JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

EMILE DURAND

Propriétés et applications de 4 matrices nouvelles reliées aux matrices de Dirac

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 28 (1949), p. 1-33.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1949_9_28__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Propriétés et applications de 4 matrices nouvelles reliées aux matrices de Dirac;

PAR ÉMILE DURAND.

(Faculté des Sciences de Toulouse).

Les relations entre les formes bilinéaires construites sur les matrices du type Dirac ont été signalées par Pauli [1]; elles ont fait l'objet d'une série de Mémoires de Kofink [2]; M. O. Costa de Beauregard a mis en évidence leur forme tensorielle d'Univers [3]. M. G. Petiau a montré qu'on pouvait les établir à partir des matrices à deux rangs de Pauli [4] et qu'on pouvait les écrire d'une manière très condensée en se plaçant dans un espace à cinq dimensions [5].

---

(1) *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. IV, § 6, p. 131.
(2) *Ann. der Physik*, t. 38, 1940, p. 421.
(3) *Thèse*, Paris 1943, p. 52 à 66.
(4) *Journal de Math.*, t. XXV, 1946, fasc. 4.
(5) *Journal de Math.*, t. XXVI, 1947, fasc. 1.

Dans cette étude nous indiquerons une manière plus simple et plus méthodique pour établir ces relations et nous en donnerons de nouvelles; nous montrerons que, tensoriellement, on peut toutes les déduire de quatre d'entre elles; enfin, nous indiquerons une nouvelle écriture très supérieure à l'écriture tensorielle d'Univers.

Ce sont ces dernières notations qui nous conduirons à introduire dans les diverses théories géométriques et physiques quatre matrices d'un type nouveau qui jouissent de propriétés remarquables et qui ont l'avantage d'être directement reliées à celles de Dirac.

I. — Les relations entre les formes bilinéaires construites sur les matrices du type Dirac.

1. Définitions. — Soient f_k et g_k deux groupes de quatre fonctions quelconques; $k=1, 2, 3, 4$. Désignons par α et β deux matrices quelconques de rang 4, on pose par définition

$$(1) \qquad f_k\alpha = \sum_{m=1}^{m=4} f_m \alpha_{mk}, \qquad \beta g_k = \sum_{n=1}^{n=4} \beta_{kn} g_n.$$

Considérons la multiplication suivante suivie d'une sommation sur l'indice k

$$\sum_k f_m \alpha_{mk} \beta_{kn} g_n = \sum_{m,n} \left(f_m \sum_k \alpha_{mk} \beta_{kn} g_n \right).$$

Si l'on remarque que $\sum_k \alpha_{mk}\beta_{kn}$ est le terme général de rangs m, n de la matrice produit des deux matrices α et β on peut écrire

$$\sum_{m,n} [f_m(\alpha\beta)_{mn} g_n].$$

C'est cette dernière somme que nous représenterons par le crochet symbolique

$$[f_k \alpha\beta g_k]$$

dans lequel il nous arrivera même de supprimer les indices k et les lettres f et g quand il n'y aura pas de confusion possible.

Nous définirons les opérations multiplication en avant de βg_k par $f_k\alpha$ ou multiplication en arrière de $f_k\alpha$ par βg_k comme étant les opérations qui conduisent au crochet symbolique précédent; ce sont ces opérations que nous utiliserons couramment pour obtenir des grandeurs bilinéaires.

2. Choix des matrices de base. — Il est commode de faire un choix pour les quatre matrices de base du type de Dirac car les formes bilinéaires ont alors une expression bien définie et l'on peut effectuer sur elles toutes les opérations nécessaires; il est facile ensuite de montrer que les résultats obtenus ne dépendent pas du choix particulier effectué.

Si l'on veut que ces formes bilinéaires représentent une grandeur géométrique ou physique donnée la complexité des fonctions f_k et g_k qu'il faut adopter dépend du choix des quatre matrices fondamentales. Les quatre matrices β_p suivantes correspondent aux fonctions les plus simples $p = 1, 2, 3, 4$ de gauche à droite

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & -1 \\ & & -1 & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & -i & & \\ i & & & \\ & & & i \\ & & -i & \end{bmatrix};$$

ces quatre matrices satisfont les conditions de Dirac

$$\beta_p\beta_q + \beta_q\beta_p = 2\delta_{pq}\beta_0,$$

où β_0 est la matrice unité à quatre rangs.

Désignons par $\beta_{pqr\ldots}$ la matrice obtenue par la multiplication des matrices $\beta_p\beta_q\beta_r\ldots$; la multiplication des quatre matrices de base conduit à 16 matrices distinctes que l'on peut ranger dans le tableau ci-après

$$(2) \qquad \begin{array}{cccccc} & & \beta_0 & & & \\ & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \\ \beta_{23} & \beta_{31} & \beta_{12} & \beta_{14} & \beta_{24} & \beta_{34} \\ & \beta_{234} & \beta_{314} & \beta_{124} & \beta_{123} & \\ & & \beta_{1234} & & & \end{array}$$

Pour simplifier l'écriture nous introduisons dans les formules les matrices duales, surmontées d'un trait, définies par les relations

$$\overline{\beta_{pq}} = \frac{1}{2}\varepsilon_{pqrs}\beta^{rs}, \qquad \overline{\beta_p} = \frac{1}{6}\varepsilon_{pqrs}\beta^{qrs}, \qquad \overline{\beta_0} = \frac{1}{24}\varepsilon_{pqrs}\beta^{pqrs},$$

ε_{pqrs} est l'indicatif de dualité; il prend la valeur $(+1)$ ou (-1) suivant que $pqrs$ est une permutation paire ou impaire de 1, 2, 3, 4; il est égal à zéro si tous les indices ne sont pas différents. On convient de faire usage de la règle de sommation du calcul tensoriel d'Univers. D'une manière plus explicite cela s'écrit

$$\begin{array}{ll} \overline{\beta_{uv}}=\beta_{w4}, & \overline{\beta_{w}}=\beta_{uv4}, \\ \overline{\beta_{w4}}=\beta_{uv}, & \overline{\beta_{4}}=-\beta_{123}, \end{array} \qquad \beta_0=\beta_{1234} \qquad (u,\ v,\ w \text{ permutation paire de } 1, 2, 3).$$

Avec ces matrices les 16 formes bilinéaires $[f_k\beta g_k]=[\beta]$ ont pour expression

$$\begin{array}{ll}
[\beta_1]=[f_1g_1-f_2g_2-f_3g_3+f_4g_4], & [\beta_{23}]=[f_1g_4+f_2g_3-f_3g_2-f_4g_1], \\
[\beta_2]=[f_1g_2+f_2g_1-f_3g_4-f_4g_3], & [\beta_{31}]=[-f_1g_3+f_2g_4+f_3g_1-f_4g_2], \\
[\beta_3]=[f_1g_3+f_2g_4+f_3g_1+f_4g_2], & [\beta_{12}]=[f_1g_2-f_2g_1+f_3g_4-f_4g_3], \\
[\beta_4]=[-if_1g_2+if_2g_1+if_3g_4-if_4g_3], & [\beta_{14}]=[-if_1g_2-if_2g_1-if_3g_4-if_4g_3], \\
[\overline{\beta_1}]=[-if_1g_3+if_2g_4-if_3g_1+if_4g_2], & [\beta_{24}]=[if_1g_1-if_2g_2+if_3g_3-if_4g_4], \\
[\overline{\beta_2}]=[-if_1g_4-if_2g_3-if_3g_2-if_4g_1], & [\beta_{34}]=[if_1g_4-if_2g_3-if_3g_2+if_4g_1], \\
[\overline{\beta_3}]=[if_1g_1+if_2g_2-if_3g_3-if_4g_4], & [\beta_0]=[f_1g_1+f_2g_2+f_3g_3+f_4g_4], \\
[\overline{\beta_4}]=[-f_1g_4+f_2g_3-f_3g_2+f_4g_1], & [\overline{\beta_0}]=[-if_1g_3-if_2g_4+if_3g_1+if_4g_2],
\end{array}$$

Dans la théorie de l'électron de Dirac on a l'habitude d'utiliser d'autres matrices de base α_p. (*Voir* Louis de Broglie; *L'Électron magnétique*, p. 227.) Elles sont reliées à nos matrices β_p par la relation

$$\alpha_p=\Lambda\beta_p\Lambda^+; \tag{3}$$

Λ est une matrice unitaire $(\Lambda\Lambda^+=1)$ qui a pour expression

$$\Lambda=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} . & . & i & -1 \\ i & 1 & . & . \\ i & -1 & . & . \\ . & . & -i & -1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

On a aussi

$$\beta_p=\Lambda^+\alpha_p\Lambda=\Lambda^{-1}\alpha_p\Lambda.$$

Voici l'expression des quatre matrices α_p ($p=1$, 2, 3, 4 de gauche à droite)

$$\begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & & & i \\ & & -i & \\ & i & & \\ -i & & & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & & 1 & \\ & & & -1 \\ 1 & & & \\ & -1 & & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}.$$

Quand on passe de la représentation β_p à la représentation α_p on voit que les grandeurs bilinéaires ne changent pas si l'on choisit de nouvelles fonctions g'_k et f'_k liées aux anciennes par les relations

$$f'_k = f_k \Lambda^{-1}, \qquad g'_k = \Lambda g_k.$$

On a en effet

$$[f\beta_p g] = [f\Lambda^{-1}\alpha_p \Lambda g] = [f'\alpha_p g'].$$

3. Relation fondamentale. — Désignons par $P_k Q_k R_k$, trois groupes de quatre fonctions quelconques; on a l'identité fondamentale

$$(5) \qquad \sum_{p=1}^{p=4} [Q\beta_p P][R\beta_p P] = [Q\beta_0 P][R\beta_0 P] - [Q\overline{\beta_0}P][R\overline{\beta_0}P];$$

il est facile de le vérifier avec les expressions données dans le paragraphe précédent pour les formes bilinéaires construites sur β_p, β_0, $\overline{\beta_0}$.

Cette indentité ne dépend pas du choix des quatre matrices de base; si l'on prend quatre autres matrices γ_p, Pauli a montré que l'on pouvait trouver une matrice unitaire S à quatre rangs telle que $\gamma_p = S^{-1}\beta_p S$. Chaque produit du type $[Q\gamma_p P][R\gamma_p P]$ s'écrit alors $[QS^{-1}\beta_p SP][RS^{-1}\beta_p SP]$ ce qui, au fond, n'est pas différent de $[Q\beta_p P][R\beta_p P]$ puisque QS^{-1}, RS^{-1}, SP sont encore trois groupes de quatre fonctions qu'on peut égaler à des fonctions quelconques par un choix convenable des Q_k, R_k, P_k.

S étant une matrice à quatre rangs on peut toujours intercaler SS^{-1} entre la matrice figurative β et les fonctions P_k. Comme $S^{-1}P_k$ peut encore être égalé à quatre fonctions quelconques on en déduit que l'on peut toujours introduire une matrice S à quatre rangs entre β et P_k. Pour les mêmes raisons on peut en placer une autre entre β et Q_k et une autre entre β et R_k. De (5) on peut donc passer à l'identité suivante qui nous servira de point de départ pour établir toutes les identités que nous avons en vue

$$(6) \quad \sum_{p=}^{p=4} [Q\beta_L\beta_p P][R\beta_M\beta_p P] = [Q\beta_L\beta_0 P][R\beta_M\beta_0 P] - [Q\beta_L\overline{\beta_0}P][R\beta_M\overline{\beta_0}P],$$

β_L et β_M désignent deux quelconques des 16 matrices β.

4. Les identités quadratiques [1]. — On les déduit de l'identité (6) du paragraphe précédent dans laquelle on fait [2] $R_k = Q_k = f_k$; $P_k = g_k$. Tous les crochets sont alors du type $[f_k \beta g_k]$ et pour alléger l'écriture nous les écrirons simplement $[\beta]$.

Comme il y a C_{16}^2 combinaisons $\beta_L \beta_M$ telles que $\beta_L \neq \beta_M$, on pourrait s'attendre à 120 identités; en fait, il n'y en a que 30 qui soient distinctes, chacune d'elles étant donnée par quatre combinaisons différentes.

L'équation (6) contient six produits du type [ ][ ]; mais quand $Q = R$, il y en a deux qui se détruisent, si bien que les identités n'en contiennent plus que quatre; il y en a en tout $4 \times 30 = 120$ qui sont tous différents, ce qui épuise toutes les combinaisons. En outre il y a 16 combinaisons telles que $\beta_L = \beta_M$, qui donnent des identités toutes distinctes contenant six produits chacune.

a. Forme tensorielle d'Univers. — Si p, q, r, s désigne le jeu des indices tensoriels d'Univers et si l'on fait usage de la règle de sommation pour les indices muets, les 30 identités rectangles peuvent être condensées dans les huit équations ci-après

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{llll}
1. & \frac{1}{4}[\beta_{pq}][\overline{\beta^{pq}}] = & [\beta_0][\overline{\beta_0}] & (\bar{p}, p); \\
2. & [\overline{\beta_q}][\overline{\beta^{pq}}] = & [\beta_0][\beta^p] & (q, pq; \bar{0}, \bar{p}); \\
3. & [\overline{\beta_q}][\beta^{pq}] = & -[\overline{\beta_0}][\beta^p] & (\bar{q}, pq; \bar{0}, p); \\
4. & [\beta^{pr}][\beta^q{}_r] = & [\beta^p][\beta^q] - [\overline{\beta^p}][\overline{\beta^q}] & (p, q; \bar{p}, \bar{q}; pr, qr); \\
5. & [\beta_r][\beta^{pqr}] = & [\beta_0][\beta^{pq}] + [\overline{\beta_0}][\overline{\beta^{pq}}] & (\overline{pq}, \bar{0}; 0, pq; p, \bar{q}) \\
6. & [\beta_q][\overline{\beta^{pq}}] = & [\beta_0][\overline{\beta^p}] & (0, \bar{p}; q, \overline{pq}); \\
7. & [\beta_q][\beta^{pq}] = & -[\overline{\beta_0}][\overline{\beta^p}] & (0, p; \bar{q}, \overline{pq}); \\
8. & [\beta_p][\overline{\beta^p}] = 0 & & (0, \bar{0}; pq, \overline{pq});
\end{array} \right.$$

---

[1] E. Durand, *C. R. Acad. Sc.*, t. **220**, 1945, p. 517-520.

[2] L'identité du type plus général où les R_k sont différents des Q_k sert à établir d'autres identités où figurent des dérivées partielles; *voir* par exemple : Kofink, *Ann. der Physik*, t. 38, p. 436; Costa de Beauregard, *Thèse*, Paris 1943, p. 61 à 66; G. Petiau, *Journ. de Math.*, t. XXVI, 1947, fasc. 1. Nous n'étudierons pas les identités de ce type.

On a indiqué à droite du tableau les combinaisons des indices L, M qui conduisent à l'identité se trouvant sur la même ligne.

Les 16 identités carrées s'écrivent

$$
(8)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
\mathbf{9.} & [\beta_0]^2 - [\overline{\beta_0}]^2 = [\beta_p][\beta^p] & (\mathrm{o}), \\
\mathbf{10.} & [\beta_p]^2 - [\overline{\beta_p}]^2 = [\beta^{pq}][\beta^p{}_q] + [\beta_0]^2 & (p), \\
\mathbf{11.} & [\beta_{pq}]^2 - [\overline{\beta_{pq}}]^2 = [\beta_p]^2 + [\beta_q]^2 + [\overline{\beta_r}]^2 + [\overline{\beta_s}]^2 & (pq), \\
\mathbf{12.} & [\overline{\beta_p}]^2 - [\beta_p]^2 = [\overline{\beta^{pq}}][\overline{\beta^p{}_q}] + [\overline{\beta_0}]^2 & (\overline{p}), \\
\mathbf{13.} & [\overline{\beta_0}]^2 - [\beta_0]^2 = [\overline{\beta_p}][\overline{\beta^p}] & (\overline{\mathrm{o}}).
\end{array}
\right.
$$

Par addition ou soustraction de ces dernières identités, on obtient une nouvelle famille d'identités à huit produits du type $[\beta_{\mathrm{M}}][\beta_{\mathrm{M}}]$; en voici deux

$$
[\beta_p][\beta^p] + [\overline{\beta_p}][\overline{\beta^p}] = 0, \tag{9}
$$

$$
\frac{1}{2}\{[\beta_{pq}][\beta^{pq}]\} + [\beta_0]^2 + [\overline{\beta_0}]^2 = 0. \tag{10}
$$

L'identité n° 4 n'est pas valable pour $p = q$; mais on peut réunir les n$^{\text{os}}$ 4 et 10 ainsi que les n$^{\text{os}}$ 4 et 12 dans les équations générales

$$
[\beta^{pr}][\beta^q{}_r] = [\beta^p][\beta^q] - [\overline{\beta^p}][\overline{\beta^q}] - \delta^{pq}[\beta_0]^2, \tag{11}
$$

$$
[\overline{\beta^{pr}}][\overline{\beta^q{}_r}] = [\overline{\beta^p}][\overline{\beta^q}] - [\beta^p][\beta^q] - \delta^{pq}[\overline{\beta_0}]^2. \tag{12}
$$

Par soustraction des identités (11) et (12), on obtient

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\{[\overline{\beta^{pr}}][\overline{\beta^q{}_r}] - [\beta^{pr}][\beta^q{}_r]\} \\
+ \{[\beta^p][\beta^q] - [\overline{\beta^p}][\overline{\beta^q}]\} + \frac{1}{2}\delta^{pq}\{[\overline{\beta_0}]^2 - [\beta_0]^2\} = 0.
\end{aligned} \tag{13}
$$

On peut mettre (13) sous une forme plus symétrique qui met en évidence les corrections de traces

$$
\begin{aligned}
[\beta^{pr}][\beta^q{}_r] - \frac{1}{4}\delta^{pq}[\beta_{rs}][\beta^{rs}] = [\beta^p][\beta^q] - [\overline{\beta^p}][\overline{\beta^q}] \\
- \frac{1}{4}\delta^{pq}\{[\beta_r][\beta^r] - [\overline{\beta_r}][\overline{\beta^r}]\}.
\end{aligned} \tag{14}
$$

On notera que le premier membre de (14) a même forme que le tenseur de Maxwell.

L'équation (14) est la contraction d'une équation tensorielle plus générale qui s'écrit

$$
\begin{aligned}
(15) \qquad [\beta^{pr}][\beta^{qs}] - [\overline{\beta^{pr}}][\overline{\beta^{qs}}] = {} & \delta^{pq}\{[\beta^{r}][\beta^{s}] - [\overline{\beta^{r}}][\overline{\beta^{s}}]\} \\
& + \delta^{rs}\{[\beta^{p}][\beta^{q}] - [\overline{\beta^{p}}][\overline{\beta^{q}}]\} \\
& + \delta^{ps}\{[\overline{\beta^{q}}][\overline{\beta^{r}}] - [\beta^{q}][\beta^{r}]\} \\
& + \delta^{qr}\{[\overline{\beta^{p}}][\overline{\beta^{s}}] - [\beta^{p}][\beta^{s}]\} \\
& + \{\delta^{pq}\delta^{rs} - \delta^{ps}\delta^{qr}\}\{[\overline{\beta_0}]^2 - [\beta_0]^2\}.
\end{aligned}
$$

Par contraction de (15) sur pr et qs, on obtient

$$[\beta_p][\beta^p] - [\overline{\beta_p}][\overline{\beta^p}] = 2\{[\beta_0]^2 - [\overline{\beta_0}]^2\},$$

qui résulte aussi des identités n^{os} 9 et 13; par contraction sur r et s on retrouve (13); quand $p = q$, $r = s$, on retrouve l'identité n° 11 en tenant compte de l'identité n° 13.

Montrons maintenant que tensoriellement, on déduit toutes ces identités de quatre d'entre elles, à savoir les identités n^{os} 5, 8, 9, 13. L'identité n° 5 peut s'écrire sous la forme

$$(16) \qquad [\beta_p][\overline{\beta_q}] - [\beta_q][\overline{\beta_p}] + [\beta_0][\overline{\beta_{pq}}] + [\overline{\beta_0}][\beta_{pq}] = 0.$$

Pour la commodité de l'écriture, nous introduisons le tenseur B^{pq} défini par

$$\{[\overline{\beta_0}]^2 - [\beta_0]^2\} B^{pq} = -\{[\beta^p][\overline{\beta^q}] - [\beta^q][\overline{\beta^p}]\},$$

ainsi que son dual $\overline{B^{pq}}$. En combinant l'équation (16) avec sa duale, on en déduit

$$(17) \qquad [\beta^{pq}] = [\overline{\beta_0}] B^{pq} - [\beta_0]\overline{B^{pq}}.$$

On vérifie sans peine que l'on a

$$[\beta_q]\overline{B^{pq}} = [\overline{\beta_q}]\overline{B^{pq}} = B_{pq}\overline{B^{pq}} = B^{pr}\overline{B^{q}{}_{r}} = \overline{B^{pr}} B^{q}{}_{r} = 0$$

et des identités n^{os} 8, 9, 13 on tire

$$
\begin{gathered}
B^{pr}B^{q}{}_{r} + \overline{B^{pr}}\,\overline{B^{q}{}_{r}} = -\delta^{pq}, \qquad B_{pq}B^{pq} = -2; \\
[\beta_q]B^{pq} = -[\overline{\beta^p}], \qquad [\overline{\beta_q}]B^{pq} = -[\beta^p].
\end{gathered}
$$

On voit alors que la multiplication contractée de (17) et de sa duale par $[\beta_q]$ et $[\overline{\beta_q}]$ conduit respectivement aux identités n^{os} 7, 6, 3, 2.

La multiplication de (17) par sa duale conduit à l'identité n° 1. La multiplication contractée de (17) par $[\beta_{pq}]$, $[\beta^{r}{}_{q}]$ conduit à (10) et (11). La multiplication contractée de la duale de (17) par $[\overline{\beta^{r}{}_{q}}]$ conduit à (12).

b. Forme vectorielle d'espace. — On utilise les trois vecteurs d'espace $[\overrightarrow{\beta_{w}}]$, $[\overrightarrow{\beta_{uv}}]$, $[\overrightarrow{\beta_{w4}}]$, $[\overrightarrow{\beta_{uv4}}]$; les indices u, v, w prennent les valeurs 1, 2, 3; u, v, w, est toujours une permutation circulaire de 1, 2, 3. On utilise le même numérotage que pour les relations de forme tensorielle; de petits indices placés au bas du grand montrent comment une même équation tensorielle se décompose en plusieurs équations vectorielles.

On a d'abord l'expression des six produits scalaires des quatre vecteurs pris deux à deux

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{1}. & [\overrightarrow{\beta_{uv}}]\,[\overrightarrow{\beta_{w4}}] = [\beta_0][\bar{\beta}_0], \\
\mathbf{2}_4. & [\overrightarrow{\beta_{uv}}]\,[\overrightarrow{\beta_{uv4}}] = -[\beta_0][\beta_4], \\
\mathbf{3}_4. & [\overrightarrow{\beta_{uv4}}]\,[\overrightarrow{\beta_{w4}}] = [\beta_4][\bar{\beta}_0], \\
\mathbf{6}_4. & [\overrightarrow{\beta_{w}}]\,[\overrightarrow{\beta_{uv}}] = -[\beta_0][\bar{\beta}_4], \\
\mathbf{7}_4. & [\overrightarrow{\beta_{w}}]\,[\overrightarrow{\beta_{w4}}] = [\bar{\beta}_4][\bar{\beta}_0], \\
\mathbf{8}. & [\overrightarrow{\beta_{w}}]\,[\overrightarrow{\beta_{uv4}}] = -[\beta_4][\bar{\beta}_4].
\end{array}$$

On a ensuite l'expression de six produits vectoriels

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{2}_{123}. & [\overrightarrow{\beta_{uv4}}] \wedge [\overrightarrow{\beta_{w4}}] = [\beta_0][\overrightarrow{\beta_{w}}] - [\bar{\beta}_4][\overrightarrow{\beta_{uv}}], \\
\mathbf{3}_{123}. & [\overrightarrow{\beta_{uv}}] \wedge [\overrightarrow{\beta_{uv4}}] = [\bar{\beta}_0][\overrightarrow{\beta_{w}}] + [\bar{\beta}_4][\overrightarrow{\beta_{w4}}], \\
\mathbf{4}_{123}. & [\overrightarrow{\beta_{uv}}] \wedge [\overrightarrow{\beta_{w4}}] = [\beta_4][\overrightarrow{\beta_{w}}] - [\bar{\beta}_4][\overrightarrow{\beta_{uv4}}], \\
\mathbf{5}_{123}. & [\overrightarrow{\beta_{uv4}}] \wedge [\overrightarrow{\beta_{w}}] = [\beta_0][\overrightarrow{\beta_{w4}}] + [\bar{\beta}_0][\overrightarrow{\beta_{uv}}], \\
\mathbf{6}_{123}. & [\overrightarrow{\beta_{w}}] \wedge [\overrightarrow{\beta_{w4}}] = [\beta_0][\overrightarrow{\beta_{uv4}}] - [\beta_4][\overrightarrow{\beta_{uv}}], \\
\mathbf{7}_{123}. & [\overrightarrow{\beta_{uv}}] \wedge [\overrightarrow{\beta_{w}}] = [\beta_4][\overrightarrow{\beta_{w4}}] + [\bar{\beta}_0][\overrightarrow{\beta_{uv4}}],
\end{array}$$

puis l'équation unique de son genre

$$\mathbf{5}_{456}. \qquad [\beta_4][\overrightarrow{\beta_{uv4}}] - [\bar{\beta}_4][\overrightarrow{\beta_{w}}] = [\beta_0][\overrightarrow{\beta_{uv}}] + [\bar{\beta}_0][\overrightarrow{\beta_{w4}}].$$

Il reste alors les identités 4_{456} qui ne peuvent être mises sous la forme vectorielle; on peut les condenser dans la formule explicite

$$[\beta_{uw}][\beta_{vw}]+[\beta_{u4}][\beta_{v4}]=[\beta_u][\beta_v]-[\overline{\beta_u}][\overline{\beta_v}].$$

Parmi les identités carrées nous ne donnerons que celles qui expriment les longueurs des quatre vecteurs, soit

$$\begin{aligned}
\left[\overrightarrow{\beta_{w}}\right]^2 &= [\beta_0]^2-[\overline{\beta_0}]^2-[\beta_4]^2,\\
\left[\overrightarrow{\beta_{w4}}\right]^2 &= -[\beta_0]^2+[\beta_4]^2-[\overline{\beta_4}]^2,\\
\left[\overrightarrow{\beta_{uv}}\right]^2 &= [\overline{\beta_4}]^2-[\beta_4]^2-[\overline{\beta_0}]^2,\\
\left[\overrightarrow{\beta_{uv4}}\right]^2 &= -[\beta_0]^2-[\overline{\beta_4}]^2+[\overline{\beta_0}]^2.
\end{aligned}$$

c. Forme analytique nouvelle (¹). — Nous allons montrer qu'il y a intérêt, au moins pour la question qui nous intéresse, à désigner les 16 matrices β du type Dirac par la lettre b_{pq} à deux indices, la correspondance avec les notations précédentes étant définie par les tableaux ci-après :

$$\begin{bmatrix}
\beta_1 & i\beta_{14} & i\beta_{234} & \beta_{23}\\
\beta_2 & i\beta_{24} & i\beta_{314} & \beta_{31}\\
\beta_3 & i\beta_{34} & i\beta_{124} & \beta_{12}\\
-\beta_{123} & -i\beta_{1234} & i\beta_4 & \beta_0
\end{bmatrix}
\rightarrow
\begin{bmatrix}
b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14}\\
b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24}\\
b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34}\\
b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44}
\end{bmatrix}.$$

Toutes les matrices b_{pq} sont réelles; celles qui contiennent une fois l'indice 4 sont antihermitiques, les autres sont hermitiques; dans la quatrième ligne (ou colonne) la dernière matrice est égale au produit des trois premières; elle est égale au produit des trois premières changé de signe pour les trois premières lignes (ou colonnes).

Avec les notations b_{pq} l'écriture des identités précédentes est considérablement simplifiée; on peut toutes les représenter par les trois équations

$$\sum_{r=1}^{r=4}[b_{pr}][b_{qr}]=\sqrt{|\Delta|}\,\delta_{pq}, \tag{18}$$

$$\sum_{r=1}^{r=4}[b_{rp}][b_{rq}]=\sqrt{|\Delta|}\,\delta_{pq}, \tag{19}$$

$$\{[b_{pi}][b_{qj}]-[b_{pj}][b_{qi}]\}=\pm\{[b_{rk}][b_{sl}]-[b_{rl}][b_{sk}]\}. \tag{20}$$

(¹) É. Durand, *C. R. Acad. Sc.*, t. 225, 1947, p. 280.

Il faut prendre le signe $(+)$ ou $(-)$ dans (20) suivant que *pqrs* et *ijkl* sont des permutations de même parité ou de parités différentes; Δ désigne le déterminant des $[b_{pq}]$. Les équations (18), (19), (20) représentent respectivement 10, 10 et 18 équations ordinaires distinctes.

Pour justifier l'apparition du coefficient $\sqrt{|\Delta|}$, il faut d'abord écrire les relations précédentes à huit termes carrés de manière qu'il y ait quatre de ces derniers de chaque côté du signe égal; pour les identités à six termes carrés on ajoute un même terme de part et d'autre du signe égal pour retrouver la forme précédente; on voit alors que toutes ces sommes de quatre termes carrés ont une valeur commune; ce sont précisément les sommes des carrés des termes des lignes ou des colonnes du tableau des $[b_{pq}]$. Les autres relations indiquent que les produits terme à terme, de deux lignes ou de deux colonnes sont nuls. Il en résulte qu'en élevant le déterminant des $[b_{pq}]$ au carré, on obtient un déterminant diagonal dont chaque élément est égal à la valeur commune précédente; cette dernière est donc égale à $\sqrt{|\Delta|}$.

Les trois équations précédentes ne sont pas indépendantes et l'on peut aisément déduire deux d'entre elles de la troisième; on peut simplifier encore en donnant une équation unique très simple qui entraîne automatiquement les trois équations précédentes. Cette équation est la suivante

$$\sqrt{|\Delta|}\,[b_{pq}] = \mathrm{B}_{pq}, \tag{21}$$

B_{pq} désignant le mineur de $[b_{pq}]$ dans le déterminant. On a, en effet, pour un tableau carré à quatre rangs avec des éléments $[\beta_{pq}]$ absolument quelconques les identités suivantes :

$$\sum_{r=1}^{r=4} [b_{pr}]\mathrm{B}_{qr} = \Delta\,\delta_{pq}, \tag{22}$$

$$\sum_{r=1}^{r=4} [b_{rp}]\mathrm{B}_{rq} = \Delta\,\delta_{pq}, \tag{23}$$

$$\frac{[b_{pi}]\mathrm{B}_{qj} - [b_{pj}]\mathrm{B}_{qi}}{[b_{rk}]\mathrm{B}_{sl} - [b_{rl}]\mathrm{B}_{sk}} = \frac{[b_{qi}]\mathrm{B}_{rj} - [b_{qj}]\mathrm{B}_{ri}}{[b_{pk}]\mathrm{B}_{sl} - [b_{pl}]\mathrm{B}_{sk}} = \ldots = \pm\sqrt{\frac{\Sigma_p [b_{pi}][b_{pi}]\Sigma_p \mathrm{B}_{pj}\mathrm{B}_{pj}}{\Sigma_r [b_{rk}][b_{rk}]\Sigma_r \mathrm{B}_{rl}\mathrm{B}_{rl}}}. \tag{24}$$

Dans ces conditions, on voit sans peine que la relation (21) entraîne les relations (18), (19), (20).

Pour calculer $\sqrt{|\Delta|}$ il suffit de prendre la somme des carrés des termes d'une ligne ou d'une colonne ; par exemple

$$\sqrt{|\Delta|} = [\beta_{23}]^2 + [\beta_{31}]^2 + [\beta_{12}]^2 + [\beta_0]^2;$$

les crochets sont du type $[f_k \beta g_k]$.

On vérifie sans peine que $\sqrt{|\Delta|}$ peut aussi se mettre sous la forme remarquable suivante

$$\sqrt{|\Delta|} = [f_k \beta_0 f_k][g_k \beta_0 g_k] = [f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2][g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 + g_4^2]. \tag{25}$$

II. — Définition et propriétés des matrices ε_p.

Voici l'expression des quatre matrices ε_p ($p = 1, 2, 3, 4$ de gauche à droite)

$$\begin{bmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & & -1 & \\ & & & -1 \\ 1 & & & \\ & -1 & & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & 1 & & \\ -1 & & & \\ & & & -1 \\ & & -1 & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}.$$

Ces matrices obéissent à des conditions qui rappellent celles de Dirac, soit

$$\varepsilon_p^+ \varepsilon_q + \varepsilon_q^+ \varepsilon_p = \varepsilon_p \varepsilon_q^+ + \varepsilon_q \varepsilon_p^+ = 2\varepsilon_0 \delta_{pq}; \tag{26}$$

ε_0 désigne la matrice unité à quatre rangs ; ε_p^+ désigne les matrices adjointes de ε_p qui sont égales ici aux matrices transposées puisque tous les éléments sont réels.

Le produit de deux de ces matrices ε_p est asymétrique, $\varepsilon_p \varepsilon_q \neq \varepsilon_q \varepsilon_p$; le produit $\varepsilon_p \varepsilon_q$ représente donc 16 matrices distinctes qui sont précisément les 16 matrices b_{pq} précédentes du type Dirac que nous avons groupées dans un tableau carré

$$\varepsilon_p \varepsilon_q = b_{pq}.$$

Nous pouvons donc maintenant justifier la notation b_{pq} que nous avons substituée à la notation $\beta_{pqr\ldots}$ pour les 16 matrices β.

Si nous avions utilisé les 16 matrices α liées aux matrices β par la relation (3) nous aurions pu les grouper aussi dans un tableau carré comme les matrices β et les désigner par la lettre a_{pq} à deux indices. On peut obtenir aussi ces 16 matrices par la multiplication asymétrique de quatre autres matrices de base V_p liées aux matrices ε_p par la relation

$$V_p = \Lambda \varepsilon_p \Lambda^{+}. \tag{27}$$

On a en effet

$$a_{pq} = \Lambda\, b_{pq} \Lambda^{+} = \Lambda \varepsilon_p \varepsilon_q \Lambda^{+} = \Lambda \varepsilon_p \Lambda^{+} \Lambda \varepsilon_q \Lambda^{+} = V_p V_q.$$

Voici l'expression des quatre matrices V_p ($p = 1, 2, 3, 4$ de gauche à droite)

$$\begin{bmatrix} & -i & & \\ & & & i \\ i & & & \\ & & -i & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & & 1 \\ -1 & & & \\ & & -1 & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & & & i \\ & i & & \\ & & -i & \\ -i & & & \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} & & & -1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -1 & & & \end{bmatrix}.$$

Dans les applications qui vont suivre nous utiliserons de préférence les quatre matrices ε_p dont tous les termes sont réels. Voici quelques autres propriétés des matrices ε_p; on a

$$\varepsilon_p^{+} \varepsilon_q \varepsilon_r^{+} \varepsilon_s = \pm 1,$$

$(+)$ si $pqrs$ est une permutation paire de 1, 2, 3, 4;
$(-)$ » » impaire de »

On notera que $\varepsilon_4 = \varepsilon_4^{+}$.

Plus loin, nous aurons à associer aux matrices ε_p et ε_p^{+} des matrices surlignées définies par

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{\varepsilon_p} &= -\varepsilon_4 \varepsilon_p \varepsilon_4, \\ \overline{\varepsilon_p^{+}} &= -\varepsilon_4 \varepsilon_p^{+} \varepsilon_4. \end{aligned} \right. \tag{29}$$

On a les importantes relations

$$\overline{\varepsilon_p}\,\overline{\varepsilon_q} = \varepsilon_q \varepsilon_p, \qquad \overline{\varepsilon_p^{+}}\,\overline{\varepsilon_q^{+}} = \varepsilon_q^{+} \varepsilon_p^{+}.$$

Malgré l'analogie des conditions (26) avec celles de Dirac, l'usage qu'on est amené à faire des matrices ε_p est tout à fait différent de celui des matrices de Dirac. L'opérateur $\varepsilon_q \partial^q$ appliqué à des fonctions d'ondes leur confère des caractères tensoriels d'Univers bien définis alors que l'opérateur de Dirac $\beta_q \partial^q$ conduit à des spineurs.

Chaque fois que dans une théorie on aura des fonctions d'ondes qui seront des tenseurs, on pourra songer à utiliser les matrices ε_p; nous verrons ainsi que l'on obtient une représentation remarquable des formules de l'électromagnétisme classique.

L'opérateur $\beta_q \partial^q$ de Dirac élevé au carré donne l'opérateur Dalembertien ∂_q^q; avec les matrices ε_p on a entre les opérateurs $\varepsilon_p \partial^p$ et $\varepsilon_q^+ \partial^q$ la relation

$$(\varepsilon_p \partial^p)(\varepsilon_q^+ \partial^q) = \partial_q^q,$$

Cette remarque nous amènera à indiquer une possibilité d'emploi des matrices ε_p et de leurs adjointes ε_p^+ en mécanique ondulatoire.

Mais avant d'aborder ces théories à forme tensorielle nous allons donner une nouvelle représentation des rotations d'Univers elles-mêmes grâce à ces mêmes matrices ε_p. Nous allons généraliser les paramètres d'Olinde Rodrigues et représenter les éléments de la matrice de Lorentz générale par des formes bilinéaires.

III. — Généralisation des formules d'Olinde Rodrigues et nouvelle représentation des rotations d'Univers (¹).

1. Les paramètres d'Olinde Rodrigues et les rotations spatiales. — Considérons les deux systèmes de coordonnées cartésiennes $OX_1X_2X_3$, $OY_1Y_2Y_3$ ayant même origine O (*fig.* 1).

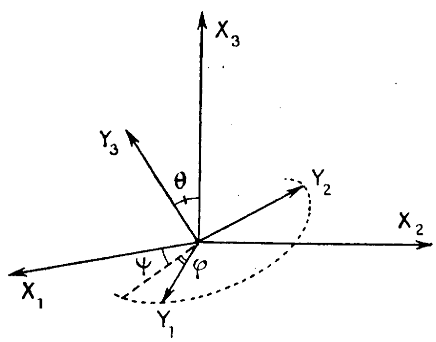

Fig. 1.

(¹) É. Durand, *C. R. Acad. Sc.*, t. 225, 1947, p. 375.

Si l'on considère la matrice B_{pq} ci-après

$$(30)\qquad \begin{bmatrix} \cos(Y_1, X_1) & \cos(Y_2, X_1) & \cos(Y_3, X_1) & 0 \\ \cos(Y_1, X_2) & \cos(Y_2, X_2) & \cos(Y_3, X_2) & 0 \\ \cos(Y_1, X_3) & \cos(Y_2, X_3) & \cos(Y_3, X_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On sait que l'on a entre les coordonnées X_p et Y_p la relation

$$(31)\qquad X_p = B_{pq} Y^q \qquad (p, q = 1, 2, 3, 4);$$

on utilise la règle de sommation sur les indices muets.

L'équation (31) peut se décomposer en

$$X_u = B_{uv} X^v \qquad (u, v = 1, 2, 3),$$
$$X_4 = Y_4 \quad \text{(le temps est le même pour les deux systèmes).}$$

Si le deuxième système Y^u est défini par rapport au premier X^u à l'aide des angles d'Euler ψ, θ, φ la matrice précédente prend la forme

$$(32)\qquad \begin{bmatrix} [\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta] & [-\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta] & [\sin\psi\sin\theta] & 0 \\ [\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta] & [-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta] & [-\cos\psi\sin\theta] & 0 \\ [\sin\varphi\sin\theta] & [\cos\varphi\sin\theta] & [\cos\theta] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si l'on définit le passage du premier système au second en donnant les cosinus directeurs μ_u $(u = 1, 2, 3)$ de l'axe de la rotation et la grandeur θ de l'angle, on a la matrice

$$(33)\qquad \begin{bmatrix} [\lambda_1^2(1-\cos\theta) + \cos\theta] & [\lambda_1\lambda_2(1-\cos\theta) - \lambda_3\sin\theta] & [\lambda_1\lambda_3(1-\cos\theta) + \lambda_2\sin\theta] & 0 \\ [\lambda_2\lambda_1(1-\cos\theta) + \lambda_3\sin\theta] & [\lambda_2^2(1-\cos\theta) + \cos\theta] & [\lambda_2\lambda_3(1-\cos\theta) - \lambda_1\sin\theta] & 0 \\ [\lambda_3\lambda_1(1-\cos\theta) - \lambda_2\sin\theta] & [\lambda_3\lambda_2(1-\cos\theta) + \lambda_1\sin\theta] & [\lambda_3^2(1-\cos\theta) + \cos\theta] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Au lieu des éléments B_{pq} des matrices (32) et (33) les géomètres utilisent souvent des expressions bilinéaires plus symétriques formées avec quatre paramètres l_k $(k = 1, 2, 3, 4)$; si les paramètres l_k sont normalisées, c'est-à-dire si

$$(34)\qquad \sum_{k=1}^{k=4} l_K^2 = 1,$$

la matrice des rotations spatiales prend la forme

$$(35)\quad \begin{bmatrix} l_1^2 - l_2^2 - l_3^2 + l_4^2 & 2(l_1 l_2 + l_3 l_4) & 2(l_1 l_3 - l_2 l_4) & 0 \\ 2(l_1 l_2 - l_3 l_4) & -l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 + l_4^2 & 2(l_1 l_4 + l_2 l_3) & 0 \\ 2(l_1 l_3 + l_2 l_4) & 2(l_2 l_3 - l_1 l_4) & -l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ce sont les formules d'Olinde Rodrigues.

Si les paramètres l_k n'étaient pas normalisés il faudrait diviser tous les éléments de la matrice (35) par $(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2)$ [1].

On vérifiera sans peine que les éléments B_{pq} de la matrice (35) sont les formes bilinéaires $[l_k b_{pq} l_k]$ construites sur les matrices b_{pq} des paragraphes précédents ($l_k = f_k = g_k$). Nous les avons précisément choisies pour qu'il en soit ainsi.

Si l'on veut que (35) soit identique à (32) il faut prendre

$$(36)\quad \begin{cases} l_1 = \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi - \psi}{2}, & l_2 = -\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi - \psi}{2}, \\ l_3 = \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\varphi + \psi}{2}, & l_4 = -\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\varphi + \psi}{2}. \end{cases}$$

Si l'on veut que (35) soit identique à (33) il faut prendre

$$(37)\quad l_1 = -\mu_1 \sin\frac{\theta}{2}, \qquad l_2 = -\mu_2 \sin\frac{\theta}{2}, \qquad l_3 = -\mu_3 \sin\frac{\theta}{2}, \qquad l_4 = \cos\frac{\theta}{2}.$$

2. Les paramètres complexes et les rotations d'Univers. — Nous avons vu que l'on peut représenter les rotations spatiales avec les quatre paramètres réels d'Olinde Rodrigues dont un est arbitraire; on en profite pour imposer aux l_k la condition de normalisation.

Pour représenter une rotation d'Univers il nous faudra huit paramètres, dont deux seront arbitraires, que nous condenserons en quatre paramètres complexes; il sera donc possible d'écrire deux conditions de normalisation.

Nous choisirons ces paramètres complexes l_k de manière que les éléments de la matrice des rotations d'Univers B_{pq} soient représentés par les formes bilinéaires

$$(38)\qquad B_{pq} = [l_k^\star b_{pq} l_k] = [l_k^\star \varepsilon_p \varepsilon_q l_k].$$

[1] Pour les formules d'Olinde Rodrigues, *voir* Appell, *Traité de mécanique*, t. II, p. 150; Kœnigs, *Leçons de cinématique*.

Voici le tableau des B_{pq} (p désigne la ligne, q la colonne),

$$
(39)\quad \left\{
\begin{array}{cccc}
l_1^\star l_1 - l_2^\star l_2 - l_3^\star l_3 + l_4^\star l_4 & l_1^\star l_2 + l_2^\star l_1 + l_3^\star l_4 + l_4^\star l_3 & l_1^\star l_3 - l_2^\star l_4 + l_3^\star l_1 - l_4^\star l_2 & l_1^\star l_4 + l_2^\star l_3 - l_3^\star l_2 - l_4^\star l_1 \\
l_1^\star l_2 + l_2^\star l_1 - l_3^\star l_4 - l_4^\star l_3 & -l_1^\star l_1 + l_2^\star l_2 - l_3^\star l_3 + l_4^\star l_4 & l_1^\star l_4 + l_2^\star l_3 + l_3^\star l_2 + l_4^\star l_1 & -l_1^\star l_3 + l_2^\star l_4 + l_3^\star l_1 - l_4^\star l_2 \\
l_1^\star l_3 + l_2^\star l_4 + l_3^\star l_1 + l_4^\star l_2 & -l_1^\star l_4 + l_2^\star l_3 + l_3^\star l_2 - l_4^\star l_1 & -l_1^\star l_1 - l_2^\star l_2 + l_3^\star l_3 + l_4^\star l_4 & l_1^\star l_2 - l_2^\star l_1 + l_3^\star l_4 - l_4^\star l_3 \\
-l_1^\star l_4 + l_2^\star l_3 - l_3^\star l_2 + l_4^\star l_1 & -l_1^\star l_3 - l_2^\star l_4 + l_3^\star l_1 + l_4^\star l_2 & l_1^\star l_2 - l_2^\star l_1 - l_3^\star l_4 + l_4^\star l_3 & l_1^\star l_1 + l_2^\star l_2 + l_3^\star l_3 + l_4^\star l_4
\end{array}
\right.
$$

D'après la formule (13), on voit que le déterminant des B_{pq} sera égal à 1 si nous choisissons comme conditions de normalisation des l_k les expressions

$$
(40)\qquad [l_k \beta_0 l_k] = [l_k^\star \beta_0 l_k^\star] = 1.
$$

On aura alors d'après (18)

$$
(41)\qquad \sum_{r=1}^{r=4} B_{pr} B_{qr} = \delta_{pq},
$$

qui assure l'orthogonalité de la transformation; on voit que les relations (19) et (20) qui se rencontrent en théorie de Dirac entre les densités de valeurs moyennes sont aussi (avec $|\Delta| = 1$) les relations qui existent entre les éléments de la matrice des rotations d'Univers.

Pour être complet il nous faut maintenant donner les formules qui permettront de calculer les paramètres complexes qui correspondent à une rotation d'Univers B_{pq} donnée; en posant

$$
(42)\qquad l_k = \rho_k e^{i\varphi_k}
$$

on a les expressions

$$
(43)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\rho_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{B_{11} - B_{22} - B_{33} + B_{44}}, & \varphi_1 = \varphi_4 + \operatorname{arc\,tg} i \dfrac{B_{14} - B_{41}}{B_{23} - B_{32}}; \\
\rho_2 = \dfrac{1}{2}\sqrt{-B_{11} + B_{22} - B_{33} + B_{44}}, & \varphi_2 = \varphi_4 + \operatorname{arc\,tg} i \dfrac{B_{24} - B_{42}}{B_{31} - B_{13}}; \\
\rho_3 = \dfrac{1}{2}\sqrt{-B_{11} - B_{22} + B_{33} + B_{44}}, & \varphi_3 = \varphi_4 + \operatorname{arc\,tg} i \dfrac{B_{34} - B_{43}}{B_{12} - B_{21}}; \\
\rho_4 = \dfrac{1}{2}\sqrt{B_{11} + B_{22} + B_{33} + B_{44}}, & \varphi_4 = \varphi_4.
\end{array}
\right.
$$

On voit que les paramètres l_k ne sont définis qu'à un facteur de phase près φ_4 dont on peut disposer dans chaque cas pour symétriser les formules.

Quand le tableau des B_{pq} est symétrique, les phases se présentent sous la forme indéterminée $0/0$; mais en reprenant le calcul on trouve que l'on doit avoir $l_4 = 0$, φ_2 quelconque et

$$(44) \qquad \varphi_1 = \varphi_2 + \operatorname{arc\,tg} i \frac{B_{34}}{B_{12}}, \qquad \varphi_3 = \varphi_2 - \operatorname{arc\,tg} i \frac{B_{14}}{B_{23}}.$$

Dans le cas, plus particulier encore, de la transformation identique $B_{pq} = \delta_{pq}$ on a

$$l_1 = l_2 = l_3 = 0, \qquad l_4 = 1.$$

Voici quelqnes exemples d'application des formules (43).

a. Rotations spatiales. — Si l'on se donne les éléments B_{pq} des matrices (32) ou (33) les formules (43) conduisent bien aux expressions réelles (36) et (37), c'est-à-dire que l'on retrouve les paramètres d'Olinde Rodrigues.

Si l'on changeait la représentation en prenant les matrices V_p reliées aux matrices ε_p par la relation (27) on aurait, au lieu de (38)

$$B_{pq} = [\, l'^{\star}_k \, \alpha_{pq} \, l'_k \,] = [\, l'^{\star}_k \, V_p V_q \, l'_k \,];$$

les nouveaux l'_k seraient reliés aux anciens par les relations $l'_k = \Lambda l_k$, ce qui donne

$$(45) \qquad \left\{ \begin{aligned} l'_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \; e^{i\frac{\psi+\varphi}{2}} \cos\frac{\theta}{2}, & l'_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \, i \, e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}} \sin\frac{\theta}{2}, \\ l'_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \, i \, e^{-i\frac{\varphi-\psi}{2}} \sin\frac{\theta}{2}, & l'_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \; e^{-i\frac{\varphi+\psi}{2}} \cos\frac{\theta}{2}. \end{aligned} \right.$$

On reconnaît au facteur près $\frac{1}{\sqrt{2}}$ les paramètres de Cayley-Klein.

Mais, si l'emploi des grandeurs complexes n'est pas une nécessité pour les rotations spatiales il est indispensable pour les rotations d'Univers les plus générales.

b. Transformation de Lorentz pure. — Le système $OX_1 Y_2 Y_3$ est animé par rapport au système $OX_1 X_2 X_3$ d'une vitesse de grandeur $c\beta$ et de cosinus directeurs λ_1, λ_2, λ_3 (*fig.* 2).

En posant $\operatorname{th}\gamma = \beta$, on a

$$\operatorname{sh}\gamma = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \operatorname{ch}\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

les éléments B_{pq} de la matrice de transformation ont les valeurs

$$B_{uv} = \delta_{uv} + \lambda_u \lambda_v (\operatorname{ch}\gamma - 1) \qquad (u, v = 1, 2, 3),$$
$$B_{u4} = -B_{4u} = -i\lambda_u \operatorname{sh}\gamma, \qquad B_{44} = \operatorname{ch}\gamma.$$

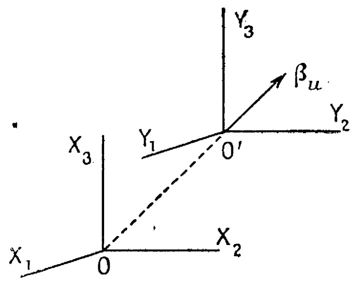

Fig. 2.

Les formules (43) donnent alors

$$(46) \qquad l_1 = i\lambda_2 \operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}, \qquad l_2 = i\lambda_2 \operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}, \qquad l_3 = i\lambda_3 \operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}, \qquad l_4 = \operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}.$$

c. Produit d'une rotation spatiale par une transformation de Lorentz pure. — On est conduit aux valeurs suivantes des l_k

$$(47) \qquad \left\{ \begin{aligned} l_w &= -\mu_w \sin\frac{\theta}{2} \operatorname{ch}\frac{\gamma}{2} + i\left[\lambda_w \cos\frac{\theta}{2} - (\lambda_u\mu_v - \lambda_v\mu_u)\sin\frac{\theta}{2}\right]\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}, \\ l_4 &= \operatorname{ch}\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\theta}{2} + i\sum_u \lambda_u\mu_u \sin\frac{\theta}{2}\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \right.$$

En théorie de Dirac, les paramètres complexes l_k permettent de donner l'expression générale de la matrice de transformation des fonctions d'ondes.

5. Nouvelle représentation des rotations d'univers. — L'écriture habituelle fait intervenir les formes bilinéaires B_{pq} ; on a

$$(48) \qquad X_p = B_{pq} Y^q,$$
$$(49) \qquad Y_p = B_{qp} X^q.$$

Voici une écriture nouvelle qui a l'avantage de faire jouer un rôle symétrique aux coordonnées X_p et Y_p et qui est linéaire par rapport aux paramètres l_k ou $l_k^\star$ supposés normalisés

$$\varepsilon_q^+ X^q l_k^\star = \varepsilon_q Y^q l_k \qquad (X_4 = ict;\ Y_4 = ict'), \tag{50}$$

Les matrices ε_q^+ ou ε_q opèrent sur les indices k des paramètres $l_k^\star$ ou l_k comme il est d'usage en mécanique ondulatoire. D'une manière plus explicite (50) s'écrit :

$$\left\{\begin{aligned} -X_1 l_4^\star + X_2 l_3^\star - X_3 l_2^\star + X_4 l_1^\star &= -Y_1 l_4 - Y_2 l_3 + Y_3 l_2 + Y_4 l_1, \\ -X_1 l_3^\star - X_2 l_4^\star + X_3 l_1^\star + X_4 l_2^\star &= Y_1 l_3 - Y_2 l_4 - Y_3 l_1 + Y_4 l_2, \\ X_1 l_2^\star - X_2 l_1^\star - X_3 l_4^\star + X_4 l_3^\star &= -Y_1 l_2 + Y_2 l_1 - Y_3 l_4 + Y_4 l_3, \\ -X_1 l_1^\star - X_2 l_2^\star - X_3 l_3^\star - X_4 l_4^\star &= -Y_1 l_1 - Y_2 l_2 - Y_3 l_3 - Y_4 l_4. \end{aligned}\right. \tag{51}$$

En multipliant (50) en avant par $l_k^\star \varepsilon_p$ et par $l_k \varepsilon_p^+$ on obtient

$$[l_k^\star \varepsilon_p \varepsilon_q^+ l_k^\star] X^q = [l_k \varepsilon_p \varepsilon_q l_k] Y^q,$$
$$[l_k \varepsilon_p^+ \varepsilon_q^+ l_k^\star] X^q = [l_k \varepsilon_p^+ \varepsilon_q l_k] Y^q.$$

Et comme on a

$$[l_k^\star \varepsilon_p \varepsilon_q^+ l_k^\star] = [l^k \varepsilon_p^+ \varepsilon_q l_k] = \delta_{pq},$$
$$[l_k \varepsilon_p^+ \varepsilon_q^+ l_k^\star] = [l_k^\star \varepsilon_q \varepsilon_p l_k] = B_{pq},$$

On voit que l'on obtient bien la forme habituelle (48) et son inverse (49).

Comme on a entre opérateurs les relations

$$(\varepsilon_p X^p)(\varepsilon_q^+ X^q) = \varepsilon_0 X_q^q \qquad \text{et} \qquad (\varepsilon_p^+ Y^p)(\varepsilon_q Y^q) = \varepsilon_0 Y_q^q,$$

en multipliant (50) en avant par $l_k^\star \varepsilon_p X^p$ et par $l_k \varepsilon_p^+ Y^p$ on en déduit

$$X_q^q = B_{pq} X^p Y^q \qquad \text{et} \qquad B_{qp} X^q Y^p = Y_q^q.$$

Soit

$$X_q^q = Y_q^q.$$

L'équation conjuguée de (50) peut s'écrire sous la forme suivante avec les matrices associées

$$l_k \underleftarrow{\overline{\varepsilon_q^+}} X^q = l_k^\star \underleftarrow{\overline{\varepsilon_q}} Y^q; \tag{52}$$

Les matrices agissent sur les indices k des paramètres l_k ou $l_k^\star$ placés à leur gauche [*voir* les définitions (1)].

Si l'on effectue une transformation unitaire, dont l'élément de matrice est o_{pq}, sur les Y_q ou sur les X_q, la forme de l'équation (50) se conserve.

Supposons, en effet que l'on ait

$$Y^q = o^{qr} Y'_r,$$

(50) devient

$$\varepsilon^+_q X^q l^\star_k = \varepsilon'_r Y'^r l_k, \tag{53}$$

en posant

$$\varepsilon'_r = o_{qr} \varepsilon^q.$$

on vérifie sans peine que l'on a

$$\varepsilon'_r = \bar{\Lambda} \varepsilon_r \Lambda \tag{54}$$

avec

$$\bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} m^\star_4 & m^\star_3 & -m^\star_2 & m^\star_1 \\ -m^\star_3 & m^\star_4 & m^\star_1 & m^\star_2 \\ m^\star_2 & -m^\star_1 & m^\star_4 & m^\star_3 \\ -m^\star_1 & -m^\star_2 & -m^\star_3 & m^\star_4 \end{bmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} m_4 & -m_3 & m_2 & m_1 \\ m_3 & m_4 & -m_1 & m_2 \\ -m_2 & m_1 & m_4 & m_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 & m_4 \end{bmatrix}.$$

les m_k étant les paramètres complexes qui correspondent aux éléments o_{pq} de la transformation, soit

$$o_{pq} = [\, m^\star_k \varepsilon_p \varepsilon_q m_k \,].$$

On peut aussi écrire

$$\bar{\Lambda} = \sum_{q=1}^{q=4} \varepsilon_q \varepsilon_4 m^\star_q, \qquad \Lambda = \sum_{q=1}^{q=4} \varepsilon^+_q \varepsilon^+_4 m_q$$

et l'on notera que les matrices inverses ont pour expression

$$(\bar{\Lambda})^{-1} = \sum_{q=1}^{q=4} \varepsilon^+_4 \varepsilon^+_q m^\star_q, \qquad \Lambda^{-1} = \sum_{q=1}^{q=4} \varepsilon_4 \varepsilon_q m_q.$$

L'équation (53) peut donc s'écrire en tenant compte de (54) et après multiplication en avant par $(\bar{\Lambda})^{-1}$

$$(\bar{\Lambda})^{-1} \varepsilon^+_q X^q l^\star_k = \varepsilon_r \Lambda Y'^r l_k,$$

et comme on a

$$(\bar{\Lambda})^{-1} \varepsilon^+_q = \varepsilon^+_q \Lambda^\star$$

on voit que l'on a, en définitive

$$\varepsilon^+_q X^q (\Lambda^\star l^\star_k) = \varepsilon_r Y'^r (\Lambda l_K)$$

qui a bien la même forme que (50).

Si l'on avait effectué une transformation unitaire sur les X^q (au lieu des Y_q) on aurait fait la vérification d'une manière analogue en tenant compte des relations

$$\varepsilon_r^{+\prime} = o_{qr}(\varepsilon^+)^q = \Lambda^{-1}\varepsilon_r\bar{\Lambda}^{-1}, \qquad \Lambda\varepsilon_q = \varepsilon_q(\bar{\Lambda}^{-1})^\star,$$

IV. — Nouvelle représentation et forme plus générale des équations de l'électromagnétisme classique (1).

1. Les formes bilinéaires en electromagnétisme classique. — Nous considérons ici les formules microscopiques de Maxwell-Lorentz; on sait qu'à partir de ces équations, par le jeu des moyennes, on peut introduire la distinction entre les champs et les inductions et aboutir ainsi aux formules de l'électromagnétisme des milieux polarisés.

On a les deux équations de base

$$\partial_q H^{pq} = a^p, \tag{55}$$

$$\partial_q \overline{H^{pq}} = 0 \tag{56}$$

qui entraînent l'équation du second ordre

$$\partial_r^r H^{pq} = -(\partial^p a^q - \partial^q a^p), \tag{57}$$

$\left(a^p = \frac{4\pi}{c}\rho_0 V^p;\ \rho_0\right.$ la densité de charge électrique au repos; V^p quadrivitesse relativiste$\Big)$.

On peut faire dériver le champ H^{pq} d'un quadripotentiel A^p qui obéit à la condition de Lorentz

$$\partial_q A^q = 0, \tag{58}$$

par la relation

$$H^{pq} = \partial^p A^q - \partial^q A^p, \tag{59}$$

(55), (58) et (59) entraînent l'équation du second ordre

$$\partial_q^q A^p = -a^p. \tag{60}$$

Les grandeurs bilinéaires que l'on forme avec H^{pq} et a^p sont le enseur de Maxwell M^{pq} et la densité de force de Lorentz f^p; on a,

(1) É. Durand, *C. R. Acad. Sc.*, t. **225**, 1947, p. 567-569.

en effet

$$(61) \qquad M^{pq} = -\frac{1}{4\pi}\left[H^{pr}H^{q}{}_{r} - \frac{1}{4}\delta^{pq}H_{rs}H^{rs}\right] = \frac{1}{8\pi}\left[\overline{H^{pr}}\,\overline{H^{q}{}_{r}} - H^{pr}H^{q}{}_{r}\right],$$

$$(62) \qquad f^{p} = \frac{1}{4\pi}a_{q}H^{pq}.$$

Le tenseur de Maxwell obéit aux relations suivantes qui ne sont pas mentionnées dans les traités classiques

$$\Sigma_{r}M_{pr}M_{qr} = \sqrt{|\Delta|}\,\delta_{pq},$$

Δ désignant le déterminant des M^{pq}; on a d'ailleurs

$$\sqrt{|\Delta|} = \frac{1}{64\pi^2}\left\{(E^2 - H_2)^2 + 4\left(\vec{E}\,\vec{H}\right)^2\right\};$$

On peut donc le représenter par des formes bilinéaires du type de celles que nous avons étudiées dans les paragraphes précédents avec nos matrices ε_p. Nous pouvons poser

$$(63) \qquad M^{pq} = [\psi_{K}^{\star}\varepsilon_{p}\varepsilon_{q}\psi_{K}].$$

Connaissant les M^{pq} on peut calculer les ψ_k par les formules (44), le tableau étant ici symétrique, on trouve [1]

$$(64) \qquad \psi_{u} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}(H_{u} + iE_{u}), \qquad \psi_{4} = 0 \qquad (u = 1, 2, 3).$$

Si l'on avait choisi les matrices V_p reliées aux matrices ε_p par la relation (27) et si l'on avait posé

$$M^{pq} = [\psi_{k}^{\prime\star}V_{p}V_{q}\psi_{k}^{\prime}]$$

la quatrième fonction ψ_4' n'aurait pas été nulle; on trouve en effet

$$\begin{aligned}
\psi_1' &= \frac{i}{\sqrt{16\pi}}(H_3 + iE_3),\\
\psi_2' &= \frac{i}{\sqrt{16\pi}}[(H_1 + iE_1) - i(H_2 + iE_2)],\\
\psi_3' &= \frac{i}{\sqrt{16\pi}}[(H_1 + iE_1) + i(H_2 + iE_2)],\\
\psi_4' &= -\frac{i}{\sqrt{16\pi}}(H_3 + iE_3).
\end{aligned}$$

---

(1) $H_{u} = H_{vw}$, $E_{u} = iH_{u4}$; u, v, w permutation paire de 1, 2, 3.

Il apparaît, comme nous l'avons déjà dit que la représentation avec les matrices ε_p et la plus simple; c'est d'elle qui s'agira dans tout ce qui va suivre.

Il importe de bien noter cependant que les tensions et les forces étant les seules grandeurs observables, les « champs » ψ_k ne sont pas définis; ils dépendent en particulier de la représentation choisie et contiennent un facteur de phase arbitraire. Le champ électromagnétique classique n'est qu'un cas particulier parmi cette multitude de champs; c'est celui qui correspond aux matrices ε_p.

La force de Lorentz est aussi une grandeur bilinéaire que l'on peut représenter par l'expression

$$f^p = [\psi_k^\star \varepsilon_p \Phi_k] + [\Phi_k^\star \overline{\varepsilon^p} \psi_k]. \tag{65}$$

Les ψ_k sont ceux qui ont déjà été définis par la formule (64); les Φ_k sont reliés aux grandeurs densitaires précédentes a_k par l'expression

$$\Phi_k = -\frac{1}{\sqrt{8\pi}} a_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4). \tag{66}$$

(a_1, a_2, a_3 sont réels; a_4 est imaginaire pure).

On vérifie aisément que l'expression (65) est bien identique à (62). On sait que les grandeurs f^p et M^{pq} sont reliées par l'équation

$$f^p = \partial_q M^{pq}. \tag{67}$$

Ainsi on voit apparaître une certaine analogie, au moins formelle, entre la théorie de Dirac et l'électromagnétisme classique, les équations (55) et (56) de ce paragraphe [1] correspondant aux équations d'ondes.

Nous sommes donc amenés à adopter pour ces équations une représentation analogue à celle de Dirac, mais en remplaçant les matrices de Dirac qui ne sauraient convenir par nos matrices ε_p.

C'est cette représentation que nous allons maintenant indiquer en lui conservant toute sa généralité, c'est-à-dire en conservant la quatrième fonction ψ_4; nous obtiendrons ainsi une théorie plus géné-

---

[1] Après avoir été regroupées en une équation complexe unique (*voir* le paragraphe suivant).

rale que la théorie classique qui fera intervenir à côté du champ H^{pq} les deux invariants Ω_1 et Ω_2 ; il sera ensuite facile de revenir à la théorie classique en faisant $\psi_4 = 0$; même si l'on se borne à ce dernier cas, la représentation matricielle est très supérieure aux notations tensorielles tant au point de vue de la simplicité de l'écriture que de la rapidité des calculs.

2. Forme plus générale des équations de l'électromagnétisme. — Désignons par ψ_k et Φ_k les fonctions complexes qui correspondent respectivement aux champs et aux vecteurs densitaires liés à la matière électrisée; nous écrirons les équations de base de l'électromagnétisme sous la forme

$$\varepsilon_q \underset{\rightarrow}{\partial^q} \psi_k = \varepsilon_0 \Phi_k. \tag{68}$$

Les matrices ε_q agissent sur les indices k des fonctions ψ_k et Φ_k, d'une manière plus explicite on a

$$\left\{\begin{aligned} -\partial_1\psi_4 - \partial_2\psi_3 + \partial_3\psi_2 + \partial_4\psi_1 &= \Phi_1, \\ \partial_1\psi_3 - \partial_2\psi_4 - \partial_3\psi_1 + \partial_4\psi_2 &= \Phi_2, \\ -\partial_1\psi_2 + \partial_2\psi_1 - \partial_3\psi_4 + \partial_4\psi_3 &= \Phi_3, \\ -\partial_1\psi_1 - \partial_2\psi_2 - \partial_3\psi_3 - \partial_4\psi_4 &= \Phi_4. \end{aligned}\right. \tag{69}$$

Les équations conjuguées de (68) peuvent s'écrire [1]

$$\psi_k^\star \underset{\leftarrow}{\partial^q} \overline{\varepsilon_q} = \Phi_k^\star \varepsilon_0. \tag{70}$$

Multiplions (68) en avant par $\psi_k^\star \varepsilon_p$ et (70) en arrière par $\overline{\varepsilon_p}\psi_k$; comme $\overline{\varepsilon_q}\,\overline{\varepsilon_p} = \varepsilon_p \varepsilon_q$ on en déduit par addition

$$f^p = \partial_q M^{pq}. \tag{71}$$

f^p et M^{pq} étant définis par les formules (63) et (65); ces grandeurs ont le caractère de réalité propre aux notations d'Univers ; M^{44} corres-

---

[1] Au lieu d'utiliser les matrices associées $\overline{\varepsilon_q}$ on pourrait utiliser les matrices ε_q avec les fonctions d'ondes associées $\psi_k^\times$ définies par $\psi_K^\times = \psi_K^\star \varepsilon_4$; on écrirait alors

$$\psi_k^\times \underset{\leftarrow}{\partial^q} \varepsilon_q = -\Phi_k^\times \varepsilon_0.$$

pond, au point de vue formel, à la densité de présence de la Mécanique ondulatoire puisque $\varepsilon_4 \varepsilon_4 = 1$.

(71) généralise la formule (67) du paragraphe précédent.

Multiplions (68) en avant par l'opérateur $\varepsilon^+_q \partial^q$; on obtient

$$\partial^r_r \psi_k = \varepsilon^+_q \partial^q \Phi_k, \tag{72}$$

qui généralise l'équation (57) du paragraphe précédent, (72) admet les solutions retardées

$$\psi_k = -\frac{1}{4\pi} \iiint [\varepsilon^+_q \partial^q \Phi_k]_\tau \frac{dv}{r}, \tag{73}$$

auxquelles on peut toujours ajouter des solutions de Dalembertien nul.

On peut faire dériver le champ complexe ψ_k d'un potentiel complexe θ_k par la formule

$$\varepsilon^+_q \underset{\rightarrow}{\partial^q} \theta_k = \varepsilon_0 \psi_k, \tag{74}$$

qui généralise la formule (59), (74) s'écrit d'une manière plus explicite

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_1 &= -\partial_1 \theta_4 + \partial_2 \theta_3 - \partial_3 \theta_2 + \partial_4 \theta_1, \\ \psi_2 &= -\partial_1 \theta_3 - \partial_2 \theta_4 + \partial_3 \theta_1 + \partial_4 \theta_2, \\ \psi_3 &= \quad \partial_1 \theta_2 - \partial_2 \theta_1 - \partial_3 \theta_4 + \partial_4 \theta_3, \\ \psi_4 &= -\partial_1 \theta_1 - \partial_2 \theta_2 - \partial_3 \theta_3 - \partial_4 \theta_4. \end{aligned} \right. \tag{75}$$

L'équation conjuguée de (74) peut s'écrire

$$\theta^\star_k \underset{\leftarrow}{\partial^q} \overline{\varepsilon^+_q} = \psi^\star_k \varepsilon_0. \tag{76}$$

En multipliant (74) en avant par l'opérateur $\varepsilon_q \partial_q$ et en tenant compte de (68) on trouve que les potentiels complexes θ_k satisfont l'équation du second ordre

$$\partial^q_q \theta_k = \Phi_k; \tag{77}$$

Cette dernière équation admet la solution retardée

$$\theta_k = -\frac{1}{4\pi} \iiint [\Phi_k]_\tau \frac{dv}{r}, \tag{78}$$

à laquelle on peut toujours ajouter une solution de Dalembertien nul.

En combinant les équations (68), (74), (77), (73), (78) avec leurs conjuguées par addition et soustraction et après regroupement on obtient des équations réelles qui ont le caractère tensoriel; pour les écrire plus simplement, nous poserons :

$$
(79)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
\psi_{uv} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}(\mathrm{H}_{uv} - \mathrm{H}_{\overline{uv}}), & \Phi_u = -\frac{1}{\sqrt{8\pi}}(a_u - b_u), & \theta_u = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}(\mathrm{A}_u - \mathrm{B}_u); \\
\psi^{\star}_{uv} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}(\mathrm{H}_{uv} + \mathrm{H}_{\overline{uv}}), & \Phi^{\star}_u = -\frac{1}{\sqrt{8\pi}}(a_u + b_u), & \theta^{\star}_u = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}(\mathrm{A}_u + \mathrm{B}_u); \\
\psi_4 = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}(\Omega_1 - \Omega_2), & \Phi_4 = -\frac{1}{\sqrt{8\pi}}(a_4 - b_4), & \theta_4 = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}(\mathrm{A}_4 - \mathrm{B}_4); \\
\psi^{\star}_4 = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}(\Omega_1 + \Omega_2), & \Phi^{\star}_4 = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}(a_4 + b_4), & \theta^{\star}_4 = -\frac{1}{\sqrt{8\pi}}(\mathrm{A}_4 + \mathrm{B}_4).
\end{array}
\right.
$$

Les grandeurs $\mathrm{H}_{\overline{uv}}$, Ω_2, a_4, b_u, A_4, B_u sont imaginaires pures, les autres sont réelles, on a ainsi intérêt à poser

$$
(80)\quad h_{pq} = \{(\partial_p a_q - \partial_q a_p) + (\overline{\partial_p b_q - \partial_q b_p})\}, \qquad \omega_1 = -\partial_q a^q, \qquad \omega_2 = \partial_q b^q;
$$

on a alors les équations réelles

$$
\begin{array}{ll}
(81) & \partial_q \mathrm{H}^{pq} + \partial^p \Omega_1 = a^p, \\
(82) & \partial^q \overline{\mathrm{H}^{pq}} + \partial^p \Omega_2 = b^p, \\
(83) & \mathrm{H}_{pq} = [\partial_p \mathrm{A}_q - \partial_q \mathrm{A}_p] + [\overline{\partial_p \mathrm{B}_q - \partial_q \mathrm{B}_p}], \\
(84) & \Omega_1 = -\partial_q \mathrm{A}^q, \qquad \Omega_2 = -\partial_q \mathrm{B}^q, \\
(85) & \partial^q_q \mathrm{A}^p = -a^p, \\
(86) & \partial^q_q \mathrm{B}^p = -b^p,
\end{array}
$$

qui généralisent respectivement les équations (55), (56), (59), (58), (60) du paragraphe précédent.

Si l'on se donne les vecteurs densitaires a_p et b_p on a pour les grandeurs finies (potentiels et champs) les solutions retardées.

$$
\mathrm{A}^p = \frac{1}{4\pi}\iiint a^p_{\tau}\frac{dv}{r}, \qquad \Omega_1 = \frac{1}{4\pi}\iiint [\omega_1]_{\tau}\frac{dv}{r}, \qquad \mathrm{H}^{pq} = \frac{1}{4\pi}\iiint h^{pq}_{\tau}\frac{dv}{r},
$$

$$
\mathrm{B}^p = \frac{1}{4\pi}\iiint b^p_{\tau}\frac{dv}{r}, \qquad \Omega_2 = \frac{1}{4\pi}\iiint [\omega_2]_{\tau}\frac{dv}{r}.
$$

Avec les grandeurs d'Univers définies par (79) les tenseurs M^{pq} et f^p ont pour expression

$$(87)\qquad M^{pq} = \frac{1}{8\pi}\left\{ \left[H^{\overline{pq}} H^{q}{}_{r} - H^{pr} H^{q}{}_{r} \right] + 2\left[\Omega_1 H^{pq} - \Omega_2 H^{\overline{pq}} \right] + (\Omega_1^2 - \Omega_2^2)\,\partial^{pq} \right\},$$

$$(88)\qquad f^p = \frac{1}{4\pi}\left\{ \left[a_q H^{pq} + \Omega_1 a^p \right] - \left[b_q H^{\overline{pq}} + \Omega_2 b^p \right] \right\}.$$

On voit que le tenseur de Maxwell n'est plus symetrique; sa trace $\left(\frac{1}{2\pi}\right)(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)$ n'est plus nulle.

On retrouve l'électromagnétisme de Maxwell-Lorentz en faisant $B^p = 0$ ce qui entraîne $\Omega_2 = 0$, et en faisant $\Omega_1 = 0$ ce qui entraîne d'après (84) la condition de Lorentz pour les potentiels.

3. Invariance relativiste de la nouvelle représentation. — *a. Premier type de varianee.* — Les équations complexes (69) et (75) peuvent s'écrire sous forme tensorielle d'Univers; en adoptant la correspondance suivante entre les indices matriciels k et les indices tensoriels

$$\psi_{uv} \to -\psi_{uv} = \psi_{\alpha 4}, \qquad \psi_4 \to -\psi_0,$$
$$\theta_k \to \theta_p, \qquad \boldsymbol{\Phi}_k \to \boldsymbol{\Phi}_p,$$

elles prennent la forme

$$(89)\qquad \partial_q \psi^{pq} + \partial^p \psi_0 = \Phi^p.$$

$$(90)\qquad \begin{cases} \psi_{pq} = (\partial_p \theta_q - \partial_q \theta_p) - (\overline{\partial_p \theta_q - \partial_q \theta_p}), \\ \psi_0 \ = \partial_q \theta^q. \end{cases}$$

On voit que les trois premières composantes ψ_1, ψ_2, ψ_3, de ψ_k se transforment comme un tenseur antisymétrique antidual (nous appelons ainsi un tenseur tel que $\psi_{pq} = -\psi_{\overline{pq}}$); ψ_4 est un invariant.

Les θ_k et les Φ_k se transforment comme des quadrivecteurs. Désignons par $\Lambda_{(a)}$ la matrice de transformation des ψ_k : on a

$$(91)\qquad \psi_k = \Lambda_{(a)}\psi' = \sum_{l=1}^{l=4} \Lambda^{(a)}_{kl}\psi'_l,$$

$\Lambda_{(a)}$ a la forme

$$(92)\qquad \begin{bmatrix} \Lambda^{(a)}_{11} & \Lambda^{(a)}_{12} & \Lambda^{(a)}_{13} & 0 \\ \Lambda^{(a)}_{21} & \Lambda^{(a)}_{22} & V^{(a)}_{23} & 0 \\ \Lambda^{(a)}_{31} & \Lambda^{(a)}_{32} & \Lambda^{(a)}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si o_{pq} est l'élément de matrice de la transformation effectuée sur les coordonnées ($x_p = o_{pq} x'^q$) les $\Lambda^{(a)}_{uv}$ avec $u, v, = 1, 2, 3$ sont des expressions bilinéaires que l'on peut représenter avec nos matrices ε_p par l'expression

$$[\Lambda^{(a)}_{nv} = [o_{lk} \varepsilon_4 \varepsilon_v o_{mk}], \tag{93}$$

l, m, n est une permutation paire de 1, 2, 3; la matrice $\varepsilon_4 \varepsilon_v$ n'agit que sur les indices k des o_{lk} ou o_{mk}, on a par exemple

$$\Lambda^{(a)}_{11} = [o_{2k} \varepsilon_4 \varepsilon_1 o_{3k}] = [- o_{21} o_{34} + o_{22} o_{33} - o_{23} o_{32} + o_{24} o_{31}].$$

Voici une autre démonstration de l'invariance relativiste. Partons de l'équation (68) soit

$$\varepsilon_q \partial^q \psi_k = \varepsilon_0 \Phi_k.$$

Si l'on effectue sur les coordonnées la transformation o_{pq} les ∂_q se transforment comme les coordonnées, soit

$$\partial^q = o^{qr} \partial'_r;$$

en posant $\varepsilon'_r = o_{qr} \varepsilon^q$ il vient

$$\varepsilon'_r \partial'^r \psi_k = \varepsilon_0 \Phi_k, \tag{94}$$

or, on peut vérifier que l'on a

$$\varepsilon'_r = o_{qr} \varepsilon^q = O \varepsilon_r \Lambda'^{-1}_{(a)} \tag{95}$$

en désignant par O la matrice d'élément o_{pq} et par $\Lambda^{-1}_{(a)}$ l'inverse de la matrice (92), (94) peut donc s'écrire

$$\varepsilon_r \partial'^r (\Lambda^{-r}_{(a)} \psi_k) = \varepsilon_0 (O^{-1} \Phi_k)$$

et en posant

$$\psi'_k = \Lambda^{-1}_{(a)} \psi_k \qquad \text{et} \qquad \Phi'_k = O^{-1} \Phi_k$$

on a

$$\varepsilon_r \partial'^r \psi'_k = \varepsilon_0 \Phi'_k$$

qui a bien la même forme que (68).

Pour démontrer l'invariance de l'équation (74) on opérerait d'une manière analogue en tenant compte de la relation

$$\varepsilon^{+\prime}_r = o_{qr} \varepsilon^q_+ = \Lambda_{(a)} \varepsilon^+_r O^{-1}. \tag{96}$$

b. Deuxième type de variance. — On peut écrire (69) et (75) sous une forme tensorielle différente de (89) et (90), en adoptant en effet la correspondance suivante entre les indices matriciels k et les indices tensoriels

$$\psi_k \to -\psi_p,$$
$$\theta_w \to \theta_{uv} = \theta_{w4}, \qquad \theta_4 \to -\theta_0,$$
$$\mathbf{\Phi}_w \to \mathbf{\Phi}_{uv} = \mathbf{\Phi}_{w4}, \qquad \mathbf{\Phi}_4 \to -\mathbf{\Phi}_0.$$

les équations (69) et (75) s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{l} (\partial_p \psi_q - \partial_q \psi_p) + (\overline{\partial_p \psi_q - \partial_q \psi_p}) = \mathbf{\Phi}_{pq}, \\ -\partial_q \psi^q = \mathbf{\Phi}_0. \end{array}\right. \tag{97}$$

$$\psi_p = \partial_q \theta^{pq} + \partial^p \theta_0. \tag{98}$$

On voit que les ψ_k se transforment comme un quadrivecteur; les Φ_u et les θ_u se transforment comme un tenseur antisymétrique self-dual; les Φ_4 et θ_4 sont des invariants.

Ceci est dû au fait que l'on n'a pas seulement la formule (95) mais que l'on a aussi

$$\varepsilon'_p = o_{qp} \varepsilon^q = \Lambda_{(s)} \varepsilon_p \mathrm{O}^{-1}, \tag{99}$$

la matrice $\Lambda_{(s)}$ a pour expression

$$\begin{array}{ll} \Lambda^{(s)}_{u4} = \Lambda^{(s)}_{4u} = 0, & \Lambda^{(s)}_{44} = 1, \\ \Lambda^{(s)}_{uv} = [o_{lk} \varepsilon_w \varepsilon_4 o_{mk}], \end{array} \tag{100}$$

[cette dernière expression est différente de (93) puisque l'on a $\varepsilon_w \varepsilon_4$ au lieu de $\varepsilon_4 \varepsilon_w$].

V. — Possibilité d'application des matrices ε_p en mécanique ondulatoire.

Nous admettrons qu'il faut 8 fonctions d'ondes complexes θ_k et Φ_k pour décrire la particule; chacune d'elle devra satisfaire l'équation du second ordre $(\partial_q^q - k_0^2)(\ ) = 0$ qui admet pour solution l'onde plane de M. Louis de Broglie, et la densité de probabilité de présence devra s'écrire $\{[\theta_k^\star . \theta_k] + [\psi_k^\star \psi_k]\}$; son intégrale devra être constante.

Les véritables équations d'ondes sont du premier ordre et l'on peut les écrire sous la forme

$$(101) \qquad \varepsilon_q \, \partial^q \boldsymbol{\Phi}_k = \varepsilon_0 k_0 \theta_k, \qquad k_0 = \frac{2\pi m_0 c}{h},$$

$$(102) \qquad \varepsilon_q^+ \partial^q \theta_k = \varepsilon_0 k_0 \boldsymbol{\Phi}_k.$$

En multipliant (101) par l'opérateur $\varepsilon_q^+ \partial^q$ et (102) par l'opérateur $\varepsilon^q \partial^q$ on en déduit les équations du second ordre

$$(103) \qquad (\partial_q^q - k_0^2)\theta_k = 0, \qquad (\partial_q^q - k_0^2)\boldsymbol{\Phi}_k = 0.$$

Les équations conjuguées de (101) et (102) peuvent s'écrire

$$(104) \qquad \boldsymbol{\Phi}_k^\times \overleftarrow{\partial^q} \varepsilon_q = -k_0 \theta_k^\times \varepsilon_0,$$

$$(105) \qquad \theta_k^\times \overleftarrow{\partial^q} \varepsilon_q^+ = -k_0 \boldsymbol{\Phi}_k^\times \varepsilon_0,$$

En posant

$$\boldsymbol{\Phi}_k^\times = \psi_k^\star \varepsilon_4, \qquad \theta_k^\times = \theta_k^\star \varepsilon_4.$$

Multiplions (101) en avant par $\Phi_k^\times$ et sa conjuguée (104) en arrière par Φ_k; après addition on obtient

$$\partial_q[\boldsymbol{\Phi}_k^\times \varepsilon^q \boldsymbol{\Phi}_k] = k_0\{[\boldsymbol{\Phi}_k^\times \varepsilon_0 \theta_k] - [\theta_k^\times \varepsilon_0 \boldsymbol{\Phi}_k]\}.$$

D'une manière analogue, à partir de (102) et de sa conjuguée (105) on obtient

$$\partial_q[\theta_k^\times \varepsilon^q \theta_k] = k_0\{[\theta_k^\times \varepsilon_0 \boldsymbol{\Phi}_k] - [\boldsymbol{\Phi}_k^\times \varepsilon_0 \theta_k]\}.$$

Par addition de ces deux dernières équations on obtient l'équation de continuité

$$(106) \qquad \partial_q\{[\boldsymbol{\Phi}_k^\times \varepsilon^q \boldsymbol{\Phi}_k] + [\theta_k^\times \varepsilon^q \theta_k]\} = 0,$$

On voit que la densité de probabilité de présence a bien l'expression indiquée au début et si l'on impose aux fonctions d'ondes la condition de s'annuler aux limites, son intégrale est bien une constante.

Voici une autre représentation qui utilise des matrices à 8 rangs et qui a l'avantage de réunir les deux équations (101) et (102) en une équation unique; nous définirons 4 matrices γ^p à 8 rangs avec nos matrices ε_p et ε_p^+ par le tableau

$$(107) \qquad \gamma_p = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \varepsilon_p \\ \hline \varepsilon_p^+ & 0 \end{array}\right].$$

Chose remarquable, ces 4 matrices obéissent aux conditions de Dirac

$$\gamma_p\gamma_q + \gamma_q\gamma_p = 2\gamma_0\,\delta_{pq}, \tag{108}$$

γ_0 désigne la matrice unité à 8 rangs.

Les 8 équations d'ondes sont condensées dans la formule

$$\Big[\gamma_q \underset{\rightarrow}{\partial^q} - \gamma_0 k_0\Big]\psi_k = 0. \tag{109}$$

La correspondance entre les 8 fonctions précédentes θ_n et Φ_n et les 8 fonctions ψ_k est la suivante

$$\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4 \to \psi_1\psi_2\psi_3\psi_4; \qquad \Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4 \to \psi_5\psi_6\psi_7\psi_8.$$

Les équationss conjuguées s'écrivent

$$\psi_k^\times\Big[\underset{\leftarrow}{\partial^q}\gamma_q + \gamma_0 k_0\Big] = 0 \tag{110}$$

en posant

$$\psi_k^\times = \psi^\star\gamma_4.$$

D'une manière plus explicite, les équations (109) s'écrivent

$$\begin{aligned}
-\partial_1\psi_8 - \partial_2\psi_7 + \partial_3\psi_6 + \partial_4\psi_5 &= k_0\psi_1,\\
\partial_1\psi_7 - \partial_2\psi_8 - \partial_3\psi_5 + \partial_4\psi_6 &= k_0\psi_2,\\
-\partial_1\psi_6 + \partial_2\psi_5 - \partial_3\psi_8 + \partial_4\psi_7 &= k_0\psi_3,\\
-\partial_1\psi_5 - \partial_2\psi_6 - \partial_3\psi_7 - \partial_4\psi_8 &= k_0\psi_4,\\
-\partial_1\psi_4 + \partial_2\psi_3 - \partial_3\psi_2 + \partial_4\psi_1 &= k_0\psi_5,\\
-\partial_1\psi_3 - \partial_2\psi_4 + \partial_3\psi_1 + \partial_4\psi_2 &= k_0\psi_6,\\
\partial_1\psi_2 - \partial_2\psi_1 - \partial_3\psi_4 + \partial_4\psi_3 &= k_0\psi_7,\\
-\partial_1\psi_1 - \partial_2\psi_2 - \partial_3\psi_3 - \partial_4\psi_4 &= k_0\psi_8.
\end{aligned}$$

Avec cette représentation les calculs sont beaucoup plus rapides; en multipliant (109) en avant par $\psi_k^\times$ et sa conjuguée (110) en arrière par ψ_k, puis en additionnant on obtient l'équation de continuité sous la forme

$$\partial_q[\psi_k^\times\gamma^q\psi_k] = 0.$$

On voit que la probabilité de présence a pour expression

$$[\psi_k^\times\gamma^4\psi_k] = [\psi_k^\star\gamma_0\psi_k] = \sum_{k=1}^{k=8}\psi_k^2.$$

Enfin en multipliant (109) en avant par l'opérateur $[\gamma_q\partial^q + \gamma_0 k_0]$ on voit que les 8 fonctions d'ondes obéissent aux équations du second ordre

$$(\partial_q^q - k_0^2)\psi_k = 0.$$

Malgré la condition de Dirac (108) et malgré la forme (109) tout à fait analogue à celle de Dirac on notera que l'on peut attribuer aux fonctions d'ondes une variance tensorielle; on peut adopter l'un ou l'autre des types de variances dont il a été question dans le chapitre précédent.

Cette étude a été faite sous la direction de M. Louis de Broglie; nous lui adressons ici nos bien sincères remerciements pour ses précieux conseils.