

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

B. GAMBIER

A. HOCQUENGHEM

**Ellipses ayant deux sommets consécutifs donnés**

*Journal de mathématiques pures et appliquées* 9<sup>e</sup> série, tome 29 (1950), p. 275-311.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1950\\_9\\_29\\_275\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1950_9_29_275_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

---

---

*Ellipses ayant deux sommets consécutifs donnés;*

PAR B. GAMBIER ET A. HOCQUENGHEM.

---

**1. INTRODUCTION.** — Nous nous proposons d'étudier les  $\infty^1$  ellipses (E) du plan  $xOy$  dont deux points donnés A, B sont sommets consécutifs; elles admettent pour enveloppe une courbe ( $\mathcal{E}$ ) de degré 8, classe 4, parallèle à une ellipse d'excentricité  $1:\sqrt{2}$ ; par chaque point du plan passent quatre ellipses, réelles ou imaginaires; il existe quatre ellipses, réelles ou non, tangentes à une droite donnée; nous indiquerons le nombre de ces ellipses réelles, suivant la position du point ou de la droite. Nous discuterons le nombre d'intersections réelles d'une ellipse (E) avec la courbe ( $\mathcal{E}$ ); en dehors des points limites et de A, B, il y a six intersections dont deux au plus sont réelles. Nous indiquerons le lieu du point de contact de deux ellipses (E), ( $E_i$ ) tangentes. Deux des ellipses (C) sont circulaires et, par rotation autour de  $Ox$ , engendrent un tore (T) dont l'étude permet de donner, géométriquement, de nombreux résultats.

**2. ÉQUATIONS PONCTUELLE ET TANGENTIELLE DE (E).** — Nous supposons que  $Ox$  est porté par BA,  $Oy$  par la médiatrice du segment BA; A et B ont pour coordonnées  $(R, o)$ ,  $(-R, o)$ ; le centre  $\omega$  de (E) décrit évidemment le cercle (C) de centre O et rayon R; nous appelons  $\varphi$  l'angle  $(\vec{Ox}, \vec{O\omega})$ ; en raison des symétries  $Ox, Oy, O$ , il suffit d'étudier le cas  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ; si nous prenons pour nouveaux axes :  $\vec{\omega X}$  prolongement de  $\vec{B\omega}$  et  $\vec{\omega Y}$  prolongement de  $\vec{A\omega}$ , un point

de coordonnées  $(x, y)$  par rapport à  $xOy$  a pour coordonnées  $(X, Y)$  relativement à  $\omega XY$  :

$$X = (x - R) \cos \frac{\varphi}{2} + y \sin \frac{\varphi}{2}, \quad Y = -(x + R) \sin \frac{\varphi}{2} + y \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Les demi-axes de (E) portés par  $\omega X$ ,  $\omega Y$  sont égaux à  $2R \cos \frac{\varphi}{2}$ ,  $2R \sin \frac{\varphi}{2}$ , de sorte que, posant  $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ , l'équation de (E) est

$$(E) \quad (x - R + yt)^2 + \left(x + R - \frac{y}{t}\right)^2 = 4R^2.$$

Par tout point du plan, autre que A ou B, passent quatre ellipses; l'étude de l'enveloppe (E) permettra d'indiquer le nombre d'ellipses réelles : 4, 2, 0, suivant la position du point.

Les tangentes à (E) en A, B concourent au point  $\omega'$  diamétralement opposé à  $\omega$  sur C; les équations tangentielles de  $\omega'$ , A, B sont respectivement

$$uR \cos \varphi + vR \sin \varphi - \omega = 0, \quad uR + \omega = 0, \quad uR - \omega = 0,$$

de sorte que (E) a une équation tangentielle de la forme

$$\lambda(u^2 R^2 - \omega^2) + (uR \cos \varphi + vR \sin \varphi - \omega)^2 = 0.$$

Les coordonnées du centre sont  $(-R \cos \varphi, -R \sin \varphi, 1 - \lambda)$  d'une part et  $(R \cos \varphi, R \sin \varphi, 1)$  d'autre part; on a donc  $\lambda = 2$  et l'équation tangentielle

$$(\bar{E}) \quad 2(u^2 R^2 - \omega^2) + (uR \cos \varphi + vR \sin \varphi - \omega)^2 = 0.$$

Il existe quatre ellipses, réelles ou imaginaires, tangentes à une droite (D) arbitraire du plan; on les obtient, avec la règle et le compas; l'équation ( $\bar{E}$ ) s'écrit, si l'on veut,

$$(1) \quad uR \cos \varphi + vR \sin \varphi - \omega = \pm \sqrt{2(\omega^2 - u^2 R^2)}$$

et exprime que le point  $\omega'(-R \cos \varphi, -R \sin \varphi)$  s'obtient en coupant (C) par chacune des parallèles à (D) menées à la distance  $\pm \sqrt{\frac{2(\omega^2 - u^2 R^2)}{u^2 + v^2}}$  de (D).

Ceci peut s'obtenir géométriquement : une tangente (D) mobile à (E) coupe les tangentes fixes  $\omega'A$ ,  $\omega'B$  en  $a$ ,  $b$  et le produit  $\frac{\overline{aA}}{a\omega'} \cdot \frac{\overline{bB}}{b\omega'}$  reste constant quand la tangente varie; si  $A'$ ,  $B'$ ,  $\omega''$  sont les projections de  $A$ ,  $B$ ,  $\omega'$  sur (D), on a

$$\frac{\overline{aA}}{a\omega'} = \frac{\overline{AA'}}{\omega'\omega''}, \quad \frac{\overline{bB}}{b\omega'} = \frac{\overline{BB'}}{\omega'\omega''}$$

et, par suite, le produit  $\frac{\overline{AA'} \cdot \overline{BB'}}{\omega'\omega''^2}$  reste constant quand la droite (D) varie en restant tangente à (E); en prenant le cas où (D) est parallèle

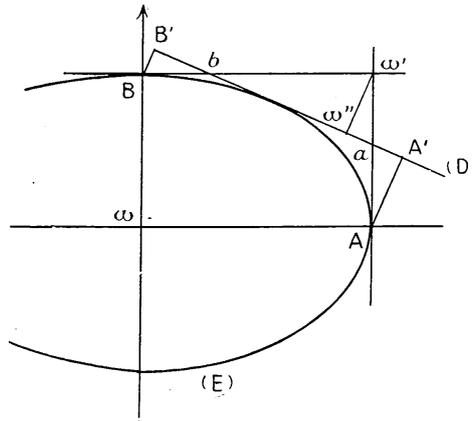


Fig. 1.

à  $\omega'B$ , on voit que cette valeur constante est (1 : 2); c'est justement ce qu'exprime l'équation (1) ou, si l'on préfère, c'est le moyen d'obtenir géométriquement cette équation. Si donc (D) est donnée, les distances  $AA'$ ,  $BB'$  sont connues, de sorte que  $\omega'$  s'obtient en coupant (C) par l'une des parallèles à (D) menées à la distance  $\sqrt{2 \overline{AA'} \cdot \overline{BB'}}$  de cette droite (fig. 1).

5. ENVELOPPE (E) DES ELLIPSES (E). — Pour obtenir l'équation ponctuelle de (E) nous adjoignons à (E) l'équation dérivée en  $t$ ;

en supprimant le facteur  $y = 0$  correspondant à  $Ox$ , nous avons

$$(2) \quad x - R + yt + \frac{1}{t^2} \left( x + R - \frac{y}{t} \right) = 0.$$

La sécante commune, variable, à (E) et à l'ellipse infiniment voisine est donc un diamètre de (E); elle a pour pente  $\frac{t}{1-t^2}$ , moitié de la pente de  $O\omega$ , de sorte que si  $\Omega$  et  $\Omega'$  sont les projections sur  $Ox$  des deux points  $\omega$ ,  $\omega'$  diamétralement opposés, la sécante commune est portée par  $\omega\Omega'$ ; la pente  $m$  de la tangente à (E) en chaque point limite s'obtient en dérivant (E) en  $x$  et remplaçant  $\frac{dy}{dx}$  par  $m$ , ce qui donne

$$(x - R + yt)(1 + mt) + \left( x + R - \frac{y}{t} \right) \left( 1 - \frac{m}{t} \right) = 0$$

ou, tenant compte de (2),  $m = \frac{t^2 - 1}{2t}$ , de sorte que les tangentes limites à (E) sont parallèles à la tangente à (C) en  $\omega$ .

Nous allons obtenir ces propriétés de diverses façons; utilisons une propriété projective facile à établir: si deux coniques (E), (E<sub>1</sub>) ont une corde commune AB, les pôles de AB par rapport à (E), (E<sub>1</sub>) sont sur le côté du triangle conjugué commun contenant les sommets du triangle conjugué commun autres que celui porté par AB [il suffit de considérer le cas où (E) et (E<sub>1</sub>) sont deux cercles et où AB est ou l'axe radical ou la droite de l'infini]. Donc si (E), (E<sub>1</sub>) sont deux ellipses de notre étude, et  $\omega$ ,  $\omega_1$  leurs centres, les pôles de AB sont les points  $\omega'$ ,  $\omega'_1$  diamétralement opposés à  $\omega$ ,  $\omega_1$  sur (C);  $\omega'\omega'_1$  est donc l'un des côtés du triangle conjugué commun (fig. 2) et perce AB en un point V, dont le conjugué harmonique U par rapport à A, B est le sommet du triangle conjugué commun situé sur AB; si (E<sub>1</sub>) tend vers (E),  $\omega_1$  tend vers  $\omega$ ,  $\omega'_1$  vers  $\omega'$ , le point V devient le point commun à AB et à la tangente à (C) en  $\omega'$ , et le point U devient la projection  $\Omega'$  de  $\omega'$  sur AB.

D'autre part, la corde limite est la même pour (E) que pour la conique dégénérée

$$(x - R + yt)^2 + \left( x + R - \frac{y}{t} \right)^2 = 0$$

représentant les asymptotes de (E) : la corde limite de cette nouvelle conique passe toujours par le point double,  $\omega$ , centre de (E); cette corde limite est donc  $\omega\Omega'$ .

Nous allons arriver au même résultat d'une façon encore plus précise; parmi les coniques (E) figurent deux cercles obtenus pour  $\omega$  coïncidant avec l'un ou l'autre des points  $(o, R), (o, -R)$ ; en faisant tourner ces cercles autour de AB, ils engendrent le tore T (à points coniques réels) qui va nous être précieux; prenant  $Oz$  comme axe

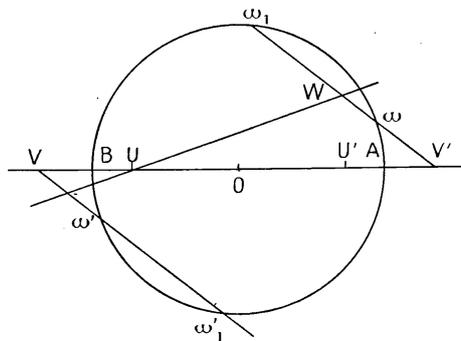


Fig. 2

complétant le trièdre trirectangle  $Oxyz$ , considérons la méridienne particulière (M) située dans le plan  $Oxz$

$$(3) \quad y = 0, \quad x^2 + z^2 - 2Rz - R^2 = 0.$$

Joignons son centre H  $(o, o, R)$  au point  $\omega$  centre de (E); le cylindre de base (M) et de génératrices parallèles à  $H\omega$  a pour trace horizontale (E), car le carré formé par HA, HB et les tangentes en A, B à (M) a pour projection le rectangle formé par  $\omega A, \omega B$  et les tangentes  $\omega' A, \omega' B$  à (E); le cylindre analogue relatif à  $\omega_1$  donne pour trace  $(E_1)$  et les points communs à (E),  $(E_1)$  autres que A, B sont ceux où le plan  $xOy$  coupe la conique complétant l'intersection des deux cylindres; la trace horizontale du plan de cette conique est la corde commune à (E),  $(E_1)$ ; cherchons ce plan; on doit couper les deux cylindres par un plan parallèle aux génératrices, donc parallèle au plan  $H\omega\omega_1$ ; si  $\omega\omega_1$  coupe AB au point  $V'(\overline{OV} + \overline{OV'} = o)$ , les

plans auxiliaires ont leur trace sur  $xOz$  parallèle à  $HV'$  (*fig. 3*) :  $\alpha\beta$  étant une telle trace, nous menons par  $\alpha$  et  $\beta$  les parallèles aux axes  $H\omega$ ,  $H\omega_1$  des deux cylindres, et nous avons ainsi un parallélogramme  $\alpha\gamma\beta\gamma'$ , dont les diagonales  $\alpha\beta$ ,  $\gamma\gamma'$  se coupent en leur milieu  $\delta$ ;  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont deux points de la conique commune nouvelle, le plan  $H\delta\gamma\gamma'$  est le plan de cette conique;  $H\delta$  coupe  $AB$  au point  $U$  déjà indiqué, car on doit avoir,  $H\delta$  étant perpendiculaire à  $\alpha\beta$  ou  $HV'$ ,

$$\overline{OV'} \cdot \overline{OU} = -OH^2 = -R^2$$

et nous avons vu que  $\overline{OU} \cdot \overline{OV} = R^2$ , tandis que  $\overline{OV'} = -\overline{OV}$ ; les

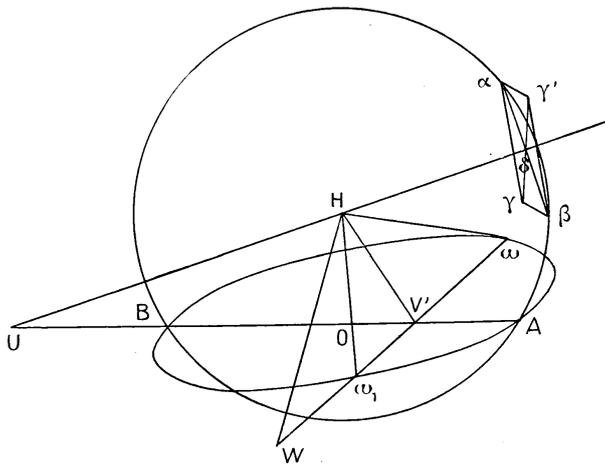


Fig. 3.

directions  $\gamma\delta$  et  $\alpha\beta$  sont conjuguées par rapport à  $\gamma\alpha$ ,  $\gamma\beta$  ou  $H\omega$ ,  $H\omega'$ ; si donc  $\delta$  vient en  $H$ , la droite  $\delta\gamma$  devient une droite issue de  $H$ , située dans le plan  $H\omega\omega'$ , conjuguée de  $HV'$  par rapport à  $H\omega$ ,  $H\omega_1$ : elle perce  $\omega_1$  en un point  $W$  conjugué harmonique de  $V'$  par rapport à  $\omega$  et  $\omega_1$  et  $UW$  est la corde commune à  $(E)$  et  $(E_1)$ ; si  $\omega_1$  tend vers  $\omega$ , le point  $W$  tend vers  $\omega$ , et le point  $U$  tend vers  $\Omega'$ ; nous avons retrouvé le résultat annoncé. D'autre part les deux cylindres étudiés ont deux plans tangents communs, les points de contact étant ceux où les deux coniques communes se coupent; les traces horizontales de ces deux plans tangents sont parallèles à  $\omega\omega_1$  (car les plans

tangents sont parallèles au plan  $H\omega\omega_1$ , des deux axes) et tangentes simultanément à  $(E)$  et  $(E_1)$ , de sorte que les deux coniques  $(E)$ ,  $(E_1)$  ont un ombilic qui est le point à l'infini de  $\omega'\omega_1$  : l'autre ombilic porté par ce côté  $\omega'\omega_1$  du triangle conjugué commun est donc le milieu du segment  $\omega'\omega_1$  [on a en effet la proposition projective suivante :  $AB$  étant une corde commune à deux coniques  $(E)$ ,  $(E_1)$ ,  $\omega'$  et  $\omega_1$  les pôles de  $AB$  par rapport à ces coniques, la droite  $\omega'\omega_1$  est côté du triangle conjugué commun et porte deux ombilics conjugués harmoniques par rapport à  $\omega'$  et  $\omega_1$  : il suffit de supposer que  $(E)$ ,  $(E_1)$  sont

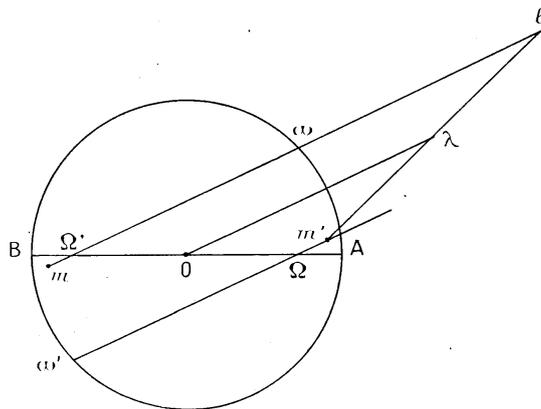


Fig. 4.

deux cercles et que  $AB$  est la droite de l'infini;  $\omega'$ ,  $\omega_1$  sont alors les centres des cercles, et les ombilics sont les centres de similitude]. En supposant que  $\omega_1$  tende vers  $\omega$ , on a le résultat annoncé pour la direction des tangentes à  $(E)$  aux points limites.

Mais alors ce résultat va établir géométriquement que  $(\mathcal{E})$  se compose de deux branches de courbe parallèles entre elles; en effet considérons les ellipses  $(E)$ ,  $(E')$  dont les centres sont  $\omega$ ,  $\omega'$  diamétralement opposés sur  $(C)$  (fig. 4). L'ellipse  $(E)$  donne deux points limites  $l$ ,  $m$  et l'ellipse  $(E')$  les points limites  $l'$ ,  $m'$  symétriques de  $l$ ,  $m$  par rapport à  $O$ ;  $\vec{\omega'm'} = -\vec{\omega m} = \vec{\omega l}$ , de sorte que la figure  $\omega\omega'm'l$  est un parallélogramme; par suite  $\vec{m'l} = \vec{\omega'\omega}$ . La longueur  $\omega'\omega$  est constante, égale à  $2R$ ; de plus les tangentes en  $l$ ,  $m$ ,  $l'$ ,  $m'$  sont parallèles aux

tangentes en  $\omega$  et  $\omega'$  à (C), de sorte que  $m'l$  est normale à ( $\mathcal{E}$ ) en  $l$  et  $m'$ , ce qui démontre le théorème; en menant  $\overrightarrow{O\lambda} = \overrightarrow{\omega l}$ , le point  $\lambda$  est le milieu du segment  $m'l$  et  $\lambda$  décrit une courbe parallèle aux deux branches de  $\mathcal{E}$  décrites par  $l$  et  $m'$  respectivement, la distance parallèle étant  $R$ ; nous allons voir que *le lieu de  $\lambda$  est une ellipse*.

Considérons en effet le tore (T) défini plus haut; le lieu des centres des méridiennes est le cercle égal à (C) d'équation

$$y = 0, \quad x^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Ce cercle et (C) sont symétriques par rapport au plan  $x + z = 0$ , de sorte que, si nous effectuons une projection parallèle à la direction  $(1, 0, 1)$ , chaque méridienne de (T) se projette horizontalement suivant une ellipse (E), d'après un raisonnement déjà fait, relativement aux rayons de la méridienne terminés en A et B et aux tangentes en ces points; *l'enveloppe des ellipses (E) est donc le contour de l'ombre portée par (T) sur  $xOy$ , quand les rayons lumineux sont parallèles à la direction  $(1, 0, 1)$ ; mais cette ombre est aussi l'enveloppe des ombres portées sur  $xOy$  par les diverses sphères inscrites dans (T) le long d'une méridienne*; chacune de ces nouvelles ombres portées est une ellipse dont le centre  $\omega$  est l'ombre du centre de la sphère, donc situé sur (C), et ces diverses ellipses se déduisent les unes des autres dans un mouvement de translation où leur centre décrit (C); on arrive à la même enveloppe en considérant l'ellipse fixe (E') d'équation  $x^2 + 2y^2 = 4R^2$  du plan  $xOy$  et déplaçant d'un mouvement de translation un cercle de rayon  $R$  dont le centre décrit (E') : cela donne *la courbe ( $\mathcal{E}$ ), composée de deux ovales distincts ( $\mathcal{E}_1$ ), ( $\mathcal{E}_2$ ), parallèle à (E') à la distance parallèle  $R$*  [des considérations simples de géométrie descriptive permettent d'obtenir le résultat relatif à l'ombre du tore; des considérations classiques de la théorie des enveloppes donnent analytiquement le résultat; on sait en effet que si l'on a les équations  $x = f(\alpha, \beta)$ ,  $y = g(\alpha, \beta)$  définissant  $x$  et  $y$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$ , l'enveloppe des courbes  $\alpha = \text{const.}$  est la même que celle des courbes  $\beta = \text{const.}$ , et s'obtient en éliminant  $\alpha$ ,  $\beta$  entre les deux équations qui précèdent et la nouvelle équation  $\frac{\partial f}{\partial \alpha} : \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial \beta} : \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$ ;

les deux mouvements de translation en jeu dans la démonstration reviennent à écrire

$$x = f(\alpha) + f_1(\beta), \quad y = \varphi(\alpha) + \varphi_1(\beta)$$

et à chercher l'enveloppe des courbes  $\alpha = \text{const.}$  ou des courbes  $\beta = \text{const.}$ , ce qui conduit à ajouter l'équation

$$f'(\alpha) : \varphi'(\alpha) = f'_1(\beta) : \varphi'_1(\beta)$$

dont l'interprétation géométrique est facile]. Pour obtenir l'ellipse (E') nous avons pris la sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0$$

égale aux sphères inscrites dans une méridienne et considéré l'ellipse section par  $xOy$  du cylindre circonscrit à cette sphère parallèlement à la direction  $(1, 0, 1)$ , ce qui donne

$$x^2 + 2y^2 = 4R^2.$$

Pour obtenir les expressions, en fonction de  $t$ , des coordonnées des points limites, nous résolvons les équations (E) et (1) en  $x, y$ , ce qui conduit à écrire avec une inconnue  $\rho$  auxiliaire

$$\frac{x - R + yt}{1} = \frac{-\left(x + R - \frac{y}{t}\right)}{t^2} = \rho, \quad \rho^2(1 + t^4) = 4R^2$$

et l'on peut écrire, avec  $\varepsilon = \pm 1$ ,

$$(4) \quad \begin{cases} x - R + yt = \frac{2\varepsilon R}{\sqrt{1+t^4}}, & x = R \left[ \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2\varepsilon(1-t^2)}{\sqrt{1+t^4}} \right]; \\ x + R - \frac{y}{t} = \frac{-2\varepsilon R t^2}{\sqrt{1+t^4}}, & y = 2Rt \left[ \frac{1}{1+t^2} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+t^4}} \right]; \end{cases}$$

$$(5) \quad \frac{x'_t}{4Rt} = \frac{y'_t}{2R(1-t^2)} = \frac{1}{(1+t^2)^2} + \frac{\varepsilon(1+t^2)}{(1+t^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Un point de la courbe n'est déterminé d'une façon unique que si, outre  $t$ , on précise la valeur de  $\varepsilon$ ; quand  $t$  est réel ou imaginaire pure, on peut convenir d'adopter systématiquement pour  $\sqrt{1+t^4}$  la détermination positive; pour  $t$  réel, le lieu des points  $(t, +1)$  est un ovale ( $\mathcal{E}_1$ ) qui

entoure l'ellipse  $x^2 + 2y^2 = 4R^2$  et le lieu des points  $(t, -1)$  un ovale  $(\mathcal{E}_2)$  qui est compris à l'intérieur de cette ellipse. D'autre part, si l'on parle d'un point connu  $(x, y)$  de  $(\mathcal{E})$ , si l'on a aussi la valeur de  $t$ , on a  $\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{x-R+yt}{2R}$ , de sorte que, pour chaque point de la courbe, la détermination du radical  $\varepsilon\sqrt{1+t^2}$  s'obtient *rationnellement* au moyen de  $x, y, t$ , ce qui est conforme à la théorie de l'élimination. On doit compléter ce résultat en montrant que, si l'on connaît seulement les coordonnées  $(x, y)$  d'un point de  $(\mathcal{E})$ , la valeur  $t$  correspondante s'obtient *rationnellement* au moyen de  $x, y$ . Reportons-nous à la figure 4 et raisonnons, par exemple, sur un point  $l$  de  $(\mathcal{E}_1)$ ; le raisonnement est le même pour un point  $m$  de  $(\mathcal{E}_2)$  et l'on a pas besoin de savoir à l'avance si le point appartient à  $(\mathcal{E}_1)$  ou  $(\mathcal{E}_2)$ . Nous donnons plus loin l'équation entière rationnelle de  $(\mathcal{E})$ ,  $f(x, y) = 0$ , tangente et la normale en  $l$  ont pour équation

$$(X-x)f'_x(x, y) + (Y-y)f'_y(x, y) = 0$$

et

$$(X-x)f'_y(x, y) - (Y-y)f'_x(x, y) = 0.$$

On obtient donc  $\lambda$  par intersection de la normale en  $l$  avec le diamètre de  $(E')$  conjugué de la direction de tangente à  $(\mathcal{E})$  en  $l$ ; le vecteur  $\lambda\vec{O}$  est donc connu et le vecteur  $l\vec{\omega}$ , équipollent, fournit le point  $\omega$ , dont les coordonnées  $(\xi, \eta)$  sont ainsi obtenues rationnellement en  $(x, y)$ . La valeur  $t$  est donc égale à  $\frac{\xi}{R+\eta}$ ;  $\varepsilon$  s'obtient ensuite comme plus haut.

Si l'on égale à zéro, l'expression qui est la valeur commune des rapports (5), on a l'équation, rendue rationnelle

$$(6) \quad 3t^8 + 6t^6 + 10t^4 + 6t^2 + 3 = 0$$

qui fournit huit points de rebroussement imaginaires (on la résout en écrivant

$$t^2 + \frac{1}{t^2} = u, \quad 3u^2 + 6u + 4 = 0;$$

les deux valeurs de  $u$  sont imaginaires). On conclut de là, en se

bornant au quart de  $(\mathcal{E})$  correspondant à  $0 \leq t \leq 1$ , que chacun des quarts de  $(\mathcal{E}_1)$  ou  $(\mathcal{E}_2)$  ainsi obtenu, ayant au point  $(t, +1)$  pour  $(\mathcal{E}_1)$ ,  $(t, -1)$  pour  $(\mathcal{E}_2)$  une tangente parallèle à la tangente au point  $t$  de  $(C)$ , du moment qu'il n'y a pas de rebroussement, que  $(\mathcal{E}_1)$ ,  $(\mathcal{E}_2)$  sont deux ovals ayant chacun  $Ox$ ,  $Oy$  pour axes, et cela dispense de dresser un tableau de variations pour  $x$  et  $y$  (fig. 5). D'après ce qui a été expliqué, si l'on prend le point  $(t, +1)$  et le point  $(\frac{-1}{t}, -1)$ , le milieu de leur distance décrit l'ellipse  $(E')$  à laquelle  $(\mathcal{E}_1)$ ,  $(\mathcal{E}_2)$

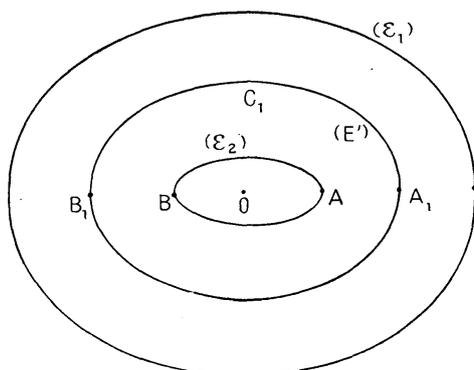


Fig. 5.

sont parallèles; on a ainsi le point de coordonnées  $\frac{2R(1-t^2)}{\sqrt{1+t^2}}$ ,  $\frac{2Rt}{\sqrt{1+t^2}}$  et l'on vérifie aussitôt que ce point est sur l'ellipse annoncée,  $x^2 + 2y^2 = 4R^2$ ; les points  $A_1(2R, 0)$ ,  $C_1(0, R\sqrt{2})$  sont deux sommets de cette ellipse et les foyers réels sont sur  $Ox$ , à la distance  $R\sqrt{2}$  de  $O$ , de sorte que ces deux foyers et les deux sommets du petit axe forment un carré. On remarquera que  $A$  est le centre de courbure de  $(E')$  en  $A_1$  et que le centre de courbure de  $(E')$  en  $C_1$  est le point  $(0, -R\sqrt{2})$  qui est le sommet diamétralement opposé de  $(E')$ .

La courbe  $(\mathcal{E})$  est de degré 8, car l'équation aux  $t$  des points communs à  $(\mathcal{E})$  et à la droite  $ux + vy + w = 0$  est

$$(7) \quad \varepsilon \left[ u(1-t^2) + 2vt + \frac{w}{R}(1+t^2) \right] \sqrt{1+t^2} + 2(1+t^2) [u(1-t^2) + vt] = 0$$

ou, en chassant le radical

$$(7') \left[ u(1-t^2) + 2vt + \frac{w}{R}(1+t^2) \right]^2 (1+t^4) - 4(1+t^2)^2 [u(1-t^2) + vt]^2 = 0,$$

équation de degré 8; quand on a obtenu une racine de l'équation (7'), l'équation (7) fournit  $\varepsilon\sqrt{1+t^4}$  rationnellement au moyen de  $u, v, w, t$ , de sorte qu'on a, conformément à la théorie de l'élimination, les coordonnées des points d'intersection rationnellement au moyen de  $u, v, w, t$  et que le degré est 8 exactement. [Ce calcul met en évidence  $\infty^4$  droites remarquables : ce sont les droites joignant les points  $(t, +1)$  et  $(t, -1)$ ; pour chacune de ces droites on a simultanément

$$u(1-t^2) + 2vt + \frac{w}{R}(1+t^2) = 0 \quad \text{et} \quad u(1-t^2) + vt = 0,$$

de sorte que le calcul indiqué pour obtenir  $\varepsilon\sqrt{1+t^4}$  est en défaut; l'équation (2) donne ces droites, qui sont chacune la corde commune à l'ellipse (E) obtenue pour la valeur  $t$  du paramètre et à l'ellipse infiniment voisine; l'équation (7') admet alors comme racine double la valeur correspondante de  $t$ , mais la droite n'est pas tangente à la courbe (E) : autrement dit, si l'on exprime que l'équation (7') admet une racine double, on trouve une condition en  $u, v, w$  qui se décompose; l'un des facteurs est l'équation tangentielle de (E), l'autre se réduit à  $\frac{1}{u^2} + \frac{4}{v^2} - \frac{R^2}{w^2} = 0$  et fournit la courbe de classe 4, unicursale, enveloppe des droites (2); il est intéressant de signaler que cette enveloppe des cordes limites est la développée de l'ellipse de centre O, de demi petit axe égal à  $\frac{R}{3}$  porté par Ox et de demi grand axe  $\frac{2R}{3}$  porté par Oy : cette ellipse a pour équation  $x^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{R^2}{9}$ .

L'équation tangentielle de (E) s'obtient en prenant l'équation irrationnelle (1) écrite plus haut pour l'ellipse (E)

$$uR \cos \varphi + vR \sin \varphi - w = \sqrt{2(w^2 - R^2 u^2)},$$

et écrivant la condition bien connue pour que cette équation en  $\varphi$  ait une racine double, d'où

$$(u^2 + v^2) R^2 = [w + \sqrt{2(w^2 - R^2 u^2)}]^2$$

ou, rendant rationnelle, l'équation

$$(8) \quad w^4 - (10u^2 + 6v^2)R^2w^2 + (3u^2 + v^2)^2R^4 = 0.$$

L'équation tangentielle de la conique  $x^2 + 2y^2 = 4R^2$  est

$$R^2(4u^2 + 2v^2) - w^2 = 0$$

et l'équation tangentielle

$$R^2(4u^2 + 2v^2) = [w + R\sqrt{u^2 + v^2}]^2$$

des droites parallèles aux tangentes de (E'), à la distance R de ces tangentes, coïncide, rendue rationnelle, avec (8). La courbe (E) est de classe 4; le problème qui consiste à mener d'un point du plan, M, les tangentes à (E) peut se ramener au suivant : déterminer les tangentes communes à l'ellipse (E') d'équation  $x^2 + 2y^2 = 4R^2$  et au cercle de centre M et rayon R; les parallèles menées par M à ces tangentes communes sont tangentes à (E).

Les formules (4) prouvent que (E) est de genre 1, puisque  $x, y$  s'expriment rationnellement en  $t$  et  $\sqrt{1+t^4}$ , cette représentation paramétrique étant propre [en passant, remarquons que la représentation de (E') par les formules  $x = \frac{2R(1-t^2)}{\sqrt{1+t^4}}, y = \frac{2Rt}{\sqrt{1+t^4}}$  est impropre, car, du moins en se bornant aux valeurs réelles de  $t$ , nous avons vu, à la fois géométriquement et analytiquement, que le changement de  $t$  en  $\frac{-1}{t}$  joint au changement de détermination prise pour  $\sqrt{1+t^4}$  fournit de nouveau le même point.] Une courbe de classe 4 et genre 1 admet deux tangentes doubles; l'équation (8) les met en évidence; elles sont définies par  $w = 0, 3u^2 + v^2 = 0$ ; pour avoir, aussi géométriquement que possible, les points de contact avec (E) de la droite (D)  $x + \varepsilon i\sqrt{3}y = 0$ , on mène à (E') les tangentes parallèles à cette droite et l'on projette sur D les points de contact obtenus; cela revient à couper (E') par le diamètre d'équation  $ix\sqrt{3} = 2y\varepsilon$ ; le calcul est aisé et n'offre plus aucun intérêt.

La courbe est de degré 8; elle doit donc avoir l'équivalent de 20 points doubles. Nous avons déjà signalé les huit points de rebrous-

sement imaginaires fournis par l'équation (6) : comme la courbe ( $\mathcal{E}$ ) et l'ellipse ( $E'$ ) donnent, aux points correspondants dans le parallélisme, le même centre de courbure, les huit points en jeu sont huit points où le rayon de courbure de ( $E'$ ) est égal à  $R$ ; en chacun de ces points la tangente de rebroussement à ( $\mathcal{E}$ ) est, comme de juste, parallèle à la tangente de ( $E'$ ); or, aux sommets  $A_1(2R, 0)$ ,  $B_1(-2R, 0)$  de ( $E'$ ) le rayon de courbure est aussi égal à  $R$ , de sorte que *les points A, B de  $Ox$  sont aussi, pour la même raison jointe à la symétrie autour de  $Ox$ , des singularités, mais d'un ordre plus élevé qu'un rebroussement*, bien que le graphique ne les mette pas en évidence à ce titre; un développement suivant les puissances croissantes de  $t$  va nous donner la nature des points ( $t=0, \varepsilon=+1$ ) et ( $t=0, \varepsilon=-1$ ) qui ont pour coordonnées ( $3R, 0$ ) et ( $-R, 0$ ).

On a, pour  $t$  compris entre  $-1$  et  $+1$ ,

$$\begin{aligned} x &= R \left[ 1 - \frac{2t^2}{1+t^2} + 2\varepsilon(1-t^2)(1+t^2)^{-\frac{1}{2}} \right] \\ &= R \left[ 1 - 2t^2 + 2t^4 + \dots + 2\varepsilon \left( 1 - t^2 - \frac{t^4}{2} + \dots \right) \right], \\ y &= 2Rt \left[ 1 - t^2 + t^4 + \dots + \varepsilon \left( 1 - \frac{t^4}{2} + \dots \right) \right]. \end{aligned}$$

Donc pour  $\varepsilon=+1$  on a le point régulier ( $3R, 0$ ) :

$$x = R[3 - 4t^2 + t^4 + \dots], \quad y = 2Rt \left[ 2 - t^2 + \frac{t^4}{2} + \dots \right].$$

Pour  $\varepsilon=-1$  on a le point singulier ( $-R, 0$ ) :

$$x = R[-1 + 3t^4 + \dots], \quad y = 2Rt \left( -t^2 + \frac{3t^4}{2} + \dots \right).$$

Du point de vue ponctuel, ce point est triple et de même espèce que l'origine sur la courbe  $x=t^4, y=t^3$ ; l'équation de la tangente à cette courbe de comparaison est  $3X - 4tY + t^4 = 0$ , de sorte que la classe pour cette dernière courbe est 4 comme le degré : *ce point triple, qui représente l'équivalent de trois points doubles, diminue la classe, non pas de six unités, mais de huit, aussi bien sur la courbe de comparaison que sur ( $\mathcal{E}$ )*; nous allons voir un peu plus loin que ce point triple équivaut à l'ensemble d'un point double et de deux rebroussements. Les deux

points triples spéciaux  $A(R, 0)$  et  $B(-R, 0)$  forment avec les points  $(3R, 0)$  et  $(-3R, 0)$  le total des huit points communs à  $(\mathcal{E})$  et  $Ox$ .

Les points communs à  $(\mathcal{E})$  et  $Oy$  sont fournis par l'équation

$$(1 - t^2)^2 [1 + t^4 - 4(1 + t^2)^2] = 0$$

qui fournit les points  $(t = \pm 1, \varepsilon = \pm 1)$  en nombre quatre, tous simples, sommets de  $(\mathcal{E}_1)$  et  $(\mathcal{E}_2)$  sur  $Oy$ , à la distance  $R(\pm 1 \pm \sqrt{2})$  de l'origine, puis deux points doubles imaginaires fournis par

$$3t^4 + 8t^2 + 3 = 0 \quad \text{ou} \quad t = i \left( \frac{\pm \sqrt{7} \pm 1}{\sqrt{6}} \right).$$

Le calcul de  $y$  se fait très aisément, car l'équation qui donne  $t$  peut se mettre sous les diverses formes

$$\frac{t^2}{1 + t^4} = -\frac{3}{8}, \quad 3(1 + t^2)^2 + 2t^2 = 0$$

(cette dernière forme ou  $1 + t^2 \pm it\sqrt{\frac{2}{3}}$  est celle qui est la plus commode pour calculer  $t$ ); en remarquant que  $x$  est nul, les formules (4) donnent  $\frac{2\varepsilon}{\sqrt{1+t^4}} + \frac{1}{1+t^2} = 0$ , et cela permet de remplacer  $\frac{2t}{1+t^2} + \frac{2\varepsilon t}{\sqrt{1+t^4}}$  par  $\frac{t}{1+t^2}$ , de sorte que la valeur de  $y$  se réduit à  $\pm Ri\sqrt{\frac{3}{2}}$ .

Nous avons enfin comme derniers points doubles ceux où  $(\mathcal{E})$  coupe la droite de l'infini. L'ellipse  $(E')$  a deux points à l'infini dans la direction  $\frac{y}{x} = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$ ; en chacun de ces points la normale à  $(E')$  est la droite de l'infini, de sorte que chacun donne pour  $(\mathcal{E})$  deux asymptotes parallèles; si  $ux + vy + w = 0$  est une tangente de  $(E')$ , l'équation  $ux + vy + w \pm R\sqrt{u^2 + v^2} = 0$  représente une tangente de  $(\mathcal{E})$ ; ici chaque asymptote  $ix \pm y\sqrt{2} = 0$  donne l'asymptote de  $(\mathcal{E})$  d'équation  $ix \pm y\sqrt{2} \pm R = 0$ . D'autre part, les foyers réels de  $(E')$  sont les points  $(\pm R\sqrt{2}, 0)$  et les isotropes issues de ces points sont tangentes, ou si l'on préfère normales à  $(E')$ , donc aussi normales ou

tangentes à  $(\mathcal{E})$  : on a ainsi deux nouveaux points doubles, qui sont I et J, points cycliques du plan et comme ensemble des asymptotes correspondantes

$$[(x - R\sqrt{2})^2 + y^2][(x + R\sqrt{2})^2 + y^2] = 0;$$

les asymptotes de  $(E')$ , correspondent à  $1 + t^4 = 0$ , les points cycliques correspondent à  $1 + t^2 = 0$ .

Nous avons ainsi obtenu tous les points multiples : huit points de rebroussement ordinaires, imaginaires, dont le total abaissera la classe de 24 unités, deux points doubles imaginaires sur Oy, quatre points doubles, imaginaires sur la droite de l'infini; ces six points doubles abaissent la classe de 12 unités, enfin les deux points triples spéciaux  $(R, 0)$  et  $(-R, 0)$  comptant pour l'équivalent de trois points doubles chacun et abaissant la classe chacun de 8 unités; le total équivaut à  $8 + 6 + 6$  ou 20 points doubles, ce qui donne bien 1 comme genre; l'abaissement total de la classe est  $24 + 12 + 16$  ou 52, de sorte que, comme vérification on trouve bien  $56 - 52$ , c'est-à-dire 4.

Pour bien comprendre le rôle des deux points triples, imaginons une ellipse, d'ailleurs quelconque,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$  et prenons, en la courbe parallèle, à la distance  $\rho$ ; le carré du rayon de courbure au point  $(a \cos \varphi, b \sin \varphi)$ , est  $R^2 = \left( \frac{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}{a^2 b^2} \right)^3$  : en l'égalant à  $\rho$  et remplaçant  $\cos \varphi, \sin \varphi$  par  $\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}$ , on a l'équation

$$a^2 b^2 \rho^2 (1+t^2)^6 = [4a^2 t^2 + b^2(1-t^2)^2]^3,$$

qui fournit les 12 points de rebroussement réels ou imaginaires de la courbe parallèle, points coïncidant avec les centres de courbure de l'ellipse aux points de paramètre  $t = tg \frac{\varphi}{2}$  que nous venons d'obtenir; si  $\rho$  est compris entre  $\frac{b^2}{a}$  et  $\frac{a^2}{b}$ , minimum et maximum de R, quatre de ces rebroussements sont réels, les autres imaginaires; si  $\rho$  est inférieur à  $\frac{b^2}{a}$  ou supérieur à  $\frac{a^2}{b}$ , tous sont imaginaires. Envisageons le cas limite  $\rho = \frac{b^2}{a}$  : on constate alors, puisque  $ab \rho = b^3$  que le terme constant de l'équation

en  $t$ , ainsi que le terme en  $t^{12}$  disparaissent; autrement dit, *deux des douze rebroussements viennent se réunir en chaque centre de courbure, porté par  $Ox$ , relatif à l'ellipse*; d'autre part, le carré du segment compris sur la normale entre un point  $M$  de l'ellipse et  $Ox$  est

$$\frac{b^2}{a^2}(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi);$$

en l'égalant à  $\rho^2$  on a l'équation

$$b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi = \frac{a^2}{b^2} \rho^2$$

qui donne, pour la courbe parallèle à l'ellipse, deux points doubles situés sur  $Ox$ , réels si  $b^4 + a^4 \geq \frac{a^4 \rho^4}{b^4}$ ; or pour  $\rho = \frac{b^2}{a}$ , cette équation devient  $\sin^2 \varphi = 0$ , de sorte que *les deux points doubles deviennent chacun l'un des centres de courbure*. On constate ainsi que, si  $\rho$  est d'abord compris entre  $\frac{b^2}{a}$  et  $\frac{a^2}{b}$  et tend vers  $\frac{b^2}{a}$ , *deux points de rebroussement ordinaires et un point double ordinaire se réunissent au point triple spécial*, que nous avons indiqué : cela justifie l'abaissement, 3, du genre et, 8, de la classe, obtenue pour un point triple de cette nature.

*Il est facile de trouver l'équation ponctuelle de la courbe  $\mathcal{E}$  : elle est de la forme*

$$(x^2 + y^2)^2 (x^2 + 2y^2)^2 + R^2(Ax^6 + Bx^4y^2 + Cx^2y^4 + Dy^6) + R^4(Ex^4 + Fx^2y^2 + Gy^4) + R^6(Hx^2 + Ky^2) + LR^8 = 0,$$

où les coefficients  $A, \dots, L$  sont des constantes numériques; en coupant par  $Ox$ , nous écrivons

$$x^8 + AR^2x^6 + ER^4x^4 + HR^6x^2 + LR^8 \equiv (x^2 - R^2)^3 (x^2 - 9R^2),$$

d'où

$$A = -12, \quad E = 30, \quad H = -28, \quad L = 9.$$

En coupant par  $Oy$ , nous écrivons

$$[(y^2 - R^2)^2 - 4R^2y^2] (2y^2 + 3R^2)^2 \equiv 4y^8 + R^2Dy^6 + R^4Gy^4 + R^6Ky^2 + LR^8,$$

d'où

$$D = -12, \quad G = -59, \quad K = -42.$$

Exprimons que la droite  $x = iy + R\sqrt{2}$  est asymptote : l'équation aux  $y$  des points communs ne doit pas avoir de terme en  $y^0$ ; on a

$$x^2 + y^2 = 2iyR\sqrt{2} + 2R^2, \quad x^2 + 2y^2 = y^2 + 2iyR\sqrt{2} + 2R^2;$$

on a donc

$$-8 - A + B - C + D = 0;$$

de même, la droite  $x = i(y\sqrt{2} + R)$  est asymptote; on a

$$x^2 + 2y^2 = -(2Ry\sqrt{2} + R^2), \quad x^2 + y^2 = -(y^2 + 2Ry\sqrt{2} + R^2),$$

et, en annulant le terme en  $y^0$  dans l'équation aux  $y$  des points communs, on a

$$8 - 8A + 4B - 2C + D = 0;$$

A et D étant remplacés par leurs valeurs, on a

$$B - C = 8, \quad 4B - 2C = -92, \quad B = -54, \quad C = -62.$$

On n'a plus que l'inconnue F; utilisons ce fait que le point (R, 0) est triple; donc  $f''_{y^2}(R, 0)$  est nul; pour calculer  $f''_{y^2}(R, 0)$ , il suffit de conserver le terme en  $y^2$  et d'annuler son coefficient; on a ainsi

$$6 + B + F + K = 0;$$

on en conclut  $F = 90$ ; l'équation est donc

$$(9) \quad (x^2 + y^2)^2(x^2 + 2y^2)^2 - R^2(12x^6 + 54x^4y^2 + 62x^2y^4 + 12y^6) \\ + R^4(30x^4 + 90x^2y^2 - 56y^4) - R^6(28x^2 + 42y^2) + 9R^8 = 0.$$

**4. ELLIPSES RÉELLES (E) TANGENTES A UNE DROITE DONNÉE OU PASSANT PAR UN POINT DONNÉ.** — Si M est un point de l'ellipse (E), on a  $OM < O\omega + \omega M$  et *a fortiori*, puisque  $\omega M < 2R$ ,  $OM < 3R$ ; donc toutes les ellipses (E) sont contenues à l'intérieur du cercle de centre O et rayon 3R et même, comme cela est presque évident, à l'intérieur de l'ovale ( $\mathcal{E}_1$ ).

Pour évaluer le nombre précis d'ellipses réelles tangentes à une droite (D) donnée, il y a lieu de revenir à l'équation tangentielle des

ellipses (E) pour arriver à former l'équation *tangentielle complète* de l'enveloppe (E) : or l'équation

$$(u R \cos \varphi + v R \sin \varphi - w)^2 - 2(w^2 - u^2 R^2) = 0$$

montre que l'enveloppe *complète* se compose non pas seulement de l'ensemble des deux ovales (E<sub>1</sub>), (E<sub>2</sub>), mais aussi *des deux points* A, B représentés tangentiellement par  $(w + uR)(w - uR) = 0$ . Ceci nous conduit intuitivement au résultat suivant: soit une direction Δ arbitraire et supposons qu'une droite (D) se déplace parallèlement à Δ: il existe deux tangentes (T<sub>1</sub>), (T'<sub>1</sub>) à l'ovale (E<sub>1</sub>), deux tangentes (T<sub>2</sub>), (T'<sub>2</sub>) à l'ovale (E<sub>2</sub>), toutes quatre parallèles à Δ; supposons, pour fixer les idées, que la pente de Δ soit positive; nous désignons par (T<sub>3</sub>), (T'<sub>3</sub>) les parallèles à Δ menées par A et B et supposons les notations choisies de sorte que, si (D) vient d'une position très éloignée [à gauche du plan Oxy orienté de la façon usuelle et se déplace parallèlement à (Δ) vers la droite], l'ordre de succession est T'<sub>1</sub>, T'<sub>2</sub>, T'<sub>3</sub>, T<sub>3</sub>, T<sub>2</sub>, T<sub>1</sub>: quand (D) est à gauche de T'<sub>1</sub>, il n'existe pas d'ellipse réelle tangente à (D); quand (D) passe dans la bande limitée par (T'<sub>1</sub>, T'<sub>2</sub>), il y a *deux* ellipses réelles, puis *quatre* quand (D) est dans la bande (T'<sub>2</sub>, T'<sub>3</sub>) puis *zéro* pour la bande (T'<sub>3</sub>, T<sub>3</sub>), *quatre* pour la bande (T<sub>3</sub>, T<sub>2</sub>) *deux* pour la bande (T<sub>2</sub>, T<sub>1</sub>) et enfin *zéro* quand (D) a dépassé (T<sub>1</sub>). La discussion purement analytique des deux équations en φ

$$\begin{aligned} u R \cos \varphi + v R \sin \varphi - w &= + \sqrt{2(w^2 - u^2 R^2)} \\ u R \cos \varphi + v R \sin \varphi - w &= - 2 \sqrt{w^2 - u^2 R^2}, \end{aligned}$$

est aisée et confirme les résultats annoncés; il faut que  $w^2 - u^2 R^2$  soit positif, donc que (D) ne traverse pas le segment AB, quand (D) passe en A ou en B, les deux équations se confondent, de sorte qu'il y a non seulement deux racines qui deviennent égales, mais deux couples, ce qui explique que le nombre de tangentes réelles varie de quatre unités et non seulement de deux unités. La bande (T'<sub>3</sub>, T<sub>3</sub>) est d'épaisseur nulle si la droite Δ est parallèle à Ox.

Si l'on cherche les *ellipses réelles issues d'un point donné* M, c'est encore l'équation de l'enveloppe (E) qui intervient, *équation ponctuelle* cette fois; la droite Ox est bien un morceau, singulier toutefois, de

l'enveloppe et n'intervient plus. Si  $M$  est extérieur à  $(\mathcal{E}_1)$ , il n'y a aucune ellipse. Si  $M$  est sur  $(\mathcal{E}_1)$ , il existe une seule ellipse réelle comptant pour deux unités : le point  $M$  correspond à un certain point  $\mu$  de l'ellipse auxiliaire  $(E')$  et l'égalité vectorielle  $\overrightarrow{\mu M} = \overrightarrow{O\omega}$  fournit le centre de cette ellipse. *Toutes les ellipses  $(E)$  sont contenues à l'intérieur de  $(\mathcal{E}_1)$ . Si  $M$  vient entre  $(\mathcal{E}_1)$  et  $(\mathcal{E}_2)$ , il y a deux ellipses réelles seulement; si  $M$  vient à l'intérieur de  $(\mathcal{E}_2)$ , le nombre d'ellipses réelles varie de deux unités; il ne devient pas nul, puisqu'en  $A$  ou  $B$  chaque ellipse passe de l'intérieur de  $(\mathcal{E}_2)$  à l'extérieur ou réciproquement, donc il y a quatre ellipses issues de tout point intérieur à  $(\mathcal{E}_2)$ . On remarque d'ailleurs que si  $M$  est pris sur le segment  $AB$ , ces quatre ellipses se confondent : deux avec le segment de milieu  $A$  et longueur  $4R$ , deux avec le segment analogue de milieu  $B$ .*

Il reste maintenant à indiquer les points (autres que  $A$ ,  $B$  et les points limites) communs à une ellipse  $E(T)$  quelconque et à l'enveloppe  $(\mathcal{E})$ ;  $A$ ,  $B$  comptant chacun pour 3, chaque point limite pour 2, il reste six points communs, réels ou imaginaires, que nous caractériserons par leur paramètre  $t$  (et  $\varepsilon$ ) sur  $(\mathcal{E})$ . L'ellipse  $E(T)$  a pour équation

$$(x - R + yT)^2 + \left(x + R - \frac{y}{T}\right)^2 = 4R^2.$$

Cette dernière équation étant écrite sous la forme

$$[(x - R + yt) + y(T - t)]^2 + \left[\left(x + R - \frac{y}{t}\right) + y \frac{(T - t)}{Tt}\right]^2 = 4R^2,$$

l'identité

$$(x - R + yt)^2 + \left(x + R - \frac{y}{t}\right)^2 = 4R^2,$$

quand les coordonnées d'un point  $(x, y)$  de  $(\mathcal{E})$  sont remplacées par leur valeur en  $t$ , permet de supprimer le facteur  $y(T - t)$  et il reste

$$2(x - R + yt) + 2\left(x + R - \frac{y}{t}\right) \frac{1}{Tt} + y(T - t) \left(1 + \frac{1}{t^2 T^2}\right) = 0;$$

en remplaçant  $x - R + yt$  par  $\frac{2\varepsilon R}{\sqrt{1+t^2}}$  et  $x + R - \frac{y}{t}$  par  $\frac{-2\varepsilon R t^2}{\sqrt{1+t^2}}$ , on voit que  $T - t$  disparaît encore une fois et l'on a, pour obtenir les points autres que  $A$ ,  $B$  (fournis par le facteur  $y$  supprimé) et que les points

de contact de  $E(T)$  avec son enveloppe [fournis par le facteur  $(T - t)^2$  supprimé] l'équation très simple

$$(10) \quad \frac{\varepsilon(tT + 1)^2}{1 + t^2 T^2} + \frac{\sqrt{1 + t^4}}{1 + t^2} = 0,$$

où les variables  $t$  et  $(tT)$  sont *séparées*. Cette équation rendue entière et rationnelle représente, dans un plan auxiliaire  $(O t T)$  une courbe : si l'on se donne  $t$ , on cherche les intersections de cette courbe avec une parallèle à l'axe  $OT$  et l'on voit que cette recherche se ramène à deux équations du second degré en  $T$  suivant que l'on prend  $\varepsilon = +1$  ou  $-1$  ; si l'on se borne aux valeurs de  $t$  et  $T$  réelles,  $\varepsilon = +1$  donne deux  $T$  imaginaires, ce qui est conforme au résultat obtenu plus haut, à savoir que, *par chaque point réel  $(t, +1)$  de  $(\mathcal{E}_1)$  passent, outre l'ellipse  $E(t)$  correspondante, deux ellipses  $E$  toujours imaginaires* ; si l'on prend  $\varepsilon = -1$ , au contraire les deux valeurs de  $T$  sont réelles. Écrivons cette équation (avec  $\varepsilon = -1$ ) sous la forme

$$(11) \quad tT = -\varphi, \quad 1 - \frac{2\varphi}{1 + \varphi^2} = \frac{\sqrt{1 + t^4}}{1 + t^2}.$$

Si l'on pose  $\varphi = \operatorname{tg} \frac{V}{2}$ , cette équation s'écrit

$$(12) \quad \sin V = 1 - \frac{\sqrt{1 + t^4}}{1 + t^2}.$$

Le second membre (il est convenu de prendre  $\sqrt{1 + t^4}$  positif, si  $t$  est réel) reprend la même valeur quand  $t$  est remplacé par  $1:t$  ; ce second membre est une quantité positive, inférieure à 1, de sorte que, *quel que soit  $t$* , nous obtenons pour  $V$  une valeur positive  $V_1$ , inférieure à  $\frac{\pi}{2}$ , et une valeur positive  $V_2$  égale à  $\pi - V_1$  comprise entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\pi$  ;  $\operatorname{tg} \frac{V_1}{2}$  et  $\operatorname{tg} \frac{V_2}{2}$  sont positives, et leur produit est égal à l'unité ; nous voyons ainsi, conformément aux résultats déjà annoncés, que *par chaque point  $(t, -1)$  de  $(\mathcal{E}_2)$  passent deux ellipses réelles autres que  $E(t)$ , correspondant à des centres situés sur  $(C)$ , par rapport au centre de  $E(t)$ , du côté opposé relativement à  $Ox$  ; ces deux ellipses sont toujours distinctes*, car  $\sin V$  est toujours différent de l'unité. Il va être commode pour nous de supposer  $-\infty < t < 0$ , de sorte que le centre  $\omega(t)$

de  $E(t)$  est situé du côté des  $y$  négatifs et que  $T_1, T_2$  sont positifs; posons  $t = -\theta$ ; la dérivée logarithmique de  $\frac{\sqrt{1+\theta^2}}{1+\theta^2}$  est égale à  $\frac{2\theta(\theta^2-1)}{(1+\theta^2)(1+\theta^4)}$ , de sorte que, pour  $0 < \theta < 1$  l'expression  $\frac{\sqrt{1+\theta^2}}{1+\theta^2}$  décroît de 1 à  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $1 - \frac{\sqrt{1+\theta^2}}{1+\theta^2}$  croît de 0 à  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; nous avons donc le tableau de variation suivant où  $v_1, v_2$  sont les déterminations de  $v$  correspondant à  $V_1$  et  $V_2$ ; le produit  $v_1 v_2$  est égal à l'unité; nous avons posé  $W = \arcsin\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ; deux valeurs de  $t$  (ou  $\theta$ ) inverses l'une de l'autre font reprendre à chaque quantité  $V_1, V_2$ , ou  $v_1, v_2$  la même valeur.

$\theta (= -t)$	0	1	$\infty$
$V_1$	0 ↗	W	↘ 0
$V_2$	$\pi$ ↘	$\pi - W$	↗ $\pi$
$v_1$	0 ↗	$\operatorname{tg} \frac{W}{2}$	↘ 0
$v_2$	$+\infty$ ↘	$\operatorname{cotg} \frac{W}{2}$	↗ $+\infty$

On a

$$\sqrt{2} = 1,41421\dots; \quad \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,70710\dots; \quad 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,29289\dots;$$

$W$  est un arc assez petit, égal à  $17^\circ 1' 52''$ . Nous avons à étudier la variation de  $T_1 = \frac{v_1}{\theta}$  et de  $T_2 = \frac{v_2}{\theta}$ ; pour  $T_2$ , il est clair que  $\theta$  variant de 0 à 1,  $T_2$  va en décroissant de  $+\infty$  à  $\operatorname{cotg} \frac{W}{2}$ ; appelons  $\beta, \beta_1$  les sommets de  $(\mathcal{E}_2)$  situés sur  $Oy$ , la cote de  $\beta_1$  étant négative, égale à  $R(1 - \sqrt{2})$ , celle de  $\beta$  égale à  $R(\sqrt{2} - 1)$ ; quand  $\theta$  varie de 0 à 1,  $t$  varie de 0 à  $-1$ , le centre  $\omega(t)$  de l'ellipse  $E(t)$  est situé sur l'arc de  $(C)$  du quatrième quadrant et part de  $A$  pour venir sur  $Oy$  au point  $(0, -R)$ ; pour  $\theta = 1, t = -1$ , la quantité  $v_1$  prend la

valeur  $\operatorname{tg} \frac{W}{2}$  ainsi que  $T_1$ , la quantité  $v_2$  prend la valeur  $\operatorname{cotg} \frac{W}{2}$  ainsi que  $T_2$ ; d'après la signification du paramètre  $T$  on voit que si l'on marque sur le cercle (C) les points  $L, L'$  de cote  $R \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ ,  $L$  étant du côté des  $x > 0$ ,  $L'$  du côté des  $x < 0$ , le point  $\omega(T_2)$ , quand  $t$  varie de 0 à  $-1$ , s'est déplacé sur (C) depuis  $B$  jusqu'en  $L'$  (fig. 6); pour le point  $\omega(T_1)$ , la discussion est plus malaisée, parce que  $v_1$  et  $\theta$  croissent tous les deux; opérons un développement en série suivant les

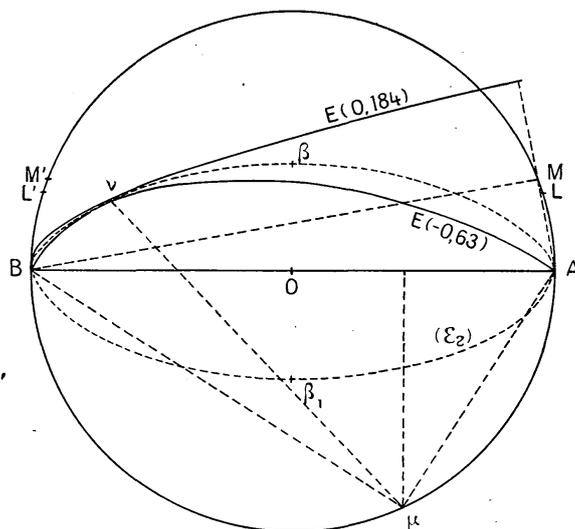


Fig. 6.

puissances croissantes de  $t$  : on a le droit d'écrire l'équation (11) sous

la forme  $\frac{2v}{1+v^2} = 1 - \frac{\sqrt{1+\theta^2}}{1+\theta^2}$  ou

$$(13) \quad 2v - 2v^3 + \dots = \theta^2 - \frac{3\theta^4}{2} + \dots,$$

d'où

$$(14) \quad v = \frac{\theta^2}{2} - \frac{3\theta^4}{4} + \dots, \quad T_1 = \frac{\theta}{2} - \frac{3\theta^3}{4} + \dots, \quad \frac{dT_1}{d\theta} = \frac{1}{2} - \frac{9\theta^2}{4} + \dots;$$

donc  $T_1$ , pour  $\theta = 0$ , est nul et d'abord croissant, de sorte que sa dérivée est d'abord positive : mais à partir de  $t = 1$  jusqu'à  $t = \infty$ ,  $v_1$  décroît

et  $\theta$  croît de sorte que, à partir de  $t=1$ ,  $T$ , est décroissant, donc a une dérivée négative pour  $\theta=1$ ; la dérivée de  $T_1$  par rapport à  $t$  change donc de signe pour une valeur  $\theta_0$  comprise entre  $\theta=0$  et  $\theta=1$ ; la discussion serrée qui suit prouvera que cette dérivée ne s'annule qu'une fois, pour une certaine valeur  $\theta_0$ ; de la sorte, le centre  $\omega(T_1)$  part de A et s'avance sur (C) dans le premier quadrant jusqu'à un point M qui dépasse la position L et est atteint pour  $\theta=\theta_0$ ; ensuite quand  $\theta$  croît depuis  $\theta_0$  jusqu'à  $+\infty$ , le centre  $\omega(T_1)$  revient jusqu'en A (en repassant par L); lorsque le point  $\omega(T)$  est en M, l'ellipse correspondante (E) touche  $(\mathcal{E}_2)$  au point de paramètre  $(t_0, -1)$  qui se trouve ainsi dans le deuxième quadrant; autrement dit, quand le centre de l'ellipse E(T) décrit l'arc AM de (C), l'ellipse (E) coupe  $(\mathcal{E}_2)$  en deux points situés au-dessus de  $Ox$ ; l'un est voisin de A, l'autre voisin de B si le centre  $\omega(T)$  est voisin de A; ces deux points se déplacent, chacun dans le même sens, mais en sens inverse l'un de l'autre, quand le centre  $\omega(T)$  se déplace de A vers M; quand  $\omega(T)$  dépasse la position M et va jusqu'au point M', symétrique de M par rapport à  $Oy$ , l'ellipse E(T) ne coupe plus la portion de  $(\mathcal{E}_2)$  située au-dessus de  $Ox$ ; en particulier pour  $T=1$  on a le cercle d'équation  $x^2 + y^2 - 2Ry - R^2 = 0$  qui touche  $(\mathcal{E}_2)$  au point  $\beta_1$ , mais n'a pas d'autre point commun avec  $(\mathcal{E}_2)$  que  $\beta_1$ , A et B. Quand le centre  $\omega(T)$  décrit l'arc M'B, la symétrie par rapport à  $Oy$  indique que l'ellipse E(T) coupe de nouveau  $(\mathcal{E}_2)$  en deux points.

Opérons maintenant en sens inverse : nous nous donnons l'ellipse E(T) et nous cherchons à résoudre l'équation (10) où cette fois  $T$  est la donnée et  $t$  l'inconnue; cette équation, débarrassée des racines  $t=0$ ,  $t=\infty$ , est de degré 6 et nous voulons montrer que,  $T$  étant supposé réel, elle n'a que deux racines réelles au plus, de signe contraire à celui de  $t$ . Nous la mettons sous forme entière

$$(15) \quad (t^2 + 1)^2 (tT + 1)^4 - (t^2 T^2 + 1)^2 (t^4 + 1) = 0,$$

$$(16) \quad 2T^3 t^6 + (T^4 + 2T^2) t^5 + (4T^3 + 2T) t^4 + 6T^2 t^3 + (2T^3 + 4T) t^2 + (2T^2 + 1) t + 2T = 0.$$

On passe de (15) à (16) en effectuant les produits et divisant par  $t$ .

Il est bon d'étudier certaines valeurs imaginaires de  $T$  et  $t$ ; pour que  $t$  soit égal à  $T$ , il est nécessaire et suffisant que  $T$  satisfasse à

l'équation  $(T^2 + 1)^6 - (T^4 + 1)^3 = 0$  qui, précisément, fournit les points de rebroussement de  $(\mathcal{E})$ ; en effet, un tel point, multiple d'ordre 2 sur  $(\mathcal{E})$ , n'est fourni que par une seule valeur du paramètre [en se reportant aux formules (5),  $t$  étant calculé, on a  $\varepsilon \sqrt{1 + t^4} = -\frac{(1 + t^2)^2}{1 + t^4}$ , qui précise ce que l'on doit entendre par  $\varepsilon \sqrt{1 + t^4}$  pour un tel point de rebroussement,  $t$  étant imaginaire]; l'ellipse imaginaire  $E(T)$  admet alors, pour l'un de ses points limites, ce point de rebroussement et, en ce point, au lieu de n'avoir que deux points communs avec  $(\mathcal{E})$ , réunis en un seul, en a trois réunis en ce point; donc l'équation (16) où  $T$  a cette valeur particulière a une racine  $t$  encore égale à  $T$ , ce qui est évident en prenant la forme (15) pour l'équation. D'autre part, nous avons vu que, si  $t$  est donné, l'équation du second degré en  $T$  [prise sous la forme (10), sans préciser le signe de  $\varepsilon$ ] a deux racines  $T_1, T_2$  telles que  $(tT_1)(tT_2) = 1$  ou  $t^2 T_1 T_2 = 1$ ; par chaque point  $t$  de  $(\mathcal{E})$  [sans préciser s'il s'agit de  $(\mathcal{E}_1)$  ou  $(\mathcal{E}_2)$ ] passent deux ellipses  $(E)$  autres que  $E(t)$  et leurs paramètres  $T_1, T_2$  sont tels que, si l'on connaît l'un des  $T_1$ , l'autre  $T_2$  est égal à  $1 : t^2 T_1$ . Appliquons cette remarque à un point de rebroussement connu  $t_0$  de  $(\mathcal{E})$ ; on a  $T_1 = t_0$ , donc  $T_2$  est égal à  $1 : t_0^2$ . Quand le paramètre  $T_0$  est choisi égal à  $1 : t_0^2$ , où  $t_0$  est un point de rebroussement, l'équation (16) admet la racine  $t = t_0$  et même comme racine double, puisque  $t_0$  donne un point double de  $\mathcal{E}$  (avec une seule valeur du paramètre) et que ce point, qui n'est pas un point limite de  $E(T_0)$ , compte pour deux parmi les points d'intersection. Inversement, si l'équation (16) a une solution  $(t, T)$  telle que  $t^3 T = 1$ , en remplaçant  $T$  par  $\frac{1}{t^3}$  dans (15) on retrouve l'équation en  $t$  donnant les points de rebroussement; posons donc, en groupant les termes de même degré en  $t$  et  $T$  dans (16)

$$(17) \quad F(t, T) \equiv t^6 T^3 (2t + T) + 2t^4 T^2 (t + 2T) + 2t^2 T (t^2 + 3Tt + T^2) + 2tT(2t + T) + t + 2T = 0.$$

La courbe  $F(t, T) = 0$  du plan  $OtT$  contient tous les points communs aux deux courbes  $\frac{\partial F}{\partial t}(t, T) = 0, Tt^3 - 1 = 0$  de sorte qu'il existe nécessairement une identité de la forme

$$(18) \quad F(t, T) \equiv P(t, T) \frac{\partial F}{\partial t} + Q(t, T)(Tt^3 - 1),$$



Nous étudions le signe de  $\varphi(t)$  : calculons  $\varphi'(t)$

$$(23) \quad \begin{aligned} \varphi'(t) &\equiv 9 T^2 t^2 + 2 (T^2 + 2) T t + 2 T^2 + 1 \\ &\equiv \left[ 3 T t + \frac{T^2 + 2}{3} \right]^2 + \frac{(5 - T^4) + 14 T^2}{9}. \end{aligned}$$

Puisque nous supposons  $0 \leq T \leq 1$ ,  $\varphi'(t)$  est toujours positif, non nul; donc, si  $t$  croît de  $-\infty$  à  $0$ ,  $\varphi$  va en croissant constamment depuis  $-\infty$  jusqu'à la valeur positive  $3 T$ ; donc  $\varphi$  s'annule, une fois et une seule, pour une certaine valeur négative  $t_0$  et nous avons pour  $f$  le tableau de variation suivant :

$t$	$-\infty$	$t_0$	$0$
$f'$	$+$	$0$	
$f$	$-\infty$	$\nearrow$ Maximum	$\searrow -\infty$

Suivant que le maximum  $f(t_0)$  est positif, nul, ou négatif, la conique  $E(T)$  coupe  $(\mathcal{E}_2)$  en deux points réels, la touche accidentellement en un point, ou ne la coupe plus.

Cette discussion minutieuse nous permet donc de tracer la courbe d'équation  $F(t, T) = 0$  dans le système d'axes rectangulaires  $OtT$  (fig. 7); elle a  $O$  pour centre; à chaque point  $(t, T)$  correspondent : le point  $(-t, -T)$  puis le point  $(\frac{1}{t}, \frac{1}{T})$ , donc aussi  $(\frac{-1}{t}, \frac{-1}{T})$ , puis le point  $(t, \frac{1}{t^2 T})$ , donc aussi  $(-t, \frac{-1}{t^2 T})$ ,  $(\frac{1}{t}, t^2 T)$   $(\frac{-1}{t}, -t^2 T)$ ; la courbe passe à l'origine, avec la tangente  $t + 2T = 0$ , ce qui est conforme au développement  $T = \frac{\theta}{2} - \frac{3\theta^3}{4} + \dots$  trouvé plus haut, avec  $\theta = -t$ ; la direction  $Ot(T = 0)$  est direction asymptotique triple et les trois asymptotes correspondantes sont confondues avec l'axe  $Ot$  qui ne coupe la courbe qu'en un point à distance finie  $O$ , le point à l'infini sur  $Ot$  comptant pour huit intersections confondues; la direction  $OT(t = 0)$  est direction asymptotique quintuple, les cinq asymptotes correspondantes étant confondues avec  $OT$ ; la direction asymptotique restante,  $2t + T = 0$ , est simple et l'asymptote correspondante, puisque  $O$  est centre, est  $2t + T = 0$ ; les points où

cette asymptote coupe la courbe à distance finie sont fournis par l'équation  $t(24t^6 - 4t^4 + 3) = 0$  et l'on s'assure aisément que l'équation  $24t^6 - 4t^4 + 3 = 0$ , qui se ramène à la résolution de  $3\lambda^3 - 4\lambda + 24 = 0$ , n'a que des racines imaginaires. La forme de la courbe en résulte; nous avons montré que chaque parallèle  $T = T_0$  à l'axe  $Ot$  ne coupe la courbe qu'en deux points réels au plus, de sorte que la branche partant de  $O$ , du côté des  $T$  négatifs, et  $t$  positifs, ne peut admettre qu'une tangente parallèle à l'axe des  $t$ , et que la discussion faite plus haut pour déterminer l'intersection d'une ellipse  $E(T_0)$  avec  $(\mathcal{E}_2)$  est parfaitement légitimée.

Nous allons maintenant calculer sans difficulté les valeurs  $t$  et  $T$  qui correspondent au contact de  $E(T)$  avec l'ovale  $(\mathcal{E}_2)$ .

Il y a avantage à revenir aux variables  $t, u = tT$ , puisque le changement de signe simultané de  $t$  et  $T$  ne change pas  $u$ .

Si l'on pose  $tT = u$ , la forme (10) de l'équation  $F(t, T) = 0$  donne

$$(1 + t^2)^2(1 + u)^4 - (1 + t^4)(1 + u^2)^2 = 0$$

ou encore

$$(22) \quad 2t^4(u^3 + u^2 + u) + t^2(u^4 + 4u^3 + 6u^2 + 4u + 1) + 2(u^3 + u^2 + u) = 0.$$

Quant à l'équation  $\varphi(t) = 0$ , elle devient

$$(23) \quad t^2(3u^2 + 2u + 1) + u^3 + 2u^2 + 3u = 0.$$

Éliminant  $t^2$  et supprimant le facteur  $u = 0$ , nous obtenons

$$(24) \quad 2(u^2 + u + 1)[(u^3 + 2u^2 + 3u)^2 + (3u^2 + 2u + 1)^2] - (u^2 + 2u + 3)(3u^2 + 2u + 1)(u + 1)^4 = 0.$$

En développant on a

$$2(u^2 + u + 1)[u^6 + 4u^5 + 19u^4 + 24u^3 + 19u^2 + 4u + 1] - (3u^4 + 8u^3 + 14u^2 + 8u + 3)(u^4 + 4u^3 + 6u^2 + 4u + 1) = 0.$$

En divisant par  $u^4$ , on a

$$2\left(u + \frac{1}{u} + 1\right)\left[u^2 + \frac{1}{u^2} + 4\left(u^2 + \frac{1}{u^2}\right) + 19\left(u + \frac{1}{u}\right) + 24\right] - \left[3\left(u^2 + \frac{1}{u^2}\right) + 8\left(u + \frac{1}{u}\right) + 14\right]\left[u^2 + \frac{1}{u^2} + 4\left(u + \frac{1}{u}\right) + 6\right] = 0.$$

En posant  $u + \frac{1}{u} = U$ , on obtient

$$2(U + 1)[U^3 + 4U^2 + 16U + 16] - (3U^2 + 8U + 8)(U^2 + 4U + 4)$$

ou, regardant avec un peu d'attention, simplement

$$(25) \quad 2(U + 1)U^3 - 3U^2(U^2 + 4U + 4) = 0,$$

car les groupes négligés

$$2(U + 1)(4U^2 + 16U + 16) \quad \text{et} \quad (8U + 8)(U^2 + 4U + 4)$$

se détruisent. Le facteur  $U^2 = 0$  correspond à la solution  $u^2 + 1 = 0$  ou  $1 + t^2 T^2 = 0$ . Or la forme

$$(1 + t^2)^2(1 + u)^4 - (1 + t^4)(1 + u^2)^2 = 0$$

montre que si  $1 + u^2$  est nul, on a  $1 + t^2 = 0$ , donc  $1 + t^2 = 0$ ,  $T^2 = 1$ . Cette circonstance peut être prévue *a priori*; les deux points ( $t = i$ ,  $\varepsilon = 1$ ), ( $t = i$ ,  $\varepsilon = -1$ ) coïncident avec le même point cyclique, qui est point double de la courbe, obtenu lui aussi avec une seule valeur du paramètre  $t$  (mais avec deux valeurs de  $\varepsilon$ ); si l'on suppose  $T = \pm 1$ , l'équation fournissant  $t$  est

$$(1 + t^2)^2(1 + t)^4 - (1 + t^4)(1 + t^2)^2 = 0,$$

et elle admet les racines doubles  $t = \pm i$ . Cela tient à ce que chaque ellipse  $E(1)$ ,  $E(-1)$  est un cercle et passe aux points cycliques.

Ce cas écarté, l'équation (25) se réduit à

$$(25') \quad U^2 + 10U + 12 = 0.$$

Les valeurs de  $u$  ne sont réelles que si  $|U| \geq 2$ , donc nous ne conservons que la racine  $U = -5 - \sqrt{13}$ ; on calcule ensuite  $u$ ,  $t$  et  $T$  par les relations

$$(26) \quad u^2 + (5 + \sqrt{13})u + 1 = 0, \quad t^2 = -\frac{u(u^2 + 2u + 3)}{3u^2 + 2u + 1}, \quad tT = u,$$

ce qui donne bien un ensemble de quatre points  $(t_0, T_0)$ ,  $(-t_0, -T_0)$ ,  $(\frac{1}{t_0}, \frac{1}{T_0})$ ,  $(\frac{-1}{t_0}, \frac{-1}{T_0})$ . Pour faire le calcul aisément, on peut

calculer deux constantes numériques A, B telles que  $Au + B$  et  $-\frac{u(u^2 + 2u + 3)}{3u^2 + 2u + 1}$  soient égales pour les racines de

$$u^2 + (5 + \sqrt{13})u + 1 = 0;$$

il suffit d'exprimer que  $u(u^2 + 2u + 3) + (Au + B)(3u^2 + 2u + 1)$  est divisible par  $u^2 + (5 + \sqrt{13})u + 1$ . Le premier terme du quotient est  $(1 + 3A)u$  et le premier reste est

$$[3B - A(13 + 3\sqrt{13}) - 3 - \sqrt{13}]u^2 + (2 + 2B - 2A)u + B.$$

On écrit donc, pour obtenir A et B, les équations

$$3B - A(13 + 3\sqrt{13}) - 3 - \sqrt{13} = \frac{2 + 2B - 2A}{5 + \sqrt{13}} = B.$$

Cela donne, par des calculs ennuyeux que nous ne reproduisons pas

$$(27) \quad \begin{cases} A = \frac{5 - 2\sqrt{13}}{9}, & B = \frac{7 - \sqrt{13}}{9}, \\ t^2 = \frac{(5 - 2\sqrt{13})u + (7 - \sqrt{13})}{9}, & u^2 + (5 + \sqrt{13})u + 1 = 0. \end{cases}$$

Pour calculer aisément  $t$  opérons ainsi : soit, les radicaux étant positifs

$$(28) \quad u_1 = \frac{-5 - \sqrt{13} + \sqrt{34 + 10\sqrt{13}}}{2}, \quad u_2 = \frac{-5 - \sqrt{13} - \sqrt{34 + 10\sqrt{13}}}{2}.$$

On a, puisque  $5 - 2\sqrt{13}$  est négatif,

$$t_1^2 - t_2^2 = \frac{(5 - 2\sqrt{13})(u_1 - u_2)}{9} < 0.$$

En prenant pour  $t_1$  et  $t_2$  les racines carrées positives de  $t_1^2$  et  $t_2^2$ , on a donc  $t_1 < t_2$ . Or on a

$$t_1^2 + t_2^2 = \frac{(2\sqrt{13} - 5)(5 + \sqrt{13}) + 2(7 - \sqrt{13})}{9} = \frac{5 + \sqrt{13}}{3} \quad (t_1 t_2 = 1);$$

$$(t_1 + t_2)^2 = \frac{11 + \sqrt{13}}{3}, \quad (t_2 - t_1)^2 = \frac{\sqrt{13} - 1}{3};$$

$$(29) \quad \begin{cases} t_1 = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{11 + \sqrt{13}}{3}} - \sqrt{\frac{\sqrt{13} - 1}{3}} \right\}, \\ t_2 = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{11 + \sqrt{13}}{3}} + \sqrt{\frac{\sqrt{13} - 1}{3}} \right\}. \end{cases}$$

Ensuite on a

$$(30) \quad \begin{aligned} t_1 T_1 &= u_1, & t_2 T_2 &= u_2; \\ T_1 &= u_1 t_2, & T_2 &= u_2 - t_1. \end{aligned}$$

On a ainsi, avec le minimum de radicaux à calculer (surtout de radicaux superposés), les coordonnées des points

$$(t_1, T_1), \quad (-t_1, -T_1), \quad \left(\frac{1}{t_1}, \frac{1}{T_1}\right), \quad \left(-\frac{1}{t_1}, -\frac{1}{T_1}\right)$$

qui nous intéressent. On a, en effectuant les calculs, approximativement

$$(31) \quad \begin{cases} u_1 = -0,118, & u_2 = -8,487, & t_1 = 0,63, & t_2 = 1,56, \\ T_1 = -0,184, & T_2 = -5,347. \end{cases}$$

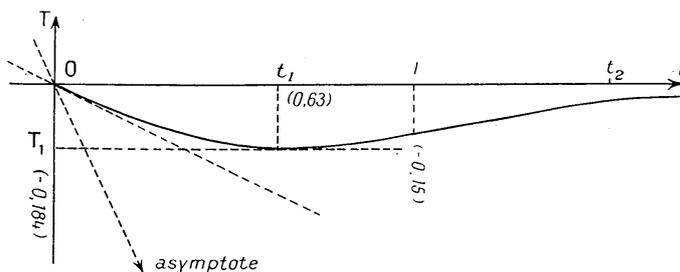


Fig. 7.

La figure 6 indique le centre M de l'ellipse  $E(0,184)$ , le centre  $\mu$  de l'ellipse  $E(-0,63)$ , le point  $\nu$  où ces deux ellipses touchent l'ovale ( $\mathcal{E}_2$ ) et les portions utiles de ces ellipses.

La figure 7 ne représente que la portion strictement indispensable de la courbe, car l'ordonnée  $T_2$  est sensiblement égale à 30 fois  $T_1$  et exigerait une place exagérée.

5. LIEU DU POINT DE CONTACT DE DEUX ELLIPSES (E) TANGENTES. — Considérons deux ellipses (E), ( $E_1$ ) dont les centres  $\omega, \omega_1$  sont du même côté de  $Ox$ ; elles se coupent en A et B et en deux autres points réels situés de part et d'autre de  $Ox$  : cela résulte de la construction indiquée plus haut pour la corde commune autre que AB; la droite ( $\omega', \omega'_1$ ) joignant les symétriques des centres  $\omega, \omega_1$  coupe AB en un

point  $V$  extérieur à  $(C)$ , de sorte que le point  $U$  est intérieur au segment  $AB$ , donc à  $(E)$  et à  $(E_1)$ ; la corde commune donne donc deux points réels et distincts.

Si  $\omega$ ,  $\omega_1$  sont de part et d'autre de  $Ox$ , le point  $V$  est intérieur au segment  $AB$ , donc  $U$  extérieur et nous ne pouvons plus rien dire. Si  $\omega$  est fixe, en supposant  $\omega_1$  variable, pris d'abord du même côté de  $Ox$  que  $\omega$ , puis venant de l'autre côté, par raison de continuité, les points communs seront réels un certain temps et il peut arriver qu'ils disparaissent en se confondant; nous avons donc possibilité de trouver des couples d'ellipses tangentes. Si nous prenons le cas où  $\omega$ ,  $\omega_1$  sont les points  $(o, R)$ ,  $(o, -R)$  les deux ellipses sont circulaires et, en dehors de  $A$  et  $B$ , n'ont plus de points communs réels. De même, d'une façon plus générale, si  $\omega$  et  $\omega_1$  sont symétriques par rapport à l'origine, les deux ellipses sont homothétiques et n'ont que  $A$  et  $B$  pour points communs réels.

En tout cas, si deux ellipses  $(E)$ ,  $(E_1)$  sont tangentes, il résulte de ce qui a été dit à l'instant que leurs centres sont de part et d'autre de  $Ox$ . Pour un tel couple,  $AB$  est une corde commune ne contenant pas le point de contact, donc l'autre corde commune  $UW$  du cas général est la tangente commune et contient ce point de contact; la droite  $\omega'\omega'_1$  qui joint les pôles de  $AB$  par rapport à  $(E)$ ,  $(E_1)$  porte le point de contact qui est en même temps un ombilic des deux coniques (la propriété est projective : supposons que  $A$ ,  $B$  soient les points cycliques; la sécante commune aux deux cercles tangents est la tangente au point de contact;  $\omega'$ ,  $\omega'_1$  sont les centres des deux cercles et la ligne des centres passe par le point de contact). Ici les deux ombilics portés par la droite  $\omega'\omega'_1$  sont le point à l'infini de  $\omega'\omega'_1$  et le milieu du segment  $\omega'\omega'_1$ ; les ellipses  $(E)$ ,  $(E_1)$  se touchent en l'un de ces deux points; ce ne peut être le point à l'infini, donc c'est le milieu du segment  $\omega'\omega'_1$  et nous avons à exprimer que la corde commune passe par cet ombilic. Cette condition est nécessaire, mais non suffisante : la propriété est projective; raisonnons donc sur deux cercles et la corde commune constituée par la droite de l'infini; si les cercles sont égaux, sans être tangents, la droite de l'infini contient un ombilic, mais en même temps l'axe radical contient l'ombilic associé : nous trouverons effectivement cette solution parasite.

Considérons donc les deux ellipses de paramètres  $t$  et  $T$ ; la corde commune associée à  $AB$  a pour équation

$$(32) \quad [2(x - R) + y(t + T)] + \left[ 2(x + R) - y\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{T}\right) \right] \frac{1}{tT} = 0.$$

En passant remarquons que si  $t$  reste fixe et si  $T$  varie, cette corde commune enveloppe une courbe unicursale de classe 3. Le milieu du segment  $\omega'\omega'_1$ , point qui sera celui où se toucheront les deux ellipses, a pour coordonnées

$$-\frac{R}{2} \left[ \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{1-T^2}{1+T^2} \right], \quad -R \left[ \frac{t}{1+t^2} + \frac{T}{1+T^2} \right].$$

Si l'on pose  $t + T = s$ ,  $tT = p$ , ces coordonnées s'écrivent

$$(33) \quad \frac{-R(1-p^2)}{(1-p^2)+s^2}, \quad \frac{-Rs(1+p)}{(1-p)^2+s^2}.$$

En écrivant que ces coordonnées satisfont à (32), on a une équation de condition où  $p-1$  se met en facteur; si  $p=1$ ,  $\omega$  et  $\omega_1$  sont symétriques par rapport à  $Oy$  qui est la corde commune autre que  $AB$ : cette corde commune passe bien par le milieu du segment  $\omega'\omega'_1$ , mais en même temps,  $AB$  passe par le point à l'infini de  $\omega'\omega'_1$ , de sorte que l'on a le cas parasite prévu *a priori*; en écartant  $p=1$ , on a, par un calcul facile,

$$(34) \quad 8p^2 - s^2(1 + 4p + p^2) = 0.$$

Cette relation permet d'exprimer  $s$  et  $p$  rationnellement au moyen d'un paramètre auxiliaire  $\theta$  (il suffit d'exprimer  $p$  et  $\sqrt{1 + 4p + p^2}$  au moyen d'un paramètre unicursal  $\theta$ ), de sorte que la courbe obtenue est unicursale. On a une simplification provenant de ce que l'on a

$$(1-p)^2 + \frac{8p^2}{1+4p+p^2} = \frac{(1+p)^2(1+p^2)}{1+4p+p^2},$$

et par suite,

$$(35) \quad x = \frac{-2(1-p)(1+4p+p^2)}{(1+p)(1+p^2)}, \quad y = \frac{-2pR\sqrt{2}\sqrt{1+4p+p^2}}{(1+p)(1+p^2)}.$$

Pour que  $1 + 4p + p^2$  soit positif, il faut et il suffit que l'on ait soit

$p \geq -2 + \sqrt{3}$ , soit  $p \leq -2 - \sqrt{3}$  (si l'on a exprimé  $p$  et  $\sqrt{1 + 4p + p^2}$  au moyen du paramètre  $\theta$ , ces inégalités sont automatiquement vérifiées); de plus, pour que  $t$  et  $T$  définies par  $tT = p$ ,  $t + T = s$  soient réelles, il faut que l'on ait  $s^2 - 4p \geq 0$ , ce qui, puisque  $1 + 4p + p^2$  doit être positif, revient à  $p(1 + p)^2 \leq 0$  ou  $p \leq 0$ ; donc la portion de courbe correspondant à  $p > 0$  donne des points à coordonnées réelles où se touchent deux ellipses imaginaires conjuguées: cela n'a rien de paradoxal, car si  $f = 0$ ,  $g = 0$  sont les équations de deux coniques réelles, les deux coniques imaginaires conjuguées  $f + (\lambda + \mu i)g = 0$  et  $f + (\lambda - \mu i)g = 0$  ont les mêmes points communs que  $f = 0$ ,  $g = 0$  et les mêmes particularités éventuelles de contact en ces points. On remarque la forme simple de  $x^2 + y^2$ ; on a, en effet,

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2(1 + 4p + p^2)}{1 + p^2}.$$

On en déduit

$$(37) \quad \begin{cases} \frac{Rx}{p-1} = \frac{x^2 + y^2}{1+p} = \frac{x^2 + y^2 + Rx}{2p} = \frac{x^2 + y^2 - Rx}{2}, \\ \frac{y}{x} = -2\sqrt{2} \frac{p}{p-1} \frac{1}{\sqrt{1+4p+p^2}}. \end{cases}$$

En remplaçant  $\frac{2p}{p-1}$  par  $\frac{x^2 + y^2 + Rx}{Rx}$  et  $p$  par  $\frac{x^2 + y^2 + Rx}{x^2 + y^2 - Rx}$ , la dernière formule (37) permet d'écrire

$$Ry = \frac{-\sqrt{2}(x^2 + y^2 + Rx)}{\sqrt{1 + 4\left(\frac{x^2 + y^2 + Rx}{x^2 + y^2 - Rx}\right) + \left(\frac{x^2 + y^2 + Rx}{x^2 + y^2 - Rx}\right)^2}} = \frac{-[(x^2 + y^2)^2 - R^2x^2]}{\sqrt{3(x^2 + y^2)^2 - R^2x^2}}.$$

En rendant entier et rationnel, on obtient, en supprimant le facteur parasite  $x^2 + y^2$ , l'équation définitive

$$(37) \quad (x^2 + y^2)^3 - R^2(x^2 + y^2)(2x^2 + 3y^2) + R^4x^2 = 0.$$

Si l'on passe aux coordonnées polaires  $\rho$ ,  $\omega$ , cette équation devient

$$(38) \quad \rho^4 - R^2(3 - \cos^2\omega)\rho^2 + R^4\cos^2\omega = 0.$$

Nous résolvons cette équation, non comme équation bicarrée, mais en décomposant d'une autre façon en produit de deux trinômes

$$(39) \quad (\rho^2 + R^2\cos\omega)^2 - R^2(3 + 2\cos\omega - \cos^2\omega)\rho^2 = 0.$$

En raison des symétries évidentes nous nous bornons à écrire les racines du trinôme

$$(40) \quad \rho^2 - R\rho\sqrt{(3 - \cos\omega)(1 + \cos\omega)} + R^2 \cos\omega = 0$$

ou

$$(41) \quad \frac{\rho}{R} = \frac{\sqrt{(3 - \cos\omega)(1 + \cos\omega)} + \varepsilon\sqrt{(3 + \cos\omega)(1 - \cos\omega)}}{2},$$

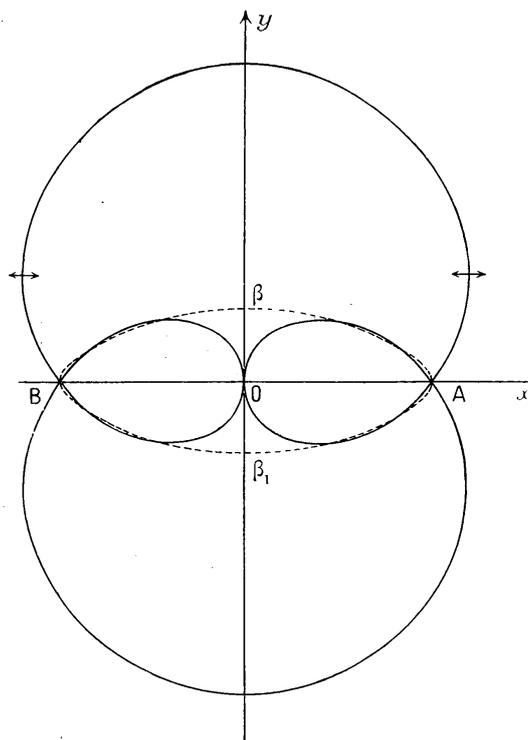


Fig. 8.

où les radicaux sont tous pris positivement et où  $\varepsilon = +1$  ou  $-1$ ; on a aisément

$$(42) \quad \frac{1}{R} \frac{d\rho}{d\omega} = \sin\omega \left[ \frac{\cos\omega - 1}{\sqrt{(3 - \cos\omega)(1 + \cos\omega)}} + \varepsilon \frac{1 + \cos\omega}{\sqrt{(3 + \cos\omega)(1 - \cos\omega)}} \right].$$

On vérifie aisément que pour  $\varepsilon = +1$ , la fonction  $\rho$  croît de 1 à  $\sqrt{3}$

quand  $\omega$  croît de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ ;  $\frac{\rho}{\rho'}$  est, pour  $\omega = 0$ , égal à  $\sqrt{2}$  et pour  $\omega = \frac{\pi}{2}$ , égal à l'infini. Pour  $\varepsilon = -1$ , la fonction  $\rho$ , quand  $\omega$  croît de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ , décroît de 1 à 0, et que  $\frac{\rho}{\rho'}$  est, pour  $\omega = 0$ , égal à  $-\sqrt{2}$ , et, pour  $\omega = \frac{\pi}{2}$ , égal à zéro : d'ailleurs l'équation cartésienne montre que  $Oy$  est tangente à l'origine. On complète par les symétries et l'on a la figure 8. Les points cycliques sont triples, les droites  $y = ix$ ,  $y = ix + \frac{R}{2}$  et  $y = ix - \frac{R}{2}$  sont trois asymptotes parallèles; chaque point  $A(R, 0)$  et  $B(-R, 0)$  est point double ordinaire et l'origine est point de contact de deux branches analytiques distinctes.

Les points de la courbe qui donnent des ellipses réelles sont fournis par les valeurs de  $p$  négatives; on doit donc avoir

$$(x^2 + y^2 + Rx)(x^2 + y^2 - Rx) < 0,$$

de sorte que l'on doit uniquement prendre les deux portions pointues se raccordant en  $O$ ; on vérifie immédiatement d'ailleurs que le cercle  $x^2 + y^2 - Rx = 0$  de diamètre  $OA$  a comme total de ses 12 points d'intersection :  $O$  comptant pour 4,  $A$  pour 2 et  $I, J$  comptant chacun pour 3; il contient donc à son intérieur la portion pointue reliant  $O$  à  $A$ . Cette portion pointue rencontre l'ovale ( $\mathcal{E}_2$ ) en deux points qui ont été déterminés au paragraphe précédent, puis en deux points plus rapprochés de  $Oy$ , où deux ellipses ( $E$ ) sont tangentes entre elles sans toucher ( $\mathcal{E}_2$ ).

La tangente commune aux deux ellipses est fournie par l'équation

$$(32') \quad p^2[2(x - R) + ys] + 2(x + R)p - ys = 0.$$

*Elle ne coïncide pas avec la tangente à la courbe lieu du point de contact que nous venons d'étudier; l'équation (32') peut en effet s'écrire sous la forme*

$$(33) \quad p(x - R) + (x + R) + \frac{(p^2 - 1)y\sqrt{2}}{\sqrt{1 + 4p + p^2}} = 0$$

et définit une enveloppe de classe 4, unicursale. Or, on trouve ce résultat curieux que *cette tangente commune enveloppe la développée de*

*l'ellipse*  $x^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{R^2}{3}$ , tandis que précédemment nous avons vu que la corde commune à chaque ellipse et l'ellipse infiniment voisine enveloppe la développée de l'ellipse  $x^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{R^2}{9}$  : les deux ellipses ainsi mises en évidence sont homothétiques par rapport à l'origine.

Pour obtenir les points où la tangente est parallèle à  $Oy$  ou  $Ox$ , il suffit de calculer les racines de  $\frac{1}{x} \frac{dx}{dp}$  ou  $\frac{1}{y} \frac{dy}{dp}$ , ce qui donne pour  $p$  les équations rationnelles respectives, en posant  $u = p + \frac{1}{p}$

$$u^2 - 4u - 8 = 0 \quad \text{et} \quad (p-1)(u^2 + 7u + 8) = 0.$$

Il est plus simple de poser  $x^2 = X$ ,  $y^2 = Y$  et de chercher les tangentes horizontales et verticales de la cubique unicursale décrite par le point  $X$ ,  $Y$ ; on trouve pour notre courbe  $(x, y)$  comme points où la tangente est verticale

$$\frac{x}{R} = \sqrt{3(2\sqrt{3} - 3)} = 1,18\dots, \quad \frac{y}{R} = \sqrt{9 - 5\sqrt{3}} = 0,583\dots,$$

comme points où la tangente est horizontale

$$\frac{x}{R} = \sqrt{\frac{19\sqrt{17} - 77}{8}} = 0,40\dots, \quad \frac{y}{R} = \sqrt{\frac{71 - 17\sqrt{17}}{8}} = 0,33\dots$$

Les rayons des cercles surosculateurs en  $O$  sont égaux à  $\frac{R\sqrt{3}}{6}$  et ceux relatifs aux sommets sur  $Oy$  égaux à  $\frac{9R\sqrt{3}}{13}$ . La figure donne, en pointillé, l'ovale ( $\mathcal{E}_2$ ) qui a une forme très pointue en  $A$  et  $B$ .

