JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JEAN LERAY

Fluides compressibles. Application à l'aile portante d'envergure infinie de la méthode approchée de Tchapliguine

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 28 (1949), p. 181-191.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1949_9_28__181_0>

Fluides compressibles.

Application à l'aile portante d'envergure infinie de la méthode approchée de Tchapliguine;

Par Jean LERAY.

1. Introduction. — L'un des meilleurs procédés d'étude des écoulements compressibles, quand ils sont plans, infrasoniques, irrotationnels et permanents, est le procédé approché de Tchapliguine [1], que M. Henri Villat [2] fit sortir en 1933 de l'oubli où il était tombé. Ce procédé résout avec élégance les problèmes de jets ou de sillages, et l'écoulement autour d'un profil d'aile dans le cas particulier où la portance est nulle; personne, à ma connaissance, n'en a tiré une théorie de l'aile portante; c'est pourtant aisé, comme nous allons le montrer.

2. Le procédé d'approximation de Tchapliguine. — Rappelons très sommairement ce procédé. Soit dans un plan (x, y) un écoulement de densité ρ_1 et de vitesse $(V_1, 0)$ que perturbe une aile immobile; soient ρ, $u = V\cos\theta$, $v = V\sin\theta$ la densité et les composantes de la vitesse de ce mouvement perturbé; son potentiel φ et sa fonction de courant ψ sont donnés par les formules, où ρ_0 désigne une constante

[1] Tchapliguine, *Annales scientifiques de l'Université de Moscou* (*Cl. Phys. Math.*, fasc. 21, 1904, p. 1 à 121) (en russe). L'essentiel de ce Mémoire a été exposé par M. Basile Demtchenko dans les *Publications math. de l'Université de Belgrade*, t. 2, 1933.

[2] Cours professé à la Sorbonne.

que nous fixerons ultérieurement

$$d\varphi = u\,dx + v\,dy \qquad \text{et} \qquad \rho_0\,d\psi = \rho(u\,dy - v\,dx).$$

L'emploi des nombres complexes permet de condenser les deux formules précédentes en la suivante :

$$(1) \qquad d\varphi + i\frac{\rho_0}{\rho}\,d\psi = (u - iv)(dx + i\,dy),$$

où nous introduirons le potentiel complexe $f = \varphi + i\psi$; son imaginaire conjugué $\overline{f}$, la vitesse complexe $u - iv = \mathrm{V}\,e^{-i\theta}$ et l'affixe $z = x + iy$; il vient

$$(2) \qquad dz = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho} + 1\right)\frac{e^{i\theta}}{\mathrm{V}}\,df - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right)\frac{e^{i\theta}}{\rho}\,d\overline{f}.$$

Nous supposons que p est une fonction $p(\rho)$ de ρ; d'après le théorème de Bernoulli

$$(3) \qquad \frac{dp}{\rho} + \frac{1}{2}\,d(\mathrm{V}^2) = 0;$$

donc V et ρ sont liés par une relation; supposons que cette relation soit

$$(4) \qquad \left(\frac{\rho_0^2}{\rho^2} - 1\right)\frac{1}{\mathrm{V}^2} = \left(\frac{\rho_0^2}{\rho_1^2} - 1\right)\frac{1}{\mathrm{V}_1^2};$$

si nous définissons une nouvelle variable complexe w par la relation

$$(5_1) \qquad \left(\frac{\rho_0}{\rho} + 1\right)\frac{e^{i\theta}}{\mathrm{V}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} + 1\right)\frac{1}{w},$$

nous avons donc

$$(5_2) \qquad \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1\right)\frac{e^{-i\theta}}{\mathrm{V}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right)\frac{1}{\mathrm{V}_1^2}\,w$$

et la relation (2) devient

$$(6) \qquad dz = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} + 1\right)\frac{df}{w} - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right)\frac{1}{\mathrm{V}_1^2}\,\overline{w}\,d\overline{f};$$

il est évident que le second membre de (6) est une différentielle exacte quand w est une fonction analytique de f; la réciproque est facile à établir; par conséquent, w doit être une fonction analytique de f. L'hypothèse (4) conduit donc à des calculs particulièrement simples.

D'après le théorème de Bernoulli (3), l'hypothèse (4) équivaut à

$$dp = \frac{\rho_0^2 \rho_1^2 V_1^2}{\rho_0^2 - \rho_1^2} \frac{d\rho}{\rho^2}; \tag{7}$$

cette loi n'est pas suivie par les écoulements réels, qui sont adiabatiques; mais elle constitue une bonne approximation de la loi réelle quand pour $\rho = \rho_1$ elle fournit la valeur réelle de $\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$, qui est la célérité a_1 du son dans l'écoulement non perturbé [1]; nous devons donc choisir ρ_0 tel que

$$a_1^2 = \frac{\rho_0^2 V_1^2}{\rho_0^2 - \rho_1^2}. \tag{8}$$

En résumé, la solution approchée de Tchapliguine est définie par les formules

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \sqrt{1 - \frac{V_1^2}{a_1^2}}, \tag{9}$$

$$p - p_1 = \rho_1^2 a_1^2 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}\right), \tag{10}$$

$$\theta = -\arg w, \tag{11}$$

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} + 1\right)\frac{1}{|w|} - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right)\frac{1}{V_1^2}|w|, \tag{12}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho V} = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} + 1\right)\frac{1}{|w|} + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right)\frac{1}{V_1^2}|w|, \tag{13}$$

$$z = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} + 1\right)\int \frac{df}{w} - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right)\frac{1}{V_1^2}\int \overline{w}\, df; \tag{14}$$

w représente une fonction analytique du potentiel complexe f.

Tchapliguine obtient des sillages et des jets de fluides compressibles en choisissant pour f et w le potentiel complexe et la vitesse complexe de sillages ou de jets de fluides incompressibles; un choix analogue de f et w permet d'étudier les ailes de portance nulle; c'est en procédant tout autrement que nous allons réussir à étudier l'aile portante.

---

(1) Nous nous écartons du point de vue de Tchapliguine pour adopter celui de Karman et Tsien; (*voir* VON KARMAN, *Journal of the aeronautical sciences*, t. 8, 1941).

5. Choix de f et w. — Le théorème de H. Poincaré sur l'uniformisation des fonctions analytiques conduit à introduire une variable complexe Z ayant les propriétés suivantes : Z correspond biunivoquement à z sans être une fonction analytique de z; Z décrit l'extérieur d'un cercle $|Z| \geqq a$; la circonférence $|Z| = a$ correspond au profil de l'aile; w est une fonction holomorphe $w(Z)$ de Z; $w(\infty) = V_1$; f est une fonction analytique multiforme de Z; $f(Z)$ augmente de la circulation Γ de la vitesse autour du profil quand Z fait un tour autour du cercle $|Z| \leqq a$; la partie imaginaire de f est constante sur la circonférence $|Z| = a$; quand Z augmente indéfiniment, f a pour partie principale $V_1 Z$. D'où, par un raisonnement classique,

$$f = V_1\left(Z + \frac{a^2}{Z}\right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \log Z; \tag{15}$$

d'autre part, $w(Z)$ est développable en série de Laurent, qui converge pour $|Z| > a$; nous avons donc, pour $|Z| > a$,

$$\frac{df}{w} = \left[1 + \sum_{n>0} \frac{a_n}{Z^n}\right] dZ \quad \text{et} \quad \frac{1}{V_1^2} w\, df = \left[1 + \sum_{n>0} \frac{b_n}{Z^n}\right] dZ; \tag{16}$$

d'après (15), les a_n et b_n doivent vérifier la relation

$$\left[1 + \sum_{n>0} \frac{a_n}{Z^n}\right]\left[1 + \sum_{n>0} \frac{b_n}{Z^n}\right] = \left[1 - \frac{i\Gamma}{2\pi V_1} \frac{1}{Z} - \frac{a^2}{Z^2}\right]^2; \tag{17}$$

cette condition permet de déterminer les b_n en fonction des a_n et *vice-versa;* elle nous donne en particulier

$$a_1 + b_1 = -\frac{i\Gamma}{\pi V_1}, \tag{18}$$

$$a_2 + b_2 + a_1 b_1 = -\frac{\Gamma^2}{4\pi^2 V_1^2} - 2a^2. \tag{19}$$

Portons dans (14) les développements (16), nous obtenons

$$\begin{aligned} z = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} + 1\right)\left[Z + a_1 \log Z - \sum_{n>1} \frac{a_n}{(n-1)Z^{n-1}}\right] \\ & - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right)\left[\overline{Z} + \overline{b}_1 \log \overline{Z} - \sum_{n>1} \frac{\overline{b}_n}{(n-1)\overline{Z}^{n-1}}\right]; \end{aligned}$$

puisque z doit être une fonction uniforme de Z, nous devons avoir

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}+1\right)a_1+\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}-1\right)\overline{b}_1=0;$$

cette relation, jointe à (18), donne

$$(20)\qquad a_1=-i\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)\frac{\Gamma}{2\pi V_1}\qquad \text{et}\qquad b_1=-i\left(1+\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)\frac{\Gamma}{2\pi V_1};$$

la relation (19) devient donc

$$(21)\qquad a_2+b_2=-\frac{\rho_1^2}{\rho_0^2}\frac{\Gamma^2}{4\pi^2 V_1^2}-2a^2;$$

et l'expression de z s'écrit

$$(22)\qquad \begin{aligned} z= & \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}+1\right)Z-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}-1\right)\overline{Z}+i\frac{\rho_0^2-\rho_1^2}{\rho_0\rho_1}\frac{\Gamma}{2\pi V_1}\log|Z| \\ & -\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}+1\right)\sum_{n>1}\frac{a_n}{(n-1)Z^{n-1}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}-1\right)\sum_{n>1}\frac{\overline{b}^n}{(n-1)\overline{Z}^{n-1}}. \end{aligned}$$

4. Force et couple exercés par le courant sur le profil. — Nous allons calculer la résultante (F_x, F_y) des forces que le courant exerce sur le profil et le moment M de ces forces par rapport au point $z=0$. D'après le théorème d'Euler, le système des forces que le courant exerce sur le profil équivaut au système des forces

$$(dF_x, dF_y)=-(p-p_1)\vec{n}\,ds-\rho_0\vec{V}\,d\psi$$

envisagées le long d'un contour arbitraire C qui entoure le profil ($\vec{n}$ représente la normale à C orientée vers l'extérieur, ds l'élément d'arc de C et $\rho_0\,d\psi$ le flux qui sort de C à travers ds). Posons $dF=dF_x-i\,dF_y$; nous avons d'une part ($\mathcal{R}$ signifiant « partie réelle de ... »),

$$(23_1)\qquad F_x-iF_y=\int_C dF,$$

$$(23_2)\qquad M=\mathcal{R}\int_C iz\,dF;$$

d'autre part, en parcourant C dans le sens positif,

$$dF = -i(p - p_1)(dx - i\,dy) - \rho_0(u - iv)\,d\psi.$$

D'après (1), (8) et (10) la relation précédente s'écrit

$$(24)\qquad dF = -i\frac{\rho_0^2\rho_1^2 V_1^2}{\rho_0^2 - \rho_1^2}\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}\right)\frac{e^{-i\theta}}{V}\left(d\varphi - i\frac{\rho_0}{\rho}\,d\psi\right) - \rho_0 V e^{-i\theta}\,d\psi.$$

D'après (12) et (13), le coefficient de $d\varphi$ dans le second membre de (24) est

$$-\frac{i\rho_0}{2}\left[\frac{V_1^2}{\overline{w}} - w\right].$$

D'après (4)

$$\frac{\rho_0\rho_1^2 V_1^2}{\rho_0^2 - \rho_1^2}\left(\frac{\rho_0^2}{\rho^2 V} - \frac{1}{V}\right) - \rho_0 V = 0;$$

dans le second membre de (24) le coefficient de $d\psi$ est donc

$$\frac{\rho_0\rho_1^2 V_1^2}{\rho_0^2 - \rho_1^2}\left(\frac{1}{V} - \frac{\rho_0^2}{\rho_1\rho V}\right)e^{-i\theta};$$

d'après (12) et (13), ce coefficient vaut

$$-\frac{\rho_0}{2}\left[\frac{V_1^2}{\overline{w}} + w\right].$$

La relation (24) s'écrit donc

$$(25)\qquad dF = -\frac{i}{2}\rho_0 V_1^2\frac{d\overline{f}}{\overline{w}} + \frac{i}{2}\rho_0 w\,df$$

ou, d'après (16),

$$(26)\qquad dF = -\frac{i}{2}\rho_0 V_1^2\left[1 + \sum_{n>0}\frac{\overline{a}_n}{\overline{Z}^n}\right]d\overline{Z} + \frac{i}{2}\rho_0 V_1^2\left[1 + \sum_{n>0}\frac{b_n}{Z^n}\right]dZ;$$

rappelons que (20) précise les valeurs de a_1 et b_1.

Nous allons calculer F_x, F_y et M en remplaçant dans (23) z et dF par leurs expressions (22) et (26); nous choisirons pour C une circonférence $|Z| = R$; le long de cette circonférence nous avons $\overline{Z} = \frac{R^2}{Z}$ et par suite

$$z = -\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}+1\right)\sum_{n>1}\frac{a_n}{(n-1)Z^{n-1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}-1\right)\frac{R^2}{Z} + i\frac{\rho_0^2-\rho_1^2}{\rho_0\rho_1}\frac{\Gamma}{2\pi V_1}\log R$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}+1\right)Z + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}-1\right)\sum_{n>1}\frac{\overline{b}_n Z^{n-1}}{(n-1)R^{2(n-1)}};$$

$$\frac{dF}{dZ} = \frac{i}{2}\rho_0 V_1^2\sum_{n>1}\frac{\overline{a}_n Z^{n-2}}{R^{2n-2}} + \frac{i}{2}\rho_0 V_1^2 + \frac{\rho_1 V_1 \Gamma}{2\pi Z}$$
$$+\frac{i}{2}\rho_0\frac{V_1^2 R^2}{Z^2} + \frac{i}{2}\rho_0 V_1^2\sum_{n>1}\frac{b_n}{Z^n}.$$

D'après (23_1) $\frac{F_x - iF_y}{2\pi i}$ est le coefficient de $\frac{1}{Z}$ dans $\frac{dF}{dZ}$; d'où

$$(27)\qquad F_x = 0, \qquad F_y = -\rho_1 V_1 \Gamma,$$

formules que le théorème de Joukowsky fournit d'ailleurs immédiatement. D'après (23_2), $-\frac{M}{2\pi}$ est la partie réelle du coefficient de $\frac{1}{Z}$ dans le produit $z\frac{dF}{dZ}$; donc

$$-\frac{M}{2\pi} = \mathcal{R}\left[-\frac{i}{2}\rho_0 V_1^2 a_2 + \frac{i}{2}\rho_0 V_1^2 b_2\right],$$

c'est-à-dire, puisque d'après (21), $a_2 + b_2$ est réel,

$$(28)\qquad M = -2\pi\rho_0 V_1^2 \mathcal{I}(a_2).$$

Remarque. — Si le fluide est *incompressible* ($\rho_0 = \rho_1 = \rho$), on retrouve la formule classique

$$(29)\quad M = -2\pi\rho V_1^2 \mathcal{I}(a_2), \qquad \text{où } a_2 \text{ est défini par la relation } z = Z - \frac{a_2}{Z} + \ldots$$

5. Écoulement incompressible de comparaison. — La fonction

$$(30)\quad z' = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}+1\right)\int\frac{df}{w} - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}-1\right)\frac{1}{V_1^2}\int w\,df$$
$$= Z - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}+1\right)\sum_{n>1}\frac{a_n}{(n-1)Z^{n-1}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}-1\right)\sum_{n>1}\frac{b_n}{(n-1)Z^{n-1}}$$

est une fonction uniforme de Z; les données sont telles qu'inversement Z est une fonction uniforme de z'. Considérons dans le plan z' un écoulement incompressible dont le potentiel complexe est $f(Z)$ au point $z'(Z)$; sa vitesse complexe $w'(Z)$ est donc fournie par la formule

$$\frac{1}{w'} = \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}+1\right)\frac{1}{w} - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}-1\right)\frac{1}{V_1^2}w. \tag{31}$$

Il est commode de comparer l'écoulement compressible que nous étudions à cet écoulement incompressible, dont nous supposerons la densité égale à ρ_1. Ces deux écoulements contournent deux obstacles qui diffèrent, mais ont même allure (profil d'aile ayant une pointe arrière où le courant quitte le profil); ces deux écoulements ont à l'infini, la même vitesse, de composantes $(V_1, 0)$; puisqu'ils ont même circulation Γ autour du profil, d'après le théorème de Joukowski, la résultante des forces qu'ils exercent sur le profil est la même; le moment par rapport à l'origine des forces que l'écoulement incompressible exerce sur le profil qu'il contourne est, d'après (29) et (30),

$$-2\pi\rho_1 V_1^2 \mathcal{I}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}+1\right)a_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}-1\right)b_2\right],$$

c'est-à-dire, puisque d'après (21) a_2+b_2 est réel,

$$-2\pi\rho_0 V_1^2 \mathcal{I}(a_2);$$

nous retrouvons l'expression (28); les moments aux points $z=0$ et $z'=0$, des forces que ces courants exercent sur ces profils sont donc les mêmes. Nous avons établi ainsi la proposition suivante :

Théorème. — *Soit un écoulement plan, incompressible, irrotationnel, permanent, contournant un profil d'aile et, à l'infini, uniforme. On peut en déduire par une transformation ponctuelle un écoulement plan, compressible, infrasonique, irrotationnel et permanent qui obéit à la loi approchée $p(\rho)$ de Tchapliguine; cet écoulement compressible contourne un profil d'aile sur lequel il exerce un système de forces équivalent au système de forces qu'exerce l'écoulement incompressible sur le profil qu'il contourne; ces deux écoulements ont à l'infini même densité ρ_1 et* *même vitesse, de composantes* $(V_1, 0)$; *soit* a_1 *la célérité du son dans le fluide compressible, quand sa densité est* ρ_1; $M_1 = \frac{V_1}{a_1}$ *est le nombre de Mach de l'écoulement compressible, à l'infini; la transformation ponctuelle qui transforme l'écoulement incompressible en l'écoulement compressible est la suivante : soient* (x', y') *et* (x, y) *deux points homologues des plans de ces écoulements; le potentiel complexe* $f = \varphi + i\psi$ *est le même en* (x', y') *et en* (x, y); *soit* $w' = u' - iv'$ *la vitesse complexe de l'écoulement incompressible; on définit une variable complexe* w *par la relation*

$$\frac{1}{w'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - M_1^2}} + 1\right)\frac{1}{w} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - M_1^2}} - 1\right)\frac{w}{V_1^2}, \tag{32}$$

en précisant que $w = V_1$ *quand* $w' = V_1$; *on a*

$$x = x' \tag{33$_1$}$$

et

$$y - y' = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - M_1^2}} - 1\right)\frac{1}{V_1^2}\,\mathcal{I}\int w\,df. \tag{33$_2$}$$

La vitesse de l'écoulement compressible fait l'angle $\theta = -\arg w$ *avec l'axe des* x; *la grandeur* V *de la vitesse de l'écoulement compressible et sa densité* ρ *sont données par les formules*

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - M_1^2}} + 1\right)\frac{1}{|w|} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - M_1^2}} - 1\right)\frac{|w|}{V_1^2}, \tag{34}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho V} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - M_1^2}\right)\frac{1}{|w|} + \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - M_1^2}\right)\frac{|w|}{V_1^2}. \tag{35}$$

6. Approximation permettant de simplifier la conclusion quand $M_1 \leq 0{,}6$. — Quand M_1 est nettement inférieur à 1 il est légitime de remplacer dans le second membre de (33_2), $\mathcal{I}\int w\,df$ par une valeur approchée simple. Calculons cette intégrale en confondant w avec la vitesse complexe $w' = u' - iv'$ de l'écoulement incompressible : le long du profil

$$df = \overline{df} = \overline{w'}\,\overline{dz'},$$

et, par suite, en désignant par $V' = |w'|$ la grandeur de la vitesse de l'écoulement incompressible, par p' sa pression et par p_1 sa pression à l'infini

$$\frac{1}{V_1^2}\mathcal{I}\int w'\,df = -\int \frac{V'^2}{V_1^2}\,dy' = -y' + \int \frac{V_1^2 - V'^2}{V_1^2}\,dy' = -y' + \int c'_p\,dy',$$

où

$$c'_p = \frac{V_1^2 - V'^2}{V_1^2} = \frac{2(p' - p_1)}{\rho_1 V_1^2},$$

désigne le coefficient de pression correspondant à l'écoulement incompressible ; on a donc sensiblement le long du profil

$$\frac{1}{V_1^2}\mathcal{I}\int w\,df = -y' + \int c'_p\,dy',$$

soit, ce qui simplifie (33),

$$\frac{1}{V_1^2}\mathcal{I}\int w\,df = -y + \int c_p\,dy.$$

Les formules (33) deviennent

$$(36) \qquad x' = x, \qquad y' = y + \left(\frac{1}{\sqrt{1 - M_1^2}} - 1\right)\int (1 - c_p)\,dy.$$

En résumé :

Règle approchée valable pour $M_1 \leqq 0{,}6$. — *Soit un écoulement compressible, ayant à l'infini le nombre de Mach* M_1 *et une vitesse* $\vec{V}_1$ *parallèle à l'axe des* x*; le système des forces de pression que cet écoulement compressible exerce sur un profil d'aile* P *équivaut au système de forces qu'exerce un écoulement incompressible, ayant à l'infini même vitesse et même densité, sur un profil* P′ *se déduisant de* P *par les formules* (36)*; dans ces formules* (x, y) *représente un point décrivant* P, (x', y') *point décrivant* P′, $c_p = \frac{2(p - p_1)}{\rho_1 V_1^2}$ *le coefficient de pression le long de* P *pour un écoulement incompressible parallèle à l'axe des* x, $\int c_p\,dy$ *une intégrale calculée le long de* P *d'un point fixe au point* (x, y) *envisagé.*

Remarque 1. — Pour que (36) transforme effectivement la courbe fermée P en une courbe fermée P′, il faut que $\oint c_p\,dy = 0$, $\oint$ représentant l'intégrale calculée le long de P tout entier ; il en est bien ainsi puisque, d'après le théorème de Joukowsky, la traînée est nulle.

Remarque 2. — La transformation (36) devient

$$x' = x, \qquad y' = \frac{y}{\sqrt{1 - M_1^2}},$$

c'est-à-dire la dilatation des ordonnées dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{1 - M_1^2}}$ qu'ont utilisée Glauert et Prandtl, quand on néglige dans (36) le terme $\int c_p\,dy$; mais ce terme n'est pas négligeable, puisque c_p n'est pas négligeable relativement à 1.