JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

OLIVIER COSTA DE BEAUREGARD

Sur le problème relativiste de la dynamique des systèmes de points en interaction

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 28 (1949), p. 63-76.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1949_9_28__63_0>

Sur le problème relativiste de la dynamique des systèmes de points en interaction;

Par Olivier COSTA DE BEAUREGARD.

1. Le premier groupe des difficultés rencontrées dans l'établissement d'une dynamique relativiste des systèmes de points semblait parfois résider dans l'absence d'une définition covariante de la notion de *barycentre*, qui commande à son tour celle des moments, cinétique et pondéromoteur, *autour du barycentre*, et qui apparaît donc un élément tout à fait essentiel à l'énoncé de l'ensemble des *théorèmes généraux* de la dynamique; nous avons proposé un moyen technique simple de lever ces premières difficultés, et de définir en Relativité, d'une manière solidaire, le *barycentre* et le *moment cinétique et barycentrique autour du barycentre* d'un système de points (1); la remarque qui est à l'origine de ces définitions est celle d'après laquelle les trois composantes du moment cinétique orbital d'un point matériel s'associent à trois expressions qui généralisent les composantes du moment barycentrique habituel, pour former un tenseur antisymétrique d'Univers du second rang (2).

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. **224**, 1947, p. 540. Nous avons récemment pris connaissance d'un intéressant Mémoire de M. H. L. Pryce sur le problème du barycentre en Relativité restreinte (*Proc. Roy. Soc.*, **195** A, 1948, p. 62-69) et, grâce à lui, d'apprendre l'existence des travaux antérieurs de A. D. Fokker (*Relativiteits theorie*, Groningen, 1929) et de A. Papapetrou (*Praktica Acad. Athènes*, **14**, 1939, p. 540). L'esprit de ces travaux s'apparente par quelques traits à celui du nôtre. (Note ajoutée à la correction des épreuves).

(2) *Journal de Math.*, t. **22**, **2**, 1943, p. 121.

Ces questions de définition étant résolues, un second groupe de problèmes se présente. De toute évidence, l'équivalent massique de l'*énergie potentielle* doit intervenir pour assurer la conservation de la masse du système; en quels instants-points doit être appliquée cette énergie potentielle? Par raison de symétrie relativiste, une *impulsion potentielle* doit *a priori* être associée à l'énergie potentielle; *a priori* encore, le principe classique de l'égalité à distance de l'action et de la réaction n'est plus acceptable en Relativité, où il n'a même pas de sens covariant; il est visible que ces deux circonstances sont solidaires entre elles. Or, l'électromagnétisme des Faraday, Maxwell, Abraham, Poincaré, était déjà familier de ce genre de problèmes, qui surgissent aussitôt qu'une transmission à vitesse finie des champs d'interaction est envisagée; l'on se rappelle que Maxwell a considéré l'énergie potentielle comme densitairement distribuée dans le champ, suivant une loi physiquement déterminée, et qu'Abraham et Poincaré ont défini de même une densité d'impulsion potentielle du champ, en la faisant dériver du tenseur élastique de Maxwell. Nous avons fait remarquer que ces notions, auxquelles il convient, par raison d'homogénéité, d'adjoindre la *densité de spin du champ* de M. E. Henriot (1), peuvent être transportées en mécanique rationnelle relativisée, et y permettre l'énoncé des *théorèmes généraux* de la dynamique (2); ceux-ci, obtenus à partir de lois densitaires *purement locales*, se présentent comme des lois intégrales tridimensionnelles énoncées au moyen de l'introduction d'une famille continue d'hypersurfaces $\mathcal{E}(\theta)$ du genre espace; ils sont, comme il était *a priori* nécessaire, *invariants vis-à-vis des changements de famille* $\mathcal{E}(\theta)$. Ces théorèmes généralisent les théorèmes prérelativistes bien connus, et les complètent par la prise en considération de la manière dont le champ emmagasine potentiellement, et transmet de proche en proche l'interaction.

Le second groupe des difficultés rencontrées ayant, à son tour, été réglé comme il vient d'être dit, force est alors de reconnaître que l'essentiel du problème relativiste de la dynamique des systèmes n'a pas même été entamé; ses abords, simplement, ont été dégagés. En

(1) *Mém. Sc. Phys.*, t. 30, 1936.
(2) *C. R. Acad. Sc.*, t. 224, 1947, p. 333 et 540.

effet, l'étude effectuée permet de caractériser clairement l'ensemble des approximations que faisait la mécanique newtonienne, grâce auxquelles le problème de l'évolution du champ d'interaction était résolu *a priori* et, par le fait, réduit à rien. Toutes ces approximations revenaient, en des sens divers, à faire $C \to \infty$; elles sont, par nature même, interdites à la Relativité; il suit de là que le problème du champ d'interaction, que la dynamique newtonienne traitait par prétérition, passe en Relativité au premier plan, et commande tout le reste ([1]).

Le traitement de ce problème sera certainement une œuvre importante et de longue haleine; si l'on admet que la notion classique d'une force fonction de la distance finie y doit être remplacée par une loi purement locale — comme dans le problème prérelativiste de deux points matériels liés par un fil élastique — l'idée d'introduire une métrique apparaît toute naturelle; il faudrait conclure, alors, que le problème considéré est un problème de Relativité générale. Quoi qu'il en soit de ces dernières suggestions, nous espérons que notre modeste contribution positive au problème n'aura malgré tout pas été inutile.

2. Extension quadridimensionnelle d'un théorème de la théorie des torseurs. Définitions solidaires du barycentre et du moment autour du barycentre. — Considérons un système de N torseurs, dont, par définition, chacun est constitué d'une *résultante glissante* p^i $(i, j, k, l = 1, 2, 3, 4)$ et d'un *couple* $s^{ij} \equiv -s^{ji}$; supposons, pour fixer les idées, que tous les quadrivecteurs p^i soient du genre temps, avec des composantes temporelles positives. Posons, par définition de la *somme* P^i du *système* des N torseurs

$$\boxed{P^i = \sum p^i;} \tag{1}$$

tout à l'heure, quand nous aurons déterminé sa ligne d'action, ou *axe*, P^i sera la *résultante glissante* du *torseur résultant;* en vertu des

([1]) *C. R. Acad. Sc.*, t. 225, 1947, p. 525.

restrictions indiquées, le quadrivecteur P^i est certainement du genre temps, avec une composante temporelle positive.

Soient maintenant X^i les quatre coordonnées du point d'application d'un quadrivecteur équipollent à P^i, et $S^{ij} \equiv - S^{ji}$ les six composantes d'un tenseur antisymétrique, auquel nous imposons *a priori* la condition

$$\boxed{S^{ij} P_j = 0,} \tag{2}$$

qui s'exprime par quatre équations, dont trois seulement sont indépendantes. Définissons alors solidairement l'instant-point X^i et le tenseur S^{ij} au moyen de l'équation tensorielle

$$\boxed{X^j P^i - X^i P^j + S^{ij} = \sum [x^j p^i - x^i p^j + s^{ij}],} \tag{3}$$

qui équivaut à six équations algébriques; les P^i étant déterminées d'après (1), on verra que les (2) et (3) forment un système linéaire de rang 9 en les dix inconnues X^i et S^{ij}.

Plaçons-nous provisoirement dans le repère galiléen $\mathcal{G}_0$ dans lequel les trois P^u ainsi que, d'après (2), les trois S^{u4} s'annulent ($u, v, w = 1, 2, 3$ par permutation circulaire) :

$$P_0^u = 0, \qquad S_0^{u4} = 0; \tag{2'}$$

dans $\mathcal{G}_0$, les équations (3) se réduisent à

$$\left\{\begin{aligned} S_0^{uv} &= \sum [x_0^v p_0^u - x_0^u p_0^v + s_0^{uv}], \\ X_0^u P_0^4 &= \sum [x_0^u p_0^4 - x_0^4 p_0^u + s_0^{4u}]; \end{aligned}\right. \tag{3'}$$

le tenseur S^{ij} est complètement déterminé par les $(2'_2)$ et $(3'_1)$, et la ligne d'action du quadrivecteur P^i par les $(3'_2)$; des dix inconnues X_0^i et S_0^{ij}, seule X_0^4 reste pour le moment arbitraire.

Finalement, les équations (1), (2) et (3) déterminent complètement, par sa *résultante glissante* P^i et par son *couple* $S^{ij} \equiv - S^{ji}$ le *torseur résultant* du *système* des N torseurs p^i, $s^{ij} \equiv - s^{ji}$.

Maintenant, et facultativement, supposons que les N quadrivecteurs

p^i ne soient plus glissants, mais liés ; il est possible, alors, de lier aussi le quadrivecteur P^i, en vertu de la nouvelle équation

$$\boxed{X_i P^i = \sum x_i p^i} \tag{4}$$

qui, dans le repère $\mathcal{G}_0$, s'écrit

$$X_{04} P_0^4 = \sum x_{0i} p_0^i, \tag{4'}$$

et détermine la dixième inconnue X_0^4 ; on voit que les équations (2), (3) et (4) forment un système linéaire de rang 10 en les dix inconnues X^i et S^{ij}.

Les précédents calculs fournissent le moyen de définir de manière covariante d'abord l'*impulsion masse totale* P^i, puis, solidairement, le *barycentre* X^i et le *moment autour du barycentre* S^{ij} d'un système de points matériels (doués de *spins* s^{ij} dans le cas général). Que les deux dernières notions soient liées entre elles, c'est ce qui ressort *a priori* du fait suivant : étant donné un point matériel x^i d'impulsion-masse p^i, les trois composantes en u, v du tenseur $x^j p^i - x^i p^j$ représentent le *moment cinétique orbital* de ce point, et les trois composantes en u, 4, une généralisation de la notion classique du *moment barycentrique ;* en effet, l'on a, dans le cas du point sans spin, $p^u = mv^u$, $p^4 = icm$ (et, naturellement, $x^4 = ict$) ; les composantes en u, considérées s'écrivent alors $icm(x^u - v^u t)$ et, si le point est pris simultanément avec l'origine, elles se réduisent à $icmx^u$; ce résultat subsiste encore lorsque t est pris infiniment petit ($t = dt$), car alors le terme $-v^u dt$ peut être considéré comme une *correction de non-simultanéité ;* lorsque t est fini, l'on a affaire à une véritable généralisation de la notion classique.

Pour définir à la manière *large* le barycentre d'un essaim de N points matériels provisoirement supposés sans interaction, nous considérerons fictivement chacun de ces points comme glissant le long d'un axe du genre temps colinéaire à son impulsion-masse p^i (donc non tangent à sa trajectoire d'Univers dans le cas général du spin) ; par définitions, la somme P^i sera l'*impulsion-masse* totale de l'essaim, le couple S^{ij} son *moment cinétique et barycentrique autour du barycentre*, enfin l'axe sera le *lieu d'Univers du barycentre* X^i. La justification de ces dénominations résulte de ce que, si l'on pose

$$P^4 = icM,$$

les (1) s'écrivent

$$P^u = \sum p^u, \qquad M = \sum m;$$

que, dans $\mathcal{G}_0$, les $(3'_1)$ définissent à la manière habituelle le *moment cinétique autour du barycentre* (le *moment barycentrique* correspondant étant nul dans $\mathcal{G}_0$), et cela, notons-le bien, *indépendamment de l'origine des espaces*, parce que les trois P^u_0 sont nulles; enfin que, toujours dans $\mathcal{G}_0$, les $(3'_2)$ généralisent la définition habituelle du barycentre suivant

$$M_0 X^u_0 = \sum \left\{ m_0(x^u_0 - v^u_0 t_0) - \frac{1}{ic} s^{u4}_0 \right\};$$

si tous les points sont pris au même instant $t_0 = 0$, et en l'absence de spin, l'on retombe exactement sur les équations classiques.

Pour définir le barycentre à la manière *stricte*, on liera chacun des N points de l'essaim à l'instant-point d'intersection de son *axe* et de sa trajectoire d'Univers (tous ces instants-points n'étant pas, dans le cas général, considérés *simultanément*); dans $\mathcal{G}_0$, l'équation (4') s'écrit alors

$$M_0 T_0 = \sum \left(m_0 t_0 - \frac{1}{c^2} x_{0u} p^u_0 \right),$$

et le *temps du barycentre* $T_0 = X^4_0/ic$ apparaît ainsi comme la moyenne pondérée des temps des points de l'essaim, à un très petit terme correctif près correspondant au *viriel* de ces points. Ainsi, même si l'on prend tous les points au même instant, leur barycentre défini à la manière *stricte* ne sera pas à cet instant; ce fait risque de paraître fortement singulier aux habitués de la mécanique newtonienne; on pourra l'éviter, si l'on veut, en en restant à la définition *large* du barycentre.

L'esprit de la mécanique newtonienne aussi bien que celui de la théorie quantique des particules à spin seront respectés si nous appelons fictivement P^i l'*impulsion-masse du barycentre* et S^{ij} le *spin du barycentre;* remarquons bien que, même si les points constituants sont dénués de spin, leur barycentre aura un spin, qui n'est autre que le classique *moment du système autour du barycentre*.

3. L'impulsion-énergie potentielle et le spin potentiel du champ. Énoncé des théorèmes généraux de la dynamique. — Tandis que, dans la physique prérelativiste, l'électromagnétisme était tributaire de la mécanique qui lui fournissait, notamment, les notions fondamentales de la force ou de l'énergie, la situation se renverse en Relativité : la mécanique y reçoit notamment de l'électromagnétisme les lois de variance de la force et de l'énergie ; la raison profonde de ce fait est que, avant Einstein, la mécanique avait ignoré le rôle que joue la constante c dans son propre domaine. Suivant la tradition relativiste, et conformément à ce que nous avons dit au paragraphe **1**, nous allons demander à l'électromagnétisme les conceptions nécessaires et suffisantes pour fonder la dynamique des systèmes de points matériels en interaction.

Nous admettrons essentiellement que l'existence d'un champ d'interaction se traduit par une distribution continue d'impulsion-masse et de spin dans l'espace-temps; soient T^{ij} et σ^{ijk} les tenseurs densitaires correspondants, T^{ij} étant asymétrique dans le cas général du spin, et σ^{ijk} étant essentiellement antisymétrique sur i, j [1]. Pour commencer, nous remplacerons les N trajectoires d'Univers des points matériels par N hypertubes, dont les hypersections du genre espace seront finies dans toutes les directions ; à l'intérieur de la matière, les tenseurs T^{ij} et σ^{ijk} seront décrits chacun par la somme de deux tenseurs, le premier, affecté de l'indice 1, résultant de l'existence de la matière et s'annulant à l'extérieur; le second, affecté de l'indice 2, résultant de l'existence du champ et ne subissant pas de discontinuité à la traversée de l'hyperparoi des tubes matériels. Cela étant, en tout instant-point de l'Univers, la *densité de force* f^i et la *densité de couple* μ^{ij} s'écrivent respectivement

$$(5) \qquad f^i \equiv \partial_k T^{ik}, \qquad \mu^{ij} \equiv T^{ij} - T^{ji} + \partial_k \sigma^{ijk};$$

les équations d'évolution du système *matière + champ d'interaction* seront écrites sous la forme de l'équilibre dynamique (au sens de d'Alembert); elles admettent la *forme purement locale*, valable en

---

[1] Pour l'exposé de la dynamique relativiste des milieux continus doués de spin, on pourra consulter notre Mémoire au *Journal de Mathématiques*, t. **22**, 2, 1943, p. 118-136, et nos notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. **218**, 1944, p. 31 ; t. **218**, 1944, p. 961 ; t. **225**, 1947, p. 523.

tout instant-point,

$$f^i = 0, \qquad x^j f^i - x^i f^j + \mu^{ij} = 0\,; \tag{6}$$

compte tenu des relations évidentes

$$T^{ik}\,\partial_k x^j \equiv T^{ij}, \tag{7}$$

les (6) et (5) admettent comme conséquences

$$\boxed{\partial_k T^{ik} = 0,} \qquad \boxed{\partial_k[x^j T^{ik} - x^i T^{jk} + \sigma^{ijk}] = 0\,;} \tag{8}$$

telles sont les deux équations tensorielles générales, en *somme* et en *moment*, de l'évolution du système *matière + champ ;* elles sont purement locales; nous allons en tirer les énoncés relativistes des *théorèmes généraux*, bien connus de la mécanique classsique.

Introduisons *arbitrairement* une famille d'hypersurfaces tridimensionnelles $\mathcal{E}(\theta)$, en général curvilignes, partout du genre espace, et balayant continûment tout l'Univers de Minkowski dans le sens des temps croissants lorsque le paramètre réel θ varie de $-\infty$ à $+\infty$; nous admettrons que, lorsqu'on s'éloigne à l'infini dans une direction quelconque sur une $\mathcal{E}(\theta)$, la densité moyenne de matière décroît en sorte que, si l'intensité du champ d'interaction décroît avec la distance à la matière, les deux tenseurs densitaires T^{ij} et σ^{ijk} tendent vers zéro suffisamment vite à l'infini spatial. Considérons alors un domaine quadridimensionnel limité par deux hypersurfaces $\mathcal{E}(\theta_1)$ et $\mathcal{E}(\theta_2)$, ainsi que par une hyperparoi $\mathfrak{T}$ du genre temps qui ne soit rencontrée par aucun hypertube matériel; intégrons les (8) dans ce domaine, transformons le résultat en intégrale triple étendue au contour précédemment défini, enfin éloignons à l'infini dans toutes les directions l'hyperparoi $\mathfrak{T}$; il résulte des hypothèses faites que les intégrales triples d'hyperparoi $\mathfrak{T}$ tendent vers zéro, en sorte que, si l'on oriente les hypercloisons $\mathcal{E}(\theta_1)$ et $\mathcal{E}(\theta_2)$ dans le même sens relativement aux axes de temps, les équations densitaires (8) sont équivalentes aux équations intégrales

$$\left\{\begin{aligned} &\iiint_{\mathcal{E}(\theta)} T^{ik}\,\delta u_k = P^i_0, \\ &\iiint_{\mathcal{E}(\theta)} [x^j T^{ik} - x^i T^{jk} + \sigma^{ijk}]\,\delta u_k = C^{ij}_0\,; \end{aligned}\right. \tag{9}$$

suivant notre habitude, $ic\,\delta u_l$ désigne le dual de l'élément d'intégration trilinéaire $[dx^i\,dx^j\,dx^k]$; P^i_0 et $C^{ij}_0 \equiv - C^{ji}_0$ désignent deux tenseurs constants.

Par définitions de l'*impulsion-masse* δp^i et du *spin* δs^{ij} d'origine inertique relatifs à un hypertube matériel infiniment délié, on a identiquement

$$\delta p^i \equiv T^{ik}_1\,\delta u_k, \qquad \delta s^{ij} \equiv \sigma^{ijk}_1\,\delta u_k; \tag{10}$$

étranglons alors les N hypertubes matériels précédemment considérés de manière à passer au cas des N trajectoires d'Univers de points matériels, et supposons essentiellement : *a*. que les intégrales d'origine *matérielle* tendent vers des limites finies p^i, s^{ij} pour chaque hypertube; *b*. que les parties *intérieures* des intégrales de champ tendent vers zéro, et que leur partie extérieure tende vers une limite finie; dans ces conditions, les deux équations d'évolution du système, en somme et en moment, deviennent respectivement, sous forme intégrale,

$$\boxed{\begin{aligned} &\left\{ \sum p^i + \iiint T^{ik}\,\delta u_k \right\}_0 = P^i_0, \\ &\left\{ \sum [x^i p^j - x^j p^i + s^{ij}] + \iiint [x^i T^{jk} - x^j T^{ik} + \sigma^{ijk}]\,\delta u_k \right\}_0 = C^{ij}_0; \end{aligned}} \tag{11}$$

les termes en Σ, ou *termes cinétiques*, sont relatifs aux N points matériels, et les termes en $\iiint$, ou *termes potentiels*, sont relatifs au champ d'interaction; les intégrales sont calculées sur l'hypersurface courante $\mathcal{E}(\theta)$, et les points matériels sont tous pris sur cette même hypersurface.

En l'absence de spin, on aurait

$$\sigma^{ijk} \equiv 0, \qquad s^{ij} \equiv 0, \tag{12}$$

la seconde relation étant la conséquence intégrale de la première, et de même [1]

$$T^{ij} - T^{ji} \equiv 0, \qquad x^{ij} p^i - x^{ji} p^j \equiv 0; \tag{13}$$

[1] Voir, sur ce sujet, notre Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. **225**, 1947, p. 523.

on voit sans peine, alors, que la seconde des équations (11) est conséquence de la première, avec

$$C_0^{ij} = X^j P_0^i - X^i P_0^j, \tag{14}$$

X^i désignant l'instant-point courant d'un certain *axe* colinéaire à P_0^i.

Revenons au cas général et, comme il était annoncé, tirons des (11) les énoncés relativistes des théorèmes généraux de la dynamique des systèmes de points. Décomposons arbitrairement l'hypersurface courante $\mathcal{E}(\theta)$ en éléments infiniment petits dans toutes leurs dimensions, δu_k, variant de manière continue en fonction de θ; il résulte de la théorie développée au paragraphe **2**, ainsi que des équations (11) précédentes, que le *torseur résultant* P^i, S^{ij} *du système des* N *torseurs* p^i, s^{ij} *et des* ∞ *torseurs infinitésimaux* $T^{ik}\delta u_k$, $\sigma^{ijk}\delta u_k$ *est conservatif.* Il est conservatif en ce double sens qu'il n'est altéré ni par un changement de $\mathcal{E}$ à l'intérieur d'une famille $\mathcal{E}(\theta)$, ni par un changement de famille $\mathcal{E}(\theta)$; celà revient à dire que *le torseur dynamique résultant est : a. conservatif lors de l'évolution mécanique du système* points + champ; *b. indépendant dans sa définition du choix de la famille* $\mathcal{E}(\theta)$. Insistons au passage sur l'importance essentielle qu'avait *a priori* le second résultat, et venons-en à l'explicitation détaillée du premier.

Théorème I. — *En l'absence de forces extérieures, l'impulsion-masse totale* P^i *du système points + champ, dite encore* impulsion-masse du barycentre, *est conservative.*

Pour $i = 4$, on obtient ainsi à la fois l'énoncé du *théorème* (et non plus du *principe*) *de la conservation de la masse totale,* et celui du *théorème des forces vives.* Par rapport à la théorie classique, la première nouveauté consiste dans une *masse potentielle* attachée au champ d'interaction, et corrélative à l'*énergie potentielle* dont la *constante* se trouve par là fixée; dans un système stable, la *masse potentielle* doit être évidemment négative, et c'est là, on le sait, un résultat que la chimie nucléaire permet de vérifier quantitativement. La seconde nouveauté consiste dans le fait que la loi de répartition densitaire dans le champ de cette masse et de cette énergie potentielles est physiquement déterminée.

Pour $i = u = 1, 2, 3$, le théorème I généralise le classique *théorème de l'impulsion*; comme il était *a priori* certain, l'ancien principe de l'égalité à distance de l'action et de la réaction est rejeté comme dénué de sens; corrélativement, la notion d'une *impulsion potentielle*, densitairement répartie dans le champ, est introduite.

THÉORÈME II. — *En l'absence de forces extérieures, le moment cinétique et barycentrique autour du barycentre* $S^{ij} \equiv - S^{ji}$ *du système points + champ, dit encore* spin du barycentre, *est conservatif.*

Pour $i, j = u, v = 1, 2, 3$, on obtient ainsi l'extension du classique *théorème du moment cinétique*; à côté du *spin cinétique* dû aux points figure un *spin potentiel*(¹) lié au champ; chacun de ces deux moments est lui-même, dans le cas général du spin, la somme d'un moment *orbital* et d'un moment *propre*.

Pour $i, j = u, 4$, les mêmes énoncés sont répétés relativement au moment barycentrique.

THÉORÈME III. — *Lorsque* θ *varie, l'instant-point* X^i *associé par la définition* stricte *du paragraphe* **1** *à chaque hypersurface* $\mathcal{S}(\theta)$ *décrit dans l'Univers un* axe *fixe colinéaire au quadrivecteur constant* P^i; on est donc en droit de dire que, *en l'absence de forces extérieures, la quadrivitesse* V^i *du barycentre d'Univers du système points + champ est conservative, et de plus colinéaire à l'impulsion-masse totale* (elle-même conservative en vertu du théorème I).

On reconnaît là, évidemment, l'extension du classique *théorème du barycentre*, et de plus une précision très intéressante pour la théorie du point doué de spin. Le barycentre étant, conformément à l'esprit de la mécanique tant classique que quantique, considéré fictivement comme un point matériel doué de spin, on ne s'attend pas à ce que son impulsion-masse et sa vitesse d'Univers soient en général des quadrivecteurs colinéaires; c'est là, en effet, un résultat maintenant bien admis de la dynamique du point à spin. Il résulte alors du corollaire

(¹) Les mots *moment cinétique cinétique* ou *moment cinétique potentiel* se trouvent malheureusement jurer entre eux.

impliqué dans le théorème III que, *dans le cas particulier très important du mouvement libre du système, les deux quadrivecteurs en question sont colinéaires* (*et d'ailleurs constants*). Il semble tout naturel d'étendre inductivement ce résultat au cas du point élémentaire doué de spin; on sait qu'en mécanique ondulatoire des particules à spin, et dans le cas particulier très important de l'onde plane monochromatique, l'impulsion-masse, bien déterminée, est colinéaire aux rayons d'Univers; ce fait constitue la transposition quantique du résultat précédent.

Toute la précédente théorie a été formulée dans l'hypothèse de l'absence de forces extérieures. Pour passer de là au cas général, il faudrait superposer au *champ d'interaction* considéré un *champ d'action extérieure*, dont le torseur résultant serait variable en fonction de $\mathcal{E}(\theta)$; le torseur résultant du torseur *intérieur* et du torseur *extérieur* au système serait conservatif.

4. Limites de la précédente théorie. Quelques mots sur le problème général de la dynamique relativiste des systèmes. — La théorie précédente, qui nous a permis d'étendre successivement à la Relativité les notions de base caractérisant dynamiquement un système, et l'énoncé des théorèmes généraux de la dynamique des systèmes, n'aura fait que nous mettre à pied d'œuvre du vrai problème, *qui apparaît comme un problème de champ. La Relativité se voit dans l'incapacité d'utiliser les théorèmes généraux dans la résolution effective des problèmes*, parce que cette utilisation exigerait la connaissance de la loi d'évolution du champ d'interaction, laquelle dépend de celle de l'ensemble des points; inversement, l'on voit clairement que *si la dynamique newtonienne pouvait utiliser les théorèmes généraux comme intermédiaires de raisonnement, c'est essentiellement parce qu'elle faisait un groupe d'approximations revenant à ignorer par principe ce qui se passe dans le champ*, savoir :

— *transmission instantanée de l'interaction*, postulée dans le fait que tout le système était pris au même temps t réputé *universel;*

— *égalité à distance de l'action et de la réaction*, conséquence du postulat précédent et de ses implications, rendant inutile l'introduction de la notion d'une *impulsion potentielle;*

— *absence d'équivalent massique de l'énergie potentielle,* rendant inutile la spécification de sa loi de distribution au sein du champ pour la définition, notamment, du barycentre.

Toutes ces approximations revenaient, en des sens divers, à faire $c \to \infty$; elles formaient entre elles un corps cohérent dont, par essence même, la Relativité se voit interdire l'usage.

Comment donc, alors, va se présenter le problème principal de la dynamique relativiste des systèmes de points en interaction? On connaît physiquement deux importants précédents analogues, celui de l'électromagnétisme et celui de la théorie relativiste de la gravitation; dans les deux cas, on a essentiellement à résoudre un système d'équations aux dérivées partielles décrivant le champ d'interaction, et N systèmes d'équations de condition traduisant l'action du champ sur les points matériels (charges électriques ou masses gravitantes). En électromagnétisme, malgré les travaux sur la question qui se sont succédés depuis l'époque classique des Abraham, Poincaré, Langevin (1), le problème reste fort complexe; on en peut dire autant du problème relativiste de la gravitation (2), mais les méthodes plus puissantes et synthétiques employées là nous sembleraient, dûment transposées, avoir *a priori* beaucoup d'intérêt pour le problème que nous considérons.

Il semble, en effet, qu'un argument milite fortement en faveur de l'introduction d'une métrique pour attaquer ce problème : *la notion d'une force d'interaction entre deux points fonction de leur distance finie est tout aussi irrecevable en Relativité que le principe de l'égalité à distance de l'action et de la réaction.* Or, considérons ce qui arrive, en mécanique newtonienne, lorsqu'on remplace entre deux points matériels une attraction proportionnelle à leur distance par l'action d'un fil élastique matériel : la force d'interaction est transmise de proche

(1) On pourra consulter à ce sujet Richardson, *The electron theory of matter,* Cambridge, 1914, Chap. XII et XIII. Dans le cas électromagnétique, il se présente le phénomène particulier très important de la création irréversible de rayonnement par les charges accélérées.

(2) On lira notamment, sur ce sujet, le Mémoire de M. A. Lichnerowicz (*Journ. de Math.,* t. XXIII, 1, 1944, p. 37).

en proche; on peut dire qu'elle existe virtuellement en tout point du fil, et qu'elle s'y actualiserait en deux tensions opposées si l'on coupait le fil; elle n'apparaît effectivement qu'aux extrémités et, si le fil matériel est supposé pesant, il n'y a pas égalité scalaire des tensions en ces extrémités; la force d'interaction est alors transmise à vitesse finie par ondes dans les deux sens le long de la *corde vibrante*. Rien n'est plus aisé, d'ailleurs, que de mettre le problème en équations; on attachera une métrique au fil matériel en le graduant, lorsqu'il est tendu au repos, en longueurs égales, et en supposant ces graduations ξ adhérentes au fil; si, pour simplifier, l'on raisonne avec une seule dimension galiléenne d'espace $x'x$, on trouve que l'équation d'évolution d'une graduation $\xi = \xi_0$ est donnée par l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - \frac{\rho}{\gamma} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0,$$

qui est ainsi valable pour les déformations même grandes d'un fil élastique; par ailleurs, les deux équations de condition

$$\rho \frac{\partial x}{\partial \xi} : \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} = \begin{cases} + m_A & \text{pour} \quad \xi = \xi_A, \\ - m_B & \text{pour} \quad \xi = \xi_B, \end{cases}$$

doivent être satisfaites aux extrémités; ρ désigne la densité linéaire du fil *rapportée à sa graduation naturelle* ξ, et γ le coefficient d'élasticité; ξ_A et ξ_B sont les abscisses *naturelles* des extrémités liées aux points matériels, dont m_A et m_B désignent les masses.

Il nous paraît que ce problème de mécanique newtonienne fournit une assez juste image de ce que doit être le problème relativiste considéré, et qu'il milite en faveur de l'introduction d'une métrique pour l'aborder; ce problème serait donc, quant à la méthode, un problème de Relativité générale.

Quoi qu'il en soit de ces suggestions, la présente étude n'avait pour but que de dégager les abords du problème principal, en résolvant le problème préalable de l'extension relativiste des notions et des résultats classiques de la mécanique newtonienne des systèmes de points.