 1 (prop. 4), où l'existence d'une base minimale de $\mathfrak{o}'$ sur $\mathfrak{o}$ lui permet de montrer que $e(\mathfrak{q}') =$ longueur $(\mathfrak{q}')$ [*cf.* notre paragraphe 3 (Chap. II)]; il passe ensuite au cas général (th. 2) en injectant $\mathfrak{o} = k[[x_1, \ldots, x_r]]$ dans l'anneau $\mathfrak{o}_1 = k\left(\frac{x_1}{t}, \ldots, \frac{x_r}{t}\right)[[t]]$ des séries formelles à une seule variable sur un corps plus grand. Les propositions 5 et 6 de [WF], relatives aux conjugués et aux automorphismes ne nécessitent aucun commentaire.

Les hypothèses du théorème 3 veulent dire qu'il existe un homomorphisme φ de $k[x, y]$ sur $k[\bar{y}]$ tel que $\varphi(x) = 0$ et $\varphi(y) = \bar{y}$; considérant $k[\bar{y}]$ comme un anneau quotient $\frac{k[x, y]}{\mathfrak{v}}$, $\mathfrak{v}$ étant un idéal premier, nous obtenons cette spécialisation comme induite par l'homomorphisme canonique de l'anneau des quotients $\mathfrak{r}'$ de $\mathfrak{v}$ dans $k[x, y]$ (« l'anneau de spécialisation ») sur son quotient par son idéal maximal $\mathfrak{m}$. L'idéal $\mathfrak{v} \cap k[x]$ est évidemment engendré par $(x_1, \ldots, x_r)$; soit $\mathfrak{r} = (k[x])_{\mathfrak{v} \cap k[x]}$; $\mathfrak{r}$ est un sous-anneau de $\mathfrak{r}'$, et est muni de la topologie induite par celle de $\mathfrak{r}^l$ si l'on munit $\mathfrak{r}'$ et $\mathfrak{r}'$ de leurs topologies classiques d'anneaux locaux. La méthode employée par Weil consiste alors essentiellement en une *complétion* simultanée de $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{r}'$; la complétion $\mathfrak{o}$ de $\mathfrak{r}$ est l'anneau $k[[x]]$, celle $\mathfrak{o}'$ de $\mathfrak{r}'$ un anneau local fini sur $\mathfrak{o}$; la spécialisation donnée $(y) \to (\bar{y})$ est alors au centre de $\mathfrak{o}$ puisque $\mathfrak{o} \cap \mathfrak{m}'$ est engendré par $(x_1, \ldots, x_r)$. Ainsi la multiplicité m de la spécialisation $(\bar{y})$ de (y) sur $(x) \to (0)$ avec référence à k est égale à $e(\mathfrak{q}')$, $\mathfrak{q}'$ désignant l'idéal $\sum_{i=1}^{r} \mathfrak{o}' x_i$ de $\mathfrak{o}'$. Si nous revenons à $\mathfrak{r}'$, qui est l'anneau des quotients du point $P(O, \bar{y})$ sur V [de point générique (x, y) sur k] (à une extension du corps de base près, ce qui ne change pas les multiplicités (*cf.* [I], lemme 4, p. 19), nous voyons que

$$m = e\left(\mathfrak{r}^1; \sum_{r}^{i=1} \mathfrak{r}' x_i\right) = e(Q_V(P); x_1, \ldots, x_r) = i(P; V.L) \quad \text{([I], prop. 4, p. 35)},$$

multiplicité d'intersection définie par la méthode de C. Chevalley. Nous avons ainsi montré le lien entre les méthodes de A. Weil et C. Chevalley.

CHAPITRE IV.

PRÉLIMINAIRES GÉOMÉTRIQUES.

Avant d'aborder, aux Chapitres V et VI, la théorie des intersections excédentaires et des intersections singulières, divers préliminaires géométriques nous seront nécessaires, qui vont être exposés dans ce Chapitre IV. Les résultats algébriques des deux premiers Chapitres ne seront pas utilisés avant le Chapitre V. Nous supposerons désormais connus du lecteur la terminologie et les résultats de [WF].

1. Quelques ensembles algébriques. — Nous entendrons par *ensemble algébrique* ce que A. Weil appelle « a bunch of varieties », c'est-à-dire la réunion d'un nombre fini de variétés algébriques, ou encore l'ensemble des zéros d'un idéal de polynomes. Nous allons montrer que certains phénomènes algébriques ou géométriques peuvent s'interpréter comme étant ceux qui se produisent si les données du problème sont placées sur certains ensembles algébriques.

a. Bases non séparantes. — Soit k un corps, $k(x_1, \ldots, x_n)$ une extension séparable de k de degré de transcendance r. Si (a_{ij}) $(1 \leqq i \leqq r,\ 1 \leqq j \leqq n)$ sont nr éléments de k, cherchons à déterminer si $\left(y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)$ est une base de transcendance séparante $k(x)$ sur k. S'il n'en était pas ainsi il existerait ([WF], Chap. I, th. 1) une dérivation non triviale de $k(x)$ sur k qui induirait la déviation triviale sur $k(y)$. Celle-ci D est déterminée par les éléments $Dx_j = u_j$ à condition qu'ils satisfassent ([WF], prop. 15, Chap. I) aux relations

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x_j} u_j = 0, \tag{1}$$

où (F_λ) est une base de l'idéal des relations algébriques satisfaites par (x) sur k. On devrait donc avoir

$$Dy_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, Dx_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, u_j = 0. \tag{2}$$

(1) et (2) constituent un système d'équations linéaires entre les u_j, qui, pour que (y_i) ne soit pas une base séparante, doit avoir une solution non nulle. Ceci s'exprime par l'annulation de certains mineurs d'ordre n extraits de la matrice $\left(\left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_j}, a_{ij}\right)\right)$. Ces conditions s'écrivent $\sum_\mu P_\mu(a)\,G_{\mu\rho}(x)=0$ où les $P_\mu(a)$ sont les mineurs d'ordre r extraits de $((a_{ij}))$ et les $G_{\mu\rho}(x)$ des fractions rationnelles des x. Exprimant les $G_{\mu\rho}(x)$ au moyen d'une base linéaire (e_s) de $k(x)$ sur k, $G_{\mu\rho}(x)=\sum_s b_{s\mu\rho}\,e_s(b_{s\mu\rho}\in k)$, on déduit du fait que les a_{ij} appartiennent à k la condition $\sum_\mu P_\mu(a)b_{s\mu\rho}=0$ pour tous les indices s et ρ. Donc :

THÉORÈME 1. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que les r éléments $y_i=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j(a_{ij}\in k)$ ne forment pas une base séparante de $k(x)$ sur k est que les éléments a_{ij} annulent un certain nombre (fini) de polynomes homogènes de degré r à coefficients dans k.*

Nous voyons ainsi que les bases séparantes de $k(x)$ sur k « sont situées » en dehors d'un ensemble algébrique de l'espace projectif de dimension $nr-1$. Le théorème d'existence d'une base séparante extraite de $k(x)$ montre que cet ensemble algébrique n'est pas l'espace entier.

Remarque. — Prenons maintenant pour éléments (a_{ij}) des variables indépendantes sur $k(x)$. Le théorème 1 montre que, si l'on pose $y_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, (y) est une base séparante de $k(x, a)$ sur $k(a)$; en effet $k(x, a)$ est séparable sur $k(a)$ ([WF], prop. 16, Chap. I).

b. Éléments primitifs. — Soit $\left(y_i=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)(a_{ij}\in k)$ une base séparante de $k(x)$ sur k, et posons $z=\sum_{j=1}^{n} b_jx_j(b_j\in k)$; nous nous proposons de voir si $k(y, z)$ est égal ou non à $k(x)$, c'est-à-dire si z est, ou non, un élément primitif de $k(x)$ sur $k(y)$. Si $q=[k(x):k(y)]$ il faut et il suffit pour cela que z ait q conjugués distincts sur $k(y)$; d'après la séparabilité de $k(x)$ sur $k(y)$, $(x_1, \ldots, x_n)$ a q conjugués distincts $(x_1^{(s)}, \ldots, x_n^{(s)})(1 \leqq s \leqq q)$; donc les q formes linéaires $\sum_{j=1}^{n} x_j^{(s)} \mathrm{B}_j$ sont toutes distinctes. Le fait pour z d'être élément primitif s'exprimera donc par

$$\prod_{s \neq s'} \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j^{(s)} - x_j^{(s')})\, b_j \right) \neq 0.$$

Ceci est une forme de degré $q(q-1)$ en (b_j) à coefficients non tous nuls dans $k(y)$, d'après la théorie de Galois. Soit

$$\sum_t u_t \pi_t(b) \neq 0, \tag{4}$$

où $u_t \in k(y)$ et où les $\pi_t(b)$ sont les monomes de degré $q(q-1)$ en $b_1, \ldots, b_n$. Or on a $b_j \in k$ pour tous j; soit donc (e_ω) une base linéaire de $k(y)$ sur k, et soit $u_t = \sum_\omega c_{t\omega} e_\omega$ où les $c_{t\omega}$ sont des éléments de k nuls sauf un nombre fini d'entre eux. (4) s'écrit alors $\sum_{t,\omega} c_{t\omega} \pi_t(b) e_\omega \neq 0$, ou encore $\sum_t c_{t\omega} \pi_t(b) \neq 0$ pour certain indice ω. Les (b) tels que z ne soit pas élément primitif de $k(x)$ sur $k(y)$ satisfont donc à toutes les équations

$$\sum_t c_{t\omega} \pi_t(b) = 0. \tag{5}$$

Ceci montre lorsque k est un corps infini, l'existence d'un élément primitif z de $k(x)$ sur $k(y)$ de la forme $z = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j$.

Remarques. — 1. Si l'on prend pour a, b) $(n(r+1)$ variables indépendantes sur $k(x)$, on voit que l'on a $k(x, a, b) = k(a, b, y, z)$. Ceci nous sera fort utile au paragraphe **2**.

2. Il est clair que les coefficients (u) de (4) sont des fonctions rationnelles des x et des a, à coefficients dans k; il en est de même des (c) à condition de prendre pour (e_ω) une base linéaire de $k(x)$ sur k.

c. Projections d'indice >1. — Soit V une variété de dimension d dans un espace de dimension n. Si $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}X_j = 0 (i = 1, \ldots, d+1)$ sont les équations d'une variété linéaire $L^{n-(d+1)}$, et si (x) est un point générique de V sur un corps k contenant les (a), les coordonnées d'un point générique sur k d'une projection de V selon la direction de L seront, avec des axes convenables, les $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$. Rappelons que, si $k(y) = k(x)$, on dit que la projection est d'*indice* 1. Cherchons les directions de $L^{n(d+1)}$ telles que cet indice ne soit pas égal à 1. Nous pourrons toujours supposer que $(y_1, \ldots, y_d)$ forme, ou contient, une base séparante de $k(y)$ sur k. Alors les $(a_{d+1,j})$ devront satisfaire à toutes les équations (5) ci-dessus, qui sont des polynomes en (a_{ij}) à coefficients dans k. Donc les (a) donnant lieu à une projection d'indice >1 constituent un ensemble algébrique B. Si nous projetons sur la Grassmannienne des directions de $L^{n-(d+1)}$ nous voyons que ces directions exceptionnelles de projection *constituent un ensemble algébrique*.

d. Composantes excédentaires. — Soient V^r et $W^{r'}$ deux variétés de dimensions r et r' dans l'espace affine S^n, ou projectif P^n. Rappelons que toute composante M de $V \cap W$ a au moins la dimension $r + r' - n$; une composante de dimension $r + r' - n$ est dite *propre;* une composante est dite *excédentaire* dans le cas contraire. Nous nous proposons de montrer que l'existence de composantes excédentaires est « un phénomène algébrique et exceptionnel ». Plus précisément nous supposerons que $W^{r'}$ parcourt une famille algébrique de variétés, c'est-à-dire que, dans l'espace produit $S^N \times S^n$, il existe une variété U, de projection U' sur S^N, et telle que pour certain point $P_0 \in U'$, la projection de $(P_0 \times S^n) \cap U$ soit W; ainsi W est plongée dans la famille de variétés (et cycles) $W_P = \mathrm{pr}_{S^n}((P \times S^n) . U)$ où $P \in U'$. Il s'agit de montrer la propriété suivante :

THÉORÈME 2. — *Les points* $P \in U'$ *tels que* $V \cap W_P$ *ait au moins une composante excédentaire forment un sous-ensemble algébrique de* U'.

Comme dans la plupart des cas nous saurons que $V \cap W_P$ n'a que des composantes propres lorsque P est un point générique de U' sur certain corps de définition, nous voyons donc bien que l'existence de composantes excédentaires est « un phénomène algébrique et exceptionnel ».

Soit k un corps de définition commun de U, U' et V. Nous ne considérerons que les points $P \in U'$ dont les coordonnées sont dans une extension K de k, algébriquement close et de degré de transcendance infini sur k, mais telle que le domaine universel Ω soit de degré de transcendance infini sur K. Alors les composantes de $W_P \cap V$ sont toutes définies sur K quel que soit P ([WF], prop. 1, Chap. V). Nous supposerons que W_P est de dimension r' pour P générique sur k, et que $V^r \cap W_P^{r'}$ n'a que des composantes propres, c'est-à-dire de dimension $r+r'-n$. Soit $L^{n-(r+r'-n)-1} = L^{2n-(r+r')-1}$ une variété linéaire de S^n générique sur K. Il résulte de [WF] (prop. 2, Chap. V), que $V.L$ est défini et est un cycle de dimension $n-r'-1$, que $L \cap M$ est vide si M est une composante propre de $V \cap W_P$, et que $L \cap M$ n'est pas vide si M en est une composante excédentaire. Les points $P \in U'$ donnant lieu à des composantes excédentaires sont donc ceux tels que $L \cap V \cap W_P$ ne soit pas vide, donc tels que $W_P \cap C_j \neq \emptyset$ pour au moins une composante C_j de $L \cap V$. Considérons donc, dans $S^N \times S^n$ l'ensemble algébrique « cylindrique » $B = S^N \times (L \cap V)$. Les points P en question seront évidemment ceux qui appartiennent à l'ensemble algébrique $\mathrm{pr}_{U'}(B \cap U)$.

Remarquons que toute composante de ce dernier ensemble est définie sur le corps $\overline{k(a, b)}$, clôture algébrique de $k(a, b)$ où les (a) et les (b) sont les coefficients, algébriquement indépendant sur k, des équations de L. En faisant varier les (a) et les (b) nous voyons que toute composante de $\mathrm{pr}_{U'}(B \cap U)$, dont la définition est indépendante de (a, b), est *algébrique sur* k.

2. SPÉCIALISATIONS DE DIVISEURS. — Le reste du présent Chapitre va être consacré à la solution du problème des spécialisations de cycles de dimension arbitraire, problème posé par A. Weil [1] ([WF], Chap. IX, n° 6). Nous allons d'abord nous préoccuper des spécialisations de diviseurs, c'est-à-dire de cycles de dimension $n-1$ de l'espace *projectif* P^n, dans lequel nous nous placerons pour le reste de ce Chapitre. D'autre part, comme tout cycle se représente comme différence de deux cycles positifs, nous nous bornerons aux *cycles positifs*, laissant au lecteur la généralisation, d'ailleurs triviale, aux cycles quelconques.

Soit $\mathbf{X}=\sum_i n_i V_i$ un diviseur de P^n, c'est-à-dire une combinaison linéaire d'hypersurfaces V_i d'équations (irréductibles) $F_i(X)=0$. Nous ferons correspondre au diviseur $\mathbf{X}$ l'équation $\prod_i (F_i(X))^{n_i}=0$, que nous appellerons *l'équation du diviseur* $\mathbf{X}$. Il y a ainsi un homomorphisme du monoïde multiplicatif des formes en (X) sur le monoïde additif des diviseurs positifs, deux formes ne différant que par un facteur constant donnant le même diviseur. Considérons plus particulièrement les diviseurs de degré d, c'est-à-dire représentés par des formes de degré d, et soit $(\pi_\mu(X))$ l'ensemble des monomes de degré d en $(X_0, \ldots, X_n)$. Soit C la variété de $P^n \times P^N$ représentée par l'équation $G=\sum_{\mu=0}^{N} A_\mu \pi_\mu(X)=0$; si (a_μ) est l'ensemble des coefficients de l'équation du cycle X et si (x) est un point de P^n, les relations « $(x)\in\mathbf{X}$ » et « $(x, a)\in C$ » sont équivalentes. On a l'égalité suivante :

$$(P^n \times (a)).C=\mathbf{X}\times(a); \tag{1}$$

en effet les composantes du cycle du premier membre sont les $V_i\times(a)$ si l'on pose $\mathbf{X}=\sum_i n_i V_i$; et la multiplicité de V_i est égale à $v_{V_i\times(a)}(\overline{G})$ si $\overline{G}$ est la fonction induite par G sur $P^n\times(a)$ ([WF], Chap. VIII), nombre qui est égal à n_i puisque $v(F_i)=1$.

---

[1] Le problème a été résolu indépendamment par MM. Matsusaka, Barsotti et Chow, par des méthodes analogues à la nôtre.

Soit **X** un diviseur de degré d, (a) les coefficients de son équation. Un cycle $\mathbf{X}'$ ne saura être spécialisation de **X** que s'il est aussi un diviseur de degré d, comme il résulte des conditions naturelles imposées dans [WF]; soient (a') les coefficients de l'équation du cycle $\mathbf{X}'$ spécialisé de **X** sur k. Si nous supposons que les conditions de A. Weil sont satisfaites, nous pouvons prolonger $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$ en une spécialisation (a'') de (a); (1) montre alors que l'on a $(\mathrm{P}^n \times (a'') . \mathrm{C} = \mathbf{X}' \times (a''))$ puisque la spécialisation des cycles doit être compatible avec le produit d'intersection et que C est définie sur le corps premier; ceci exprime que les points (a') et (a'') sont identiques. Nous dirons donc que le diviseur $\mathbf{X}'$ de coefficients (a') est une *spécialisation* du diviseur **X** de coefficients (a) si (a') est *proportionnel à une spécialisation* de (a) sur k; cette définition est la seule qui soit susceptible de satisfaire aux conditions de [WF]. Nous remarquons aussitôt les propriétés suivantes :

1° Cette notion de spécialisation de diviseurs est *transitive*.

2° Un diviseur rationnel sur k n'a d'autre spécialisation que lui-même sur k.

3° Toute spécialisation d'un diviseur positif est un *diviseur positif*.

4° Le théorème d'*extension des spécialisations* s'applique aux spécialisations de diviseurs ([WF], prop. 10, Chap. II).

Soit maintenant V une hypersurface de degré d et de coefficients (a), et (x) un point générique de V sur un corps K contenant k. Soit $\mathbf{X}'$ une spécialisation de V sur k, et (a') les coefficients de $\mathbf{X}'$, (a') étant une spécialisation de (a) sur k. Utilisant les notations de [WF], (Chap. VII), la formule (1) donne $\mathrm{V} = \mathrm{C}((a))$ et $\mathbf{X}' = \mathrm{C}((a'))$. Donc si (x') est *une spécialisation isolée* de (x) sur $(a) \rightarrow (a')$ avec référence à k, (x') est un *point générique* sur la clôture algébrique de $\mathrm{K}(a')$ d'une des *composantes* du diviseur $\mathbf{X}'$, et réciproquement.

3. Projections génériques. Spécialisations de cycles de dimension arbitraire. — Soit X un cycle positif de dimension r dans l'espace projectif P^n; posons $\mathrm{X} = \sum_i n_i \mathrm{V}_i$, les V_i étant des variétés de dimension r. Soit K un corps de définition commun des V_i, et soit k un sous-corps de K ; supposons que X' soit une spécialisation de X sur k, quel que soit le sens que l'on puisse attribuer à ces mots. Posons $Z_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ji} X_i (j = 0, \ldots, r+1)$, les c_{ij} étant tels que $k(c)$ et K soient linéairement disjoints sur k. Alors X' doit être aussi une spécialisation de X sur $k(c)$. Considérons les projections de X et X' selon la direction $d(Z_j = 0)$; si les (c) ne sont pas sur certain ensemble algébrique (§ **1**) les cycles $\mathrm{pr}_d X$ et $\mathrm{pr}_d X'$ sont définis et sont des diviseurs de l'espace projectif P^{r+1}. D'après les conditions de [WF], $\mathrm{pr}_d X'$ doit être une spécialisation de $\mathrm{pr}_d X$ sur $k(c)$. Prenons maintenant pour (c) un ensemble de $(n+1)(r+2)$ variables indépendantes sur K. La projection ci-dessus sera alors appelée *projection générique* de X. Toute variété V_i du cycle X est alors projetée sur une hypersurface H_i de P^{r+1} avec indice de projection 1 (§ **1**, c); ainsi $\mathrm{pr}_d X = \sum_i n_i H_i$. Raisonnons pour simplifier sur un cycle réduit à une variété V; l'hypersurface H projection de V aura une équation $G(Z) = \sum_\mu d_\mu \pi_\mu(Z)$, les $\pi_\mu(Z)$ étant les monomes de degré d en les indéterminées Z_j; les coefficients d_μ sont dans $K(c)$; d'après l'homogénéité nous pouvons les prendre dans $K[c]$. Si nous spécialisons sur k les (c) en (c') de façon que $k(c')$ soit linéairement disjoint de K sur k (cette spécialisation est alors aussi une spécialisation sur K), les d_μ se spécialisent de façon unique en d'_μ. Soit (x) un point générique de V sur K; alors H admet $\left(z_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ji} x_i\right)$ pour point générique sur $K(c)$; et $z'_j = \sum_{i=1}^{n} c'_{ji} x_i$ est point générique sur $K(c')$ de la projection H' de V suivant la direction (c'). L'équation $G'(Z') = \sum_\mu d'_\mu \pi_\mu(Z') \left(Z'_j = \sum_{i=1}^{n} c'_{ji} X_i\right)$ est alors satisfaite par les (z'); réciproquement toute spécialisation isolée (u) de (z) sur $(c) \to (c')$ avec référence à K se prolonge, puisque l'indice de projection est supposé fini, en une spécialisation isolée (x') de (x) sur K, et (u) est donc la projection suivant (c') d'un point générique de V sur K. Ceci montre que tout point qui satisfait à $G'(Z') = 0$ est sur la projection de V et réciproquement. Si donc $G_0 = 0$ est l'équation de cette projection H' on a $G' = (G_0)^s$; en comptant les intersections de H' avec une droite générique D de P^{r+1}, et de V avec la variété linéaire projetant D, la considération des degrés de V (égal à celui de G ou de G') et de H' (égal à celui de G_0), montrent que s est égal à *l'indice de projection* de V. Donc $G' = 0$ *représente le diviseur* $\mathrm{pr}_{(c')} V$. Le cas d'un cycle X (au lieu de V) s'en déduit par linéarité. Comme [WF] la spécialisation des cycles doit être compatible avec la projection algébrique, nous sommes amenés à poser la définition suivante :

DÉFINITION 1. — *Un cycle* X' *est dit spécialisation d'un cycle* X *sur un corps* k, *si et seulement si, le diviseur projection générique de* X' (sur un corps de définition de X et X') *est spécialisation sur* $k(c)$ *du diviseur projection générique de* X [les (c) désignant les coefficients de la projection générique].

Passant à l'espace affine, considérons les $r+1$ hyperplans $L_j\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ji}X_i - z_j = 0\right)$. La relation $G(Z) = 0$ veut dire que V a un point commun avec l'intersection L^{n-r-1} des hyperplans L_j. Explicitant $G(Z)$ en écrivant ses coefficients comme des polynomes en (c), soit $G(Z_j, c_{ji})$, nous voyons donc que $G(z, c)$ est la *zugeordnete Form* de V (ou du cycle X) selon Chow et Van der Wærden. Des résultats de ces auteurs nous déduisons [1] :

1° La condition nécessaire et suffisante pour que les $b_\mu(c)$ soient les coefficients de la projection générique d'une variété V^r (ou d'un cycle X^r) s'exprime par un nombre fini de relations algébriques entre les b_μ, ou encore entre leurs coefficients en fonctions des c_{ji}; ces relations algébriques ont leurs coefficients dans le corps premier.

2° Ceci montre donc qu'en spécialisant les b_μ sur k on obtient effectivement l'équation de la projection générique d'un cycle X'^r. Ainsi *le principe de prolongement des spécialisations est vrai pour les cycles*.

---

(1) VAN DER WÆRDEN, *Algebraische Geometrie* (§ 36, 37, p. 155-162).

3° Les cycles positifs de dimension r et de degré d se répartissent donc en un nombre *fini* de systèmes algébriques irréductibles. Ceux-ci forment donc un ensemble algébrique défini sur le corps premier. Les cycles positifs de dimension r de l'espace projectif se répartissent donc en une *infinité dénombrable* de systèmes algébriques irréductibles, tout cycle appartenant au moins à un et au plus à un nombre infini de ces systèmes.

4° Si l'on considère maintenant les cycles portés par une variété U définie sur k, les résultats de Chow-Van der Wærden montrent que les (b_μ) doivent satisfaire à un nombre fini de relations algébriques. Celles-ci sont à coefficients dans k, ou, si l'on veut, dans le plus petit corps de définition déf (U) de U. Le cycle spécialisé X′ de X sera alors automatiquement porté par U et le théorème de prolongement des spécialisations s'appliquera encore.

Le fait que X′ est porté par U pouvait se déduire aussi des considérations terminant le paragraphe **2**).

Une analyse analogue à celle de 3° montre que les cycles positifs de dimension r portés par U se répartissent en une infinité dénombrable de systèmes algébriques irréductibles, tout cycle appartenant au moins à un et au plus à un nombre fini de ces systèmes. Ces systèmes sont définis sur la clôture algébrique de déf (U); qu'ils ne soient pas nécessairement définis sur déf (U) est montré par l'exemple des génératrices rectilignes de la sphère $X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2 = 0$, chacun des deux systèmes étant défini sur $Q(i)$ et non sur Q.

5° Tout cycle est déterminé de façon unique par sa projection générique. Ceci résulte des résultats cités. Nous allons cependant établir directement un résultat un peu plus fort. Nous avons vu que la connaissance de la projection générique de V détermine toutes les projections de V suivant des diviseurs d'espaces P^{r+1}. Après un changement éventuel de la numérotation des coordonnées nous pourrons supposer que $(X_0 = 0)$ ne contient pas V, passer aux coordonnées affines et supposer que $(x_1, \ldots, x_r)$ est une base séparante de $K(x)$

sur K, (x) étant un point générique de V sur K. Si alors $(a_{r+1}, \ldots, a_n)$ sont $n - r$ variables indépendantes sur $K(x)$, on a

$$K(a, x) = K(a)(x_1, \ldots, x_r, y), \qquad \text{où} \quad y = \sum_{j=n+1}^{n} a_j x_j \quad (\S\,\mathbf{1}).$$

La projection de V selon la direction $\left(X_1 = 0, \ldots, X_r = 0, \sum_{j=n+1}^{n} a_j X_j = 0\right)$ est alors d'indice 1 ; nous l'appellerons projection *semi-générique* de V. Nous allons alors montrer que V est déterminée de façon unique par sa projection semi-générique. Soient donc V et V′ deux variétés définies sur K et ayant la même projection semi-générique H. Tout point générique $(x_1, \ldots, x_r)$ de H sur $K(a)$ est projection de points génériques $(x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n)$ de V et $(x_1, \ldots, x_r, x'_{r+1}, \ldots, x'_n)$ de V′ sur K ; les (x_j) et (x'_j) sont algébriques sur $K(x_1, \ldots, x_r)$ $(j = 1 + r, \ldots, n)$ et l'on a $\sum_{j=n+1}^{n} a_j(x_j - x'_j) = 0$; comme les (a_j) sont des variables indépendantes sur la clôture algébrique de $K(x_1, \ldots, x_n)$ ce sont des quantités linéairement indépendantes sur ce corps ; on voit donc que $x_j = x'_j$ et que $V = V'$.

Voici maintenant quelques conséquences immédiates de la définition 1 :

a. Au moyen d'un K-automorphisme σ, nous voyons que cette définition est indépendante des variables indépendantes (c) choisies.

b. Elle est *compatible avec l'addition des cycles*.

c. Elle est indépendante du corps de définition K de X choisi ; il suffira en effet, d'après *a*, de prendre les (c) algébriquement indépendants sur le corps composé des deux corps de définition de X considérés.

d. En prenant les (c) algébriquement indépendants sur un corps de définition commun de trois cycles X, X′, X″, nous voyons que la notion de spécialisation des cycles est *transitive*.

e. Si X est *rationnel* sur k, $\mathrm{pr}_{(c)}X$ est rationnel sur $k(c)$ ([WF], Chap. VII, th. 14), donc n'a d'autre spécialisation que lui-même sur $k(c)$ (§ **2**); comme tout cycle est déterminé par sa projection générique, X n'a d'autre spécialisation que lui-même sur k.

f. La phase « X' est spécialisation générique de X sur k » voudra dire par définition que les coefficients de la projection générique de X' se déduisent de ceux de la projection générique de X par un $k(c)$-automorphisme. Par prolongement des automorphismes nous voyons que ceci veut dire que X' est un conjugué de X sur k.

g. L'analyse précédant la définition 1 montre que la spécialisation des cycles est *compatible avec la projection algébrique* lorsque celle-ci donne des diviseurs. On peut lever cette restriction en appliquant aux cycles $\mathrm{pr}X$ et $\mathrm{pr}X'$ une projection générique dans la variété linéaire qui les contient (« principe des trois perpendiculaires »).

h. La même analyse montre également que la notion de spécialisation des cycles ne dépend pas de l'espace projectif P^n dans lequel ils sont plongés puisque tout cycle est déterminé de façon unique par sa projection générique.

i. Pour les cycles de dimension zéro la notion de spécialisation définie ici coïncide avec celle de [WF]; en effet, pour un point $P(x)$, la projection générique est $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = z$; une spécialisation z' de z sur $k(c)$ se prolonge en une spécialisation (x') de (x); comme on a $z' = \sum_{i=1}^{n} c_i x'_i$, z' est la projection générique du point (x'), et notre affirmation est une conséquence de la détermination unique d'un cycle par sa projection générique.

4. Compatibilité de la spécialisation des cycles avec le produit direct et le produit d'intersection. — Proposition 1. — *Si* (Y', Z') *est une spécialisation de* (Y, Z) *sur* k, *le cycle* $Y' \times Z'$ *est l'unique spécialisation de* $Y \times Z$ *sur* $(Y, Z) \to (Y', Z')$ *avec référence à* k.

Nous nous bornerons au cas où $X = Y \times Z$ est une variété, le cas général s'en déduisant par linéarité ([WF], Chap. VII, p. 203); Y et Z seront donc des variétés de dimensions r et $\bar{r}$; soit K un corps de définition commun de Y et Z contenant k, et soient (x) et $(\bar{x})$ deux points génériques indépendants sur K de Y et Z; X admet alors $(x, \bar{x})$ pour point générique sur K. Si $(x_1, \ldots, x_r)$ et $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{\bar{r}})$ sont des bases séparantes de $K(x)$ et $K(\bar{x})$ sur K, $(x_1, \ldots, x_r, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{\bar{r}})$ est une base séparante de $K(x, \bar{x})$ sur K. Soient $y = \sum_{j=n+1}^{n} a_j x_j$, $\bar{y} = \sum_{k=n+1}^{n} \bar{a}_k \bar{x}_k$, les $(a, \bar{a})$ étant des variables indépendantes sur $K(x, \bar{x})$. Les coefficients de l'équation de la projection semi-générique de X (resp. Y, Z) sont proportionnels aux fonctions symétriques élémentaires des conjugués de $y + \bar{y}$ sur $K(a, \bar{a}, x_1, \ldots, x_r, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{\bar{r}})$ [resp. de y sur $K(a, \bar{a}, x_1, \ldots, x_r)$, de $\bar{y}$ sur $K(a, \bar{a}, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{\bar{r}})$]; mais ces premières fonctions symétriques sont des polynomes, à coefficients dans le corps premier, des autres. Ainsi les coefficients (β) de l'équation de la projection semi-générique de X sont des polynomes, à coefficients dans le corps premier, en les coefficients (b) et $(\bar{b})$ des équations des projections semi-génériques de Y et Z. D'après le principe de prolongement des identités algébriques ces expressions des (β) en fonction des $(b, \bar{b})$ sont encore valables si X, Y et Z sont des cycles (de mêmes degrés respectifs). Or se donner des spécialisations Y′ et Z′ de Y et Z sur k revient à se donner des spécialisations (b') et $(\bar{b}')$ de (b) et $(\bar{b})$ sur $k(a)$ et $k(\bar{a})$, c'est-à-dire une spécialisation $(b, \bar{b}')$ de $(b, \bar{b})$ sur $k(a, \bar{a})$; en effet (b') et $(\bar{b}')$ sont des spécialisations de (b) et $(\bar{b})$ sur $k(a, \bar{a})$ d'après [WF] (cor. du théorème 5, Chap. II); d'autre part comme $K(x)$ et $K(\bar{x})$ sont linéairement disjoints sur K, $k(x)$ et $k(\bar{x})$ le sont sur k, donc $k(a, \bar{a}, x)$ et $k(a, \bar{a}, \bar{x})$ le sont sur $k(a, \bar{a})$; *a fortiori* $k(a, \bar{a}, b)$ et $k(a, \bar{a}, \bar{b})$ sont linéairement disjoints sur $k(a, \bar{a})$, et notre affirmation résulte de [WF] (Chap. I, th. 4). Donc les (β) se trouvent spécialisés, et de façon unique en (β'), et, d'après la première partie du raisonnement, les (β') sont les coefficients de l'équation de la projection semi-générique du cycle $Y' \times Z'$.

C. Q. F. D.

Proposition 2. — *Soient* Z *et* Y *deux cyles positifs portés par une variété* U *définie sur k; si* (Y', Z') *est une spécialisation de* (Y, Z) *sur k telle que* $Y'.Z'$ *soit défini* (1), *alors* $Y.Z$ *est défini et* $Y'.Z'$ *est l'unique spécialisation de* $Y.Z$ *sur* $(Y, Z) \rightarrow (Y', Z')$ *avec référence à k.*

Le fait que X.Y soit défini se voit ainsi : si $Z_\cap Y$ avait une composante excédentaire C, une spécialisation C′ de C sur $(Z, Y) \rightarrow (Z', Y')$ avec référence à k appartiendrait à $Z'_\cap Y'$, et $Z'.Y'$ ne serait pas défini. Si une composante C de $Z_\cap Y$ appartenait à l'ensemble singulier de U, C′ appartiendrait à cet ensemble, qui est défini sur k, et $Z'.Y'$ ne serait pas non plus défini.

Pour le reste de la proposition 2, nous examinerons d'abord le cas où U est l'*espace projectif*. Par utilisation des cycles produits et de la diagonale, nous sommes d'abord ramenés au cas où Z est une variété linéaire L_1 définie sur le corps premier (prop. 1). Si K est un corps de définition commun de Y et Y′, soit L_2 une sous-variété linéaire de L_1, générique sur K, et ayant une intersection propre et de dimension zéro avec Y et Y′; L_2 est définie sur k' linéairement disjoint de K sur k; ([WF], th. 4, Chap. V), montre que, si

$$Y.L_2 = \sum_\alpha n_\alpha P_\alpha \qquad \text{et} \qquad Y'.L_2 = \sum_\beta m_\beta Q_\beta,$$

on a

$$Y.L_1 = \sum_\alpha n_\alpha V_\alpha \qquad \text{et} \qquad Y'.L_1 = \sum m_\beta W_\beta$$

où V_α (resp. W_β) est la variété ayant P_α (resp. Q_β) pour point générique sur K; il nous suffira donc de montrer que $Y'.L_2$ est l'unique spécialisation de $Y.L_2$ sur $Y \rightarrow Y'$ avec référence à k'. Nous sommes ainsi ramenés à des intersections de dimension zéro. Par projection générique sur $k'(K)$ nous sommes ensuite ramenés, d'après la définition 1, à l'intersection d'un diviseur H et d'une droite D, cas où la compatibilité se déduit aussitôt de [WF] (Chap. II, prop. 9).

---

(1) Conformément à [I], et contrairement à [WF], nous disons que le cycle intersection $Y'.Z'$ est défini si toutes ses composantes sont simples et d'excès nul sur U.

Reste maintenant le cas où les cycles $Y.Z$ et $Y'.Z'$ sont définis sur une variété ambiante $U^{(\omega)}$ définie sur k. Par passage au produit et à la diagonale, nous pouvons supposer que $Z = Z'$ est une sous-variété simple de U définie sur k. Parallèlement à une direction de dimension $n - \omega$ et générique sur K, faisons passer par Z un cylindre H; celui-ci est défini sur un corps k' linéairement disjoint de K sur k ([I], th. 6, p. 72); il est clair (§ 1) que $H.U$ est défini et que Z est une composante de multiplicité 1 de ce cycle. Toute autre composante T de $H.U$ ne peut être algébrique sur k; en effet un $\overline{K}$-automorphisme quelconque σ laisserait T invariante; T serait donc une composante de tous les cycles $U.H^\sigma$; mais chaque cylindre H^σ est contenu dans un hypercylindre C^σ projetant Z sur une de ses projections génériques; le fait que Z est déterminé de façon unique par l'une de celles-ci (§ 3) entraîne en particulier que l'on a $Z = \bigcap_\sigma C^\sigma$ d'où $Z = \bigcap_\sigma H^\sigma$. Donc le cycle $H.U$ est somme de Z, algébrique sur k, et d'un *cycle* A *transcendant sur* k.

Considérons maintenant les cycles $(Z.Y)_U$ et $H.Y$ [resp. $(Z.Y')_U$ et $H.Y'$]. [I] (th. 6, p. 72) montre que $H.Y$ est somme de $(Z.Y)_U$ et d'un autre cycle positif B; le raisonnement ci-dessus montre que toute composante de B n'est définie que sur une extension transcendante de K; on a donc $H.Y = (Z.Y)_U + (A.Y)_U$ où $B = (A.Y)_U$ est transcendant sur K; et de même $H.Y' = (Z.Y')_U + (A.Y')_U$ où $B' = (A.Y')_U$ est transcendant sur K. La partie du raisonnement relative à l'espace projectif montre que $H.Y'$ est l'unique spécialisation de $H.Y$ sur $Y \rightarrow Y'$ avec référence à k'. Soit $(Z.Y)_U \rightarrow R'$ une extension de cette spécialisation; c'est une spécialisation sur k' mais elle est déterminée par une spécialisation sur k puisque k' est linéairement disjoint de K sur k. Ceci montre que R' est invariant par tout $\overline{K}$-automorphisme σ, et par conséquent $R' \leqq (Z.Y')_U$. Mais comme les cycles $(Z.Y)_U$, $(Z.Y')_U$ et R' sont positifs et de même degré, on en déduit $R' = (Z.Y')_U$ et la proposition 2 est démontrée.

5. Le théorème de Severi. — Nous allons maintenant donner une démonstration d'un théorème dû à F. Severi. Notre démonstra-

tion suit de près le raisonnement géométrique de F. Severi [1], mais insiste sur certains points de nature plus algébrique laissés de côté par cet auteur. Ce théorème nous donne d'ailleurs une seconde démonstration du fait que le principe de prolongement s'applique aux spécialisations de cycles.

THÉORÈME 3 (Severi). — *Soit* X^r *un cycle de dimension r de l'espace projectif* P^n*; il existe* $n-r$ *diviseurs* $U_1, \ldots, U_{n-r}$*, s'intersectant proprement dans* P^n*, et tels que* $X = U_1 \ldots U_{n-r}$.

1° Supposons d'abord que X soit une variété V, définie sur un corps infini K; nous supposerons, ce qui est toujours possible au moyen d'un changement d'axes (§ **1**), que le point à l'infini sur OX_n n'est pas sur V, et que le cylindre C^{r+1} parallèle à OX_n et s'appuyant sur V projette V sur l'hyperplan ($X_n = 0$) avec un indice de projection égal à 1. Soit alors (x) un point générique de V sur K; on a $K(x_1, \ldots, x_n) = K(x_1, \ldots, x_{n-1})$ et l'on peut écrire

$$x_n = \frac{P(x_1, \ldots, x_{n-1})}{Q(x_1, \ldots, x_{n-1})} = R(x),$$

P et Q étant des polynomes, et $Q(x) \neq 0$. Soit M le *monoïde* d'équation $X_n Q(X) - P(X) = 0$, et N l'hypercylindre $Q(X) = 0$, ce dernier n'étant pas nécessairement irréductible; si $Q = \prod_\beta (Q_\beta)^{s_\beta}$ les Q_β étant irréductibles, nous conviendrons (§ **2**) que $Q(X) = 0$ représente le diviseur $\sum_\beta s_\beta N_\beta$, N_β étant l'hypercylindre irréductible d'équation $Q_\beta(X) = 0$. Considérons l'intersection C.M; toutes ses composantes sont propres car $C \not\subset M$; V^r en est une composante. En un point générique de V l'hyperplan H tangent à M est engendré par les vecteurs $\left(1, 0, \ldots, 0, \frac{\partial R}{\partial x_1}\right), \ldots, \left(0, 0, \ldots, 1, \frac{\partial R}{\partial x_{n-1}}\right)$, et la variété linéaire tangente à C contient la parallèle à OX_n; comme H ne contient pas cette droite, ces variétés linéaires tangentes sont *transversales*, ce qui montre que V a multiplicité 1 dans C.M. Les autres

[1] F. SEVERI, *Sistemi di equivalenza*, p. 62 (Rome, 1941).

composantes de $C.M$ sont des cylindres parallèles à OX_n, obtenus lorsque $\frac{P(\xi)}{Q(\xi)}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. Il *suffit* pour cela que $Q(\xi)=0$; en effet un point générique de V sur K a pour coordonnées homogènes $(x_1 Q(x), \ldots, x_{n-1} Q(x), P(x), Q(x))$; si l'on avait $Q(\xi)=0$ sans avoir $P(\xi)=0$, cela voudrait dire que le point à l'infini de OX_n est sur V contrairement aux hypothèses. Donc les composantes A_λ de $C.M$ autres que V sont identiques à celles de $C.N$; ces dernières sont toutes propres car $Q(X)$ ne s'annule pas sur C par hypothèse. Il nous reste à montrer que l'on a $V=C.M-C.N$; or $C.N$ est, sur C, le diviseur $(Q(X))_0$ des zéros de $Q(X)$ ([WF], Chap. VIII, n° 2), et $C.M$ le diviseur $(P(X)-X_n Q(X))_0$. Nous supposerons, ce qui est possible par changement d'axes, qu'aucune des A_λ n'est à l'infini; $C.M-C.N$ est le diviseur $\left(X_n-\frac{P(X)}{Q(X)}\right)_0$; aucun cylindre A_λ ne peut figurer dans ce diviseur; en effet, si v est une valuation de centre A_λ, on a $v\left(\frac{P(X)}{Q(X)}\right)\geqq 0$ car le point à l'infini de OX_n ne se trouve pas sur V (*cf.* ci-dessus), et l'on déduirait de $v\left(X_n-\frac{P(X)}{Q(X)}\right)>0$ une contradiction, car, si (ξ) est un point générique de A_λ, ξ_n est transcendant sur $K(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. On a donc $v\left(X_n-\frac{P(X)}{Q(X)}\right)=0$ pour toute valuation v de centre A_λ; comme, par application de la formule de projection à C et à un modèle normal de C, on voit que $i(A_\lambda;\ C.(M-N))$ est combinaison linéaire de ces nombres, on a $i(A_\lambda;\ C.(M-N))=0$. Comme le point à l'infini de OX_n ne se trouve pas sur V, $C.M-C.N$ est un diviseur positif; donc on a $V=C.(M-N)$.

2° Considérons maintenant un cycle $X^r=\sum_\alpha n_\alpha V_\alpha$. Nous ferons les mêmes hypothèses relatives à la situation du point à l'infini de OX_n, et ceci par rapport à toutes les V_α. On a alors $V_\alpha=C_\alpha.(M_\alpha-N_\alpha)$. Nous allons nous arranger pour que le *même* monoïde M et le *même* hypercylindre N puissent servir pour *toutes* les V_α. Soit K un corps de définition commun des V_α, $(x^{(\alpha)})$ un point générique de V_α sur K. Soit $\mathfrak{p}_\alpha$ l'idéal premier de $K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ associé à la projection de V_α sur $(X_n = o)$; avec des axes convenables nous pourrons les supposer tous distincts; alors $\mathfrak{p}_\beta \not\subset \mathfrak{p}_\alpha$ si $\alpha \neq \beta$. Soit $S_{\alpha\beta}$ un polynome de $K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ tel que $S_{\alpha\beta} \notin \mathfrak{p}_\alpha$, $S_{\alpha\beta} \in \mathfrak{p}_\beta$; posons $T_\alpha = \prod_{\beta \neq \alpha} S_{\alpha\beta}$; alors $T_\alpha \notin \mathfrak{p}_\alpha$ et $T_\alpha \in \mathfrak{p}_\beta$ pour $\beta \neq \alpha$. Si $T = \sum_\alpha T_\alpha$, on a $T \notin \mathfrak{p}_\alpha$ quel que soit α et $T \equiv T_\alpha(\mathfrak{p}_\alpha)$. Écrivons $x_n^{(\alpha)} = \dfrac{P_\alpha(x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_{n-1}^{(\alpha)})}{Q_\alpha(x_1^{(\alpha)}, \ldots, x_{n-1}^{(\alpha)})}$ et considérons la fraction rationnelle $R = \sum_\alpha \dfrac{T_\alpha}{T} \dfrac{P_\alpha}{Q_\alpha}$; on a $R(x^{(\alpha)}) = x_n^{(\alpha)}$ car $T_\beta(x^{(\alpha)}) = o$ si $\beta \neq \alpha$, $T_\alpha(x^{(\alpha)}) = T(x^{(\alpha)}) \neq o$; si nous écrivons $R = \dfrac{P}{Q}$, nous avons $x_n^{(\alpha)} = \dfrac{P(x^{(\alpha)})}{Q(x^{(\alpha)})}$ pour tout α. Donc le monoïde M $(X_n Q(X) - P(X) = o)$ et le cylindre N $(Q(X) = o)$ pourront servir pour tous les $V_\alpha : V = C_\alpha.(M - N)$. Donc $X^r = \left(\sum_\alpha n_\alpha C_\alpha^{r+1}\right).(M - N) = Y^{r+1}.U$, U étant un diviseur.

3° Il suffit alors d'appliquer le même raisonnement à Y^{r+1}, et ainsi de suite, pour obtenir le résultat annoncé.

Remarque. — Si X est un cycle *rationnel* sur le corps *infini* K, il est clair que $\sum_\alpha n_\alpha C_\alpha$ sera aussi rationnel sur K, car on prend un point de vue à coordonnées dans K. Nous pourrons décomposer X en une somme de cycles premiers rationnels sur K, et former pour chacun d'eux la somme partielle $R = \sum_\alpha \dfrac{T_\alpha P_\alpha}{T Q_\alpha}$; soit $(x^{(\varepsilon)})$ un point générique sur la clôture algébrique $\overline{K}$ de K d'une des composantes de ce cycle; les autres s'en déduisent par des automorphismes σ_α : $x^{(\alpha)} = \sigma_\alpha(x^{(\varepsilon)})$. On pourra alors prendre $P_\alpha = \sigma_\alpha(P_\varepsilon)$, $Q_\alpha = \sigma_\alpha(Q_\varepsilon)$; si nous prenons $T_\varepsilon \notin \mathfrak{p}_\varepsilon$ et $T_\varepsilon \in \mathfrak{p}_\alpha$ pour $\alpha \neq \varepsilon$, et $T_\alpha = \sigma_\alpha(T_\varepsilon)$, on aura $T_\alpha \notin \mathfrak{p}_\alpha$, $T_\alpha \in \mathfrak{p}_\beta$ $(\beta \neq \alpha)$. Alors R aura ses coefficients invariants par les automorphismes σ_α, donc contenus dans une extension radicielle de K. Ainsi M et N seront définis sur une extension radicielle de K. Par conséquent, si X^r est rationnel sur un corps infini K, on aura $X = U_1 \ldots U_{n-r}$, les U_i étant des diviseurs *radiciels* sur K; ils seront *rationnels* si K est un corps parfait.

Nous allons maintenant donner quelques compléments sur les monoïdes $(X_n Q(X) - P(X) = o)$ passant par la variété V^r (ou le cycle X^r).

Lemme. — *Soit v un élément intégral et séparable sur $k[u_1, \dots, u_q]$, les u_i étant des variables indépendantes sur k. Si $z \in k(u, v)$ est intégral sur $k[u, v]$, et si $F(v) = v^d + P_1(u)v^{d-1} + \dots + P_d(u)$ est le polynome minimal de v sur $k(u)$, alors $zF'(v) \in k[u, v]$* (autrement dit $F'(v)$ est un élément du conducteur de la fermeture intégrale de $k[u, v]$).

Les $P_i(u)$ sont des polynomes d'après le lemme de Gauss. Soient (v_i) $(0 \leqq i \leqq d-1)$ les conjugués de v sur $k(u)$, et (z_i) ceux de z. Posons

$$z\,F'(v) = \sum_{i=0}^{d-1} r_j(u)\,v^j, \qquad \text{où} \quad r_j(u) \in k(u).$$

Prenant les conjugués il vient

$$z_i\,F'(v_i) = \sum_{j=0}^{d-1} r_j(u)\,v_i^j.$$

Le déterminant de ce système linéaire en $(r_j(u))$ est le déterminant de Vandermonde $D = \prod_{i<j}(v_i - v_j)$. Le mineur S_{ij} de v_j^i a en facteur $\prod_{k<l,\, k\neq j,\, l\neq j}(v_k - v_e)$, l'autre facteur T_{ij} étant intégral sur $k[u]$. La règle de Cramer donne

$$D\,r_i(u) = \sum_{j=0}^{d-1} z_j\,T_{ij}\left(\prod_{k<m,\ k\neq j,\ m\neq j}(v_k - v_m)\right)F'(v_j).$$

Or $F'(v_j) = \prod_{s\neq j}(v_j - v_s)$; d'où

$$D\,r_i(u) = \sum_j z_j\,T_{ij}\,D \qquad \text{et} \qquad r_i(u) = \sum_j z_j\,T_{ij}$$

est intégral sur $k[u]$. Donc $r_i(u) \in k[u]$ et $zF'(v) \in k[u, v]$.

Proposition 3. — *Si V^r est une variété de degré d définie sur un corps infini k, on peut écrire, (x) étant un point générique de V sur k, $x_i = \dfrac{P_i(u_1, \dots, u_{r+1})}{Q_i(u_1, \dots, u_{r+1})}$ où P_i et Q_i sont des polynomes de degrés* *inférieurs à d et $d-1$ respectivement, et où les (u_j) appartiennent à $k(x)$ et sont liés par une relation irréductible* $F(u_1, \ldots, u_{r+1}) = 0$ *de degré d.*

Nous prendrons pour (u_j) des combinaisons linéaires des (x_i) à coefficients dans k telles que (§ **1**) :

a. $(u_1, \ldots, u_{r+1}, x_1, \ldots, x_{n-r-1})$ sont linéairement indépendants sur k.

b. La variété linéaire à l'infini L^{n-r-1} dans la direction

$$U_1 = \ldots = U_{r+1} = 0$$

ne rencontre pas V.

c. La projection de V à partir de L^{n-r-1} est d'indice 1.

d. $(u_1, \ldots, u_r)$ est une base séparante de $k(x)$ sur k, et u_{r+1} est intégral sur $k[u_1, \ldots, u_r]$ (ce qui veut dire que la projection W de V sur l'espace des U_j, qui est une hypersurface, ne contient pas le point à l'infini de OU_{r+1}).

Le fait que F est de degré d est alors évident. Appliquons le raisonnement du théorème de Severi à la projection $\overline{V}$ de V sur l'espace des $(U_1, \ldots, U_{r+1}, X_i)$, X_i jouant le rôle de X_n et $(U_1, \ldots, U_{r+1})$ celui de $(X_1, \ldots, X_{n-1})$. On a alors $x_i = \frac{\varphi(u)}{\psi(u)}$; mais x_i est fini sur toute spécialisation $(u) \to (u')$ avec référence à k d'après b; il est donc intégral sur $k[u]$ ([WF], prop. 22, Chap. II), et par conséquent $x_i F'_{U_{r+1}}(u) \in k[u]$ d'après le lemme. On peut donc écrire $x_i = \frac{P_i(u)}{Q_i(u)}$ où Q_i est un polynome de degré $d-1$. Mais alors $\overline{V} = C^{r+1}.(M - N)$ d'après le raisonnement du théorème de Severi; $\overline{V}$ est de degré d ainsi que le cylindre C; donc le diviseur $M - N$ doit être de degré 1 d'après le théorème de Bezout. Or M est le monoïde d'équation $X_i Q_i(U) - P_i(U) = 0$, et N le cylindre $Q_i(U) = 0$; comme Q_i est un polynome de degré $d-1$, ceci montre que le degré de P_i est au plus égal à d.

Remarque. — Considérons maintenant un cycle *positif* X^r de degré d, et soit $X = \sum_\alpha n_\alpha V_\alpha$, les V_α étant des variétés définies sur k et de points génériques $x^{(\alpha)}$

sur k, satisfaisant à toutes les conditions a, b, c et d. Posons $G(u) = \prod_\alpha \frac{\partial F_\alpha}{\partial U_{r+1}}(u)$; d'après la proposition 3 on a $x_i^{(\alpha)} G \in k[u]$, soit $x_i^{(\alpha)} G = P_i(u)$. Posons d'autre part $T_\alpha = \prod_{\beta \neq \alpha} F_\beta$ et $T = \sum_\alpha T_\alpha$; $T_\alpha(u)$ est nul sur toutes les V_β sauf V_α, et l'on a $T(u) = T_\alpha(u)$ sur V_α. On aura donc $x_i^{(\alpha)} GT = \sum_\alpha P_i^{(\alpha)} T_\alpha = S_i(u)$ pour tout α. Soit s_α le degré de V_α; on a $\sum_\alpha n_\alpha s_\alpha = d$. Le degré de G est $\sum_\alpha (s_\alpha - 1)$, celui de T_α est $\sum_{\beta \neq \alpha} s_\beta$; donc le degré de GT est $\sum_\alpha (s_\alpha - 1) + \max_\alpha \left(\sum_{\beta \neq \alpha} s_\beta \right)$. Si s_0 est le plus petit des s_α le degré de GT est égal à $\sum_\alpha (2 s_\alpha - 1) - s_0$. Le cas le pire est celui où $n_\alpha = 1$ pour tout α, et où l'ensemble des α possède deux éléments $(0, 1)$; alors le degré de GT est égal à $2d - 2 - s_0$; il est donc en tous cas au plus égal à $2d - 3$. Et l'on peut écrire $X_i^{(\alpha)} = \frac{P_i(u)}{Q_i(u)}$ où P_i et Q_i sont des polynomes de degrés au plus $2d - 2$ et $2d - 3$.

CHAPITRE V.

INTERSECTIONS EXCÉDENTAIRES.

Soient U^u et V^v deux variétés de dimensions u et v de l'espace affine A^n (ou projectif P^n); on sait [WF, I] que toute composante M de leur intersection est de dimension $m \geqq u + v - n$; le nombre positif $e = m - (u + v - n)$ est appelé l'*excès* de la composante M; une composante d'excès nul (resp. > 0) est dite *propre* (resp. *excédentaire*). Nous allons indiquer une généralisation aux composantes excédentaires de la théorie de Weil-Chevalley relative aux composantes propres.

1. Quelques propriétés des dimensions. — Proposition 1. — *Soient* U *et* V *deux variétés de dimensions r et s; il existe une variété* A *de dimension* $\sup(u, v) + 1$ *contenant* U *et* V.

Supposons par exemple $r \leqq s$; soit K un corps infini de définition de U et de V. Considérons la famille des variétés linéaires L^{n-r} parallèles à une L_0^{n-r} donnée, définie sur K et prise de telle sorte que les intersections de U et V avec une L^{n-r} générique de la famille soient propres (th. 2, § 1, Chap. IV); soient (u) les seconds membres des équations d'une L^{n-r} générique; $L \cap U$ est un ensemble fini de points (P_α) et de $L.V$ est un ensemble fini de variétés (W_λ^{s-r}); soit Q_λ un point générique de W_λ sur $\overline{K(u)}$, et posons $P_\alpha = (x_i)$ et $Q_\lambda = (y_i)$. Soit t une variable indépendante sur $K(u, x, y)$; la variété A ayant $(tx_i + (1-t)y_i)$ pour point générique sur K est de dimension $\leqq s+1$; comme (x) est un point générique de U sur K et (y) de V sur K ([WF], prop. 2, Chap. V), et comme (x) [resp. (y)] est une spécialisation de $(tx + (1-t)y)$ sur $t \to 1$ (resp. $t \to 0$) avec référence à K, il s'ensuit que U et V sont contenues dans A. Si l'on suppose que $U \not\subset V$ (sinon la proposition 1 est triviale), on a $\dim A = s+1$.

Supposons maintenant que U^r et V^s contiennent une variété M^m, et cherchons les variétés A contenant U et V et sur lesquelles M est simple. Considérons l'anneau des quotients $Q(M)$ de M dans l'espace affine A^n; c'est un anneau local régulier; soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ les idéaux premiers de $Q(M)$ correspondant à U et V, et soient $\bar{\mathfrak{a}}$ et $\bar{\mathfrak{b}}$ leurs idéaux directeurs dans l'anneau de formes $F(\mathfrak{m})$; rappelons que $F(\mathfrak{m})$ est isomorphe à l'anneau de polynomes $\frac{Q(M)}{\mathfrak{m}}[X_1, \ldots, X_{n-m}]$ et que $\bar{\mathfrak{a}}$ et $\bar{\mathfrak{b}}$ sont des idéaux homogènes.

Lemme. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que* M *soit simple sur une variété* W^t *d'idéal* $\mathfrak{p}$ *dans* $Q(M)$ *est que* $\bar{\mathfrak{p}}$ *soit l'idéal d'une variété linéaire. Tout idéal* $\bar{\mathfrak{p}}$ *de* $F(\mathfrak{m})$ *qui représente une variété linéaire est d'ailleurs idéal directeur d'un idéal premier.*

Le fait que M est simple sur W équivaut au fait que $\frac{Q(M)}{\mathfrak{p}}$ est un anneau local régulier, donc au fait que le polynome $\varphi_{\bar{\mathfrak{p}}}^{\mathfrak{m}}(j)$ est de la forme (th. 7, Chap. II) $\varphi_{\bar{\mathfrak{p}}}^{\mathfrak{m}}(j) = \binom{j+t-m}{t-m}$. La fonction caractéristique de l'idéal directeur $\bar{\mathfrak{p}}$ est donc $\chi_{\bar{\mathfrak{p}}}(j) = \binom{j+t-m-1}{t-m-1}$; il y a donc $m-t$ formes linéaires linéairement indépendantes dans $\mathfrak{p}$; elles engendrent un idéal premier $\overline{\mathfrak{p}}_1$, contenu dans $\overline{\mathfrak{p}}$, et ayant même fonction caractéristique; donc $\overline{\mathfrak{p}}_1=\overline{\mathfrak{p}}$ et la première partie du lemme s'en déduit. Pour la seconde partie nous pouvons supposer que $\overline{\mathfrak{p}}$ est engendré par $(X_1, \ldots, X_{m-t})$; soit a_i un élément de $\mathfrak{m}$ ayant X_i pour forme initiale, et soit $\mathfrak{q}$ l'idéal de $Q(M)$ engendré par $(a_1, \ldots, a_{m-t})$; l'idéal directeur $\overline{\mathfrak{q}}$ de $\mathfrak{q}$ contient évidemment $\overline{\mathfrak{p}}$; soit $b=\sum_{i=1}^{m-t} c_i a_i$ un élément quelconque de $\mathfrak{q}$; je dis que, si $b\in\mathfrak{m}^s$, on peut prendre les c_i dans $\mathfrak{m}^{s-1}$; ceci est en effet vrai si $m-t=1$ car a_1 est superficiel par rapport à $\mathfrak{m}$; procédons par récurrence et considérons l'anneau local régulier $\frac{Q(M)}{(a_1)}$; la classe de b est dans $\frac{\mathfrak{m}^s}{(a_1)}$ et l'on peut écrire $b\equiv\sum_{i=2}^{n-t} c_i a_i(\operatorname{mod}(a_1))$; c'est-à-dire $b-\sum_{i=2}^{n-t} c_i a_i=c_1 a_1$; on a alors $c_1 a_1\in\mathfrak{m}^s$, donc $c_1\in\mathfrak{m}^{s-1}$. Si nous supposons que $b\notin\mathfrak{m}^{s+1}$ et si nous prenons les formes initiales nous voyons que $\omega(b)=\sum_{i=1}^{n-t}\omega(c_i)\omega(a_i)$ car, dans un anneau local régulier, la forme initiale d'un produit est égale au produit des formes initiales des facteurs; comme $\frac{Q(M)}{\mathfrak{q}}$ est un anneau local régulier, ceci prouve la seconde partie du lemme.

Remarque. — On peut déduire de ce lemme la proposition 9, page 705 de [LR].

Revenons maintenant à la question posée. Si $\mathfrak{p}$ est l'idéal premier dans $Q(M)$ de la variété cherchée A, on doit avoir $\overline{\mathfrak{p}}\subset\overline{\mathfrak{a}}$, $\overline{\mathfrak{p}}\subset\overline{\mathfrak{b}}$, et $\overline{\mathfrak{p}}$ doit représenter une variété linéaire L. Si B et B′ sont les ensembles algébriques projectifs représentés par $\overline{\mathfrak{a}}$ et $\overline{\mathfrak{b}}$, l'analyse du Chapitre I montre qu'ils sont de dimensions $\overline{r}=r-m-1$ et $\overline{s}=s-m-1$ dans un espace projectif de dimension $n-m-1$. Supposons maintenant que M soit simple sur U et V, donc que B et B′ soient des variétés linéaires; si $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{m}$ (nous verrons que ceci exprime que M est de multiplicité 1 dans U.V), alors $\overline{\mathfrak{a}}+\overline{\mathfrak{b}}$ est l'idéal irrelevant et

$B \cap B' = \emptyset$. Un théorème classique d'Algèbre linéaire montre que $\bar{\mathfrak{p}} = \bar{\mathfrak{a}} \cap \bar{\mathfrak{b}}$ représente une variété linéaire L de dimension $r+s+1$. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-t})$ une base de $\bar{\mathfrak{p}}$ composée de formes linéaires linéairement indépendantes, et soient $a_i \in \mathfrak{a}$ et $b_i \in \mathfrak{b}$ de formes initiales égales à α_i; on a $a_i - b_i \in \mathfrak{m}^2$; comme $\mathfrak{m}$ est engendré par la réunion d'une base (x) de $\mathfrak{a}$ et d'une base (y) de $\mathfrak{b}$, on a

$$a_i - b_i = R_i(x) + S_i(y) + T_i(xy)$$

où R_i et S_i sont des formes quadratiques, et T_i une forme bilinéaire à coefficients dans $Q(M)$; on a donc

$$a_i - R_i(x) - (b_i - S_i(y)) \in \mathfrak{ab},$$

et par conséquent $a_i - R_i(x)$ appartient à $\mathfrak{b}$. Nous prendrons donc pour idéal $\mathfrak{p}$ l'idéal engendré par les $(a_i - R_i(x))$, lequel est contenu dans $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$. Ainsi :

Proposition 2. — *Si M^m est simple sur U^u et V^v, et si sa multiplicité dans* U.V *est égale à* 1, *il existe une variété* A, *de dimension* $r+s-m$, *contenant* U *et* V *et sur laquelle* M *est simple.*

Remarques. — La proposition 2 n'est pas vraie si M n'est pas de multiplicité 1 dans U.V. Prenons pour M l'origine, pour U la courbe $(X = t, Y = t^2, Z = t^3)$ et pour V la courbe $(X = t, Y = t^2, Z = t^5)$. Soit $P(X, Y, Z) = 0$ une surface passant par U et V; écrivons

$$P = F_0(X, Y) + F_1(X, Y)Z + \ldots + F_n(X, Y)Z^n;$$

l'équation $F_0(t, t^2) + \ldots + F_n(t, t^2)Z^n = 0$ à coefficients dans $K(t)$ a pour racines t^3 et t^5; son premier membre est donc divisible par $(Z - t^3)$ et $(Z - t^5)$, donc par leur produit $Z^2 - (t^3 + t^5)Z + t^{15}$; soit $G_0(t) + ZG_1(t) + \ldots$ l'autre facteur, les G_i étant des polynomes; $F_0(t, t^2)$ est donc divisible par t^{15}, et $F_0(X, Y)$ ne contient pas de termes de degrés 0 ou 1; on a d'autre part

$$F_1(t, t^2) = t^{15}G_0(t) + (t^3 + t^5)G_1(t)$$

et F_1 ne peut avoir de terme constant. Ainsi $P(X, Y, Z)$ ne peut contenir que des termes de degré $\geqq 2$, et la surface ne peut avoir O pour point simple.

Théorème 1. — *Soit* M *une composante excédentaire d'excès* e *de* $U^r \cap V^s$; *il existe deux cylindres* $U' \supset U$ *et* $V' \supset V$ *de dimensions* $r + e_1$ *et*

$s+e_2$, *tels que* $e_1+e_2=e$ *et que* M *soit composante propre de* $U'_\cap V'$. *On peut prendre leurs directions génériques et indépendantes sur un corps de définition k commun à* U, V *et* M.

En procédant par récurrence il nous suffira de trouver U′ de dimension $r+1$ tel que $U'_\cap V$ admette M pour composante; soit D une direction générique sur k, de paramètres directeurs (u_i) algébriquement indépendants sur k, et soit U′ le cylindre de dimension $r+1$ passant par U et de direction D. Soit M′ une composante de $U'_\cap V$ contenant M. Supposons $M' \neq M$. Si M′ contient le cylindre de direction D passant par M, un point générique de l'espace se trouve sur V, et $M=U$ est une composante propre de $U_\cap V$. Il existe donc un point générique P de M′ sur $\overline{k(u)}$ dont la projection Q sur U selon D n'appartient pas à M; soit $Q=(p_i)$, $P=(x_i)=(p_i+tu_i)$; on a $t\neq 0$ sinon tout point de M′ serait dans U et M ne serait pas composante de $U_\cap V$. Comme la parallèle à D passant par P n'est pas dans M′, t est algébrique sur $k(u, p)$, donc aussi (x). Comme la projection de M′ sur U contient M et en est distincte, la dimension de (p) sur $k(u)$ est $\geqq m+1$. Soient r' et s' les dimensions algébriques de (p) et (x) sur k; comme $Q\in U$ et $P\in V$, on a $r'\leqq r$ et $s'\leqq s$. La dimension de $k(v, u, t)$ sur $k(x)$ est $\leqq r'+1$ puisque $k(p, u, t)=k(x)(p, t)$; on a donc $r'+s'+1\geqq n+m+1$, c'est-à-dire $r+s\geqq m+n$, contrairement au fait que M est une composante excédentaire.

Remarques. — **1.** Le théorème 2 (§ **1**, Chap. IV), montre que les couples de direction telles que $e_1+e_2=e$ et que M ne soit pas composante de $U'_\cap V'$ forment un ensemble algébrique.

2. e_1 et e_2 peuvent être pris arbitrairement de façon que l'on ait $e_1\geqq 0$, $e_2\geqq 0$ et $e_1+e_2=e$.

2. Multiplicités des composantes excédentaires. — Soient U^r et V^s deux variétés de l'espace affine A^n (ou projectif P^n), $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{v}$ leurs idéaux premiers associés. Rappelons qu'une composante M de $U_\cap V$ est une des variétés, en nombre fini, ayant pour idéal associé un des idéaux premiers minimaux, c'est-à-dire relatifs à des composantes isolées, de $\mathfrak{u}+\mathfrak{v}$.

Nous formerons, comme d'habitude, deux copies de A^n et considérerons leur produit $A^n \times A^n$; les variétés de ce produit correspondront aux idéaux premiers de $\Omega[X_1, \ldots, X_n, X'_1, \ldots, X'_n]$; l'idéal $\mathfrak{D} = (X_1 - X'_1, \ldots, X_n - X'_n)$ est premier, et il lui correspond la *diagonale* Δ, variété linéaire de dimension n. Si $U \subset A^n$, nous noterons souvent U' la copie de U dans le second facteur, et U^Δ la sous-variété de Δ dont la projection sur le premier facteur est U; U^Δ et U sont en correspondance birationnelle partout birégulière. Si $\mathfrak{u}$ est l'idéal de U dans $\Omega[X]$, nous noterons $\mathfrak{u}'$ l'idéal de U' dans $\Omega[X']$; par abus de langage nous noterons encore $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{v}$ les idéaux engendrés par $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{v}$ dans $\Omega[X, X']$; $\mathfrak{u}$ est alors l'idéal du cylindre $U \times A^n$, $\mathfrak{u}'$ celui du cylindre $A^n \times U'$. La variété produit $U \times V'$ a alors $\mathfrak{u} + \mathfrak{v}'$ pour idéal premier; U^Δ a pour idéal $\mathfrak{u}^\Delta = \mathfrak{u} + \mathfrak{D}$ qui contient $\mathfrak{u} + \mathfrak{u}'$. Considérons $\mathfrak{u} + \mathfrak{v}' + \mathfrak{D}$; c'est aussi l'idéal $\mathfrak{u} + \mathfrak{v} + \mathfrak{D}$; si $\mathfrak{m}$ est un idéal premier minimal de $\mathfrak{u} + \mathfrak{v}$, $\mathfrak{m}^\Delta = \mathfrak{m} + \mathfrak{D}$ est un idéal premier minimal de $\mathfrak{u} + \mathfrak{v} + \mathfrak{D} = \mathfrak{u} + \mathfrak{v}' + \mathfrak{D}$ et réciproquement. Donc les composantes de $(U \times V')_\cap \Delta$ sont les variétés M^Δ où M est composante de $U_\cap V$.

Considérons l'anneau des quotients $\mathfrak{o} = Q_{U\times V'}(M^\Delta)$ de M^Δ dans $U \times V'$. Soient x_i et x'_i les fonctions induites par X_i et X'_i sur U et V', et soit $\mathfrak{X}$ l'idéal engendré par les $(x_i - x'_i)$ dans $\mathfrak{o}$; comme $\mathfrak{m}^\Delta$ est un idéal premier minimal de $\mathfrak{u} + \mathfrak{v}' + \mathfrak{D}$, l'idéal $\mathfrak{X}$, qui est engendré par $\dfrac{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}' + \mathfrak{D}}{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}'}$ dans $\mathfrak{o}$, est primaire pour l'idéal maximal de $\mathfrak{o}$. Nous poserons donc la définition suivante :

Définition 1. — *Nous appellerons multiplicité d'intersection de* U *et* V *en* M *et nous noterons* $i(M; U.V)$ *l'entier naturel* $e(\mathfrak{X})$ *multiplicité de l'idéal* $\mathfrak{X}$ *engendré par les* $(x_i - x'_i)$ *dans l'anneau local* $= Q_{U\times V'}(M^\Delta)$.

Notons que $i(M; U.V)$ est égale à la multiplicité, dans l'anneau $\dfrac{\Omega[X, X']}{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}'}$ de la composante primaire de $\dfrac{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}' + \mathfrak{D}}{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}'}$ relative à $\dfrac{\mathfrak{m}^\Delta}{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}'}$. Notons aussi que, comme $\dim \mathfrak{o} = r + s - m$, on a $n \geqq r + s - m$, donc $m \geqq r + s - n$; dire que $(x_i - x'_i)$ est un *système de paramètre* de $\mathfrak{o}$ revient à dire que la composante M de $U_\cap V$ est *propre*. Notons enfin que la définition 1 est *symétrique* en U et V.

Proposition 3. — *S'il existe une variété* A^w *telle que* M *soit simple sur* A *et que* $m = r + s - w$ (ce qui veut dire que M est composante *propre de* $U_\cap V$ *sur* A), *la multiplicité absolue* $i(M; U.V)$ *est égale à la multiplicité relative* $i_A(M; U.V)$ *définie en* [I], (p. 67, déf. 3).

Soit en effet $(X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_w})$ un ensemble de variables uniformisantes sur A le long de M, et soient (X_β) les autres variables; si F_λ parcourt une base de l'idéal de A dans $\Omega[X]$, la matrice $\left(\frac{\partial F_\lambda}{\partial X_\beta}\right)$ a rang $n - w$ sur M; soient donc $(F_k)(1 \leqq k \leqq w)$ tels que $\left|\frac{\partial F_h}{\partial X_\beta}\right| \neq 0$ sur M. Puisque $U \times V' \subset A \times A'$, on a $F_k(x) = F_k(x') = 0$ sur M^Δ. Mais, par développement de Taylor, il vient

$$0 = F_k(x) + \sum_{i=1}^{n} (x'_i - x_i) \frac{\partial F_k}{\partial X_i}(x) + \sum_{i,j} b_{ij}(x'_i - x_i)(x'_j - x_j).$$

Ainsi $\sum_i (x'_i - x_i) \frac{\partial F_k}{\partial X_i}(x) \in \mathfrak{X}^2$; donc si $\mathfrak{q}$ est l'idéal engendré par les $(x'_\alpha - x_\alpha)$ dans $\mathfrak{o}$, on a $\mathfrak{X} = \mathfrak{q} + \mathfrak{X}^2$; on en déduit

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{q} + \mathfrak{X}(\mathfrak{q} + \mathfrak{X}^2) = \mathfrak{q} + \mathfrak{X}^3 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{X} = \mathfrak{q} + \mathfrak{X}^s$$

par récurrence; ceci montre que $\mathfrak{X} = \mathfrak{q}$ et notre assertion résulte du théorème 6 (Chap. II).

Remarque. — Dans la démonstration du fait que $\mathfrak{X} = \mathfrak{q}$ nous ne nous sommes pas servi du fait que $w = r + s - m$. Si donc nous définissons $i_A(M; U.V)$, M étant *simple* sur A, par la formule $i_A(M; U.V) = e(\mathfrak{q})$, nous voyons que $i_A(M; U.V) = i(M; U.V)$. En particulier si A est une variété linéaire, ceci montre que le symbole $i(M; U.V)$ *ne dépend pas* de l'espace affine dans lequel U, V et M sont considérées comme plongées.

THÉORÈME 2. — *Soit* k *un corps de définition commun à* U^r, V^s *et à une composante excédentaire* M^m *de* U.V *et soit* W_1^{s+1} *un cylindre de direction* (u) *générique sur* k, *et passant par* V; *alors* M *est une composante de* $U_\cap W_1$ (th. 1) *et l'on a*

$$i(M; U.V) = i(M; U.W_1).$$

Soit e l'excès de M dans U.V, et soit W^{e+s} un cylindre de direction

D^e générique sur k et passant par V; comme W est un cylindre de direction D_1^{e-1} générique sur $k(u)$ et passant par W_1, il nous suffira de démontrer $i(M;\, U.V) = i(M;\, U.W)$ et d'appliquer ce résultat W_1, et W. Soit $Y_\alpha = \sum_{i=1}^{n} u_{\alpha i} X_i = 0\,(\alpha = 1, \ldots, n-e)$ un système d'équations de D, les (u) étant des variables indépendantes sur k, et soient $(X_{\beta_1}, \ldots, X_{\beta_e})$ tels que (Y_α, X_β) soit un système de n formes linéairement indépendantes sur le domaine universel. Soit $\mathfrak{o}'$ l'anneau des quotients $Q_{U\times W'}(M^\Delta)$ et ξ'_i, ξ'_β, η'_α les fonctions induites sur W' par X'_i, X'_α, Y'_β; $\mathfrak{o} = Q_{U\times V'}(M^\Delta)$ est un anneau quotient $\frac{\mathfrak{o}'}{\mathfrak{p}'}$ de $\mathfrak{o}'$; $\mathfrak{o}'$ est de dimension n, et $\mathfrak{o}$ est de dimension $n-e$. D'après le scholie au théorème 5 (Chap. II, § 6) la multiplicité de l'idéal $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{o}$ est égale à la multiplicité de l'idéal engendré par le système de paramètres $(y'_\alpha - y_\alpha)$. D'autre part $i(M;\, U.W)$ est égale à la multiplicité de l'idéal de $\mathfrak{o}'$ engendré par le système de paramètre $(\xi'_i - x_i)$, ou par le système équivalent $(\eta'_\alpha - y_\alpha,\ \xi'_\beta - x_\beta)$. Par définition l'idéal $\mathfrak{w}'$ de W^1 dans $\Omega[X']$ est engendré par $\Omega[Y'_\alpha] \cap \mathfrak{v}'$. Nous noterons U_P, V_P, ..., M'_P les projections de U, V, ..., M' sur les espaces des variables Y_α et Y'_α; comme les indices de projection de U, V et M sont égaux à 1, on a

$$i(M;\, U.W) = i(M_P;\, U_P.V_P)$$

d'après la formule de projection; ainsi

$$i(M;\, U.W) = e\left(Q_{U_P\times V'_P}(M_P^\Delta);\, y'_1 - y_1, \ldots, y'_{n-e} - y_{n-e}\right).$$

D'après les hypothèses l'anneau $\mathfrak{o}$ est intégral et fini sur

$$\mathfrak{o}_P = Q_{U_P\times V'_P}(M_P^\Delta),$$

et $\mathfrak{o}$ et $\mathfrak{o}_P$ ont même corps des quotients (le corps des fonctions rationnelles sur $U\times V'$) et des corps résiduels $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}}$ et $\frac{\mathfrak{o}_P}{\mathfrak{m}_P}$ isomorphes (en tant qu'isomorphes aux corps des fonctions rationnelles sur M^Δ et M_P^Δ). Soit $\mathfrak{o} = \sum_s a_\sigma \mathfrak{o}_P$; on a ([LR], prop. 3, p. 694) $\bar{\mathfrak{o}} = \sum_s a_\sigma \bar{\mathfrak{o}}_P$; donc les complétions $\bar{\mathfrak{o}}$ et $\bar{\mathfrak{o}}_P$ ont même anneau total des quotients. Par conséquent, si L est un corps de base de $\bar{\mathfrak{o}}_P$, et si l'on pose

$$\mathfrak{r} = L[[y'_1 - y_1, \ldots, y'_{n-e} - y_{n-e}]],$$

on a

$$[\bar{\mathfrak{o}} : \mathfrak{r}] = [\bar{\mathfrak{o}}_P : \mathfrak{r}];$$

d'autre part, $\bar{\mathfrak{m}}$ et $\bar{\mathfrak{m}}_P$ désignant les idéaux maximaux de $\bar{\mathfrak{o}}$ et $\bar{\mathfrak{o}}_P$, $\frac{\bar{\mathfrak{o}}}{\bar{\mathfrak{m}}}$ et $\frac{\bar{\mathfrak{o}}_P}{\bar{\mathfrak{m}}_P}$ sont isomorphes. On déduit alors du théorème 6 (Chap. II) que l'on a

$$i(M; U.W) = i(M; U.V). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — Nous aurions pu éviter toute la théorie algébrique développée aux Chapitres I et II en définissant géométriquement et de façon symétrique la multiplicité $i(M; U.V)$, pour une composante M d'excès e, par la formule $i(M; U.V) = i(M_P; U_P.V_P)$ où U_P, V_P et M_P sont les projections de U, V et M selon une direction D^e générique sur un corps de définition commun à U, V et M. On démontrerait alors le théorème 2 au moyen de la formule de projection, et l'on déduirait la proposition 3 de [I], (th. 6, p. 72), ou de [WF], (th. 2, Chap. VI). Les principaux résultats qui vont suivre dans ce Chapitre V seraient susceptibles d'un traitement analogue, à l'exception toutefois de la formule des variétés produits (th. 4) et de l'invariance birationnelle (th. 6).

Par applications répétées du théorème 2, on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire. — *Si* M *est une composante d'excès e de* $U \cap V$, *si* D^{e_1} *et* D^{e_2} *sont deux directions génériques et indépendantes sur un corps de définition commun à* U.V *et* M, *de dimensions* e_1 *et* e_2 *telles que* $e_1 + e_2 \leqq e$, *et si* $\tilde{U}$ *et* $\tilde{V}$ *sont les cylindres de directions* D^{e_1} *et* D^{e_2} *passant par* U *et* V, M *est une composante de* $U \cap V$ *et l'on a*

$$i(M; U.V) = i(M; \tilde{U}.\tilde{V}).$$

Nous allons maintenant donner des *critères de multiplicité* 1. Nous reprenons les notations de la définition 1.

1° $i(M; U.V) = e(\mathfrak{X}) = 1$ veut dire, *a fortiori*, que l'anneau $\mathfrak{o}$ est de multiplicité 1 ; comme il est équidimensionnel, il est régulier

(Chap. II, th. 7) et $\mathfrak{X}$ est son idéal maximal. Ceci exprime que M^Δ *est simple sur* $U \times V'$ *et que,* $\mathfrak{m}^\Delta$ *est une composante primaire de* $\mathfrak{u} + \mathfrak{v}' + \mathfrak{D}$.

2° Nous passons maintenant de $\Omega[X, X']$ et des anneaux dérivés de celui-ci, à $\Omega[X]$ et aux anneaux dérivés correspondants; ceci veut dire que nous identifions X_i et X'_i, ou encore que nous réduisons mod $\mathfrak{D}$; alors $\mathfrak{u} \to \mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}' \to \mathfrak{v}$, $\mathfrak{m}^\Delta \to \mathfrak{m}$. Nous voyons ainsi que $\mathfrak{m}$ *est une composante primaire de* $\mathfrak{u} + \mathfrak{v}$, ou, ce qui revient au même, que $\mathfrak{u}Q(M) + \mathfrak{v}Q(M)$ *est l'idéal maximal de* $Q(M)$ (A). D'autre part on déduit par projection du fait que M^Δ est simple sur $U \times V'$, que M *est simple sur* U *et* V (B). La condition « (A) et (B) » est évidemment suffisante pour que $i(M; U.V)$ soit égale à 1.

Remarque. — Contrairement au cas des composantes propres ([I], corollaire du théorème 2, p. 38) (A) n'entraîne *pas* (B) dans le cas des composantes excédentaires. Considérons en effet dans l'espace à trois dimensions la cubique plane $U(Z = 0, Z^3 + Y^3 - XY = 0)$ et la droite $V(X = Y = 0)$; l'origine M est composante d'excès 1 de U.V. L'idéal $\mathfrak{u}Q(M) + \mathfrak{v}Q(M)$, qui contient X, Y et Z, est évidemment l'idéal maximal de $Q(M)$; cependant M est un point double de U; on voit aisément que l'on a $i(M; U.V) = 2$.

Nous allons maintenant montrer un moyen permettant de ramener tout problème d'intersections à un problème dans lequel une des variétés est *linéaire*. Si L^{n-s} est une variété linéaire d'équations $(F_j(X) = 0)(j = 1, 2, \ldots, s)$, les F_j étant des polynomes du premier degré, et si M^m est une composante de $U^r \cap L$ d'excès

$$e = m - (r + n - s - n) = m - (r - s),$$

M est une composante propre de $U \cap \tilde{L}$, où $\tilde{L}$ est une variété linéaire générique de dimension $n - s + e = n - r + m$ passant par L, et l'on a

$$i(M; U.L) = i(M; U.\tilde{L}) \quad \text{(th. 2)}.$$

Or un système d'équations de $\tilde{L}$ est $\left(Y_\alpha = \sum_{j=1}^{s} F_j(X) c_{j\alpha} = 0\right)$ où $1 \leqq \alpha \leqq r - m$, et où les (c) sont des variables indépendantes sur un corps de définition commun à U, L et M. D'après [I], (prop. 4, p. 35), on a

$$i(M; U.\widetilde{L}) = e(Q_U(M); y_1, \ldots, y_{r-m})$$

où y_α est la fonction induite par Y_α sur U. Mais si $\mathfrak{q}$ est l'idéal de $Q_U(M)$ engendré par les $(F_j(x))$, on a $e(\mathfrak{q}) = i(M; U.\widetilde{L})$ [scholie au théorème 5, § **6**, Chap. II)]. En particulier on a

$$i(M^\Delta; (U \times V').\Delta) = e(Q_{U\times V'}(M^\Delta); y'_1 - y_1, \ldots, y'_{n-e} - y_{n-e}) = i(M; U.V).$$

Donc :

PROPOSITION 4. — *Si* M *est une composante de* $U \cap V$ *on a*

$$i(M; U.V) = i(M^\Delta; (U \times V').\Delta).$$

Si M *est une composante de* $U \cap L$, *où* L *est une variété linéaire d'équations* $(F_j(X) = 0)$, *on a, si* $\mathfrak{q}$ *est l'idéal engendré par les* $F_j(x)$ *dans* $Q_U(M)$ (x_i *étant la fonction induite par* X_i *sur* U) $i(M; U.L) = e(\mathfrak{q})$.

Voici enfin un résultat permettant de se ramener à une intersection *ponctuelle* (*cf.* [WF], th. 4, Chap. V). Nous considérerons une composante M^m de l'intersection de U^r avec une variété linéaire L^s; soit $e = m - (r + s - n)$ l'excès de M. On sait que M est définie sur une extension algébrique d'un corps de définition commun K à L et U; si D^e est une direction de dimension e générique sur K et si $\widetilde{L}^{s+e}$ est la variété linéaire passant par L et parallèle à D, on a (corollaire du théorème 2) :

$$i(M; U.L) = i(M; U.\widetilde{L}).$$

Soit $K(u)$ un corps de définition de $\widetilde{L}$. Soit maintenant $\mathfrak{S}^m$ un ensemble de m équations linéaires, générique sur $K(u)$, et définissant une variété linéaire W^{n-m}. D'après [WF], (th. 4, Chap. V), tout point P de $W \cap M$ est un point générique de M sur $K(u)$, et est un point d'intersection propre de U et de $\widetilde{L} \cap W$; on a

$$i(M; U.L) = i(M; U.\widetilde{L}) = i(P; U.(\widetilde{L} \cap W)).$$

Mais, comme $P \in M$, on a $P \in L$; donc $L \cap W$ n'est pas vide, et P est une composante excédentaire de $(L_\cap W)_\cap U$; on voit aussitôt que son excès est e. La projection, suivant une parallèle à L, de D sur W est une direction D_1 de dimension e; comme D est générique sur K et W sur $K(u)$, la direction D_1^e est générique sur un corps de définition commun à U et $L_\cap W$. D'autre part $\widetilde{L}_\cap W$ est le cylindre de direction D_1 passant par $L_\cap W$; on a donc, d'après le corollaire du théorème 2,

$$i(P;\, U.(L_\cap W)) = i(P;\, U.(\widetilde{L}_\cap W)).$$

On en déduit le résultat suivant :

PROPOSITION 5. — *Soit* M^m *une composante excédentaire d'excès e de* $U^r{}_\cap L^s$, *où* L *est linéaire, et soit* W^{n-m} *une variété linéaire générique sur un corps de définition* K *de* L, U *et* M; *tout point* P *de* $W_\cap M$ *est un point générique de* M *sur* K, *et un point d'intersection d'excès e de* $U_\cap(L_\cap W)$, *et l'on a*

$$i(M;\, U.L) = i(P;\, U.(L_\cap W)).$$

3. MULTIPLICITÉ D'UNE SOUS-VARIÉTÉ SUR UNE VARIÉTÉ. — DÉFINITION 2. — *Soit* U *une sous-variété d'une variété* V. *Nous appellerons multiplicité de* U *sur* V, *et nous noterons* $m(U;\, V)$ *la multiplicité de l'anneau des quotients* $Q_V(U)$ *de* U *dans* V.

Comme $Q_V(U)$ est un anneau équidimensionnel, dire que

$$m(U;\, V) = 1$$

revient à dire (th. 7, Chap. II) que $Q_V(U)$ est un anneau local régulier, c'est-à-dire que U *est simple sur* V.

THÉORÈME 3. — *Si* U^r *est une sous-variété de* V^s, *la multiplicité* $m(U;\, V)$ *de* U *sur* V *est égale à la multiplicité d'intersection*

$$i(U;\, U.V) = i(U;\, \widetilde{U}.V),$$

$\widetilde{U}$ *étant un cylindre générique passant par* U.

Comme U est simple sur $\widetilde{U}$, [I], prop. 4, p. 35 s'applique, et l'on a

$$i(U;\, U.V) = i(U;\, \widetilde{U}.V) = e(Q_V(U);\, G_1^V,\, \ldots,\, G_{s-r}^V),$$

où les (G_i^V) sont les fonctions induites sur V par des polynomes (G_i) qui forment un système régulier de paramètres de $Q(\tilde{U})$ et qui peuvent être inclus dans un système de paramètres de $Q(U)$. Ceci nous montre d'abord que, quelle que soit la variété $W^{n-(s-r)}$ contenant U comme sous-variété simple et telle que U soit composante de $W \cap V$, on a

$$i(U;\, W.V) \geqq m(Q_V(U)) = m(U;\, V).$$

Soit $\left(Y_\alpha = \sum_{i=1}^{n} u_{\alpha i} X_i = 0,\ 1 \leqq \alpha \leqq n - e = s\right)$ un système d'équations de D; nous reprenons les notations du théorème 2, c'est-à-dire que nous prenons les Y_α et les X_β pour nouvelles variables. Nous allons étudier l'anneau local $\mathfrak{I} = Q(U)$; si $\mathfrak{p}$ est l'idéal premier de $\mathfrak{I}$ correspondant à $\tilde{U}$, on a $Q(\tilde{U}) = \mathfrak{I}_\mathfrak{p}$. Comme nous pouvons supposer $U \neq V$ et $r \neq s$ [si $U = V$, le théorème 3 est trivial, $m(U;\, V)$ et $i(U;\, U.V)$ étant égaux à 1], U est projeté sur l'espace des coordonnées Y_α avec indice de projection égal à 1 (Chap. IV, § 1, *c*). D'après [I] (prop. 1, p. 60), la complétion $\bar{\mathfrak{I}}$ de $\mathfrak{I}$ contient un corps isomorphe au corps Ω_U des fonctions rationnelles sur U, auquel nous l'identifierons; si x_β et y_α sont les fonctions induites par X_β et Y_α sur U, on a $x_\beta \in \Omega_U = \Omega(y)$, et $\bar{\mathfrak{I}}$ est isomorphe à l'anneau de séries formelles

$$\Omega(y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_r})[[Y_{\alpha_{r+1}} - y_{\alpha_{r+1}}, \ldots, Y_{\alpha_s} - y_{\alpha_s}, X_{\beta_1} - x_{\beta_1}, \ldots, X_{\beta_{n-s}} - x_{\beta_{n-s}}]].$$

Mais $Q(\tilde{U})$ est l'anneau des quotients de $\mathfrak{I}$ par l'idéal $\mathfrak{p}$ engendré par les polynomes de $\mathfrak{I} = Q(U)$ qui ne dépendent que des (Y_α). Or on peut identifier $(y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_r})$ à $(Y_{\alpha_1}, \ldots, Y_{\alpha_r})$; les $(y_{\alpha_{r+j}})$ sont algébriques sur $\Omega(y_{\alpha_1}, \ldots, y_{\alpha_r})$; donc les éléments $(Y_{\alpha_{r+j}} - y_{\alpha_{r+j}})$ se trouvent dans l'idéal $\bar{\mathfrak{I}}\mathfrak{p}$ engendré par $\mathfrak{p}$ dans $\bar{\mathfrak{I}}$; comme ils engendrent un idéal premier de dimension $n - s$, et que $\mathfrak{p}$ est de dimension $n - s$ également, l'idéal $\bar{\mathfrak{I}}\mathfrak{p}$ est engendré par les $(Y_{\alpha_{r+j}} - y_{\alpha_{r+j}})$. Passons maintenant à l'anneau $Q_V(U)$, qui est un anneau quotient $\frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{I}\mathfrak{v}}$ de $\mathfrak{I}$; sa complétion est un anneau quotient de $\bar{\mathfrak{I}}$, dont l'idéal maximal est engendré par les classes des $X_i - x_i$; un système de paramètres de $\overline{Q_V(U)}$ ayant même multiplicité que cet anneau sera formé [scholie au théorème 5, (§ **6**, Chap. II)] de $r-s$ combinaisons linéaires génériques des classes des $(X_i - x_i)$; ceci sera réalisé par les $(Y_{\alpha_{r+j}} - y_{\alpha_{r+j}})$. Donc $m(U; V)$ est égal à la multiplicité de l'idéal $\dfrac{\mathfrak{p}+\mathfrak{J}\mathfrak{v}}{\mathfrak{J}\mathfrak{v}}$ dans $Q_V(U)$; d'après la première partie du raisonnement cet idéal est celui engendré par les (G_i^V), ce qui démontre le théorème 3.

Remarques. — 1. Dans le cas où U est un point P (a_i), il n'est pas besoin de passer aux complétions : l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $Q_V(P)$ est engendré par les $(z_i = \xi_i - a_i)$ où ξ_i est la fonction induite par X_i sur V^s; alors s combinaisons linéaires des (z), par exemple celles provenant des Y_α, engendrent un idéal $\mathfrak{q}$ de même multiplicité que $\mathfrak{m}$; mais $e(\mathfrak{q})$ est la multiplicité d'intersection de V avec la variété linéaire parallèle à D^{n-s} passant par P, ce qui montre que $m(P; V) = i(P; P.V)$ (prop. **4**). Dans le cas où V est une hypersurface ce résultat a déjà été obtenu au Chapitre III (§ **1**).

2. En reprenant les notations de la définition 1, on a ici $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{u}$; donc l'idéal $\mathfrak{u} + \mathfrak{v}' + \mathfrak{D}$ est identique à $\mathfrak{u} + \mathfrak{u}' + \mathfrak{D}$, c'est-à-dire à $\mathfrak{u}^\Delta$. Nous voyons donc que les multiplicités des anneaux locaux $Q_V(U)$ et $Q_{U\times V}$, (U^Δ) sont égales.

Proposition 6. — *La multiplicité de* U^r *sur* V^s *est égale à la multiplicité sur* V *d'un point* P *de* U *générique sur un corps de définition commun* K *à* U *et* V.

Considérons toujours une direction D^{n-s} générique sur $K(P)$ et le cylindre $\widetilde{U}$ de direction D et passant par U; soit L la parallèle à D passant par P. Puisque P est générique sur $K(u)$, les (u) désignant les coefficients d'un système d'équations de D, U est la seule composante de $\widetilde{U} \cap V$ à contenir P. Soit M^{n-r} une variété linéaire générique sur $K(u, P)$ passant par L; les composantes de $M \cap \widetilde{U}$ sont alors des cylindres parallèles à D; comme M est générique sur $K(u, P)$, elles sont propres, et sont donc de dimension $n-s$; ce sont donc des variétés linéaires parallèles à D, et la seule composante de $M \cap \widetilde{U}$ à contenir P est L. Appliquons maintenant le principe local d'associativité des intersections aux composantes contenant P et aux variétés $\widetilde{U}$, V et M; il vient

$$i(U; \widetilde{U}.V)\, i(P; U.M) = i(L; \widetilde{U}.M)\, i(P; L.V).$$

Or $i(P; M.U)$ est égal à 1, puisque M est transversal à U en P; de même $i(L;\,\widetilde{U}.M)$ est égal à 1, puisque M est transversal à $\widetilde{U}$ en L. On a donc

$$i(U;\,\widetilde{U}.V) = i(P;\,L.V),$$

c'est-à-dire $m(U;\,V) = m(P;\,V)$ d'après le théorème 3.

Remarque. — Si P est un point *quelconque* de U, $i(L;\,\widetilde{U}.M)$ est égal à $m(P;\,U)$ d'après les théorèmes 2 et 3 et la formule des projections; $i(P;\,U.M)$ est aussi égal à la multiplicité de P sur U. Mais U n'est pas nécessairement la seule composante de $U_\cap V$ à contenir P; on a donc, si les W_j sont les autres composantes de U.V qui contiennent P,

$$m(P;\,U)\,m(P;\,V) = m(P;\,U)\,m(U;\,V) + \sum_j i(W_j;\,\widetilde{U}.V)\,i(P;\,W_j.M).$$

Ceci montre que $m(P;\,V) \geqq m(\dot{U};\,V)$ et qu'il y a égalité lorsque P ne se trouve sur aucune autre composante de $\widetilde{U}_\cap V$ que U.

Nous allons maintenant nous intéresser aux *points multiples* d'une variété V de dimension v. Soit P un point de V et k un corps de définition de V contenant les coordonnées de P; soit D une droite passant par P, (u_i) ses paramètres directeurs; posons $K = k(u)$. Soit L une direction générique sur K de dimension $n-(v+1)$, d'équations $\left(Y_\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_{\alpha i} X_i = 0,\ 1 \leqq \alpha \leqq v+1\right)$; V est alors projeté génériquement selon la direction L sur l'espace des Y_α; soit V_L sa projection; l'indice de projection de V est égal à 1 (Chap. IV, § 1). Comme P a ses coordonnées dans K, et que L ne rencontre pas V à l'infini, P est le seul point de V ayant pour projection la projection P_L de P. Soit enfin N^{n-v} la variété linéaire projetant D selon la direction L, et soit D_L la projection de D (L ne contient pas la direction D). Comme N est un cylindre passant par D et générique sur K, on a (th. 2) $i(P;\,D.V) = i(P;\,N.V)$; d'autre part, d'après la formule de projection, on a

$$i(P;\,N.V) = i(P_L.\ D_L.V_L).$$

Soit e la multiplicité de P sur V; si D est générique sur k, on a (th. 3) $e = i(P;\,N.V)$; ceci montre que la multiplicité de P_L sur l'hypersurface V_L est égale à e. Si D a avec V une multiplicité d'intersection $> e$ en P, il en est de même de D_L avec V_L en P_L; comme V_L est une hypersurface dans l'espace des (Y_α), la considération de son équation $F(Y) = 0$ montre immédiatement que D_L doit alors se trouver sur un hypercône H_L de sommet P_L, non nécessairement irréductible, et purement v-dimensionnel; si l'on amène P à l'origine, une équation de H_L s'obtient en annulant la forme de plus bas degré de $F(Y)$. Si nous appelons *tangentes à* V *en* P les droites D ayant en P une multiplicité d'intersection avec V strictement supérieure à e, nous voyons donc que l'ensemble H des tangentes à V en P se projette en H_L suivant L; soit H'_L le cylindre de direction L passant par H_L; on a donc, si σ parcourt l'ensemble des k-automorphismes du domaine universel, $H \subset \bigcap_\sigma H'_{L\sigma}$. Si réciproquement $D \in \bigcap_\sigma H'_{L\sigma}$, un au moins L_0 des L_σ est générique sur $k(D)$, et l'on a

$$i(P\,;\,D.V) = i(P_{L_0}\,;\,D_{L_0}.V_{L_0}) > e,$$

ce qui veut dire que D est une tangente à V en P; ainsi $H = \bigcap_\sigma H'_{L\sigma}$; H est donc un cône algébrique, non nécessairement irréductible; d'après le théorème de la base finie on peut écrire $H = \bigcap_{j=1}^{s} H'_{L_j}$; ainsi H est définissable sur la clôture algébrique de $k(L_1, \ldots, L_s)$; appliquant les automorphismes σ nous voyons que H est algébrique sur k. Comme toutes les projections génériques de H sont de dimension v, et qu'un cycle est déterminé par la donnée de sa projection générique (Chap. IV, § 3), H est purement v-dimensionnel. Donc :

Proposition 7. — *L'ensemble des tangentes en un point* P *d'une variété* V^v *est un ensemble algébrique purement v-dimensionnel, qu'on appelle le cône des tangentes à* V *en* P.

Remarques. — 1. Nous appellerons variété linéaire tangente à V en P toute variété linéaire L contenant une tangente à V en P. Le théorème 2 montre que, si P est composante de $L \cap V$, les variétés linéaires tangentes L sont caractérisées par la relation $i(P\,;\,V.L) > e$.

2. On peut considérer H_L comme un cycle; c'est alors la projection générique d'un cycle positif de support H.

3. Supposons pour simplifier que P soit à l'origine des coordonnées; soit x_i la fonction induite par X_i sur V; et soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o} = Q_V(P)$; $\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{m}}$ est un corps isomorphe au domaine universel. Nous appellerons le module $\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}$ *l'espace tangent de Zariski* à V en P; c'est un espace vectoriel sur Ω de dimension d telle que $v \leqq d \leqq n$. Si U est une sous-variété de V contenant P, son espace tangent en P est un *quotient* de celui de V en P. L'espace tangent de Zariski est le quotient de l'espace des formes linéaires $\sum_i c_i X_i$ par le sous-espace des formes $\sum_i d_i X_i$ telles que $\sum_i d_i x_i \in \mathfrak{m}^2$; si T est la variété linéaire définie par les équations $\sum_i d_i X_i = 0$, les d_i étant tels que $\sum_i d_i x_i \in \mathfrak{m}^2$, $\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2}$ est isomorphe à T. Soit (u) une direction D n'appartenant pas à T; un système d'équations de D est $(X_j u_1 - X_1 u_j = 0,\ 2 \leqq j \leqq n)$; soit $\mathfrak{q}$ l'idéal de $\mathfrak{o}$ engendré par les $(x_j u_1 - x_1 u_j)$; puisque D n'appartient pas à T il existe des (d_i) non tous nuls tels que

$$\sum_i d_i x_i \in \mathfrak{m}^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_i d_i u_i \neq 0;$$

alors l'élément $\sum_i d_i(x_i u_1 - x_1 u_i) = u_1 \sum_i d_i x_i - x_1 \sum_i d_i u_i$ appartient à $\mathfrak{q}$; comme $\sum_i d_i u_i \neq 0$, on a $x_1 \in \mathfrak{q} + \mathfrak{m}^2$, et de même $x_j \in \mathfrak{q} + \mathfrak{m}^2$ pour tout $1 \leqq j \leqq n$. On a ainsi $\mathfrak{m} = \mathfrak{q} + \mathfrak{m}^2$ et, par un raisonnement maintenant classique, $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}$. Les droites qui n'appartiennent pas à l'espace tangent de Zariski sont donc « *celles dont les équations engendrent l'idéal* $\mathfrak{m}$ ». En particulier *toute tangente* à V en P, engendrant un idéal $\mathfrak{q}$ tel que $e(\mathfrak{q}) \neq e(\mathfrak{m})$, *appartient à l'espace tangent* T *de Zariski*. Mais l'exemple du point de rebroussement de la cubique plane $(Y^2 - X^3 = 0)$, où T est le plan tout entier, montre que T peut être strictement plus grand que l'espace vectoriel engendré par le cône des tangentes à V en P.

Nous allons maintenant voir comment les tangentes à V en P peuvent, en un certain sens, être considérées comme des *limites de sécantes*. Soit P (a) un point de V^v; par une *sécante* à V menée par P nous entendrons l'ensemble (u, y) d'une direction D (u) et d'un point Q (y) de V distinct de P tels qu'il existe t tel que

$$y_i = a_i + t u_i \quad (1 \leqq i \leqq n).$$

Par une *sécante généralisée* à V menée par P nous entendrons toute spécialisation, sur un corps de définition K de V contenant (a), (u', y') d'une sécante (u, y), telle que les (u') ne soient pas tous nuls. Il est clair que les sécantes généralisées sont les spécialisations sur K d'une sécante « générique » (u, y), c'est-à-dire telle que (y) soit un point générique de V sur K. Nous dirons qu'une sécante généralisée (u', y') est une *sécante limite* si $(y') = (a)$.

Il est clair que toutes ces notions sont conservées par projection. Si nous supposons donc que K contienne un corps de définition k de V contenant (a), et les coefficients d'une direction de projection générique sur k, nous sommes ramenés à étudier les sécantes limites à une hypersurface V_L; pour simplifier nous les supposerons menées par l'origine; supposons que V_L ne soit pas un cône, sinon le problème est trivial, et soit $F(Y) = F_m(Y) + F_{m+1}(Y) + \ldots + F_s(Y) = 0$ une équation de V_L, F_j étant une forme de degré j. Une sécante (u, y) satisfait à « $y_i = tu_i$ et $t^m F_m(u) + \ldots + t^s F(u) = 0$ », c'est-à-dire, comme $t \neq 0$, à « $y_i = tu_i$ et $F_m(u) + \ldots + t^{s-m} F_t(u) = 0$ »; une sécante limite sera une spécialisation $(u', 0)$ de (u, y), donc telle que $F_m(u') = 0$ et réciproquement. Donc :

Proposition 8. — *Les sécantes limites menées à* V *en* P *sont identiques aux tangentes à* V *en* P.

Corollaire 1. — *La projection d'une tangente* D (resp. *d'une variété linéaire tangente* L) *est une tangente* (resp. *une variété linéaire tangente*) *à condition que* D *ne soit pas contenue dans* (resp. *que* L *soit transversale à*) *la direction de projection.*

Corollaire 2. — *Le cône des tangentes à* $V \times V'$ *en* $P \times P'$ *est identique au produit des cônes des tangentes à* V *en* P *et à* V' *en* P'.

Ceci résulte immédiatement du corollaire 1 et de la caractérisation des tangentes comme sécantes limites.

4. Produits. Projections. Invariance birationnelle. — Soient M et M' des composantes d'excès e et e' de $U \cap V$ et $U' \cap V'$; nous nous proposons de comparer les entiers

$$i(M; U.V),\ i(M'; U'.V') \qquad \text{et} \qquad i(M \times M'; (U \times U').(V \times V')).$$

Remarquons ([I], p. 41, haut) que $\overline{Q_{U\times U'}(M\times M')}$ est un produit kroneckérien de $\overline{Q_U(M)}$ et de $\overline{Q_{U'}(M')}$ et que l'idéal $\mathfrak{b}$ déterminé par $V\times V'$ dans $\overline{Q_{U\times U'}(M\times M')}$ est engendré par les idéaux $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{q}'$ déterminés par V et V' dans $\overline{Q_U(M)}$ et $\overline{Q_{U'}(M')}$; en tenant compte de la proposition 4 nous nous ramenons au cas où V et V' sont des variétés linéaires. Appliquant alors le théorème 12 (Chap. II), nous obtenons le résultat suivant.

THÉORÈME 4. — *Si* M *et* M' *sont des composantes excédentaires de* $U_\cap V$ *et de* $U'_\cap V'$, *on a*

$$i(M\times M';\ (U\times U').(V\times V')) = i(M;\ U.V)\, i(M';\ U'.V').$$

COROLLAIRE 1. — *Si* U *et* U' *sont des sous-variétés de* V *et* V', *on a*

$$m(U\times U';\ V\times V') = m(U;\ V)\, m(U';\ V').$$

COROLLAIRE 2. — *Si* M *est une composante de* $U_\cap V$, *on a*

$$i(M;\ U.V) \geqq m(M;U)\, m(M;\ V).$$

En effet, le second membre est égal à la multiplicité de $M\times M'$ sur $U\times V'$; d'autre part $i(M;U.\,V)$ est la multiplicité d'un idéal primaire de $Q_{U\times V'}(M^\Delta)$, donc $i(M;\ U.V)\geqq m(M^\Delta;\ U\times V')$; comme M^Δ est une sous-variété de $M\times M'$, on a $m(M^\Delta;U\times V')\geqq m(M\times M';\ U\times V')$ (remarque à la proposition 6).

THÉORÈME 5 (formule de projection). — *Soit* U *une variété de l'espace produit* $A^n\times A^{n'}$, *se projetant en* U_1 *sur* A^n *avec indice de projection fini* $[U:U_1]$; *soient* V *une variété de* A^n *et* M *une composante excédentaire de* $V.U_1$. *Si* U *ne contient pas la variété à l'infini de* $M\times A^{n'}$ *et si* $M_1, \ldots, M_s$ *sont les composantes de* $U_\cap(V\times A^{n'})$ *se projetant en* M, *on a*

$$[U:U_1]\, i(M;\ U_1.V) = \sum_{j=1}^{s} [M_j:M]\, i(M_j;\ U.(V\times A^{n'})).$$

Faisons passer par $V\times A^{n'}$ un cylindre générique W de dimension $\dim(V\times A^{n'}) + e$, e étant l'excès de M dans $V_\cap U_1$ qui est évidemment aussi celui de M_j dans $U_\cap(V\times A^{n'})$; comme $V\times A^{n'}$ est déjà un cylindre parallèle à $A^{n'}$, la direction de W pourra être engendrée par e directions de droites génériques, indépendantes *et contenues dans* A^n. Si donc $\widetilde{V}$ est un cylindre de A^n de direction générique, de dimension $\dim V + e$, et passant par V, on a $W = \widetilde{V} \times A^{n'}$. Les composantes de $W_\cap U$ qui se projettent en M sont évidemment les M_j. La formule de projection relative aux composantes propres ([I], th. 8, p. 77 ou [WF], th. 8, Chap. VII) s'écrit alors

$$[U:U_1]\,i(M;\, U_1.\widetilde{V}) = \sum_{j=1}^{s} [M_j:M]\,i(M_j;\, (\tilde{V}\times A^{n'}).U).$$

Il suffit d'appliquer le théorème 2 pour obtenir le résultat annoncé.

Remarques. — 1. La restriction relative aux composantes à l'infini peut être levée en se plaçant dans un produit d'espaces projectifs, et en changeant de coordonnées dans le second facteur.

2. Il aurait été possible de faire passer un cylindre générique $\widetilde{U}$ par U au lieu de V. La démonstration, plus compliquée, se serait déroulée comme suit. Si $\widetilde{U}_1$ est la projection de $\widetilde{U}$ sur A^n, on montre d'abord, par récurrence sur $\dim\widetilde{U} - \dim U$, que les indices de projection $[U:U_1]$ et $[\widetilde{U}:\widetilde{U}_1]$ sont égaux, ceci par des considérations de disjonction linéaire. On montre ensuite que les M_j sont les seules composantes de $U_\cap(V\times A^{n'})$ se projetant sur M, ceci au moyen de [WF] (prop. 13, Chap. VII), du théorème 2 et du corollaire 1 au théorème 4. Et l'on applique enfin la formule de projection relative aux composantes propres. On constate qu'ainsi on laisse échapper le cas où $V\subset U_1$, qui n'était pas exclu par la démonstration précédente.

THÉORÈME 6. — *Si* M *est une composante de* $U_\cap V$ *et si* U *et* V *sont contenues dans une variété* A, *en correspondance birationnelle et birégulière le long de* M *avec une variété* A′, *on a,* U′, V′ *et* M′ *désignant les sous-variétés de* A′ *correspondant régulièrement à* U, V *et* M,

$$i(M;\, U.V) = i(M';\, U'.V').$$

L'entier $i(M;\, U.V)$ est la multiplicité de l'idéal $\mathfrak{X}$ engendré par les $(x_i - y_i)$ dans $Q_{U\times V}(M^\Delta)$, les (x) étant les fonctions induites par les coordonnées (X) sur U, et les (y) les fonctions induites par les coordonnées (Y) sur V (nous prenons ici $U\times V$ dans l'espace des variables X_i et Y_i); soient (ξ) et (η) les fonctions induites par (X) et (Y) sur A et sur sa copie dans le second facteur; x_i et y_i sont les classes de ξ_i et de η_i dans $Q_{U\times V}(M^\Delta)$ considéré comme anneau quotient de $Q_{A\times A}(M^\Delta)$. Nous définirons de même (ξ'), (η'), (x') et (y') pour A'. Comme M et M' se correspondent régulièrement sur A et A', il en est de même pour M^Δ et $M'^{\Delta'}$ sur $A\times A$ et $A'\times A'$; en effet, les correspondances $M^\Delta \to M$, $M \to M'$, $M' \to M'^{\Delta'}$ sont régulières. Les anneaux de quotients $Q_{A\times A}(M^\Delta)$ et $Q_{A'\times A'}(M'^{\Delta'})$ sont donc identiques ([WF], th. 17, Chap. IV), et évidemment aussi $Q_{U\times V}(M^\Delta)$ et $Q_{U'\times V'}(M'^{\Delta'})$. Par définition on a $\xi'_j = R_j(\xi)$ et $\eta'_j = R_j(\eta)$, où les R_j sont des fractions rationnelles dont les dénominateurs ne s'annulent pas sur M; on peut donc écrire $x'_j = R_j(x)$ et $y'_j = R_j(y)$; ainsi $x'_j - y'_j = R_j(x) - R_j(y)$ peut s'écrire $\sum \frac{P_i(x, y)(x_i - y_i)}{D(x)D(y)}$, où D est est un polynome non nul sur M et P_i un polynome; ceci veut dire que les $(x'_j - y'_j)$ appartiennent à $\mathfrak{X}$. En échangeant les rôles nous voyons que les $(x_i - y_i)$ et les $(x'_j - y'_j)$ engendrent le même idéal $\mathfrak{X}$ dans $Q_{U\times V}(M^\Delta) = Q_{U'\times V'}(M'^{\Delta'})$. C. Q. F. D.

Si nous nous souvenons que la multiplicité d'une sous-variété U d'une variété V est la multiplicité de $Q_V(U)$, et qu'une correspondance birégulière conserve les anneaux de quotients, nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 9. — *Si* U *est une sous-variété de* V, *et si* V *est, avec* V', *en correspondance birégulière le long de* U, *on a,* U' *désignant la sous-variété de* V' *correspondant à* U, $m(U; V) = m(U'; V')$.

3. Associativité des composantes excédentaires. — Soient U^u, V^v et W^w trois variétés, et M^m une composante de $U_\cap V_\cap W$ d'excès $e = m - (u + v + w) + 2n$. Nous supposerons qu'une condition d'*homogénéité* est satisfaite, c'est-à-dire que les composantes $A_1, \ldots, A_s$ de $U_\cap V$ contenant M ont toutes même dimension a, et donc même excès $f = a - (u + v - n)$ et que les composantes $B_1, \ldots, B_t$ de $V_\cap W$ contenant M ont toutes même dimension b et donc même excès $g = b - (v + w - n)$; alors M est composante d'excès $f' = e - f$ de $A_i . W$, et composante d'excès $g' = e - g$ de $U . B_j$. Soit k un corps de définition commun à U, V, W, M, (A_i) et (B_j). Nous allons faire

passer par U, V, W des cylindres $\widetilde{U}$, $\widetilde{V}$, $\widetilde{W}$ de directions génériques sur k, et de dimensions $u+x$, $v+y$, $w+z$, en nous efforçant de trouver x, y et z tels que A_i soit composante propre de $\widetilde{U}\cap\widetilde{V}$, B_j, de $\widetilde{V}\cap\widetilde{W}$, M de $A_i\cap\widetilde{W}$ et de $\widetilde{U}\cap B_j$; ceci s'exprime par les conditions $(x+y=f,\ z=f',\ y+z=g,\ x=g')$. On en tire $(x=g',\ z=f'$ et $y=g-f'=f-g')$, ce qui est compatible, car on a $f+f'=g+g'=e$; d'où $y=f+g-e$. Mais, afin que notre construction ait une réalité géométrique, il faut que $y=f+g-e$ soit *positif*.

Nous verrons plus loin un exemple dans lequel le calcul donne $y<0$, et où le principe d'associativité des intersections n'est pas vrai.

Nous supposerons donc $f+g-e\geqq 0$ (un cas particulier important sera indiqué plus loin). Nous exclurons également les cas où l'un des nombres $u+x$, $v+y$, $w+z$ serait égal à n (dans un tel cas, $\widetilde{U}$ par exemple remplirait tout l'espace, et l'on aurait $V\subset U$). Nous allons considérer comment M intervient dans les cycles $\widetilde{U}.(\widetilde{V}.\widetilde{W})$ et $(\widetilde{U}.\widetilde{V}).\widetilde{W}$; les composantes de $\widetilde{U}\cap\widetilde{V}$ contenant M sont toutes propres et de dimensions a; parmi elles figurent les (A_i); nous supposerons que ce sont les *seules*. De même pour les (B_j). Le principe local d'associativité pour les composantes propres ([1], th. 4, p. 69) ou ([WF, th. 5, Chap. VI) donne alors

$$\sum_i i(A_i;\ \widetilde{U}.\widetilde{V})\,i(M;\ A_i.\widetilde{W})=\sum_j i(M;\ \widetilde{U}.B_j)\,i(B_j;\ \widetilde{V}.\widetilde{W}).$$

D'après notre théorème 2 et en vertu du choix de x, y et z, ceci s'écrit

$$\sum_i i(A_i;\ U.V)\,i(M;\ A_i.W)=\sum_j i(M;\ U.B_j)\,i(B_j;\ V.W);$$

nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Proposition 10. — *Soient* M *une composante d'excès e de* $U\cap V\cap W$, A_i *les composantes de* $U\cap V$ *contenant* M, B_j *les composantes de* $V\cap W$ *contenant* M; *nous supposons :*

a. Les A_i *ont toutes même dimension et donc même excès* f*; les* B_j *ont toutes même dimension et donc même excès* g*;*

b. On a $f+g\geqq e$.

c. Si $\widetilde{\mathrm{U}}$, $\widetilde{\mathrm{V}}$, $\widetilde{\mathrm{W}}$ *sont des cylindres génériques et indépendants sur un corps de définition commun à* U, V, W, M, A_i, B_j, *passant par* U^u, V^v, W^w *et de dimensions* $u+e-g$, $v+f+g-e$, $w+e-f$, *les composantes de* $\widetilde{\mathrm{U}}\cap\widetilde{\mathrm{V}}$ *contenant* M *sont les* A_i, *celles de* $\widetilde{\mathrm{V}}\cap\widetilde{\mathrm{W}}$ *contenant* M *sont les* B_j.

d. On a

$$u+e-g<n, \qquad v+f+g-e<n, \qquad w+e-f<n.$$

On a alors

$$\sum_i i(\mathrm{A}_i;\,\mathrm{U}.\mathrm{V})\,i(\mathrm{M};\,\mathrm{A}_i.\mathrm{W})=\sum_j i(\mathrm{M};\,\mathrm{U}.\mathrm{B}_j)\,i(\mathrm{B}_j;\,\mathrm{V}.\mathrm{W}).$$

Nous voyons donc que, pour les composantes excédentaires, le principe d'associativité des intersections n'est applicable que sous des conditions très restrictives. Des contre-exemples variés seront donnés plus loin.

Remarques. — 1. Si M est simple sur V, A_i et B_j le sont aussi. On a donc $m\geqq a+b-v=u+v+w-2n+f+g$; ainsi $e\geqq f+g$; si la condition *c* est vérifiée, on a donc $f+g=e$ et $\widetilde{\mathrm{V}}=\mathrm{V}$.

2. Si U, V et W sont plongées dans une variété Ω^ω et que toutes les variétés envisagées ont sur Ω la « bonne dimension », c'est-à-dire que, dans l'espace, elles ont le même excès $n-\omega$, on a $e=2(n-\omega)$, $f=n-\omega$, $g=n-\omega$; ainsi *c* est vérifiée; on a $\widetilde{\mathrm{V}}=\mathrm{V}$, et $x=z=n-\omega$.

3. Supposons que $u+e-g=n$, c'est-à-dire que $\widetilde{\mathrm{U}}$ remplisse tout l'espace, et donc que $\mathrm{V}\subset\mathrm{U}$; M est alors composante de $\mathrm{V}\cap\mathrm{W}$ et l'on a $\mathrm{A}_i=\mathrm{V}$, $\mathrm{B}_j=\mathrm{M}$. Les deux membres de la formule d'associativité sont donc $m(\mathrm{V};\,\mathrm{U})\,i(\mathrm{M};\,\mathrm{V}.\mathrm{W})$ et $m(\mathrm{M};\,\mathrm{U})\,i(\mathrm{M};\,\mathrm{V}.\mathrm{W})$, et peuvent être différents si $m(\mathrm{V};\,\mathrm{U})<m(\mathrm{M};\,\mathrm{U})$. De même si $w+e-f=n$. Si $\widetilde{\mathrm{V}}$ remplit tout l'espace, ceci veut dire que $\mathrm{U}\subset\mathrm{V}$ et $\mathrm{W}\subset\mathrm{V}$; on a alors $\mathrm{A}_i=\mathrm{U}$ et $\mathrm{B}_j=\mathrm{W}$; les deux membres de la formule d'associativité sont $m(\mathrm{U};\,\mathrm{V})\,i(\mathrm{M};\,\mathrm{U}.\mathrm{W})$ et $m(\mathrm{W};\,\mathrm{V})\,i(\mathrm{M};\,\mathrm{U}.\mathrm{W})$ qui peuvent être différents.

4. Si nous passons au produit de trois copies de l'espace A^n et à sa diagonale Δ, et si (*cf.* [I], p. 45, haut) nous définissons $i(\mathrm{M};\,\mathrm{U}.\mathrm{V}.\mathrm{W})$ comme étant la mul-

tiplicité de l'idéal $\mathfrak{X}$ de $Q_{U\times V'\times W''}(M^{\Delta})$ engendré par les éléments $(x_i - x'_i, x_i - x''_i)$, on montre, comme dans notre théorème **2**, que l'on a

$$i(M;\, U.V.W) = i(M;\, \widetilde{U}.\widetilde{V}.\widetilde{W}).$$

Si seules les conditions a, b et d sont vérifiées, le fait qu'il peut y avoir d'autres composantes de $\widetilde{U}\cap\widetilde{V}$ et de $\widetilde{V}\cap\widetilde{W}$ contenant M que les A_i et B_j, et la démonstration de [I] (th. 6, p. 45) montrent que l'on a

$$\sum_i i(A_i;\, U.V)\, i(M;\, A_i.W) \leqq i(M;\, U.V.W)$$

$$\sum_j i(M;\, U.B_j)\, i(B_j;\, V.W) \leqq i(M;\, U.V.W).$$

Voici maintenant quelques *contre-exemples :*

1° *Cas où le calcul impose $y < 0$.* — Prenons dans A^3 un cylindre quadratique U, un plan tangent V à U selon une génératrice A, et une normale W à U en un point M de A. On a

$$e = 1,\quad f = 0,\quad g = 0,\quad x = 1,\quad z = 1,\quad y = -1;$$
$$U.V = 2A,\quad (U.V).W = 2M;\quad V.W = M,\quad U.(V.W) = M,$$

car M est simple sur U.

Un autre exemple est le suivant : U est une droite de A^3, A un cercle tangent à U en M, W une droite passant par M et non contenue dans le plan de U et V. On a

$$e = 3,\quad f = 1,\quad g = 1,\quad x = 2,\quad z = 2,\quad y = -1;$$
$$U.V = 2M,\quad (U.V).W = 2M;\quad V.W = M,\quad U.(V.W) = M.$$

2° *Cas où il y a d'autres composantes de $\widetilde{U}\cap\widetilde{V}$ (ou $\widetilde{V}\cap\widetilde{W}$) que les A_i (ou B_j).* — Soient U un plan de A^3, V un cône quadratique de sommet $M \in U$ et W une génératrice de V non contenue dans U. On a

$$e = 1,\quad f = 0,\quad g = 1,\quad x = 0,\quad y = 0,\quad z = 1;$$

ainsi $\widetilde{U} = U$, $\widetilde{V} = V$ et $\widetilde{W}$ est un plan générique passant par W. Les composantes de $V\cap\widetilde{W}$ contenant M sont ici W *et* une autre génératrice B; soient A_1 et A_2 les génératrices de V contenues dans U. On a

$$U.V = A_1 + A_2, \qquad (U.V).W = 2M; \qquad V.W = W \quad \text{et} \quad U.(V.W) = M.$$

Un autre exemple, où cependant M est simple sur V, est le suivant : nous construisons dans A^3 un cercle U_1, une droite V_1 le rencontrant en A_1 et non contenue dans le plan de U_1, et une droite W_1 rencontrant V_1 en B_1 et rencontrant U_1 en un autre point; nous prenons un point M de A^4 non contenu dans A^3, et nous construisons les cônes U, V, W, A et B projetant U_1, V_1, W_1, A_1 et B_1 de M; U est un cône quadratique de dimension 2, V et W des plans, A et B des droites. On a $e=2$, $f=1$, $g=1$, donc $x=1$, $y=0$, $z=1$; $\widetilde{W}$ est un hyperplan générique contenant W, $\widetilde{U}$ un hypercylindre générique contenant U et ayant pour base dans A^3 un cylindre générique $\widetilde{U}_1$ contenant U_1. Ici $\widetilde{U}_1$ recoupe V_1 en un point $A'_1 \neq A_1$; donc les composantes de $\widetilde{U} \cap V$ sont A et la projetante A' de A'_1. On a

$$U.V = A, \qquad (U.V).W = M; \qquad V.W = B, \qquad U.(V.W) = U.B = 2M,$$

car M est point double de U. Dans ce dernier exemple U, V et W sont portées par un hypercône Ω projetant de M une quadrique de A^3 non singulière contenant U_1, V_1 et W_1; et sur Ω^{ω} toutes les intersections considérées ont la « bonne dimension », c'est-à-dire qu'elles sont toutes d'excès $1 = 4 - 3 = n - \omega$ dans l'espace A^4.

Pour terminer ce Chapitre donnons des traductions de la formule de projection (th. 5) et de la formule des variétés produits (th. 4) dans le langage des *cycles*. Un cycle sera pour nous une combinaison linéaire formelle à coefficients entiers de variétés *non nécessairement de la même dimension :* $X = \sum_{\alpha} n_{\alpha} V_{\alpha}$. Étant donné deux variétés U et V, nous poserons $U.V = \sum_{\alpha} i(M_{\alpha};\, U.V) M_{\alpha}$, la sommation étant étendue à *toutes* les composantes M_{α} de $U \cap V$, quelles que soient leurs dimensions; on définit le produit d'intersection X.Y de deux cycles X et Y par linéarité. La formule des variétés produits s'écrit alors

$$(X \times X').(Y \times Y') = (X.Y) \times (X'.Y').$$

Si U est une variété de $A^n \times A^{n'}$ d'indice de projection fini sur A^n, nous poserons pr. $U = [U : U_1] U_1$ et nous étendrons cette définition par linéarité aux cycles; la formule de projection s'écrit alors, si l'on tient compte des éléments à l'infini,

$$Y . \operatorname{pr} . X = \operatorname{pr} . (X . (Y \times A^{n'})).$$

La formule d'associativité (prop. 10) se traduit par

$$X . (Y . Z) = (X . Y) . Z,$$

mais avec des conditions de validité très restrictives.

Nous avons donc, dans ce Chapitre, étudié la généralisation aux composantes excédentaires des propriétés des composantes propres. Nous avons vu que, des quatre premières propriétés de celles-ci, trois se généralisent : celle des variétés produits, celle des projections, et celle d'invariance birationelle; par contre, la propriété d'associativité ne se généralise pas. Quant à la dernière propriété fondamentale des composantes propres, celle de spécialisation des cycles (prop. 2, Chap. IV), qui généralise le principe de conservation du nombre, l'exemple de deux droites non sécantes de A^3 que l'on spécialise en deux droites sécantes, — ou celui d'une droite D et d'un cercle de A^3, se coupant en un seul point, où D est spécialisée en une droite du plan du cercle, — montrent que toute tentative de généralisation est vouée à l'échec.

CHAPITRE VI.

INTERSECTIONS SINGULIÈRES.

Nous nous intéresserons, dans ce Chapitre, aux variétés et cycles portées par une variété Ω^ω (la « variété ambiante »), elle-même plongée dans l'espace affine A^n (ou projectif P^n); soient U^u et V^v portées par Ω, et soit M^m une composante de $U \cap V$; le nombre $e_r = m - (u + v - \omega)$ est appelé l'*excès relatif* de M dans $U \cap V$; on a $e_r = e - (n - \omega)$, e étant l'excès absolu de M; rappelons que e_r peut être négatif, mais que, si M est simple sur Ω, on a $e_r \geq 0$. Les composantes propres, auxquelles s'applique la théorie de Weil-Chevalley, sont celles qui sont simples et d'excès relatif nul sur Ω. Nous nous intéresserons ici aux composantes d'excès relatif nul, qu'elles soient simples ou singulières sur Ω.

1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS LOCALES DU PRODUIT D'INTERSECTION. — Soient X et Y deux cycles de Ω; supposons qu'au voisinage d'une sous-variété A de Ω (en général contenue dans X et Y) X et Y soient des intersections complètes : $X = X_1.\Omega$, $Y = Y_1.\Omega$ modulo des cycles ne contenant pas A. Par définition nous poserons localement, c'est-à-dire modulo un cycle ne contenant pas A, $X.Y = X_1.\Omega.Y_1$. Cette définition ne dépend pas de X_1 et de Y_1 : si $X = X_2.\Omega$ et $Y = Y_2.\Omega$, on a

$$X_2.\Omega.Y_2 = X.Y_2 = X_1.\Omega.Y_2 = X_1.Y = X_1.\Omega.Y_1,$$

en vertu du principe local d'associativité appliqué en A. Dans le cas où A est simple sur Ω, X et Y sont localement des intersections complètes, et [I] (th. 6, p. 72) montre que notre définition généralise à certaines composantes singulières la définition de C. Chevalley relative aux composantes simples.

Lorsque des multiples entiers a_1X et b_1Y de X et Y sont, en A, des intersections complètes ($a_1X = X_1.\Omega$, $b_1Y = Y_1.\Omega$), nous poserons par définition $a_1b_1X.Y = X_1.\Omega.Y_1$ (localement). Ceci nous amène à introduire des multiplicités d'intersection *fractionnaires* et des cycles à coefficients *rationnels*. Cette définition ne dépend pas des multiples a_1X et b_1Y choisis : si $a_2X = X_2.\Omega$ et $b_2Y = Y_2.\Omega$, on en déduit

$$a_1X_2.\Omega = a_2X_1.\Omega \qquad \text{et} \qquad b_1Y_2.\Omega = b_2Y_1.\Omega,$$

d'où par associativité

$$(a_1b_1)(X_2.\Omega.Y_2) = (a_2b_2)(X_1.\Omega.Y_1).$$

Si M est une composante de X.Y nous noterons $i_\Omega(M; X.Y)$ son coefficient dans X.Y.

Soient X, Y et Z trois cycles qui soient intersections complètes en A : $X = X_1.\Omega$, $Y = Y_1.\Omega$, $Z = Z_1.\Omega$, X_1, Y_1 et Z_1 étant des cycles à coefficients rationnels. On a, localement,

$$(X.Y).Z = (X_1.\Omega.Y_1).Z_1 = (X_1.Y_1).\Omega.Z_1 = X_1.\Omega.(Y_1.Z_1) = X.(Y.Z),$$

en vertu du principe d'associativité local appliqué dans l'espace affine. Ceci montre que nos cycles intersections relatives *satisfont au principe d'associativité*, local et global.

Soient X et Y deux cycles de Ω, intersections complètes en A ($X = \Omega . X_1$, $Y = \Omega . Y_1$), et X′ et Y′ deux cycles de Ω' intersections complètes en A′ ($X' = \Omega' . X'_1$, $Y' = \Omega' . Y'_1$). On a alors, en $A \times A'$,

$$X \times X' = (\Omega \times \Omega').(X_1 \times X'_1) \qquad \text{et} \qquad Y \times Y' = (\Omega \times \Omega').(Y_1 \times Y'_1,$$

d'après la formule des variétés produits appliquée dans l'espace affine. On a donc

$$(X \times X').(Y \times Y') = (X.Y) \times (X'.Y'),$$

et la *formule des variétés produits s'applique* à nos cycles intersections relatives.

Considérons le produit de l'espace affine par lui-même et sa diagonale Δ. Le cycle $X_1 . Y_1$ est la projection sur le premier facteur du cycle $Z = (X_1 \times Y_1).\Delta$ de la diagonale. Donc le cycle

$$X.Y = (X_1.Y_1).\Omega$$

est, localement, la projection du cycle $Z.\Omega^\Delta$ (intersection prise sur Δ); comme A^Δ est simple sur Δ, nous pouvons appliquer notre définition à ce cycle; il est donc égal à

$$(X_1 \times Y_1).\Delta.(\Omega \times A^n), \qquad \text{car} \quad \Omega^\Delta = \Delta.(\Omega \times A^n);$$

X.Y est donc localement *égal à la projection de* $(X_1 \times Y_1).\Omega^\Delta$.

Soit Ω' une variété en correspondance birationnelle avec Ω, correspondance que nous supposons birégulière en A; soient X′, Y′ et A′ les cycles de Ω' correspondant régulièrement à X, Y et A. D'après le théorème de Severi (Chap. IV, th. 3) le cycle X_1 tel que $\Omega . X_1 = X$ (en A) est intersection complète de diviseurs; par linéarité nous sommes ramenés au cas où ceux-ci sont positifs; soit $X_1 = U_1 \ldots U_s$ et soit $F_i(X) = 0$ l'équation du diviseur U_i. Soit $\mathfrak{o}$ l'anneau des quotients $Q_\Omega(A)$ et f_i l'élément de $\mathfrak{o}$ induit par $F_i(X)$; les idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_\alpha$ de $\sum_{i=1}^{s} \mathfrak{o} f_i$ sont ceux des composantes X_α de X contenant A, — et, d'après [I] (th. 7, p. 51), le coefficient de X_α dans X est égal à la multiplicité de l'idéal $\sum_{i=1}^{s} \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_\alpha} f_i$ dans l'anneau

$$\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_\alpha} = Q_\Omega(X_\alpha).$$

Si V est une composante du cycle Y et si $\mathfrak{v}$ est son idéal premier dans $\mathfrak{o}$, les idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_\beta$ de l'idéal $\sum_{i=1}^{s} \overline{f}_i \frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{v}}$ sont ceux des composantes Z_β de $V.X_1$ contenant A, — le coefficient de Z_β dans $V.X_1$ étant égal à la multiplicité de l'idéal $\sum_{i=1}^{s} \left(\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{v}}\right)_{\mathfrak{p}_\beta} f_i$ dans l'anneau $\left(\frac{\mathfrak{o}}{\mathfrak{v}}\right)_{\mathfrak{p}_\beta} = Q_V(Z_\beta)$. Mais l'anneau des quotients $Q_{\Omega'}(A')$ est identique à $\mathfrak{o}$; en multipliant éventuellement les f_i par des éléments inversibles de $\mathfrak{o}$, on peut supposer qu'ils sont induits par des polynomes $F'(X')$, les X' étant les coordonnées de l'espace affine de Ω'; si U'_i est le diviseur d'équation $F'_i(X') = 0$, et si X'_1 est le cycle $U'_1 \ldots U'_s$, la première partie du raisonnement montre que, en A', on a

$$X' = X'_1 . \Omega',$$

et que les cycles $X_1 . Y$ et $X'_1 . Y'$ se correspondent sur Ω et Ω'. Nous avons ainsi prouvé l'*invariance birationnelle* des cycles intersections relatives.

Remarque. — Si seul l'un des cycles X ou Y est intersection complète (fractionnaire) en A, on peut encore définir localement le cycle $X.Y$ par $X.Y = X_1.Y$; on peut montrer dans certains cas (notamment si Ω est normale en A et si X est un diviseur) que c'est indépendant de X_1. On voit alors que les propriétés des produits et d'invariance birationnelle sont encore valables. Il en est de même de la formule de projection et du théorème de spécialisation. Par contre la formule d'associativité ne se généralise pas, comme le montre l'exemple de l'hypercône quadratique de A^4 donné au Chapitre V.

Soit M une composante de $X.Y$ contenant A, et soit $\widetilde{X}$ un cylindre passant par X, de direction générique sur un corps de définition des données, et de dimension $n - \omega$; nous supposerons les cycles X et Y positifs. Le cycle $\widetilde{X}.\Omega$ est, en M, somme de X et d'un cycle Z positif;

$Z = 0$ caractérise les composantes simples M. Ainsi la multiplicité relative r de M dans $X.Y$ est *au plus égale* à sa multiplicité absolue a (Chap. V), avec égalité pour les composantes simples.

Voici maintenant quelques exemples :

1° Soit Ω un cône du second degré de sommet M, X et Y deux génératrices de Ω; les cycles $2X$ et $2Y$ sont intersections complètes de Ω avec les plans tangents T_1 et T_2 le long de X et Y; on a donc

$$4X.Y = T_1.\Omega.T_2 = 2X.T_2 = 2M;$$

donc $r = \frac{1}{2}$ et $a = 1$.

2° Si l'on pose $m = m(M; \Omega)$, les nombres mr et a sont en général distincts. Prenons pour Y la section du cône Ω par une sphère S tangente à X en M; on a

$$2X.Y = T_1.\Omega.S = 2X.S = 4M, \qquad \text{d'où} \qquad r = 2;$$

par contre, X étant la tangente de rebroussement de Y, on a $a = 3$ et $a < mr$.

2. La formule de projection. — Soit X un cycle du produit $\Omega \times \Omega'$ de deux variétés et soit Z la projection algébrique de X sur le premier facteur; soit Y un cycle de Ω et M une composante d'excès relatif nul de $Z_\cap Y$; supposons que Y soit une intersection complète en M : $Y = \Omega.Y_1$. Soient $M_1, \ldots, M_s$ les composantes de $X_\cap(Y \times \Omega')$ se projetant en M; nous supposerons qu'aucune d'entre elles n'est à l'infini (ce qui est le cas si Ω' est une variété projective). En $M \times \Omega'$, et en toute composante M_i, $Y \times \Omega'$ est intersection complète :

$$Y \times \Omega' = (\Omega \times \Omega').(Y_1 \times P^{m'}),$$

d'après la formule des variétés produits. Par définition on a, en M_i,

$$X.(Y \times \Omega') = (Y_1 \times P^{m'}).X.$$

Si nous appliquons la formule de projection relative à l'espace il vient

$$i(M; Z.Y_1) = \sum_{i=1}^{s} [M_i : M].i(M_i; X.(Y_1 \times P^{m'})),$$

d'où

$$i_\Omega(M; Z.Y) = \sum_{i=1}^{s} [M_i : M].i_{\Omega\times\Omega'}(M_i; X.(Y \times \Omega')).$$

De cette formule locale nous déduisons le théorème global suivant :

THÉORÈME 1. — *Soient* X *un cycle du produit* $\Omega \times \Omega'$ *et* Y *un cycle de* Ω *tels qu'en toute composante* M *de* $Y_\cap \mathrm{pr} X$, Y *et* $\mathrm{pr} X$ *soient intersections complètes, et tels qu'en toute composante de* $X_\cap(Y \times \Omega')$ X *soit intersection complète; alors* $Y \times \Omega'$ *est intersection complète en toutes ces composantes et l'on a*

$$Y.\mathrm{pr} X = \mathrm{pr}((Y \times \Omega').X).$$

3. LE THÉORÈME DE SPÉCIALISATION. — Soit k un corps de définition de Ω; nous supposerons d'abord que X et Y sont globalement des intersections complètes : $X = X_1.\Omega$, $Y = Y_1.\Omega$. Soit (X', Y') une spécialisation de (X, Y) sur k (Chap. IV); nous la prolongeons en une spécialisation (X'_1, Y'_1) de (X_1, Y_1). De $X = X_1.\Omega$ et $Y = Y_1.\Omega$ nous déduisons $X' = X'_1.\Omega$ et $Y' = Y'_1.\Omega$ (Chap. IV, prop. 2). Donc le cycle intersection relative $X'.Y' = X'_1.\Omega.Y'_1$ est une spécialisation de $X.Y = X_1.\Omega.Y_1$ sur $(X, Y) \to (X', Y')$ avec référence à k. L'unicité du prolongement se démontre comme au Chapitre IV.

Passons maintenant à un cas un peu plus général. Supposons que, en toutes composantes de $X_\cap Y$, X et Y soient des intersections complètes, $X = X_1.\Omega$ et $Y = Y_1.\Omega$, avec les *mêmes* cycles X_1 et Y_1 en chacune de ces composantes [condition (C)]; on a alors globalement $X_1.\Omega = X + \overline{X}$ et $Y_1.\Omega = Y + \overline{Y}$, $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ ne contenant aucune composante de $X_\cap Y$. Soit (X', Y') une spécialisation de (X, Y) sur k, telle que $X'.Y'$ soit globalement défini; nous la prolongeons en une spécialisation $(X_1, Y_1) \to (X'_1, Y'_1)$; celle-ci se prolonge, et de façon unique, en une spécialisation

$$(X + \overline{X}).(Y + \overline{Y}) \to (X' + \overline{X}').(Y' + \overline{Y}').$$

En ajoutant éventuellement à X et à Y des cycles intersections complètes globales, nous pouvons supposer que tous les cycles en question sont positifs. Comme la spécialisation des cycles préserve les dimensions et les inclusions des cycles [nous disons qu'un cycle Z est contenu dans un cycle Z_1 si toute composante de Z est contenue dans une composante de Z_1 (*cf.* Chap. IV, § 3)], une spécialisation A' sur $(X, Y) \to (X', Y')$, avec référence à k de toute composante A de X.Y est contenue dans le cycle $X'.Y'$; or il est clair que A' figure dans $X'.Y'_1$ avec un coefficient au moins égal à celui de A dans $X.Y_1$; la même inégalité est vraie *a fortiori* pour les coefficients de A et A' dans X.Y et $X'.Y'$ en vertu de la condition (C) appliquée à Y. On a donc les inégalités

$$X'.Y' \geqq (X.Y)', \qquad \ldots, \qquad \overline{X}'.\overline{Y}' \geqq (\overline{X}.\overline{Y})';$$

de l'égalité

$$((X+\overline{X}).(Y+\overline{Y}))' = ((X'+\overline{X}').(Y'+\overline{Y}'))$$

nous déduisons ainsi que l'on a

$$X'.Y' = (X.Y)'.$$

Remarquons que nous n'avons utilisé la condition (C) que pour le cycle Y (et aussi pour $\overline{Y}$, mais ça s'en déduit immédiatement); notre résultat est donc encore valable pour la définition donnée en remarque au paragraphe **1**.

La condition (C) sera automatiquement vérifiée si X.Y possède au plus *une* composante singulière A; soit en effet $X = X_1.\Omega$ en A; en toute autre composante A_α de X.Y, soit $X_1.\Omega = X + \sum_\lambda n_{\alpha\lambda} Z_{\alpha\lambda}$, les $Z_{\alpha\lambda}$ étant des variétés contenant A_α; soit $C_{\alpha\lambda}$ un cylindre de dimension convenable de l'espace, passant par $Z_{\alpha\lambda}$, et de direction générique sur les données; alors $C_{\alpha\lambda}$ ne contient ni A, ni aucune $A_{\alpha'}$ distincte de A_α; il suffit alors de remplacer X_1 par $X_1 - \sum_{\alpha,\lambda} n_{\alpha\lambda} C_{\alpha\lambda}$ pour que la condition (C) soit vérifiée par X et X_1 en toute composante de X.Y. Remarquons que, dans la plupart des applications, le cycle général X.Y ne contiendra aucune composante singulière. Par conséquent :

THÉORÈME 2 (« théorème de spécialisation »). — *Soit k un corps de définition de Ω, X et Y deux cycles de Ω tels que, en toutes les* *composantes* (supposées d'excès relatif nul) *de leur intersection* X *et* Y *soient des intersections complètes, et qu'au plus une de ces composantes soit singulière* [ou plus généralement que la condition (C) soit satisfaite par X ou Y]; *soit* (X', Y') *une spécialisation de* (X, Y) *sur* k *telle que* $X'.Y'$ *soit défini; alors* $X'.Y'$ *est l'unique spécialisation de* $X.Y$ *sur* $(X, Y) \to (X', Y')$ *avec référence à* k.

4. Groupes d'holotomie. — Soit A une sous-variété de Ω; dans le groupe gradué Γ des cycles portés par Ω nous avons, dans la première partie de ce Chapitre, identifié deux cycles qui ne diffèrent que par des variétés ne contenant pas A; nous avons utilisé implicitement le fait que cette relation d'équivalence est compatible avec la structure de groupe gradué de Γ, et nous avons opéré dans le groupe gradué quotient Γ_A. Nous appellerons ce groupe Γ_A le *groupe des cycles locaux* relatifs à A, et ses éléments des *cycles locaux* (relatifs à A). Lorsque $B \subset A$, Γ_A est un groupe quotient de Γ_B.

Nous dirons qu'un cycle local $\widetilde{X}^{\omega-s}$ est une *intersection complète* s'il existe un cycle X de la classe $\widetilde{X}$ et un cycle X_1^{n-s} de l'espace tels que $X = X_1.\Omega$. Nous avons surtout considéré jusqu'ici des intersections complètes; celles-ci forment un sous-groupe stable H du groupe gradué Γ_A; le raisonnement du paragraphe 1 montre que H est univoquement déterminé par la donnée de l'anneau des quotients $Q_\Omega(A)$; deux cycles locaux dont la différence est une intersection complète sont dits *holotomiques*. Nous allons maintenant nous intéresser au groupe quotient $H(\Omega, A) = \frac{\Gamma_A}{H}$ que nous appellerons *le groupe d'holotomie* de Ω en A; sa structure ne dépend que de celle de l'anneau $Q_\Omega(A)$; c'est donc un *invariant birationnel birégulier*. C'est un groupe gradué, somme directe des sous-groupes $H_i(\Omega, A)$ $(\dim A \leqq i \leqq \omega)$; $H_{\dim A}(\Omega, A)$ et $H_\omega(\Omega, A)$ sont triviaux. Si $B \subset A$, on voit aisément que $H(\Omega, A)$ est un groupe quotient de $H(\Omega, B)$. Nous pourons aussi considérer *le groupe global d'holotomie* $H(\Omega)$ de Ω; c'est le quotient de Γ par le sous-groupe des intersections complètes; $H(\Omega, A)$ est un quotient de $H(\Omega)$ quelle que soit la sous-variété A de Ω.

Si A est une sous-variété *simple* de Ω, toute variété V contenant A est, en A, intersection de Ω avec un cylindre générique passant par V; $H(\Omega, A)$ est donc trivial.

Tout cycle local est holotomique à un cycle positif; si, en effet, $X=Y-Z$, $Y\geqq 0$, $Z\geqq 0$, et si $Z=\sum_\alpha n_\alpha V_\alpha$, nous ferons passer par V_α un cylindre générique de dimension convenable C_α; alors $C_\alpha.\Omega\geqq V_\alpha$; posons $C=\Sigma n_\alpha C_\alpha$; ainsi $C.\Omega\geqq Z$, d'où $X+C.\Omega\geqq Y\geqq 0$. Ainsi $H(\Omega, A)$ est un quotient du semi-groupe des cycles locaux positifs.

Proposition 1. — *Si Ω est normale le long de A, tout diviseur local positif X, qui est intersection complète, est intersection complète de Ω avec un diviseur λ positif de l'espace.*

Soit $\mathfrak{o}$ l'anneau des quotients de A dans Ω et soit $X=\sum_\alpha n_\alpha V_\alpha$ un diviseur local positif. Soient $X=\Omega.(U_1-U_2)$, où U_1 et U_2 sont deux diviseurs positifs d'équations (Chap. IV, § 2) $F_1(X)=0$ et $F_2(X)=0$, — f_1 et f_2 les fonctions induites sur $\mathfrak{o}$ par $F_1(X)$ et $F_2(X)$, — et $\mathfrak{p}_\alpha$ l'idéal premier minimal de $\mathfrak{o}$ correspondant à V_α; comme $\mathfrak{o}$ est intégralement fermé, $\mathfrak{o}f_1$ et $\mathfrak{o}f_2$ sont des produits de puissances symboliques des $\mathfrak{p}_\alpha$:

$$\mathfrak{o}f_1=\prod_\alpha \mathfrak{p}_\alpha^{(r_\alpha)}, \qquad \mathfrak{o}f_2=\prod_\alpha \mathfrak{p}_\alpha^{(s_\alpha)};$$

et l'on a

$$\Omega.U_1=\sum_\alpha r_\alpha V_\alpha \quad \text{et} \quad \Omega.U_2=\sum_\alpha s_\alpha V_\alpha;$$

on a donc $r_\alpha-s_\alpha=n_\alpha\geqq 0$; l'idéal $\mathfrak{o}f_1f_2^{-1}$ est égal à $\prod_\alpha \mathfrak{p}_\alpha^{(n_\alpha)}$, et est donc entier; ainsi $f_1f_2^{-1}$ appartient à $\mathfrak{o}$ et, en le multipliant éventuellement par un élément inversible de $\mathfrak{o}$, nous voyons que U_1-U_2 est un diviseur positif.

Remarques. — 1. Cette proposition 1 est à rapprocher du théorème (global) de Muhly : pour que Ω soit normale il faut et il suffit que le système linéaire découpé sur Ω par les hypersurfaces d'ordre n soit complet quel que soit n.

2. On peut avoir $H(\Omega, A)=\{O\}$ sans que A soit simple sur Ω; il en est

ainsi si A est un point double ordinaire d'une courbe plane Ω : $A = \Omega.(T - D)$ où T est une tangente à Ω en A et D une droite générique passant par A. Si Ω est normale le long de A et si $H(\Omega, A) = \{O\}$, on voit aussitôt que le théorème d'unique factorisation s'applique aux éléments de $\mathfrak{o}$.

Remarquons que nous avons défini les multiplicités d'intersection relatives pour les cycles dont la classe est un élément *périodique* de $H(\Omega, A)$. Nous allons, pour terminer, calculer quelques groupes d'holotomie.

Proposition 2. — *Sur un cône Ω de degré 2 ou 3 de l'espace A^3, tout cycle est globalement holotomique à une somme de génératrices.*

Soit V une courbe tracée sur un cône du second degré Ω; par une génératrice D de Ω nous traçons le conoïde U lieu des droites parallèles à un plan donné et s'appuyant sur D et V; V figure avec multiplicité 1 dans $\Omega.U$ si l'on prend D et le plan génériques et indépendants sur les données; le reste de l'intersection se compose de multiples de D et des génératrices de Ω parallèles au plan donné.

Si Ω est du troisième degré, soient O son sommet, D une génératrice et C une section plane (génériques); par tout point P de la courbe donnée V on fait passer le plan contenant D; celui-ci coupe C en trois points, dont l'un a est sur D, et un second b sur la génératrice de P; soit E la droite joignant P au troisième c; on prendra pour U la surface lieu de la droite E. Le diviseur $\Omega.U$ est somme de V (avec coefficient 1), d'un multiple de C (qui est intersection complète), d'un multiple de D, et de multiples des génératrices OP telles que b et c se trouvent confondus. Ces dernières correspondent aux points P qui se trouvent sur les génératrices des points de contact des tangentes menées par a à la cubique plane C.

Proposition 3. — *Soit Ω un cône de A^3 de sommet O et normal en O, et soit X un diviseur de Ω composé de génératrices; si X est intersection complète en O, on a $X = X_1.\Omega$ où X_1 est cône de sommet O.*

On peut supposer, en ajoutant éventuellement une intersection complète avec un cône de sommet O, que X est positif, et que l'on a $X = \Omega.X_1$ où X_1 est un diviseur positif de A^3 (prop. 1). Soit $F(X) = 0$

l'équation de Ω, et $G(X) = G_t(X) + \ldots + G_{t+m}(X) = 0$ celle du diviseur X_1, G_s étant une forme de degré s; l'anneau des quotients $\mathfrak{o}$ de O sur Ω admet une notion de degré. L'idéal $\mathfrak{o}g$, où g est la fonction induite par $G(X)$ sur Ω, est, puisque $\mathfrak{o}$ est intégralement fermé, produit de puissances symboliques d'idéaux premiers correspondant à des génératrices, c'est-à-dire d'idéaux homogènes; $\mathfrak{o}g$ est donc un idéal homogène et contient les éléments $g_t, \ldots, g_{t+m}$; ceci n'est possible que si tous les g_{t+i} sont des multiples de g_t; on a donc $\mathfrak{o}g = \mathfrak{o}g_t$ et la proposition 3 est démontrée.

Corollaire 1. — *Si Ω est un cône du second degré de sommet* O, *le groupe d'holotomie* $H_1(\Omega, O)$ *est cyclique d'ordre* 2.

En effet, une génératrice D n'est pas intersection complète, mais la somme de deux génératrices l'est; ainsi deux génératrices quelconques sont holotomiques.

Corollaire 2. — *Soit Ω un cône elliptique de sommet* O *sur le corps des nombres complexes; le groupe* $H_1(\Omega, O)$ *est isomorphe au produit d'un groupe cyclique d'ordre* 3 *par le groupe des paramètres elliptiques uniformisant une base de Ω.*

Soit X un diviseur de Ω composé de génératrices, $X = \sum_\alpha n_\alpha D_\alpha$; soit t_α le paramètre elliptique de D_α; pour que X soit holotomique à zéro, il faut et il suffit que les points P_α, où les D_α rencontrent une base de Ω, soient sur une même courbe d'ordre $\sum_\alpha \frac{n_\alpha}{3}$, compte tenu des multiplicités; ceci veut dire que :

a.

$$\sum_\alpha n_\alpha \equiv 0 \mod. 3$$

b.

$$\sum_\alpha n_\alpha t_\alpha \equiv 0 \quad \text{(modulo périodes).}$$

Soit alors φ la classe d'une génératrice d'inflexion D_0 ($3t_0 \equiv 0$ modulo périodes) et F le sous-groupe, cyclique d'ordre 3, engendré par celle-ci; soit E le groupe des classes de diviseurs composés de génératrices et de degré zéro; il est clair que $H_1(\Omega, O)$ est somme directe de E et de F. C. Q. F. D.

Les génératrices de Ω dont la classe est périodique sont donc les génératrices d'inflexion ($3t \equiv 0$), les génératrices sextactiques ($6t \equiv 0$), et ainsi de suite.

Remarquons que dans les deux cas étudiés les groupes $H_1(\Omega)$ et $H(\Omega, O)$ sont isomorphes.

Proposition 4. — *Si Ω est une quadrique sans singularités de l'espace A^3, $H_1(\Omega)$ est un groupe cyclique infini.*

Soient α et β les classes, dans $H_1(\Omega)$, de deux génératrices de systèmes différents; on a $\alpha + \beta = 0$, donc deux génératrices de même système sont holotomiques. Toute courbe V de Ω est holotomique à une combinaison linéaire de génératrices (mener, par un point de Ω, le cône s'appuyant sur V). Si S est une surface intersectant Ω selon des génératrices, nous écrirons $S.\Omega = X_1 + X_2$, où X_i est une combinaison linéaire de génératrices de même système. Si D (resp. D') est une génératrice générique du premier (resp. second) système, on a $D.S = D.X_2$ (resp. $D'.S = D'.X_1$); ceci montre que les cycles X_1 et X_2 ont même degré, égal à celui de S, donc qu'il n'y a d'autre relation entre α et β que $\alpha + \beta = 0$.