JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ALFRED RÉNYI

Un nouveau théorème concernant les fonctions indépendantes et ses applications à la théorie des nombres

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 28 (1949), p. 137-149.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1949_9_28__137_0>

Un nouveau théorème concernant les fonctions indépendantes et ses applications à la théorie des nombres ;

Par Alfred RÉNYI (1).

Le théorème que je me propose de démontrer ici, s'exprime en des termes de statististique de la manière suivante : considérons une population que nous répartissons en classes suivant les points de vues auxquels nous nous plaçons. Supposons que les répartitions soient indépendantes deux à deux. Envisageons, par exemple, les personnes adultes de Paris et répartissons-les suivant le nombre des cheveux, la pointure de leurs chaussures, la couleur de leurs yeux, leur journal favori, et ainsi de suite. Si nous considérons une partie pas trop petite de la population, par exemple, la population d'un arrondissement, il se peut que la répartition suivant quelques-uns des points de vues considérés soit considérablement différente de celle qu'on a obtenue pour la population totale. Mais pour presque tous les points de vues, supposés indépendants, la répartition ne changera que très peu. Ainsi, par exemple, il se peut que la répartition suivant le journal favori montre un aspect totalement différent d'arrondissement en arrondissement, mais d'autre part il est probable que le pourcentage des personnes aux yeux bleus est presque le même partout.

Pour donner une forme exacte à notre énoncé nous nous servons de la terminologie de la théorie des fonctions indépendantes, introduite par MM. Kac et Steinhaus (2).

---

(1) Conférence faite à la Société Mathématique de France, le 20 décembre 1948.

(2) M. Kac, *Fonctions indépendantes*, I (*Studia Math.*, 6, 1936, p. 46-58).

Nous appelons deux fonctions réelles, définies et mesurables au sens de Lebesgue dans l'intervalle (0, 1], *indépendantes*, si pour deux couples de nombres réels (a, b) et (c, d) quelconques, on a

$$\operatorname{mes} E[a < f(t) \leqq b;\ c < g(t) \leqq d] = \operatorname{mes} E[a < f(t) \leqq b] \operatorname{mes} E[c < f(t) \leqq d],$$

autrement dit, si la mesure de l'ensemble où les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ satisfont simultanément aux conditions $a < f(t) \leqq b$ et $c < g(t) \leqq d$ est égale au produit de la mesure de l'ensemble où $a < f(t) \leqq b$ et de la mesure de l'ensemble où $c < g(t) \leqq d$.

A chaque fonction $f(t)$ nous faisons correspondre sa fonction de distribution $V_f(X)$, définie par la formule

$$V_f(X) = \operatorname{mes} E[f(t) \leqq X].$$

$V_f(X)$ est une fonction définie dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, croissante et continue à droite; on a $V(-\infty) = 0$ et $V(+\infty) = 1$. D'une façon naturelle $V_f(X)$ définit une fonction non négative et additive d'intervalle si l'on pose pour $I = (a, b]$

$$V_f[I] = V_f(b) - V_f(a).$$

Donnons-nous un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de l'intervalle (0, 1], de mesure positive $\operatorname{mes} \mathcal{E} = |\mathcal{E}| > 0$. Nous définissons la fonction de distribution de $f(t)$ sur l'ensemble $\mathcal{E}$ en posant

$$V_f^{\mathcal{E}}(X) = \frac{\operatorname{mes} E[f(t) \leqq X;\ t \in \mathcal{E}]}{|\mathcal{E}|}.$$

Il est évident que $V_f^{\mathcal{E}}(X)$ jouit des mêmes propriétés que nous avons énumérées pour $V_f(X)$.

Pour pouvoir énoncer notre théorème, nous avons besoin de la notion de l'intégrale de Burkill [1]. Soit $U[I]$ une fonction d'intervalle définie pour tout intervalle $I = (\alpha, \beta]$, compris dans un intervalle $(a, b]$. Nous considérons les subdivisions de l'intervalle $(a, b]$ en un nombre fini d'intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_n$ et pour chaque subdi-

---

[1] S. SAKS, *Theory of the integral* (*Monografie Math.* VII, p. 165-169); *cf.* aussi S. KEMPISTY, *Fonctions d'intervalle non additives* (*Act. Sci. et Ind.*, p. 16-17).

vision nous formons la somme $\sum_{k=1}^{n} U[I_k]$. La longueur du plus grand des intervalles d'une subdivision $S=\{I_k\}$, sera le diamètre de la subdivision, et nous le désignons par $\delta(S)$. Les expressions

$$\overline{\int_a^b} U[I] = \overline{\lim_{\delta(S)\to 0}} \sum_{k=1}^{n} U[I_k] \qquad \text{et} \qquad \underline{\int_a^b} U[I] = \underline{\lim_{\delta(S)\to 0}} \sum_{k=1}^{n} U[I_k]$$

sont appelées respectivement les intégrales supérieures et inférieures de Burkill de la fonction $U[I]$ dans $(a, b]$. Dans le cas où ces deux intégrales coïncident, nous disons que $U[I]$ est intégrable au sens de Burkill et nous désignons leur valeur commune par $\int_a^b U[I]$.

Le lemme suivant établira l'existence de cette intégrale dans les cas où nous en aurons besoin :

Lemme. — *Si* $U[I]$ *est une fonction d'intervalle convexe, c'est-à-dire si* $U[I] \leqq U[I_1]+U[I_2]$ *pour* $I=I_1+I_2$, *et si, de plus,* $U[I]$ *est continue à droite, alors* $\overline{\int_a^b} U[I] < \infty$ *implique l'existence de l'intégrale de Burkill* $\overline{\int_a^b} U[I]$, *qui dans ce cas est aussi la plus petite borne supérieure des sommes* $\Sigma U[I_k]$ *prises pour toutes les subdivisions de l'intervalle* $(a, b]$.

Ici une fonction d'intervalle est dite continue à droite, si en posant

$$I=(\alpha, \beta], \qquad I_\delta^\varepsilon=(\alpha+\delta, \beta+\varepsilon) \qquad (\delta>0, \varepsilon>0),$$

on a

$$\lim U[I_\delta^\varepsilon]=U[I]$$

pour $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ et pour chaque sous-intervalle $(\alpha, \beta]$ de $(a, b]$.

L'énoncé correspondant pour le cas où la continuité ordinaire remplace la continuité à droite, se trouve démontré dans le traité de S. Saks (¹), et l'on modifie comme suit la démonstration pour en obtenir le lemme ci-dessus.

(¹) Saks, *loc. cit.*, Kempisty, *loc. cit.*, p. 31.

Désignons par M la plus petite borne supérieure des sommes $\Sigma U[I_k]$ et donnons-nous un nombre positif ε aussi petit que l'on veut. Supposons que les intervalles $I_1^*, I_2^*, \ldots, I_n^*$ donnent une telle subdivision de l'intervalle $(a, b]$ qu'on ait $\sum_{k=1}^{n} U[I_k^*] > M - \frac{\varepsilon}{2}$. Posons $I_k^* = (\alpha_k^*, \alpha_{k+1}^*]$. En vertu de la continuité à droite de la fonction d'intervalle $U[I]$, nous pouvons déterminer η_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ de la façon que pour $I'_k = (\alpha_k^* + \gamma, \alpha_{k+1}^* + \delta]$, avec $0 < \gamma < \eta_k$ et $0 < \delta < \eta_k$, nous ayons $|U[I'_k] - U[I_k^*]| \leqq \frac{\varepsilon}{2n}$. Posons $\eta = \min \eta_k$ $(1 \leqq k \leqq n)$. Soit maintenant $\overline{S} = \{\overline{I}_r\}$ une subdivision ayant un diamètre $\delta(\overline{S})$ inférieur à η. Désignons par $\overline{I}_r = (\overline{\alpha}_r, \overline{\alpha}_{r+1}]$ les intervalles de S. Soit $\overline{\alpha}_{r_k}$ le premier des $\overline{\alpha}_r$ supérieur ou égal à α_k^*. Écrivons

$$\overline{\overline{I}}_k = \sum_{r_k \leq j \leq r_{k+1}-1} \overline{I}_j = (\alpha_k^* + \gamma_k, \alpha_{k+1}^* + \delta_k];$$

l'hypothèse $\delta(\overline{S}) < \eta$ entraîne $0 \leqq \gamma_k < \eta$, $0 \leqq \delta_k < \eta$. Il en résulte que

$$\left|U[\overline{\overline{I}}_k] - U[I_k^*]\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2n},$$

et à plus forte raison que

$$U[\overline{\overline{I}}_k] \geqq U[I_k^*] - \frac{\varepsilon}{2n}.$$

D'autre part on a, en vertu de la convexité de $U[I]$,

$$\sum_{r_k \leq j \leq r_{k+1}-1} U[\overline{I}_j] \geqq U[\overline{\overline{I}}_k],$$

d'où finalement

$$\Sigma U[\overline{I}_r] \geqq \Sigma U[\overline{\overline{I}}_k] \geqq \Sigma U[I_k^*] - n\frac{\varepsilon}{2n} \geqq M - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = M - \varepsilon,$$

ce qui démontre le lemme.

Après ces remarques préliminaires, nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Théorème 1. — *Soit $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t), \ldots,$ une suite de fonctions réelles, indépendantes deux à deux, définies dans l'inter-*

valle $(0, 1]$. *Soit* $\mathcal{E}$ *un sous-ensemble de mesure positive* $|\mathcal{E}| > 0$ *de l'intervalle* $(0, 1]$. *Soit* $V_n(X)$ *la fonction de distribution et* $V_n^{\mathcal{E}}(X)$ *la fonction de distribution sur* $\mathcal{E}$ *de* $f_n(t)$ *et posons*

$$V_n[I] = V_n(b) - V_n(a) \qquad et \qquad V_n^{\mathcal{E}}[I] = V_n^{\mathcal{E}}(b) - V_n(a)$$

pour $I = (a, b]$. *On a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{(V_n^{\mathcal{E}}[I] - V_n[I])^2}{V_n[I]} \leq \frac{1}{|\mathcal{E}|}, \tag{1}$$

où les intégrales figurant au premier membre sont des intégrales de Burkill.

On s'aperçoit tout de suite que l'expression

$$\Delta(V_n^{\mathcal{E}}, V_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(V_n^{\mathcal{E}}[I] - V_n[I])^2}{V_n[I]}$$

fournit une mesure naturelle de l'écart entre la distribution de $f_n(t)$ sur $\mathcal{E}$ et de la distribution de $f_n(t)$ sur l'intervalle entier $(0, 1]$.

Avant de commencer la démonstration proprement dite, remarquons que les fonctions d'intervalle

$$U_n[I] = \frac{(V_n^{\mathcal{E}}[I] - V_n[I])^2}{V_n[I]}$$

sont de la forme $\frac{F^2[I]}{G[I]}$, où $F[I]$ et $G[I]$ sont des fonctions d'intervalle additives, non négatives et que toute fonction d'intervalle de cette forme est convexe, ce qui résulte de l'inégalité élémentaire

$$\frac{(a+b)^2}{c+d} \leq \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{d}.$$

De plus, $U_n[I]$ est continue à droite et ainsi les conditions de notre lemme étant vérifiées, les intégrales de Burkill du premier membre de (1) existent, et pour prouver notre théorème, il suffit de montrer que la relation

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N_n} \frac{(V_n^{\mathcal{E}}[I_{nk}] - V_n[I_{nk}])^2}{V_n[I_{nk}]} \leq \frac{1}{|\mathcal{E}|} \tag{2}$$

subsiste pour toutes les subdivisions $\{I_{nk}\}$ de $(-\infty, +\infty)$. Il suffit évidemment de ne considérer que les subdivisions $\{I_{nk}\}$, où l'on a $V_n[I_{nk}] > O$ pour tout k.

Démontrons maintenant la formule (2). A toute subdivision $\{I_{nk}\}$ il correspond une décomposition en sous-ensembles mesurables $\{i_{nk}\}$ de l'intervalle $(0, 1]$, qu'on définit par la convention suivante : $t \in i_{nk}$ si $f_n(t) \in I_{nk}$. Soit p_{nk} la mesure de l'ensemble i_{nk}, qui est d'ailleurs égale à la valeur $V_n[I_{nk}]$, supposée positive. Soit $F_{nk}(t)$ la fonction caractéristique de l'ensemble i_{nk}. Posons

$$\varphi_{nk}(t) = \frac{F_{nk}(t) - p_{nk}}{\sqrt{p_{nk}}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, N_n;\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Remarquons que le système $\{\varphi_{nk}(t)\}$ forme un système quasi orthogonal au sens précisé par M. R. P. Boas jr. [1], avec la différence non essentielle qu'il n'est pas normé exactement. On voit ceci en vertu des relations

$$\text{(A)} \qquad \int_0^1 \varphi_{nk}^2(t)\, dt = 1 - p_{nk},$$

$$\text{(B)} \qquad \int_0^1 \varphi_{nk}(t)\varphi_{ml}(t)\, dt = 0 \qquad \text{pour } n \neq m,$$

$$\text{(C)} \qquad \int_0^1 \varphi_{nk}(t)\varphi_{nk'}(t)\, dt = -\sqrt{p_{nk}p_{nk'}} \qquad \text{pour } k \neq k'.$$

(A) résulte d'un calcul simple en utilisant la relation évidente

$$\int_0^1 F_{nk}^2(t)\, dt = \int_0^1 F_{nk}(t)\, dt = p_{nk};$$

On obtient (C) en tenant compte de ce que

$$\int_0^1 F_{nk}(t)F_{nk'}(t)\, dt = 0 \qquad \text{pour } k \neq k'.$$

Finalement (B) est une conséquence de la relation

$$(3) \qquad \int_0^1 F_{nk}(t)F_{ml}(t)\, dt = \int_0^1 F_{nk}(t)\, dt \int_0^1 F_{ml}(t)\, dt = p_{nk}p_{ml},$$

---

[1] R. P. Boas jr., *A general moment problem* (*Amer. Journ. Math.*, 63, 1941, p. 361-370); *cf.* aussi R. Bellman, *Almost orthogonal series* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, 50, 1944, p. 517-519).

qui à son tour résulte du fait que par hypothèse les fonctions $f_n(t)$ et $f_m(t)$ sont indépendantes, et la formule (3) est équivalente à

$$\operatorname{mes} E[f_n(t) \in I_{nk}; f_m(t) \in I_{ml}] = \operatorname{mes} E[f_n(t) \in I_{nk}] \operatorname{mes} E[f_m(t) \in I_{ml}],$$

c'est-à-dire à la formule qui définit l'indépendance des fonctions.

Montrons maintenant que notre théorème est analogue à l'inégalité de Bessel pour notre système $\{\varphi_{nk}\}$ de fonctions quasi orthogonales. La démonstration, qui est calquée sur celle de l'inégalité de Bessel, se fait de la manière suivante. En désignant par $\mathcal{E}(t)$ la fonction caractéristique de l'ensemble $\mathcal{E}$, on a évidemment

$$\int_0^1 \left[\mathcal{E}(t) - \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N_n} e_{nk}\varphi_{nk}(t)\right]^2 dt \geqq 0,$$

où les coefficients e_{nk} sont définis par

$$e_{nk} = \int_0^1 \mathcal{E}(t)\varphi_{nk}(t)\, dt.$$

En élevant au carré, les formules (A), (C) donnent

$$|\mathcal{E}| - \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N_n} e_{nk}^2 - \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N_n} e_{nk}\sqrt{p_{nk}}\right)^2 \geqq 0.$$

Je dis que

$$\sum_{k=1}^{N_n} e_{nk}\sqrt{p_{nk}} = 0 \tag{4}$$

pour $n = 1, 2, 3, \ldots$. En effet, nous avons

$$\sum_{k=1}^{N_n} e_{nk}\sqrt{p_{nk}} = \int_0^1 \mathcal{E}(t) \sum_{k=1}^{N_n} \varphi_{nk}(t)\sqrt{p_{nk}}\, dt = \int_0^1 \mathcal{E}(t)\left[\sum_{k=1}^{N_n} F_{nk}(t) - \sum_{k=1}^{N_n} p_{nk}\right] dt,$$

ce qui donne (4), si l'on tient compte des relations évidentes

$$\sum_{k=1}^{N_n} F_{nk}(t) \equiv 1, \qquad \sum_{k=1}^{N_n} p_{nk} = 1.$$

On obtient ainsi

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N_n} e_{nk}^2 \leq |\mathcal{E}| \qquad \text{pour tout N,}$$

ce qui entraîne

$$(5) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{N_n} e_{nk}^2 \leq |\mathcal{E}|.$$

D'autre part nous avons

$$e_{nk} = \int_0^1 \mathcal{E}(t)\varphi_{nk}(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{p_{nk}}}\int_0^1 \mathcal{E}(t)[F_{nk}(t) - p_{nk}]\,dt,$$

d'où

$$(6) \qquad e_{nk} = \frac{(|\mathcal{E}|\,V_n^{\mathcal{E}}[I_{nk}] - |\mathcal{E}|\,V_n[I_{nk}])}{\sqrt{V_n[I_{nk}]}},$$

compte tenu de ce que $p_{nk} = V_n[I_{nk}]$ et de la définition de $V_n^{\mathcal{E}}[I]$. En portant (6) dans (5), on obtient la relation (2), ce qui achève la démonstration d'après les remarques faites précédemment.

En vue des applications à la théorie des nombres, nous avons besoin d'une généralisation du théorème que nous venons de démontrer au cas où les fonctions qui y figurent sont seulement presque indépendantes.

On dira que la suite $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t), \ldots$ de fonctions mesurables, définies dans l'intervalle $(0, 1]$ forme un système de fonctions *presque indépendantes*, si les relations

$$\left| \frac{\operatorname{mes} E[a < f_n(t) \leq b;\ c < f_m(t) \leq d]}{\operatorname{mes} E[a < f_n(t) \leq b]\,\operatorname{mes} E[c < f_m(t) \leq d]} - 1 \right| \leq \delta_n \delta_m$$

subsistent pour tout n et m et pour deux couples de nombres réels (a, b) et (c, d) quelconques, pour lesquels le dénominateur au premier membre est différent de zéro. Les nombres δ_n sont supposés tels que

$$\delta^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2 < 1.$$

THÉORÈME 2. — *Soit $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t), \ldots$, un système de* *fonctions presque indépendantes au sens qu'on vient de préciser.* $V_n[I]$ *et* $V_n^{\mathcal{E}}[I]$ *ayant les mêmes significations qu'antérieurement, on a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(V_n^{\mathcal{E}}[I] - V_n[I])^2}{V_n[I]} \leq \frac{1}{|\mathcal{E}|(1-\delta^2)}.$$

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 1, par conséquent nous indiquerons seulement les points où les deux raisonnements sont différents.

Au lieu de (B) nous avons

$$\left| \int_0^1 \varphi_{nk}(t)\varphi_{ml}(t)\,dt \right| \leq \sqrt{p_{nk}p_{ml}}\,\delta_n\,\delta_m.$$

Ainsi, en calculant $\int_0^1 [\mathcal{E}(t) - \Sigma\Sigma\, e_{nk}\varphi_{nk}(t)]^2\,dt$, nous obtenons au premier membre encore un terme, à savoir

$$T = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=n}^{N} \sum_{k=1}^{N_n} \sum_{l=1}^{N_m} e_{nk}\,e_{ml} \int_0^1 \varphi_{nk}(t)\varphi_{ml}(t)\,dt$$

Ce terme peut être majoré de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
|T| &\leq \sum_{n=1}^{N} \sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{N} \left(\sum_{k=1}^{N_n} \sum_{l=1}^{N_m} |e_{nk}|\,|e_{ml}|\sqrt{p_{nk}}\sqrt{p_{ml}} \right) \delta_n\,\delta_m \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} \sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{N} \left(\sum_{k=1}^{N_n} |e_{nk}|\sqrt{p_{nk}} \right) \left(\sum_{l=1}^{N_m} |e_{ml}|\sqrt{p_{ml}} \right) \delta_n\,\delta_m \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{N_n} e_{nk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{l=1}^{N_m} e_{ml}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \delta_n\,\delta_m,
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Schwarz et en tenant compte des relations $\sum_{k=1}^{N_n} p_{nk} = 1$. En utilisant toujours l'inégalité de Schwarz, nous obtenons

$$|T| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{N_n} e_{nk}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \delta_n \right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N_n} e_{nk}^2 \right) \sum_{n=1}^{N} \delta_n^2 \leq \delta^2 \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N_n} e_{nk}^2.$$

Donc finalement

$$(1-\delta^2)\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N_n} e_{nk}^2 \leqq |\mathcal{E}|,$$

d'où le résultat découle comme précédemment.

Comme application du théorème 2, nous démontrons un théorème relatif à la théorie des nombres, qui est une généralisation du « grand crible » de U. V. Linnik (¹). Ce théorème exprime ce fait qu'une suite de Z entiers $n_1 \leqq n_2 \leqq \ldots \leqq n_Z \leqq N$ suffisamment dense, c'est-à-dire pour laquelle $\frac{Z}{N}$ n'est pas trop petit, se répartit assez uniformément dans les différentes classes de reste par rapport à presque tous les nombres premiers $p < \frac{\sqrt[3]{N}}{2}$. Plus précisément, je démontre le

Théorème 3. — *Soient $f(p)$ et $Q(p)$ deux fonctions arithmétiques arbitraires avec $0 < f(p) \leqq p$ et $1 < Q(p)$. Posons*

$$\min_{p<\frac{\sqrt[3]{N}}{2}} \frac{f(p)}{p} = \tau \qquad et \qquad \max_{p<\frac{\sqrt[3]{N}}{2}} Q(p) = Q.$$

Si $Z(p, k)$ désigne le nombre d'entiers de la suite n_j ($j = 1, 2, \ldots, Z$), qui sont congrues à k mod p, alors nous avons pour tout nombre premier $p < \frac{\sqrt{N}}{2}$, sauf peut-être pour au plus $\frac{9NQ^2}{Z\tau}$ exceptionnels entre eux, et pour tout reste k mod p, sauf pour peut-être des restes irréguliers en nombre au plus égal à $f(p)$, la relation

$$\left|Z(p, k) - \frac{Z}{p}\right| < \frac{Z}{pQ(p)}.$$

Démonstration. — Posons $f_n(t) = k$, si $\{Nt\} \equiv k \pmod{p}$ et $0 \leqq k \leqq p_n - 1$. Ici $\{y\}$ désigne le plus petit entier $\geqq y$. Nous avons

$$(7) \qquad W(p_n, k) = \operatorname{mes} E[f_n(t) = k] = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\left(\left[\dfrac{N-k}{p_n}\right]+1\right) & \text{pour } k \neq 0, \\[2ex] \dfrac{1}{N}\left[\dfrac{N}{p_n}\right] & \text{pour } k = 0, \end{cases}$$

(¹) U. V. Linnik, *The large sieve* (*C. R. Acad. Sci. U. R. S. S.*, 30, nº 4, 1941, p. 290-292).

où $[y]$ désigne le plus grand entier $\leqq y$. Nous avons pour $n \neq m$

$$\operatorname{mes} E[f_n(t) = k;\, f_m(t) = k'] = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\left(\left[\dfrac{N-k''}{p_n p_m}\right]+1\right) & \text{pour } k'' \neq 0, \\[2ex] \dfrac{1}{N}\left[\dfrac{N}{p_n p_m}\right] & \text{pour } k'' = 0, \end{cases}$$

où k'' est définie comme suit : l'ensemble $E[f_n(t) = k;\, f_m(t) = k']$ est formé des intervalles $\left(\frac{q-1}{N}, \frac{q}{N}\right)$, où $q \equiv k \pmod{p_n}$ et $q \equiv k' \pmod{p_m}$. Puisque p_n et p_m sont premiers, il existe un reste k'' tel que ces deux conditions s'écrivent dans la forme $q \equiv k'' \pmod{p_n p_m}$. On a donc

$$|\operatorname{mes} E[f_n(t) = k;\, f_m(t) = k'] - \operatorname{mes} E[f_n(t) = k] \operatorname{mes} E[f_m(t) = k']| \leqq \frac{2}{N}.$$

Par conséquent, nous pouvons prendre $\delta_n = p_n \sqrt{\frac{2}{N}}$, pour valeur de la quantité qui figure dans le théorème 2. Nous aurons par ce choix

$$\sum \delta_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{p_n < \frac{\sqrt[3]{p_n}}{2}} 4 p_n^2 \leqq \frac{4\left(\frac{\sqrt{N}}{2}\right)^3}{N} = \frac{1}{2}.$$

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des intervalles $\left(\frac{n_j - 1}{N}, \frac{n_j}{N}\right]$ $(j = 1, 2, \ldots, Z)$ et nous aurons $|\mathcal{E}| = \frac{Z}{N}$. On a aussi, dans le cas envisagé,

$$\text{(8)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(V_n^{\mathcal{E}}[I] - V_n[I])^2}{V_n[I]} = \sum_{k=0}^{p_n - 1} \frac{\left(\frac{Z(p_n, k)}{Z} - W(p_n, k)\right)^2}{W(p_n, k)}.$$

En utilisant l'inégalité élémentaire

$$(a+b)^2 \leqq 2(a^2 + b^2),$$

et vu les relations [*voir* (7)]

$$\frac{1}{p_n} - \frac{1}{N} \leqq W(p_n, k) \leqq \frac{1}{p_n} + \frac{1}{N},$$

nous obtenons

$$(9)\qquad \sum_{k=0}^{p_n-1} p_n \left(\frac{Z(p_n,k)}{Z}-\frac{1}{p_n}\right)^2 \leqq 4\sum_{k=0}^{p_n-1}\frac{\left(\frac{Z(p_n,k)}{Z}-W(p_n,k)\right)^2}{W(p_n,k)}+1,$$

et le théorème 2 donne

$$(10)\qquad \sum_{p_n<\frac{\sqrt[3]{N}}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(V_n^{\mathcal{E}}[I]-V_n[I])^2}{V_n[I]}\leqq\frac{1}{|\mathcal{E}|(1-\delta^2)}=\frac{2N}{Z}.$$

Vu (8), (9) et (10) nous obtenons

$$\sum_{p_n<\frac{\sqrt[3]{N}}{2}} p_n \sum_{k=0}^{p_n-1}\left(\frac{Z(p_n,k)}{Z}-\frac{1}{p_n}\right)^2 \leqq \frac{9N}{Z}.$$

Cette inégalité est vraie, à plus forte raison lorsque la sommation extérieure s'étend seulement aux nombres premiers exceptionnels. Pour un nombre premier exceptionnel nous avons par définition

$$P_n \sum_{k=0}^{p_n-1}\left(\frac{Z(p_n,k)}{Z}-\frac{1}{p_n}\right)^2 \geqq \frac{p_n f(p_n)}{p_n^2 Q^2(p_n)} \geqq \frac{\tau}{Q^2},$$

donc, si Y désigne le nombre des nombres premiers exceptionnels inférieurs à $\frac{\sqrt[3]{N}}{2}$, nous obtiendrons

$$Y\frac{\tau}{Q^2}\leqq\frac{9N}{Z}\qquad\text{ou bien}\qquad Y\leqq\frac{9NQ^2}{Z\tau},$$

ce qui prouve le théorème.

En prenant par exemple $f(p)=p^{\frac{3}{4}}$ et $Q(p)=p^{\frac{1}{4}}$ on obtient que le nombre des premiers exceptionnels ne dépasse pas $\frac{9N}{Z}N^{\frac{1}{4}}$. Si $Z>\frac{C_1 N}{\log N}$, le nombre des nombres premiers exceptionnels est $\leqq C_2 N^{\frac{1}{4}}\log N$, ce qui est très petit par rapport au nombre de tous les nombres premiers inférieurs à $\frac{\sqrt[3]{N}}{2}$, qui est asymptotiquement égal à $\frac{3}{2}\frac{N^{\frac{1}{3}}}{\log N}$.

On peut prendre par exemple, pour la suite n_j la suite des nombres