JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ROBERT MICHE

Sur la réduction à un principe variationnel du mouvement non lent des fluides visqueux

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 28 (1949), p. 151-179.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1949_9_28__151_0>

Sur la réduction à un principe variationnel du mouvement non lent des fluides visqueux (1);

Par Robert MICHE.

---

1. On connaît l'important théorème de Helmholtz, reliant à l'extrémum d'une expression intégrale les lois du mouvement *lent* et *permanent* d'un fluide visqueux incompressible.

On énonce ordinairement ce théorème sous la forme suivante :

De tous les mouvements lents, permanents ou non, d'un fluide visqueux incompressible prenant sur la frontière fermée du domaine D *envisagé des vitesses données et soumis à l'action de forces extérieures dérivant d'un potentiel uniforme, le mouvement permanent est celui qui correspond au* minimum *de l'énergie dissipée en chaleur dans le domaine* D *par unité de temps.*

D'autre part, on retrouve les équations du mouvement lent et permanent en annulant, conformément à l'existence de ce minimum, la première variation de l'intégrale exprimant l'énergie dissipée par unité de temps.

Le théorème de Helmholtz est intéressant à plus d'un titre. Tout d'abord, il étend aux régimes lents et permanents des fluides visqueux la méthode variationnelle qui permet, pour les systèmes à nombre fini de paramètres, mais à vrai dire de façon différente, de déduire par le principe de Hamilton les équations générales du mouvement. De plus,

---

(1) Il s'agit des mouvements les plus généraux à trois dimensions. Le cas particulier des mouvements parallèles à un plan fixe a déjà été traité par l'auteur dans la *Revue Générale de l'Hydraulique*, nos 41 et 42.

l'énergie dissipée par unité de temps étant représentée par une fonctionnelle essentiellement positive, les méthodes de Hilbert s'appliquent et le problème envisagé a au moins une solution, unique d'ailleurs si les conditions habituelles de régularité sont satisfaites.

Par contre, la limitation imposée à la nature des mouvements est sévère, car la plupart des écoulements envisagés dans l'hydraulique ne peuvent être assimilés à des mouvements lents ([1]). Aussi a-t-on cherché à étendre les raisonnements aboutissant au théorème de Helmholtz aux mouvements finis, sans succès semble-t-il jusqu'ici.

Les recherches les plus connues sur ce sujet sont celles de M. Ch. B. Millikan ([2]), qui procède comme suit :

La fonction soumise à variation sous le signe somme, dite habituellement fonction de Lagrange $\mathcal{L}$, étant l'élément inconnu à déterminer, il admet des mouvements *permanents* d'un fluide *incompressible* et essaie de constituer $\mathcal{L}$ uniquement avec les composantes de la vitesse et leurs dérivées premières d'espace, dans l'espoir d'obtenir immédiatement les équations du second ordre de Navier, comme les équations d'Euler correspondant à la valeur stationnaire de l'intégrale. Il montre alors que cela est impossible, sauf cas particuliers.

Cette méthode appelle l'observation suivante : l'auteur, fort judicieusement, ajoute à la fonction à déterminer $\mathcal{L}$ le produit d'un multiplicateur de Lagrange par la dilatation cubique θ, nulle pour un fluide incompressible; or, cette valeur nulle de θ n'est pas la seule condition à laquelle doivent satisfaire les quatre inconnues de base du problème, c'est-à-dire les fonctions de l'hydrodynamique, pression p et composantes u, v, w de la vitesse; il y en a trois autres, qui sont les équations de Navier ou, plus exactement, les expressions nulles qu'on

([1]) Les équations linéaires de Stokes correspondant aux régimes lents se déduisent des équations générales de Navier par la suppression des termes rectangles tels que $\frac{u\,\partial u}{\partial x}$, etc. Ces termes représentent, pour parties, les dérivées d'espace du carré de la vitesse. Or, par exemple, le carré de la vitesse joue un rôle important dans la formule de Bernoulli et sa suppression est très souvent inadmissible.

([2]) *Phil. Mag.*, 1929. Ces recherches sont reproduites dans l'important Traité de M. H. Villat, *Leçons sur les fluides visqueux*.

en déduit en faisant passer tous les termes de chacune de ces équations dans le même membre et il n'y a, *a priori*, aucune raison de ne pas introduire également, à titre additif, ces trois expressions dans la fonction de Lagrange en les affectant de multiplicateurs convenables ([1]).

Le problème d'extrémum cherché comportera, dans ces conditions :

1° les *quatre* équations d'Euler, correspondant aux quatre fonctions inconnues énumérées plus haut;

2° les *quatre* équations de l'hydrodynamique, soit l'équation de continuité et les trois équations de Navier, qui devront également être satisfaites, puisque les équations d'Euler doivent, par hypothèse, leur être équivalentes.

([1]) Dans le calcul des variations, l'emploi de *multiplicateurs*, c'est-à-dire d'expressions ne dépendant, au titre variationnel, que des variables du problème et non des fonctions soumises à variation et, comme telles, *distraites de cette variation* est classique; il faut toutefois bien préciser leur rôle, car ils peuvent être utilisés à deux fins dont la première n'est pas à l'abri de toute critique.

En premier lieu, on emploie des multiplicateurs pour résoudre, sous une forme ordinairement implicite, le problème de l'élimination de fonctions surnuméraires. Chaque équation de condition restreignant le nombre des fonctions indépendantes étant représentée par une certaine expression égalée à zéro, son produit par un multiplicateur est introduit à titre additif dans la fonction de Lagrange pour laquelle on écrit les équations d'Euler correspondant à la valeur stationnaire. Cette méthode, rigoureuse lorsque les équations de condition s'expriment sous forme finie, reste seulement probablement exacte, si ces dernières comportent des dérivées *partielles*. La difficulté théorique à laquelle on se heurte provient notamment de l'utilisation d'un champ variationnel *spécial*, puisque devant satisfaire, *a priori*, aux équations de condition. Il y a *extrémum lié*.

En second lieu, on peut, et on l'a fait à plusieurs reprises, utiliser des multiplicateurs, sans souci d'élimination, pour introduire dans la fonction de Lagrange des paramètres variables supplémentaires en nombre suffisant pour permettre de l'adapter au problème particulier envisagé. Dans ce cas, on ajoute à la fonction de Lagrange primitive les produits, par les multiplicateurs correspondants, de certaines expressions fonctionnelles portant sur les fonctions soumises à variation. Le champ variationnel reste dans ces conditions absolument général et l'établissement des équations d'Euler ne se heurte à aucune difficulté d'ordre théorique C'est sous cette seconde forme que nous utiliserons les multiplicateurs. Toutefois, il résulte de la présente étude que, dans notre cas notamment, le procédé, pour être pleinement efficace, c'est-à-dire pour amener à des solutions *explicites*, Ces *huit* équations dépendront de *neuf* fonctions inconnues, soit les *quatre* fonctions de l'hydrodynamique, les *quatre* multiplicateurs et la fonction de Lagrange $\mathcal{L}$. Ce système d'équations est donc, en général, *indéterminé* et possédera, *a priori*, une infinité de solutions, *la fonction $\mathcal{L}$ pouvant*, par exemple, *être choisie arbitrairement*.

Cependant, sous cette forme, la solution théoriquement trouvée n'est aucunement satisfaisante pour le problème qui nous occupe. En général, les multiplicateurs ainsi déterminés le seront uniquement à titre implicite par leurs équations de définition, alors qu'on escompte au contraire du procédé obtenir, avec les équations d'Euler, les équations de l'hydrodynamique elles-mêmes ou, du moins, d'autres s'en déduisant directement, par dérivation par exemple.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut que $\mathcal{L}$ soit une certaine forme *explicite* des fonctions inconnues p, u, v et w et de leurs dérivées, puis les multiplicateurs, tous calculs faits, des solutions également *explicites* de ces mêmes inconnues et ces nouvelles conditions sont d'une nature complexe. Malgré l'indétermination constatée plus haut, il n'est alors nullement certain que le problème, envisagé sous cet angle, ait une solution, d'autant qu'il faudrait aussi chercher à limiter le plus possible la généralité de $\mathcal{L}$ (forme finie et dérivées d'ordres finis et alors ordre maximum le plus petit possible). En tout cas, l'exposé ci-dessus montre bien la nécessité d'introduire plusieurs multiplicateurs et non un seul (1).

---

requiert la spécialisation suivante des fonctionnelles additionnelles : elles doivent s'annuler lorsque l'extrémum cherché est réalisé; autrement dit, il y a lieu de les prendre proportionnelles, par exemple, aux membres égalés à zéro des équations différentielles définissant le problème dont on cherche la solution par voie variationnelle. Cependant, même dans ce cas, il s'agit toujours d'un problème d'*extrémum libre*. Le champ variationnel n'admet pas de restriction et ne satisfait donc pas, en général, à ces équations différentielles qui sont obtenues seulement, *a postériori*, sous la forme d'équations extrémales d'Euler. C'est d'ailleurs en l'espèce la seule position logique, puisque ces équations différentielles ne font pas partie des *données* du problème envisagé mais en constituent, au contraire, le *but*.

(1) Il en faut au moins trois pour que le problème comportant alors huit équations et huit inconnues reste *a priori* possible, mais la suppression,

Considéré sous l'aspect beaucoup plus utile de l'obtention de résultats explicites, le problème envisagé a effectivement une solution, nous le démontrons plus loin, mais en évitant de le traiter sous cette forme dissymétrique et en réduisant alors, sans diminuer la généralité, le nombre des multiplicateurs à trois (deux suffiraient à la rigueur, mais il est indiqué d'en laisser subsister trois pour conserver la symétrie). Même pour ce cas simplifié, la détermination directe de la fonction de Lagrange poserait un problème difficile; son choix résultera d'un raisonnement intuitif vérifié *a posteriori*.

Si maintenant les mouvements considérés ne sont *pas permanents*, il s'introduit (dans le cas général dissymétrique) *trois* nouvelles conditions d'extrémum ([1]). Non seulement *il n'y a plus indétermination*, mais le problème apparaît au contraire impossible, sauf exception, car il comporte 11 équations de condition pour 9 inconnues seulement ([2]). Cependant, pour un choix approprié de $\mathcal{L}$, on se trouve non seulement dans ce cas d'exception, mais, en outre, les multiplicateurs et, par conséquent, les équations d'Euler, peuvent être entièrement explicitées. De plus, ces conditions surnuméraires, beaucoup plus simples, jouent un rôle déterminant dans la recherche des multiplicateurs. De ce point de vue, la généralisation au cas des régimes non permanents, non seulement n'apparaît pas comme une complication mais, au contraire, comme un facteur de réussite, y compris pour les mouvements permanents, cas particulier des précédents. L'aide ainsi apportée n'est pas, au surplus, le fait essentiel qu'il faut chercher dans la suppression de l'indétermination, beaucoup plus satisfaisante pour l'esprit; on est donc dans la bonne voie en essayant de résoudre en premier lieu le cas général des régimes non permanents.

---

assez arbitraire, d'un des quatre multiplicateurs diminuerait singulièrement la probabilité d'obtention de solutions explicites.

([1]) La quatrième, afférente à la pression, est vérifiée identiquement, car la pression, dans les équations de l'hydrodynamique, ne comporte pas de dérivée prise par rapport au temps.

([2]) La surabondance des conditions subsiste en traitant le problème sous forme symétrique. Par contre, dans ce cas, pour les mouvements parallèles à un plan fixe, on obtient trois équations de condition pour trois inconnues. Toutefois, même dans ce cas particulier, l'indétermination disparaît, c'est l'essentiel.

En résumé, il est toujours possible, pour tous les monvements non lents, permanents ou non (et naturellement aussi pour les mouvements lents) des fluides visqueux incompressibles, de déterminer une fonction de Lagrange telle que les équations d'Euler correspondant à l'extrémum soient explicitement équivalentes aux équations de l'hydrodynamique. Cette fonction de Lagrange, quoique plus générale, est apparentée à celle figurant dans le théorème de Helmholtz valable pour les mouvements lents permanents.

Ces recherches, dont les applications paraissent assez nombreuses (1), sont intéressantes par les généralisations du théorème de Helmholtz qu'elles comportent; elles démontrent également l'existence d'une identité générale pour les fluides visqueux et faisant intervenir le flux de l'écoulement, mais dont la signification physique exacte reste à préciser.

Il y a lieu enfin de noter que, dans le cas général, l'*extrémum* réalisé *n'est pas un minimum* comme dans le cas particulier du théorème de Helmholtz.

2. Le problème sera simplifié si les inconnues et les relations auxquelles elles sont soumises satisfont à des conditions de symétrie, car on pourra passer de l'une à l'autre par simple permutation cyclique. Ceci revient à éliminer la pression, d'une part, la condition d'incompressibilité, d'autre part.

Pour abréger l'exposé, nous utiliserons dorénavant des notations symétriques empruntées au calcul tensoriel.

Nous écrirons, pour les trois composantes u, v, w du vecteur *vitesse*

$$u^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3), \tag{1}$$

et pour les trois composantes ζ^i du *tourbillon* ou *rotationnel* (2)

$$2\zeta^i = -(u^j_k - u^k_j), \tag{2}$$

(1) La méthode employée par la détermination de $\mathcal{L}$ est, au moins en principe, utilisable pour tous les milieux continus.

(2) En se plaçant au point de vue du calcul tensoriel, ζ^i devrait être assimilé non à un vecteur, mais à un tenseur antisymétrique du second ordre; toutefois la notation choisie est plus simple et suffisante. La même remarque joue pour

i, j, k correspondant à trois indices successifs en permutation circulaire, i prenant les trois valeurs 1, 2 et 3. Les indices inférieurs appliqués aux composantes de la vitesse représentent les dérivées partielles d'espace prises par rapport à la *variable* correspondante

$$x_\alpha \quad (x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z). \tag{3}$$

D'une manière générale, les *indices supérieurs* (sauf s'ils s'appliquent à des expressions entre parenthèses ou si aucune confusion n'est possible) se rapporteront à des notations d'*espèce* et non à des exposants, le ou les *indices inférieurs* (sauf et pour se conformer à l'usage pour les variables x_α) aux *dérivées d'espace* correspondantes, ou, si cet indice est un t, à une *dérivée* prise *par rapport au temps*.

Si des indices α, β, γ, ... sont répétés deux fois dans un même terme, il faudra sommer par rapport à l'indice répété (convention des indices muets; exemple : $\theta = u^\beta_\beta = u^1_1 + u^2_2 + u^3_3$). Par contre, les indices i, j, k représenteront toujours des permutations cycliques et, s'ils sont répétés, ne devront pas être sommés, sauf mention expresse.

5. Pour éliminer la pression p (¹) et, par la même occasion, le

---

la vitesse définie plus loin en fonction du vecteur ψ^α. D'une façon générale, nous ne ferons pas appel aux règles du calcul tensoriel, mais utiliserons uniquement ses notations symétriques et la convention des indices muets, mais sans nous préoccuper de la position des indices. Ainsi, nous écrirons le carré de la vitesse

$$(\mathrm{W})^2 = u^\alpha u^\alpha = (u)^2 + (v)^2 + (w)^2,$$

alors que la notation tensorielle serait, pour des indices supérieurs (contravariants) du vecteur vitesse $g_{\alpha\beta}\, u^\alpha u^\beta$, $g_{\alpha\beta}$ étant le tenseur fondamental

$$g_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \alpha = \beta, \\ 0 & \text{si} \quad \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Tous les calculs qui suivent peuvent, naturellement, être conduits en faisant usage de ces règles, mais ils deviennent alors très abstraits, sans être plus simples pour autant.

(¹) Dans le cas des fluides visqueux, on désigne souvent p sous les noms de pression hydrodynamique, ou pression moyenne, mais il n'y a aucune ambiguïté à l'appeler pression, étant entendu qu'on se réfère, pour sa définition, aux équations fondamentales (4) et (5).

potentiel des forces extérieures, nous ne partirons pas des équations habituelles de Navier

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = u^i_t + u^\beta u^i_\beta - \nu\,\Delta u^i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

mais de leur autre forme bien connue

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = u^i_t + \frac{1}{2}\frac{\partial (W)^2}{\partial x_i} + 2(\zeta^j u^k - \zeta^k u^j) - \nu\,\Delta u^i. \tag{4}$$

$$P = U - \frac{p}{\rho}, \tag{5}$$

où U est le potentiel des forces extérieures, supposé existant et uniforme et dépendant, en général, du temps t.

ρ est la densité;

$(W)^2$ le carré de la vitesse;

μ le coefficient de viscosité de Poiseuille, lié au coefficient de viscosité cinématique ν par la relation $\mu = \rho\nu$.

Il est bien connu, d'après le calcul vectoriel ou tensoriel, que la divergence ζ^α_α du rotationnel ζ^α est identiquement nulle. Autrement dit, on a l'identité suivante dont la vérification est, au surplus, immédiate puisque l'ordre des dérivations est indifférent.

$$2\zeta^\alpha_\alpha = - u^j_{ki} + u^k_{ji} - u^k_{ij} + u^i_{kj} - u^i_{jk} + u^j_{ik} \equiv 0, \tag{6}$$

tandis que

$$\theta = u^\alpha_\alpha = 0, \tag{7}$$

par hypothèse (équation de continuité d'un fluide incompressible).

Pour éliminer p ou, plus généralement, la fonction P, on pose

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_i\,\partial x_j} - \frac{\partial^2 P}{\partial x_j\,\partial x_i} \equiv 0, \tag{8}$$

en substituant à P les valeurs tirées des formules (4).

Il vient, en tenant compte des relations (6) et (7):

$$\begin{aligned}
&(u^i_j - u^j_i)_t + 2(\zeta^j u^k - \zeta^k u^j)_j - 2(\zeta^k u^i - \zeta^i u^k)_i - \nu\,\Delta(u^i_j - u^j_i) \\
&\quad = - 2\zeta^k_t + 2u^k(\zeta^j_j + \zeta^i_i) - 2\zeta^k(u^j_j + u^i_i) + 2\zeta^j u^k_j + 2\zeta^i u^k_i \\
&\quad\quad - 2\zeta^k_j u^j - 2\zeta^k_i u^i + 2\nu\,\Delta\zeta^k = - 2\zeta^k_t + 2\zeta^\beta u^k_\beta - 2\zeta^k_\beta u^\beta + 2\nu\,\Delta\zeta^k = G^k = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

En permutant k, on obtient, pour les trois fonctions inconnues u^α, trois équations (9) dont deux seulement sont distinctes. Ces équations $G^k = 0$ sont essentiellement équivalentes aux équations de Navier [1]. Leur solution étant supposée connue, on peut, en effet, par intégration des trois équations (4), déterminer P (à une fonction de t près); cette intégration se ramène à des quadratures, puisque les équations (8) et (9) expriment les conditions de compatibilité des dérivées partielles d'espace de P constituant le premier membre des équations (4).

Si les mouvements sont *irrotationnels* ($\zeta^\alpha = 0$), les équations (9) sont identiquement nulles. Dans ce cas particulier, exceptionnel pour les fluides visqueux, les vitesses, on le sait, dérivent d'un potentiel et l'intégrale des équations (4) peut être explicitée en fonction de ce potentiel. Comme, en outre, le fluide est incompressible, le potentiel est harmonique et *tous les termes de viscosité des équations* (4) *disparaissent*. Le fluide visqueux se comporte, quant aux vitesses, comme un fluide parfait et l'intégrale précitée se réduit à la formule de Bernoulli.

4. L'équation de continuité (7) devient superflue si l'on exprime les composantes de la vitesse en fonction des composantes ψ^α d'un nouveau vecteur généralisant la notion de fonction de courant ψ applicable aux mouvements parallèles à un plan fixe.

Le calcul vectoriel suggère immédiatement de considérer la vitesse comme le « rotationnel » du vecteur ψ^α, c'est-à-dire de poser

$$u^i = -(\psi^j_k - \psi^k_j), \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{10}$$

relations qui satisfont *identiquement* à la condition d'incompressibilité (7). Le calcul est entièrement analogue à celui fait plus haut, formule (6).

Les u^α étant supposés donnés, il y a une infinité de solutions possibles pour les fonctions ψ^α dont, en réalité, deux sont distinctes; la troisième pourrait, par exemple, être égalée à zéro, mais il y a intérêt, comme ci-dessus pour les équations (9), à maintenir la symétrie.

---

(1) Elles postulent toutefois l'existence de dérivées spatiales de p et u^α d'un ordre supérieur d'une unité à ceux figurant dans les équations de Navier.

En fonction des ψ^α, les composantes du tourbillon s'écrivent :

$$(11) \qquad 2\zeta^i = \psi^k_{ik} - \psi^i_{kk} - \psi^i_{jj} + \psi^j_{ij} = -\Delta\psi^i + \psi^\alpha_{\alpha i}.$$

On a ainsi ramené le problème à une forme entièrement symétrique. La fonction de Lagrange $\mathcal{L}$ à déterminer comprendra, en outre, à titre additif, la somme $\lambda^\alpha G^\alpha$ prenant en compte les trois équations subsistantes (9) définissant le mouvement, les λ^α étant les trois composantes d'un *multiplicateur* de Lagrange *vectoriel*. On appellera fonction de Lagrange *complète* la fonction $\mathcal{L}$ ainsi complétée en désignant, quand il en sera besoin, l'autre comme *incomplète*.

$$(12) \qquad \mathcal{L} + \lambda^\alpha G^\alpha$$

sera une fonction *symétrique* des *six* fonctions ψ^α et λ^α et des dérivées des trois premières jusqu'à un certain ordre.

5. Soit maintenant la fonctionnelle

$$(13) \qquad \Phi = \iiint_D \mathcal{L}(\psi^\alpha)\, d\tau, \qquad \text{où} \quad d\tau = dx\, dy\, dz,$$

dont il s'agit de déterminer l'extrémum pour un certain domaine fluide D fixe et borné. $\mathcal{L}$ est une expression composée des fonctions ψ^α et de leurs dérivées d'espace, disons jusqu'à l'ordre n, les ψ^α étant, *provisoirement*, supposés indépendants du temps. $\mathcal{L}$ peut, en outre, être fonction explicite des variables et comporter des multiplicateurs λ^α. Pour déterminer l'extrémum, on considère, comme d'habitude, l'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions *voisines* des fonctions ψ^α, disons d'abord de l'une d'entre elles ψ^i, soit

$$(14) \qquad \psi^i + \varepsilon^i f^i,$$

et développe $\mathcal{L}$ en série de puissances du nombre petit ε^i. Les termes en ε^i constituent la première variation relative à ψ^i, ceux en $(\varepsilon^i)^2$, la seconde, etc., et la fonctionnelle (13) sera extrémum, c'est-à-dire stationnaire en ψ^i quand la première variation correspondante sera nulle.

En admettant la forme du domaine D assez régulière d'une part, les fonctions ψ^α, λ^α et f^α et leurs dérivées jusqu'à l'ordre n bornées et continues dans le domaine et sur sa frontière d'autre part, ceci en vue de pouvoir appliquer aux termes de la première variation la formule de Green un nombre suffisant de fois successivement (on appellera pour simplifier dans ce cas les fonctions envisagées *régulières*), la première variation prend la forme

$$\varepsilon^i \iiint_D f^i \mathrm{E}^i(\mathcal{L})\, d\tau, \tag{15}$$

pourvu que la fonction f^i et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $(n-1)$ s'annulent à la frontière. f^i étant, sinon, *arbitraire* à l'intérieur de D, sous réserve des conditions de régularité, il s'ensuit d'après le premier lemme du calcul des variations la condition nécessaire d'extrémum

$$\mathrm{E}^i(\mathcal{L}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^i} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^i_\alpha} + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^i_{\alpha\beta}} - \ldots = 0, \tag{16}$$

si l'expression (15) doit être nulle.

i prenant les valeurs 1, 2, 3, on obtient ainsi *trois* équations différentielles partielles, d'ordre $2n$ en général, dites *équations d'Euler* et valables en tous points intérieurs du domaine D *comme conditions nécessaires de l'extrémum dans le cas des mouvements permanents.*

Ces conditions nécessaires subsistent quelles que soient les valeurs à la frontière des fonctions ψ^α, pourvu qu'elles soient régulières.

Si maintenant *les mouvements ne sont pas permanents*, les ψ^α dépendront de t et, en outre, on le verra plus loin, la fonction de Lagrange comportera des dérivées partielles par rapport au temps, mais du premier ordre seulement, des fonctions ψ^α et de leurs dérivées d'espace. On admettra également ces dérivées prises par rapport à t bornées et continues.

Avec ces nouvelles hypothèses, le développement en puissances de ε^i fournira de nouveaux termes qui, pour la première variation et après une application répétée de la formule de Green, se mettront sous la forme

$$\varepsilon^i \iiint_D f^i_t \mathrm{E}^{it}(\mathcal{L})\, d\tau, \tag{17}$$

f^i_t étant, rappelons-le, la dérivée de f^i par rapport au temps.

Cette fonction f^i_t, sous réserve des conditions de régularité, pouvant être choisie arbitrairement à l'intérieur de D et, en général, indépendamment de f^i, l'extrémum exige les *trois* nouvelles conditions

$$E^{it}(\mathcal{L}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^i_t} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^i_{\alpha t}} + \ldots = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{18}$$

Les équations (18) sont aussi des équations d'Euler; pour les différencier des équations (16), nous appellerons ces dernières, si besoin est, équations d'Euler proprement dites.

En résumé, le problème de l'extrémum se présente comme suit en le traitant sous forme symétrique : Si le mouvement est *permanent*, la valeur stationnaire, pour *sept* fonctions inconnues ψ^α, λ^α et $\mathcal{L}$, correspond à *six* conditions, soit les trois équations de l'hydrodynamique (9) et les trois équations d'Euler (16). Il y a indétermination. Si le mouvement n'est *pas permanent*, il s'introduit *trois* équations supplémentaires (18). L'indétermination disparaît et certaines conditions de compatibilité doivent être vérifiées pour les deux conditions surnuméraires si le problème doit avoir une solution. Il en sera bien ainsi avec un choix approprié de $\mathcal{L}$.

6. Comme on ne peut guère escompter déterminer la forme de la fonction inconnue $\mathcal{L}$ en résolvant directement les systèmes d'équations (9), (16) et (18), on procédera par vérification.

Le raisonnement synthétique suivant permet tout d'abord de former la fonction de Lagrange cherchée; en ce qu'il a de général, le procédé vaut pour des fluides visqueux quelconques, mais nous n'expliciterons ici les calculs que pour les fluides incompressibles.

Il s'agit, en somme, de construire une expression devant être intégrée sur le domaine fluide envisagé, ayant le caractère d'une grandeur non dirigée (scalaire) et qui, *par essence*, reste stationnaire lorsqu'elle est soumise à variation.

Or il existe une expression de cette nature qui reste *nulle*, donc stationnaire, lorsque le champ variationnel est constitué par l'ensemble $\mathcal{E}''$ des fonctions correspondant à tous les mouvements *réels* voisins du mouvement considéré : *c'est l'accroissement, dans l'unité de temps, de l'énergie totale du système, déduction faite des apports d'énergie du milieu ambiant.*

La mécanique des milieux continus n'étant que la généralisation de celle des systèmes à nombre fini de paramètres, l'énergie totale, après déduction des apports extérieurs, *se conserve* pour un mouvement déterminé. Son accroissement par unité de temps, est donc nul *pour n'importe quel mouvement réel.*

L'équation générale du bilan d'énergie (1) pour un fluide visqueux inclus, à l'instant considéré, dans le domaine fermé D, s'écrit :

$$B = C + I + Q - \mathfrak{T} - \mathfrak{T}_1 = 0,$$

où les divers apports d'énergie, par unité de temps, sont :

C, l'accroissement d'énergie cinétique;

I, l'accroissement d'énergie intrinsèque due à la compression du fluide et nulle pour un fluide incompressible;

Q, la production d'énergie calorifique dégagée par le travail des forces de viscosité;

$\mathfrak{T}$, le travail des forces extérieures appliquées aux particules;

$\mathfrak{T}_1$, le travail dû aux actions de contact le long de la surface délimitant le domaine.

Les trois premiers apports concernent *l'énergie interne totale,* les deux derniers, venant en déduction, les *échanges d'énergie* entre le système et le milieu ambiant.

Comme nous avons admis les forces extérieures dépendant d'un potentiel U, l'élément différentiel apparaissant dans l'expression

$$\begin{aligned}\mathfrak{T} &= \iiint_D \rho \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \frac{dx_\alpha}{dt} \, dx \, dy \, dz = \iiint \rho \, U_\alpha u^\alpha \, d\tau \\ &= -\iiint \rho \sum^3 U_i (\psi^j_k - \psi^k_j) \, d\tau = -\rho \iiint \sum^3 \left[\frac{\partial (U \psi^j_k)}{\partial x_i} - \frac{\partial (U \psi^k_j)}{\partial x_i} \right] d\tau\end{aligned}$$

est une *divergence*, c'est-à-dire une somme de dérivées partielles d'espace. On sait que les équations d'Euler correspondant à une divergence sont *identiquement nulles.* On peut donc, dans ce qui suit, faire abstraction du terme $\mathfrak{T}$ exprimant l'énergie potentielle et, générale-

(1) *Voir*, notamment, *Leçons sur les fluides visqueux*, p. 66 et suivantes.

ment, de tous les termes portant sur des *intégrales de surface*, car elles se transforment par la formule de Green en intégrales de volume dont l'élément différentiel est une divergence. C'est le cas notamment pour $\mathfrak{T}_1$.

Les apports énergétiques à soumettre au processus variationnel se ramènent donc uniquement.

a. à l'accroissement d'énergie cinétique ([1])

$$C = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho}{2}\iiint u^\alpha u^\alpha\, d\tau = \iiint \rho\, u^\alpha u_t^\alpha\, d\tau = \iiint T\, d\tau; \tag{19}$$

b. à la production d'énergie calorifique due aux résistances passives, c'est-à-dire à l'intégrale étendue au domaine D de la fonction de dissipation 2Ψ portant sur une somme de carrés du tenseur de déformation

$$2\,a^{ij} = u_j^i + u_i^j, \tag{20}$$

soit :

$$Q = \mu \iiint \sum^3 \left[2(u_i^i)^2 + (u_k^j + u_j^k)^2\right] d\tau = \iiint 2\Psi\, d\tau; \tag{21}$$

c. On peut y ajouter l'expression

$$\iiint \lambda^\alpha G^\alpha\, d\tau,$$

puisqu'elle reste *identiquement nulle* pour tous les mouvements *réels* pour lesquels $G^\alpha = 0$ ([2]).

([1]) Cet accroissement de force vive se rapportant aux mêmes particules fluides, la dérivée à prendre en compte devrait être celle suivant la particule dans son mouvement et non celle relative à un point de coordonnées fixes; autrement dit, il faudrait écrire $\frac{d}{dt}$ et non $\frac{\partial}{\partial t}$, mais il est aisé de vérifier et physiquement évident que la différence de ces deux expressions intégrales étendues au domaine, D ne peut jouer qu'à la frontière du domaine, c'est-à-dire sous forme d'intégrale de surface, à négliger pour la raison exposée.

([2]) On aperçoit maintenant la raison pour laquelle les fonctionnelles additives comportant des multiplicateurs doivent s'annuler lorsque l'extrémum cherché est réalisé. Dans ce cas seulement, le principe de la conservation de l'énergie reste utilisable.

On obtient ainsi *la valeur apparemment la plus générale*

$$\mathcal{L} + \lambda^{\alpha} G^{\alpha} = T + 2\Psi^{r} + \lambda^{\alpha} G^{\alpha} \tag{22}$$

de la fonction de Lagrange (complète) qu'on peut déduire du principe de la conservation de l'énergie et qui, par essence, reste *stationnaire* lorsque le champ variationnel comprend l'ensemble $\mathcal{E}''$ des mouvements réels voisins du mouvement considéré et par extension, de l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les mouvements voisins ([1]).

On peut alors présumer et nous allons vérifier que les équations

---

([1]) Pour être en droit d'énoncer cette conclusion, deux points restent à justifier. On pourrait d'ailleurs s'éviter ce soin puisqu'un calcul de vérification de la fonction de Lagrange trouvée est de toutes façons nécessaire, notamment pour fixer la valeur des multiplicateurs λ^{α}.

Quoi qu'il en soit, voici les deux points en question et la façon, très sommairement exposée, de lever les objections qui se présentent :

1° Si on limite au seul ensemble des mouvements réels le champ variationnel, il n'est pas certain qu'il existe des fonctions voisines telles qu'elles-mêmes et leurs dérivées des ordres requis s'annulent à la frontière du domaine, c'est même certainement impossible pour des mouvements permanents. La première variation comporte alors, outre une expression telle que (15) ou (17), des termes complémentaires sous forme d'intégrales de surface portant sur les valeurs frontières de f^i et de ses dérivées. La variation totale devant être nulle, il n'en résulte plus, *a priori*, que l'expression (15), par exemple, soit nulle elle-même. En fait, il en est bien ainsi, car il suffit pour cela, d'imposer que la somme des intégrales de surface soit nulle pour chaque fonction voisine considérée. Ce faisant, on ne restreint pratiquement pas l'ensemble $\mathcal{E}''$ des mouvements réels, car cette condition est du même ordre, par exemple, que celle fixant la valeur de la fonction voisine en *un* point du domaine D. Ordinairement même, l'ensemble $\mathcal{E}''$ restera rigoureusement équivalent, puisque les fonctions de courant ψ^i ne sont définies, en tout cas, qu'à une constante près et un choix particulier d'une de ces constantes suffira, sauf cas exceptionnel pour rendre nulle la somme des intégrales de surface. Par la même occasion on fera, naturellement, disparaître les autres intégrales de surface ou les divergences transformables en intégrales de surface déjà négligées précédemment par anticipation.

2° La première variation (15), par exemple, étant nulle, il n'est pas certain, *a priori*, qu'on en déduise l'équation d'Euler (16), puisque le terme multiplicatif f^i *n'est plus arbitraire*. Ce sera certainement vrai toutefois, pour des raisons de continuité, si le domaine D est choisi assez petit. Or, la méthode d'Euler correspondant à cet extrémum, déduites directement du principe de conservation de l'énergie, représenteront *explicitement* les équations du mouvement.

On observera, en outre, que pour les régimes permanents (pour lesquels $T = 0$) et en faisant abstraction des termes avec multiplicateurs $\lambda^\alpha G^\alpha$, la fonction de Lagrange trouvée (22) se ramène à celle $\mathcal{L} = 2\Psi$ du théorème de Helmholtz applicable aux mouvements lents.

7. Nous allons maintenant vérifier que la fonction de Lagrange trouvée répond au problème cherché. En vue de déterminer la valeur des multiplicateurs λ^α, nous appliquerons tout d'abord à cette fonction de Lagrange complète (22) les équations (18), beaucoup plus simples que les équations proprement dites d'Euler (16). Seuls les termes comportant une dérivée par rapport à t peuvent fournir une contribution; ainsi $E^{it}(2\Psi) \equiv 0$. De plus, quoiqu'il y ait (dans G^α) des termes utiles du second ordre par rapport aux dérivées d'espace de ψ^α, les équations (18) ne sont pas du 4ᵉ ordre, mais du 2ᵉ seulement, car ces termes apparaissent sous forme linéaire par rapport aux dérivées de ψ^α.

Il vient ainsi, pour l'équation E^{3t} par exemple, et en tenant compte des équations (2), (9), (10), (11), (19) et (21) qui fixent la forme

---

variationnelle a comme but la recherche d'expressions fonctionnelles et n'impose nullement une limite inférieure pour D.

En résumé :

a. On déduit du principe de la conservation de l'énergie, en considérant le champ variationnel spécial $\mathcal{E}''$ relatif aux mouvements réels, l'existence de deux groupes de trois équations d'Euler afférentes à la fonction de Lagrange complète (22). Après élimination des trois multiplicateurs λ^α, il subsiste trois relations possédant, par conséquent, un caractère vectoriel et qui ne peuvent être que les trois équations du mouvement, sous une forme ou une autre.

b. On obtient les mêmes groupes d'équations d'Euler en calculant, selon la méthode courante, l'extrémum afférent à la même fonction (22) pour le champ variationnel général $\mathcal{E}$.

Il est donc légitime, dans le cas considéré, d'étendre au champ général $\mathcal{E}$ les résultats obtenus avec le champ spécial $\mathcal{E}''$.

sous laquelle s'introduisent les fonctions de courant ψ^α dans la fonction de Lagrange complète :

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &E^{3t}(\mathcal{L}) = E^{3t}(T) = -\rho\frac{\partial}{\partial x}(\psi_1^3 - \psi_3^1) \\ &\qquad + \rho\frac{\partial}{\partial y}(\psi_3^2 - \psi_2^3) = \rho(-\Delta\psi^3 + \psi_{\alpha 3}^\alpha) = 2\rho\zeta^3, \\ &E^{3t}(\lambda^\alpha G^\alpha) = E^{3t}(-2\lambda^\alpha\zeta_t^\alpha) \\ &\qquad = E^{3t}(-\lambda^1\psi_{13t}^3 - \lambda^2\psi_{23t}^3 + \lambda^3\psi_{11t}^3 + \lambda^3\psi_{22t}^3) = \Delta\lambda^3 - \lambda_{\alpha 3}^\alpha. \end{aligned}\right.$$

On en déduit en rétablissant l'indice général i

$$(24)\qquad E^{it}(\mathcal{L} + \lambda^\alpha G^\alpha) = \rho(-\Delta\psi^i + \psi_{\alpha i}^\alpha) - (-\Delta\lambda^i + \lambda_{\alpha i}^\alpha) = 0.$$

Une solution de ce système est évidemment

$$(25)\qquad \lambda^i = \rho\psi^i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Passons maintenant aux équations (16) en continuant, pour fixer les idées, à expliciter l'indice 3 et en tenant compte, en fin de calcul, des relations (25). Au lieu d'être du 8^e^ ordre, ces équations se ramènent au 4^e^, car les dérivées d'ordre le plus élevé en ψ^α, soit le quatrième, apparaissent également sous forme linéaire.

On a tout d'abord

$$(26)\quad E^3(T) = \rho[-(\psi_1^3 - \psi_3^1)_{1t} + (\psi_3^2 - \psi_2^3)_{2t}] = \rho[-\Delta\psi^3 + \psi_{\alpha 3}^\alpha]_t = 2\rho\zeta_t^3,$$

puis

$$(27)\qquad E^3(2\Psi) = 2\mu[\Delta\Delta\psi^3 - \Delta\psi_{\alpha 3}^\alpha] = -4\rho\nu\,\Delta\zeta^3.$$

Quant aux termes de l'équation d'Euler proprement dite afférents à $\lambda^\alpha G^\alpha$, il vient en premier lieu $E^3(-2\lambda^\alpha\zeta_t^\alpha) \equiv 0$ et ensuite

$$(28)\quad \begin{aligned} E^3(2\nu\lambda^\alpha\,\Delta\zeta^\alpha) &= E^3(\nu\lambda^\alpha\,\Delta\psi_{3\alpha}^3 - \nu\lambda^3\,\Delta\Delta\psi^3) \\ &= \nu\,\Delta\lambda_{\alpha 3}^\alpha - \nu\,\Delta\Delta\lambda^3 = \rho\nu[-\Delta\psi^3 + \psi_{\alpha 3}^\alpha] = 2\rho\nu\,\Delta\zeta^3. \end{aligned}$$

Le calcul pour les autres termes de $\lambda^\alpha G^\alpha$, quadratiques en ψ^α et ses dérivées, est plus long mais sans difficulté réelle.

On a

$$\begin{aligned} E^3(2\lambda^\alpha\zeta^\beta u_\beta^\alpha - 2\lambda^\alpha\zeta_\beta^\alpha u^\beta) &= -2\frac{\partial(\lambda^\alpha\zeta_2^\alpha)}{\partial x} + 2\frac{\partial(\lambda^\alpha\zeta_1^\alpha)}{\partial y} - 2\frac{\partial^2(\lambda^2\zeta^\alpha)}{\partial x\,\partial x_\alpha} + 2\frac{\partial^2(\lambda^1\zeta^\alpha)}{dy\,dx_\alpha} \\ &\quad - \Delta(\lambda^\alpha u_3^\alpha) + \frac{\partial^2(\lambda^\alpha u_\beta^3)}{\partial z\,\partial x_\beta} - \Delta\frac{\partial(\lambda^3 u^\alpha)}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial^3(\lambda^\beta u^\alpha)}{\partial z\,\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}. \end{aligned}$$

Les quatre premiers termes du second membre se transforment comme suit, compte tenu des relations (6) et (7) :

$$
\begin{aligned}
(29) \qquad & -2\lambda_1^\alpha\zeta_2^\alpha + 2\lambda_2^\alpha\zeta_1^\alpha - 2\lambda_{1\alpha}^2\zeta^\alpha + 2\lambda_{2\alpha}^1\zeta^\alpha - 2\lambda_\alpha^2\zeta_1^\alpha + 2\lambda_\alpha^1\zeta_2^\alpha \\
&= 2\zeta_2^\alpha(\lambda_\alpha^1 - \lambda_1^\alpha) - 2\zeta_1^\alpha(\lambda_\alpha^2 - \lambda_2^\alpha) - 2\zeta^\alpha(\lambda_1^2 - \lambda_2^1)_\alpha \\
&= -2\rho\zeta_2^2 u^3 + 2\rho\zeta_2^3 u^2 - 2\rho\zeta_1^1 u^3 + 2\rho\zeta_1^3 u^1 - 2\rho\zeta^\alpha u_\alpha^3, \\
&= -\rho[2\zeta^\alpha u_\alpha^3 - 2\zeta_\alpha^3 u^\alpha];
\end{aligned}
$$

quant aux quatre derniers ils valent

$$
\begin{aligned}
& -\Delta(\lambda^\alpha u_3^\alpha) + \frac{\partial^2(\lambda^\alpha u_\beta^\alpha)}{\partial z\,\partial x_\beta} - \Delta(\lambda_\alpha^3 u^\alpha) + \frac{\partial^2(\lambda_\alpha^\beta u^\alpha)}{\partial z\,\partial x_\beta} \\
&= [-(\lambda^\alpha u_3^\alpha)_1 + (\lambda^\alpha u_1^\alpha)_3 - (\lambda_\alpha^3 u^\alpha)_1 + (\lambda_\alpha^1 u^\alpha)_3]_1, \ \ldots,
\end{aligned}
$$

plus un terme semblable en remplaçant l'indice 1 par l'indice 2.

La quantité entre parenthèses crochets est nulle, car elle s'écrit

$$
\begin{aligned}
& -\lambda_1^\alpha u_3^\alpha + \lambda_3^\alpha u_1^\alpha - \lambda_{\alpha 1}^3 u^\alpha + \lambda_{\alpha 3}^1 u^\alpha - \lambda_\alpha^3 u_1^\alpha + \lambda_\alpha^1 u_3^\alpha \\
&= u_3^\alpha(\lambda_\alpha^1 - \lambda_1^\alpha) + u_1^\alpha(\lambda_3^\alpha - \lambda_\alpha^3) + u^\alpha(\lambda_3^1 - \lambda_1^3)_\alpha \\
&= \rho[-u_3^2 u^3 + u_3^3 u^2 + u_1^1 u^2 - u_1^2 u^1 + u^1 u_1^2 + u^2 u_2^2 + u^3 u_3^2] = \rho u^2 u_\alpha^\alpha = 0.
\end{aligned}
$$

Il en est naturellement de même pour l'expression non écrite portant sur l'indice 2.

En résumé, en rétablissant l'indice général i et en séparant par des parenthèses crochets, pour bien les différencier, les termes donnés par les formules (26) à (29) provenant des trois arguments T, 2Ψ et $\lambda^\alpha G^\alpha$ des équations d'Euler, on a

$$
\begin{aligned}
(30) \quad E^i(T + 2\Psi + \lambda^\alpha G^\alpha) &= -\rho[-2\zeta_t^i] - \rho[4\nu\Delta\zeta^i] \\
&\quad -\rho[-2\nu\Delta\zeta^i + 2\zeta^\beta u_\beta^i - 2\zeta_\beta^i u^\beta] \\
&= -\rho[-2\zeta_t^i + 2\zeta^\beta u_\beta^i - 2\zeta_\beta^i u^\beta + 2\nu\Delta\zeta^i] = -\rho G^i = 0.
\end{aligned}
$$

Ces équations sont proportionnelles aux équations (9), *elles-mêmes équivalentes aux équations de Navier* (4). De plus, l'équation d'incompressibilité (7) est satisfaite, puisque les vitesses répondent aux conditions (10).

8. Les équations (30) établissent la généralisation du théorème de Helmholtz, mais il importe de bien préciser dans quelles conditions.

La fonction soumise à variation sous le signe somme est la fonction de Lagrange complète (12), dans laquelle $\mathcal{L}$ a la valeur (22).

L'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions parmi lesquelles il y a lieu de déterminer les fonctions extrémales correspond au champ variationnel usuel du calcul des variations en cas *d'extrémum libre*; plus précisément, il est défini par (14), i prenant les valeurs 1, 2, 3 et les fonctions f^i dépendant, en général, du temps. Pour toutes les fonctions de cet ensemble, les trois multiplicateurs λ^α conservent, pour un point de coordonnées déterminées, la même valeur; ils sont distraits de la variation ([1]). Dans ces conditions, les fonctions extrémales satisfont aux relations (30) équivalentes aux équations de l'hydrodynamique (9) ou (4) et (7). Pour ces valeurs extrémales, les fonctions de Lagrange, complètes ou non, ont même valeur $\mathcal{L} = T + 2\Psi$, puisque les termes G^α sont *nuls*.

On peut alors énoncer comme suit les propriétés résultant des équations (30), en admettant, une fois pour toutes, les diverses fonctions envisagées régulières.

A. *Mouvements non lents.* — Considérons les mouvements *non lents, permanents ou non,* d'un fluide visqueux incompressible inclus dans un domaine borné D dont la surface isole par la pensée le fluide restant ou représente réellement la paroi du fluide ([2]).

1° *On peut déduire, par un principe variationnel, les équations générales du mouvement.*

2° *Pour les mouvements réels, la valeur* (13) *de la fonctionnelle qui est rendue stationnaire représente, dans l'unité de temps et pour le domaine* D, *la somme de la variation de l'énergie cinétique du fluide et de la dissipation d'énergie due aux résistances passives.*

([1]) Il faut insister sur ce point, car λ^α étant en fin de compte proportionnel à ψ^α, lequel est soumis à variation, il pourrait se produire une confusion. Nous avons rappelé au début de cette étude, que les multiplicateurs ne dépendent *au titre variationnel,* que des variables et non des fonctions soumises à variation mais, naturellement, ils peuvent, *a posteriori,* lors de leur calcul effectif, s'exprimer éventuellement par ces seules fonctions; c'est le cas en l'espèce. D'ordre général, cette remarque joue pour les deux acceptions du terme multiplicateur (extrémum lié ou extrémum libre).

([2]) Pour simplifier le raisonnement intuitif fait plus haut amenant au choix de la fonction de Lagrange, on a admis jusqu'ici le domaine D fixe, mais tous les résultats exposés ci-après restent valables si D varie avec le temps.

3° *Dans le cas particulier des mouvements permanents, la variation de l'énergie cinétique est nulle et la fonctionnelle rendue stationnaire se réduit à la valeur* (21) *de l'énergie dissipée en chaleur par unité de temps.*

4° Dans le cas spécial des *mouvements irrotationnels,* on pourra limiter l'ensemble de comparaison $\mathcal{E}$ à l'ensemble $\mathcal{E}'$ des mouvements irrotationnels. Dans ces conditions, la fonction de Lagrange soumise à variation prendra pour chaque fonction de ce sous-ensemble la forme incomplète, car les équations (9) ou (30) sont identiquement nulles. *Les multiplicateurs* λ^α *disparaissent donc dans le cas spécial des mouvements irrotationnels* (*voir,* notamment pour ce cas, les recherches de M. Ch. B. Millikan, déjà citées).

5° On peut naturellement appliquer tous les raisonnements précédents au cas des *fluides parfaits;* il suffit de poser $\mu = 0$, ce qui fait disparaître de la fonction de Lagrange la fonction de dissipation 2Ψ.

B. *Mouvements lents.* — Les théorèmes ci-dessus englobent le cas des mouvements *lents.* Il suffit, pour cela, de considérer le cas limite des mouvements infiniment petits et d'annuler alors, comme négligeables vis-à-vis des termes linéaires, tous les termes *quadratiques* des équations (9) et (30). En traitant le problème sous cette forme, *les trois multiplicateurs subsistent en général.*

Toutefois, on peut procéder autrement dans le cas des mouvements lents *permanents.* Les équations (9) se réduisent alors à $2\nu\Delta\zeta^k = 0$ et les équations (30) aux valeurs proportionnelles $-2\rho\nu\Delta\zeta^k = 0$, la fonction de Lagrange étant *complète,* ou encore, aux valeurs équivalentes $-4\rho\nu\Delta\zeta^k = 0$, si, dans ces équations, on supprime, assez arbitrairement, les multiplicateurs λ^α. Par conséquent, et ceci constitue le théorème de Helmholtz, *il suffit, pour les mouvements lents permanents* [1], *de considérer la fonction de Lagrange incomplète* $\mathcal{L} = 2\Psi$.

Sous une autre forme plus homogène avec ce qui précède, on peut dire aussi :

---

[1] Cette seconde méthode ne peut s'étendre, en général, au cas des mouvements *lents non permanents,* à cause des conditions (18) qui conduisent alors, selon la première formule (23), au cas très particulier des mouvements irrotationnels déjà traités généralement sous 4°.

6° *La fonction de Lagrange soumise à variation et dont l'intégrale étendue au domaine considéré est rendue stationnaire pour les mouvements lents et permanents peut être prise égale à la fonction de dissipation 2Ψ pour toutes les fonctions de l'ensemble $\mathcal{E}$ et non pas seulement pour les fonctions extrémales.*

Cependant, à la lumière des explications précédentes, cette suppression des multiplicateurs paraît accidentelle ([1]). La méthode générale maintenant ces multiplicateurs et valable pour les mouvements lents *permanents ou non* traduit certainement le passage à la limite correct des mouvements finis aux mouvements infiniment petits. L'autre méthode conduisant au théorème de Helmholtz n'est qu'un procédé rendu possible par le caractère approché des équations de Stokes. En rétablissant dans leur rigueur les équations de l'hydrodynamique ([2]), la *dualité* de détermination de la fonction de Lagrange disparaît et c'est une constatation beaucoup plus satisfaisante pour l'esprit. Les mouvements définis par les équations de Stokes et de Navier comportent d'ailleurs d'autres différences de principe. Nous le verrons plus loin.

C. *Mouvements parallèles à un plan fixe.* — Si, pour fixer les idées, le plan est choisi normal à $x_3 = z$, les différentes fonctions ne dépendent plus de cette variable. La seule fonction de courant subsistante est $\psi^3 = \psi$; les vitesses valent

$$u = u^1 = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \psi_2, \qquad v = u^2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\psi_1, \tag{10 bis}$$

et le tourbillon

$$\zeta^3 = \zeta = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2}\Delta\psi. \tag{11 bis}$$

([1]) La même simplification convient aux régimes *laminaires, lents ou non*, mais ce sont des mouvements très particuliers.

([2]) Les équations de Navier, rigoureuses du point de vue mathématique, sont néanmoins basées sur l'hypothèse simplificatrice de Coulomb admettant une relation *linéaire* entre les composantes de l'effort interne et celles du tenseur de déformation. Si l'on doit un jour maîtriser complètement par le calcul les phénomènes de turbulence, il n'est pas dit qu'il ne faille pas, pour cela, admettre une relation moins élémentaire entre ces deux tenseurs.

Les équations (9) remplaçant celles de Navier se réduisent à la seule équation écrite pour l'indice $k = 3$, au surplus bien connue

$$(9\ bis)\qquad (\psi\,\Delta\psi_1)_2 - (\psi\,\Delta\psi_2)_1 + \Delta\psi_t - \nu\,\Delta\Delta\psi = \psi_2\,\Delta\psi_1 - \psi_1\,\Delta\psi_2 + \Delta\psi_t - \nu\,\Delta\Delta\psi = G = 0.$$

Il y a un seul multiplicateur $\lambda^3 = \lambda$, une seule condition (18)

$$(18\ bis)\qquad E^{3t} = E^t = -\rho\,\Delta\psi + \Delta\lambda = 0,$$

d'où

$$(25\ bis)\qquad \lambda = \rho\psi,$$

et une seule équation proprement dite d'Euler

$$(30\ bis)\qquad E^3 = E = -\rho G = 0.$$

Au lieu de déduire ces résultats des formules générales trouvées plus haut, on peut, naturellement, les établir directement par des calculs fort simples [1].

9. Il est possible de présenter la théorie précédente sous une forme différente qui ne nécessiterait à peu près aucun calcul, si l'on pouvait établir l'identité générale dont nous allons parler par un raisonnement intuitif, comme on l'a fait pour déterminer la fonction de Lagrange (22).

Si dans les calculs des équations d'Euler (16) et (18) on considère, pour un instant, les multiplicateurs de Lagrange λ^α, non comme des fonctions inconnues non soumises à variation, ce qui est cependant le cas en réalité, mais introduit directement leur valeur $\rho\psi^\alpha$ et les englobe dans la variation, autrement dit, si l'on considère les équations d'Euler afférentes à l'expression

$$(31)\qquad T + 2\Psi + \rho\psi^\alpha G^\alpha,$$

on constate aisément que les équations (16) et (18) sont *identiquement satisfaites*. C'est évident pour les équations (18), car leur forme n'est pas modifiée [*voir* formules (24)]. Quant aux équations (16), la varia-

---

[1] *Voir* l'article de la *Revue Générale de l'Hydraulique*, déjà cité.

tion supplémentaire du facteur $\rho\psi^i$ introduit un nouveau terme ρG^i annulant le terme existant de signe contraire [*voir* équations (30)].

Les équations d'Euler du problème variationnel étant identiquement nulles, la fonction de Lagrange correspondante est une *divergence*, qu'on peut, si l'on veut, intégrer par la formule de Gren en ramenant l'intégrale triple (13) à des *intégrales de surface*. Il est, par conséquent, possible de réduire l'expression (31) à une divergence, mais nous n'écrirons pas sa forme générale, assez compliquée, nous contentant de la donner dans le cas des mouvements à deux dimensions.

On a alors l'identité suivante, facile à vérifier, valable pour les mouvements plans les plus généraux des fluides visqueux incompressibles et dont le membre de droite est visiblement une divergence :

$$(32)\quad \begin{aligned} T + 2\Psi + \rho\psi G = {} & \rho(\psi_1\psi_{1t} + \psi_2\psi_{2t}) + \mu[4(\psi_{12})^2 + (\psi_{11} - \psi_{22})^2] \\ & + \rho\psi\left[\psi_2\,\Delta\psi_1 - \psi_1\,\Delta\psi_2 + \Delta\psi_t - \frac{\mu}{\rho}\Delta\Delta\psi\right] \\ \equiv {} & \mu\{[\psi_1(\psi_{11} - \psi_{22}) + 2\psi_2\psi_{12}]_1 + [\psi_2(\psi_{22} - \psi_{11}) + 2\psi_1\psi_{12}]_2\} \\ & + \rho\{(\psi\psi_{1t})_1 + (\psi\psi_{2t})_2 + (\psi\psi_2\,\Delta\psi)_1 - (\psi\psi_1\,\Delta\psi)_2\} \\ & - \mu\{(\psi\,\Delta\psi_1)_1 + (\psi\,\Delta\psi_2)_2\}. \end{aligned}$$

Cette divergence porte non seulement sur les vitesses, le tourbillon et les composantes $\psi_{11} - \psi_{22}$ et $2\psi_{12}$ du tenseur de déformation (20), mais également sur la *fonction de courant* ψ *liée au flux de l'écoulement*. Cette présence du flux rend malaisée l'interprétation physique de la formule (32); elle serait cependant nécessaire si l'on veut arriver à établir directement cette identité [1].

Quoi qu'il en soit, la présence d'une telle divergence dans le cas général des mouvements à trois dimensions rendra inutile le calcul des équations d'Euler (16) et (18) dont on sait d'avance qu'elles

---

(1) La signification de la première accolade du membre de droite de la formule (32), dans laquelle *le flux n'intervient pas*, est, par contre, simple.

En intégrant cette expression sur le domaine D et en appliquant la formule de Green, on trouve

$$-\iint_\Sigma \alpha^\beta T^{\beta\gamma} u^\gamma \, d\sigma + \iint_\Sigma p\,\alpha^\beta u^\beta \, d\sigma,$$

$d\sigma$ est l'élément de la surface latérale Σ du domaine cylindrique D ; α^β, $\beta = 1, 2$, seront nulles *identiquement*. En retournant alors le raisonnement précédent, c'est-à-dire en revenant des valeurs $\rho\psi^\alpha$ aux multiplicateurs λ^α non soumis à variation, on en déduira immédiatement les équations (30).

Reprenons, pour fixer les idées, les mouvements plans; dans ce cas, la fonction de courant ψ est définie à une fonction additive de t près et, à toutes ces valeurs de ψ, correspond un seul régime hydraulique avec vitesses, tourbillons, etc., bien déterminés. L'égalité (32), puisque identique, reste évidemment valable pour toutes ces valeurs de ψ, mais ses deux membres varient et l'interprétation de la formule devra rendre compte de cette indétermination de ψ [1].

D'un autre point de vue, nous avons jusqu'ici admis comme solution de l'équation (18 *bis*) la valeur *particulière* $\lambda = \rho\psi$, alors que la solution générale pour λ comporte, en outre, à titre additif, une fonction harmonique quelconque dépendant, en général, du temps. On peut se demander si l'équation proprement dite d'Euler (30 *bis*) reste équivalente à l'équation (9 *bis*), même en remplaçant λ par sa valeur générale. Le calcul montre qu'il n'en sera plus ainsi en général, sauf, en particulier, si la fonction additive se réduit à une fonction de la seule variable t. Ainsi, la valeur admissible de λ comporte *au moins* la même indétermination que la fonction de courant. Quoique cette indifférence du calcul variationnel à des modifications de λ et ψ n'affectant pas les caractéristiques physiques du mouvement était *a priori* probable, il était intéressant de la vérifier.

---

les cosinus directeurs de la normale extérieure à cette surface; $T^{\beta\gamma}$, β, $\gamma = 1, 2$, les composantes du tenseur de l'effort interne agissant sur Σ. (*Voir*, pour une transformation analogue : *Leçons sur les fluides visqueux*, déjà cité, p. 71.)

L'expression précédente (changée de signe) mesure donc, dans l'unité de temps, la différence du travail produit sur la surface Σ par les efforts internes du fluide visqueux et du travail produit par la pression moyenne. On sait que cette différence est égale au travail fourni par les forces de viscosité appliquées à la surface Σ.

[1] Pour les mouvements à trois dimensions, l'indétermination des fonctions de courant ψ^α est beaucoup plus complète, puisque l'une d'entre elles reste arbitraire.

10. En développant selon la formule de Taylor la fonction de Lagrange complète $T + 2\Psi + \lambda^\alpha G^\alpha$ pour l'une quelconque des fonctions de l'ensemble $\mathcal{E}$ et en supposant ensuite les conditions d'extrémum (25) et (30) satisfaites, la *première variation est nulle, et la seconde variation* (il n'en existe pas d'ordre supérieur, puisque la fonction de Lagrange complète contient les fonctions ψ^α et leurs dérivées sous forme quadratique seulement) représente une *forme quadratique* des diverses quantités ε^α. Dans le cas du *théorème de Helmholtz* (mouvements *lents et permanents*), cette forme quadratique est *positive définie* et l'extrémum est un *minimum; ce n'est plus le cas si les mouvements sont finis* (même permanents). La suppression de termes qui conduit aux équations linéarisées de Stokes entraîne donc, à nouveau, une modification de principe des propriétés de ces équations comparées à celles des équations exactes de Navier (1).

La seconde variation se met sous la forme

$$\iiint_D (T^f + 2\Psi^f + \lambda^\alpha G^{\alpha f_2})\, d\tau. \tag{33}$$

Les indices supérieurs f signifient qu'il faut remplacer les diverses fonctions ψ^α par $\varepsilon^\alpha f^\alpha$ et l'indice 2 dans $G^{\alpha f}$ que les termes *linéaires* des relations (9) sont supprimés, car ils ne peuvent évidemment fournir de termes quadratiques en ε^α. D'autre part, $\lambda^\alpha = \rho\psi^\alpha$ (2).

Cette expression (33) est visiblement une forme quadratique des diverses quantités ε^α. Elle sera, en général, *indéfinie;* il suffit, pour s'en rendre compte, de considérer le cas particulier des mouvements plans. En posant $\varepsilon^\alpha = \varepsilon$, elle s'écrit en effet

$$(\varepsilon)^2 \iiint_D \left\{ \frac{T^f}{(\varepsilon)^2} + \mu[4(f_{12})^2 + (f_{11} - f_{22})^2] + \lambda[f_2\,\Delta f_1 - f_1\,\Delta f_2] \right\} d\tau. \tag{33 bis}$$

(1) Dans le même ordre d'idées, on peut aussi citer quelques insuffisances des équations linéarisées appliquées au problème classique du déplacement d'une sphère solide dans un fluide indéfini; elles ont motivé l'introduction d'un système d'équations plus complexe, dit de Stokes-Oseen, intermédiaire entre ceux de Stokes et de Navier.

(2) Les formules (33) et (33 *bis*) illustrent bien le fait que les multiplicateurs sont distraits de la variation. Pour tous les autres termes sauf eux, les f^α sont substitués aux ψ^α.

Même si $T^f = 0$ (mouvements permanents), l'élément différentiel de l'intégrale ne sera pas constamment positif en général si le terme multiplié par $\lambda = \rho\psi$ n'est pas *réputé nul*, c'est-à-dire, si l'on ne considère pas des mouvements *lents permanents*.

L'extrémum trouvé n'étant plus un minimum, les méthodes directes de Hilbert ne s'appliquent plus pour prouver l'existence d'une solution lorsque, par exemple, les composantes de la vitesse sont données à la frontière; ceci ne signifie nullement qu'il n'y en ait pas. Pour les mouvements non permanents notamment, les considérations exposées ci-après permettent, au contraire, de conclure à une infinité de solutions. Par ailleurs, même pour les mouvements *lents*, il n'y a plus de *minimum* en général si les régimes ne sont *pas permanents*, à cause de la présence du terme de signe variable T^f (*voir* formule 19).

Autrement dit, pour établir le théorème de Helmholtz sous sa forme habituelle rappelée au début de cette étude, on peut fort bien, si on le désire, mettre à contribution toutes les fonctions de l'ensemble $\mathcal{E}$, y compris celles où les f^α *dépendent du temps*. On constatera alors que, parmi tous ces mouvements possibles ou non, même non permanents, le mouvement réel lent et permanent, unique si les vitesses sont données à la frontière, est celui rendant minimum la fonctionnelle (13) appliquée à la fonction de Lagrange *spéciale et incomplète* 2Ψ, mais on ne pourra, par ce procédé, obtenir les *mouvements* réels lents et *non permanents*.

Si l'on désire les calculer par une méthode variationnelle et pour des mouvements lents ou non, il faudra partir de la fonction de Lagrange *générale et complète* (22), c'est-à-dire de $T + 2\Psi + \lambda^\alpha G^\alpha$. Dans ces conditions et déjà pour des mouvements *lents* (c'est-à-dire non turbulents), la *donnée à tout instant de valeurs frontières en nombre égal à celui des dimensions du problème envisagé* (par exemple des composantes de la vitesse) ne suffit pas pour déterminer de façon unique le mouvement; il faut également fixer un *état initial de répartition des vitesses dans tout le domaine* D [1].

---

[1] A titre d'indication, voici la démonstration succincte de ce théorème dans le cas simple des mouvements *lents* à deux dimensions en se donnant, d'une part et à tout instant, les *deux* valeurs frontières suivantes : composante normale

La question se complique si les mouvements ne sont plus lents, c'est-à-dire les équations non linéaires, et les résultats acquis sont fragmentaires; en général, on ne sera plus assuré, à tout instant, de l'unicité et de la régularité des solutions répondant aux données

---

de la vitesse et tourbillon, d'autre part, la distribution initiale des vitesses ou, ce qui revient au même, de la fonction de courant.

L'équation résolvante (9 *bis*) linéarisée s'écrit $\Delta(\nu\,\Delta\psi - \psi_t) = 0$. La fonction entre parenthèses, soit h, est donc harmonique, mais sinon, *a priori*, quelconque. Pour la fixer dans le domaine D il suffit, d'après le principe de Dirichlet, de connaître à tout instant ses valeurs frontières. Il en est bien ainsi, car, d'une part, le tourbillon $-\frac{1}{2}\Delta\psi$ est donné et, d'autre part, la composante normale $\frac{d\psi}{ds}$ de la vitesse. Par intégration à partir d'une origine quelconque, le long d'une directrice s de la surface latérale Σ du domaine cylindrique D, on obtient la valeur frontière de ψ, autrement dit le *flux*, et, après dérivation, ψ_t. Par ailleurs, ψ doit être uniforme dans D et, par conséquent, sa valeur frontière reprendre la même valeur si l'on décrit entièrement la directrice s. C'est bien le cas, puisque le *flux total* au travers de Σ doit être choisi *nul* pour un fluide incompressible.

Le problème est donc ramené à la résolution de l'équation linéaire de type parabolique $F(\psi) = \nu\,\Delta\psi - \psi_t = h$, où h est connu; cette équation est analogue, abstraction faite de son second membre, à celle de la propagation de la chaleur et l'on prouve aisément qu'elle ne peut, avec les hypothèses faites, posséder plus d'unesolution. Désignons, en effet, par φ la différence de deux solutions possédant même état initial et, en tout temps, mêmes valeurs frontières; φ satisfait donc, d'une part, à l'équation homogène $F(\varphi) = 0$, d'autre part, à la condition frontière $\varphi = 0$ sur la surface cylindrique Σ et, au temps $t = 0$, à la condition initiale $\varphi_0 = 0$ dans le domaine D. Dans ces conditions, la fonction φ est identiquement nulle, car, d'après la formule de Green,

$$\iiiint F(\varphi^2)\,dx\,dy\,dz\,dt = 2\nu \iiiint (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)\,d\tau\,dt$$
$$= -\iiint_D \varphi^2\,d\tau + \iiint_D \varphi_0^2\,d\tau + 2\nu \int dt \iint_\Sigma \varphi \frac{d\varphi}{dn}\,ds\,dz.$$

Les deux derniers termes de droite sont nuls en vertu des conditions aux limites. Une quantité positive serait donc égale à une quantité négative. Elles sont nulles l'une et l'autre et l'on en déduit $\varphi \equiv 0$.

D'ailleurs, la fonction ψ ainsi définie de façon unique par ces conditions aux limites existe bien, comme on peut le vérifier entre autres, pour les fonctions régulières envisagées ici, en la développant en série de fonctions propres orthoprécédentes [1] et l'indétermination apparemment plus profonde des mouvements turbulents doit rendre prudent à cet égard.

En conclusion, la présence, dans le cas général, de valeurs stationnaires et non plus d'un minimum de la fonction de Lagrange, puis d'équations non linéaires, complique singulièrement l'établissement des théorèmes d'existence et la recherche du nombre et de la nature des solutions afférentes à des conditions aux limites déterminées. Cette complexité paraît être dans la nature des choses et montre, d'une part, la nécessité d'éviter, sauf cas d'espèce, la simplification apportée par les équations linéarisées qui altèrent plusieurs propriétés importantes des mouvements, d'autre part, l'intérêt qu'aurait, par exemple, l'extension des méthodes directes du genre de celles de Hilbert aux cas les plus généraux d'extréma.

---

gonales. (*Voir*, par exemple, pour l'application générale de ce procédé : *Methoden der mathematischen Physik* de R. Courant et D. Hilbert, t. I).

Dans le cas particulier des régimes lents et *permanents*, les valeurs initiales ψ_0 ne peuvent être choisies arbitrairement, puisque la donnée des deux valeurs frontières $\frac{d\psi}{ds}$ et $\Delta\psi$ fixe entièrement le mouvement.

Lorsque les valeurs frontières données sont les composantes de la vitesse, on détermine ordinairement la solution correspondant à un état initial donné par l'intermédiaire de la fonction de Green tensorielle dite tenseur d'Odqvist.

Par ailleurs, à titre d'application des généralités précédentes, on peut facilement vérifier que, pour des mouvements non permanents, lents ou non, la seule donnée de l'état initial ne peut suffire à fixer l'évolution du mouvement dans le temps. Par exemple, pour un domaine assez petit, on peut former aisément une suite continue de régimes laminaires ayant même distribution initiale des vitesses, mais plus ou moins accélérés ou retardés. Si les mouvements sont accélérés, le terme T de la fonction de Lagrange est positif, et négatif s'ils sont retardés. On peut alors choisir parmi cette suite de mouvements, qui comprend aussi le mouvement permanent, des écoulements suffisamment retardés pour que la valeur stationnaire de la fonctionnelle (13) appliquée à la fonction de Lagrange complète (22) soit inférieure au minimum positif donné par le théorème de Helmholtz, voire négative. Il n'y a à cela nulle contradiction, puisqu'il s'agit de fonctions de Lagrange différentes.

[1] Consulter, notamment, les travaux de M. J. Leray (*Journal de Mathématiques*, 1933).

Quant aux *applications* des théorèmes faisant l'objet de cette étude et généralisant celui de Helmholtz, elles se présentent, au premier abord, sous un jour un peu décevant. En effet, la fonction de Lagrange trouvée comporte déjà les expressions G^α qui constituent, dans le cas présent, le but même de la méthode variationnelle. Il semble donc que cette dernière représente un détour inutile. En fait il n'en est rien pour plusieurs raisons. Tout d'abord, ce qu'on recherche par la réduction à un principe variationnel, ce n'est pas tant l'obtention des équations du mouvement, au surplus bien connues, que celle d'une relation générale entre celles-là et une certaine fonction de Lagrange $\mathcal{L}$, en vue, notamment, de l'application de méthodes apparentées à celles de Hilbert. Dans ce cas, la présence des G^α dans $\mathcal{L}$ ne constitue pas un inconvénient. Mais il y a de plus un autre domaine d'utilisation de la méthode variationnelle, lié au *calcul des perturbations,* qui par sa simplicité d'application, paraît d'une grande importance pratique et pour lequel la présence des G^α dans $\mathcal{L}$ n'a pas d'inconvénient de principe. Souvent d'ailleurs ils n'apparaîtront même pas. Ce procédé permet notamment de déterminer, pour les fluides réels, les mouvements perturbés voisins de mouvements connus pour des fluides parfaits. On en trouvera un exemple dans l'article déjà cité de la *Revue Générale de l'Hydraulique* et concernant les formes les plus probables des houles du large, compte tenu de la viscosité, mais la méthode est évidemment beaucoup plus générale.