JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

LÉONCE LESIEUR

Anneaux réguliers, anneaux de matrices

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 27 (1948), p. 205-253.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1948_9_27__205_0>

Anneaux réguliers, anneaux de matrices;

Par Léonce LESIEUR.

Introduction.

Rappelons la définition d'un anneau $\mathfrak{o}$, régulier à droite, donnée par O. Ore [6]:

1° L'anneau $\mathfrak{o}$ est sans diviseurs de zéro.

2° Deux éléments non nuls de $\mathfrak{o}$ ont toujours au moins un multiple commun à droite, différent de zéro, c'est-à-dire, l et m étant donnés, non nuls, il existe b et b' non nuls tels que

$$lb = mb'.$$

Dans le cas abélien, où la commutativité de l'anneau vis-à-vis de la multiplication est vérifiée, la propriété 1 fait de l'anneau $\mathfrak{o}$ un domaine d'intégrité, et la propriété 2 est satisfaite d'elle-même.

L'intérêt des anneaux réguliers provient des applications qu'on en peut faire dans la théorie des équations linéaires [6] et des modules [2], de la possibilité de leur immersion dans un corps de quotients [3] (chap. V), de l'importance des anneaux remarquables qu'ils comprennent : domaines d'intégrité, anneaux sans diviseurs de zéro qui ont un élément unité et dans lesquels tout idéal à droite est principal [3] (chap. VI).

Les matrices carrées d'ordres n sur $\mathfrak{o}$ sont les éléments d'un nouvel anneau O_n qui contient un sous-anneau isomorphe à $\mathfrak{o}$, et qu'on peut identifier avec lui (1). Mais la régularité à droite de $\mathfrak{o}$ n'entraîne pas

(1) C'est le sous-anneau des matrices *scalaires* dont les éléments de la diagonale principale sont égaux, et dont les autres sont nuls [4] (p. 5).

la régularité à droite de O_n, car O_n peut avoir des diviseurs de zéro, tandis que $\mathfrak{o}$ n'en a pas : il suffit de prendre pour $\mathfrak{o}$ un corps commutatif, cas particulier du domaine d'intégrité, donc de l'anneau régulier, et toutes les matrices à déterminant nul sont alors diviseurs de zéro dans O_n.

Donc, pas plus que la commutativité, la régularité de l'anneau $\mathfrak{o}$, au sens de Ore, n'est conservée quand on passe de l'anneau $\mathfrak{o}$ au suranneau O_n des matrices carrées d'ordre n sur $\mathfrak{o}$. C'est pourquoi je propose ici une définition plus générale, qui n'exclut pas les diviseurs de zéro tout en conservant les propriétés essentielles des anneaux réguliers, et telle que la régularité au sens généralisé pour l'anneau $\mathfrak{o}$ entraîne la régularité au sens généralisé pour l'anneau O_n. Cette idée d'invariance d'une propriété dans le passage de $\mathfrak{o}$ à O_n est d'ailleurs un guide intéressant pour l'unité de l'exposé. Toute propriété concernant $\mathfrak{o}$ n'est retenue que si elle satisfait à un théorème de transfert concernant O_n. Le Chapitre I traite des anneaux réguliers au sens généralisé, sans autre hypothèse supplémentaire que celle qui résulte de leur définition (définition I ou II du paragraphe **1**). L'existence d'un élément unité pour $\mathfrak{o}$ n'y est pas supposée, sauf mention expresse. Le Chapitre II présente deux propriétés générales (propriété 1 au paragraphe **1** et propriété 2 au paragraphe **2**) qui concernent les diviseurs de zéro de $\mathfrak{o}$ et satisfont au principe de transfert pour O_n. Tout anneau $\mathfrak{o}$, régulier à droite, qui satisfait la propriété 1 est susceptible d'une extension k qui satisfait la propriété 2, où l'existence d'un élément unité apparaît; k est alors un *pseudo-corps* de quotient de $\mathfrak{o}$ (§ **2**). Au paragraphe **4** est défini un espace projectif généralisé Π_n obtenu à partir d'un pseudo-corps, et qui comprend comme cas particulier l'espace réglé de l'espace projectif ordinaire ([1]). Le Chapitre III met en lumière de nouveaux cas particuliers de l'anneau régulier, plus généraux cependant que le pseudo-corps, basés sur une autre propriété supplémentaire (prop. 3). Celle-ci à son tour admet dans une autre direction une particularisation intéressante.

([1]) Les Chapitres I et II développent deux Notes présentées aux *Comptes rendus*, [5].

Tout ce travail ne concerne que les anneaux réguliers à droite, afin de mieux analyser dans les résultats ce qui tient à la nature dissymétrique des hypothèses.

Le schéma suivant rappelle par ordre de généralité décroissante les principales propriétés supposées pour l'anneau $\mathfrak{o}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Définition I ou II} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{Propriété } \mathbf{1} \arrow[dr] & & \text{Propriété } \mathbf{3} \arrow[dl] \\
 & \begin{array}{c}\text{Propriété } \mathbf{2} \\ \text{(pseudo-corps)}\end{array} &
\end{tikzcd}$$

CHAPITRE I.

Anneaux réguliers à droite.

1. NOUVELLE DÉFINITION D'UN ANNEAU RÉGULIER A DROITE. — $\mathfrak{o}$ est un anneau quelconque, commutatif ou non, avec ou sans véritables diviseurs de zéro. Nous supposons seulement qu'il existe au moins un élément f non diviseur de zéro à gauche, éliminant ainsi les anneaux qui ne contiennent, outre l'élément nul, que des véritables diviseurs de zéro. Alors, la relation

$$fu = 0 \qquad (u \neq 0)$$

est impossible pour cet élément f.

Appelons couple *non singulier* à droite l'ensemble de deux éléments $\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{o}$ qui ne vérifient aucun système

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} a'u = 0 \\ au = 0 \end{array}\right. \qquad (u \neq 0).$$

De plus, les deux couples $\binom{a}{a'}$ et $\binom{b}{b'}$ sont *linéairement indépendants à droite* quand il n'existe aucun système

$$(2) \qquad \begin{cases} au + bv = 0 \\ a'u + b'v = 0 \end{cases} \qquad (u \text{ ou } v \neq 0).$$

On remarque immédiatement : *Si deux couples sont linéairement indépendants à droite, aucun d'eux n'est singulier à droite,* car si $\binom{a}{a'}$, par exemple, était singulier, la solution u_0 du système (1) entraînerait pour le système (2) la solution $u = u_0$, $v = 0$, avec $u_0 \neq 0$, et l'indépendance linéaire à droite des deux couples ne serait pas réalisée.

Le couple $\binom{0}{0}$ est singulier; il en est de même pour le couple $\binom{a}{0}$ lorsque a est diviseur de zéro à gauche. Au contraire $\binom{a}{a'}$ est non singulier si a n'est pas diviseur de zéro à gauche.

Nous arrivons à la nouvelle définition d'un anneau régulier à droite :

Définition I. — *Un anneau $\mathfrak{o}$ est régulier à droite lorsque :*

1° *Deux éléments quelconques l et m de $\mathfrak{o}$ vérifient au moins une relation*

$$lb + mb' = 0,$$

où le couple $\binom{b}{b'}$ n'est pas singulier à droite.

2° *A ce couple non singulier $\binom{b}{b'}$ on peut associer un couple $\binom{a}{a'}$ au moins, tel que les deux couples $\binom{a}{a'}$ et $\binom{b}{b'}$ soient linéairement indépendants à droite.*

Une conséquence intéressante de la première partie de la définition est la suivante : *désignons par* S *le demi-groupe* multiplicatif [1] formé par les éléments de $\mathfrak{o}$ qui ne sont pas diviseurs de zéro à gauche; alors *quand l appartient à* S, *il en est de même pour b'.*

---

[1] Rappelons qu'un demi-groupe pour la multiplication est un sous-ensemble de $\mathfrak{O}$ qui contient en même temps que deux éléments a et b leurs produits ab. De plus, la multiplication y est associative comme dans $\mathfrak{O}$. (*Voir* [3], t. I, p. 34).

En effet, si b' n'est pas dans S, on a

$$b'u = 0 \qquad (u \neq 0),$$

ce qui entraîne

$$bu = 0,$$

et, comme $l \in S$,

$$bu = 0.$$

Le système

$$\begin{matrix} bu = 0 \\ b'u = 0 \end{matrix} \qquad (u \neq 0)$$

est possible, et le couple $\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$ n'est pas singulier, contrairement à l'hypothèse. De même :

Quand l et m appartiennent à S, b et $b' \in S$. S est donc demi-groupe réversible à gauche (1), et tout élément de S est simplifiable à gauche.

Exemple 1. — Voyons dès maintenant ce que deviennent ces notions quand l'anneau $\mathfrak{o}$ n'a pas de véritables diviseurs de zéro, sans se réduire au cas banal de l'anneau nul. *Dans ce cas, pour qu'un couple $\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$ ne soit pas singulier, il faut et il suffit que b et b' ne soient pas tous les deux nuls.* Nous allons montrer :

Un anneau régulier à droite, au sens de Ore, est un anneau régulier au sens précédent.

Prenons dans l'anneau $\mathfrak{o}$ régulier à droite, au sens de Ore, deux éléments quelconques l et m. Si aucun des éléments l et m n'est nul, il existe, d'après la définition rappelée dans l'introduction, b_0 et b'_0 non nuls tels que

$$lb_0 = mb'_0.$$

En prenant $b = b_0$, $b' = -b'_0$ on satisfait à la première condition de la définition I, car

$$lb_0 + m(-b'_0) = lb_0 - mb'_0 = 0$$

et le couple d'éléments $\begin{pmatrix} b_0 \\ -b'_0 \end{pmatrix}$ n'est pas singulier.

(1) *Voir* [3], t. I, p. 42.

Si l'un au moins des deux éléments l et m est nul, par exemple l, on satisfait encore à la première condition de la définition I en prenant pour b un élément non nul et pour b' l'élément nul

$$0b + m0 = 0,$$

le couple $\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ n'étant pas singulier, puisque $b \neq 0$.

Reste à vérifier la deuxième condition de la définition I. $\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$ n'étant pas singulier on a par exemple $b \neq 0$. Prenons pour couple $\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}$ le couple $\begin{pmatrix} 0 \\ a' \end{pmatrix}$ où $a' \neq 0$. Le système (2) devient

$$\begin{aligned} 0u + bv &= 0 \\ a'u + b'v &= 0 \end{aligned} \qquad (u \text{ ou } v \neq 0).$$

Mais comme b et $a' \neq 0$, et, par suite de l'absence de véritables diviseurs de zéro, les égalités entraînent

$$v = 0, \qquad \text{puis} \quad u = 0.$$

Le système (2) est impossible et les deux couples sont linéairement indépendants à droite. La propriété annoncée est démontrée. On vérifie de même :

Un anneau régulier à droite, au sens généralisé, *supposé sans véritables diviseurs de zéro* [1], est un anneau régulier au sens de Ore.

Tous les anneaux remarquables constituant des cas particuliers d'anneaux réguliers à droite au sens de Ore sont *a fortiori* cas particuliers d'anneaux réguliers à droite au sens généralisé. Dans la suite l'expression d'anneau régulier à droite désigne toujours un anneau régulier à droite au sens généralisé de la définition I. Cet anneau est *propre* s'il ne contient pas de véritables diviseurs de zéro, *impropre* dans le cas contraire. L'existence d'anneaux réguliers impropres est mise en lumière par l'exemple qui suit :

Exemple 2. — *L'anneau des matrices carrées d'ordre n sur un corps commutatif est un anneau régulier à droite au sens généralisé.*

---

[1] L'absence de véritables diviseurs de zéro à droite (ou à gauche) entraîne évidemment l'absence de véritables diviseurs de zéro à droite *et* à gauche.

Ce résultat est un cas particulier d'un théorème établi plus loin (th. 2, § 5).

Signalons une deuxième forme de la définition I.

Définition II. — *Pour qu'un anneau* $\mathfrak{o}$ *soit régulier à droite il faut et il suffit, l et m étant deux éléments quelconques de* $\mathfrak{o}$, *qu'on puisse trouver une matrice carrée d'ordre 2*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

non diviseur de zéro à gauche, telle que

$$(lm)\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = (ro) \tag{3}$$

tous les éléments appartenant à $\mathfrak{o}$ (1).

Cette condition est nécessaire. Les éléments $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ de la définition I fournissent une matrice vérifiant (3). Cette matrice n'est pas diviseur de zéro à gauche, car autrement

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \qquad (u \text{ ou } v \neq 0),$$

c'est-à-dire

$$\begin{matrix} a\,u + b\,v = 0 \\ a'u + b'v = 0 \end{matrix} \qquad (u \text{ ou } v \neq 0)$$

et d'après (2) les couples $\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$ ne seraient pas linéairement indépendants à droite.

La condition II est également suffisante, car (3) entraîne

$$lb + mb' = 0.$$

Les deux couples $\begin{pmatrix} a \\ a' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ b' \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants à droite, puisque la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ n'est pas diviseur de zéro à gauche. Il en

---

(1) Pour la multiplication lignes par colonnes et les propriétés classiques des matrices, *voir* [4], ou [7], t. II, § 104, ou [3], t. II, Chap. VIII B.

résulte d'après une remarque antérieure que le couple $\binom{b}{b'}$ n'est pas singulier à droite, et le 1° de la définition I est satisfait. Le 2° l'est aussi puisqu'au couple $\binom{b}{b'}$ on peut associer le couple $\binom{a}{a'}$ tel que les deux couples $\binom{a}{a'}$ et $\binom{b}{b'}$ soient linéairement indépendants à droite.

2. Forme réduite d'une matrice carrée sur $\mathfrak{o}$. — La définition II permet d'écrire pour toute matrice carrée d'ordre 2 sur $\mathfrak{o}$

$$\begin{pmatrix} l & m \\ l' & m' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & 0 \\ c' & d' \end{pmatrix},$$

la matrice multiplicateur $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ n'étant pas diviseur de zéro à gauche. On peut donc, en multipliant à droite par une matrice carrée K d'ordre 2, non diviseur de zéro à gauche, ramener toute matrice carrée d'ordre 2 à une forme particulière ayant zéro pour élément situé au-dessus de la diagonale principale. Nous allons étendre cette propriété aux matrices carrées d'ordre n quelconque; n étant fixé, ces matrices sont les éléments d'un anneau O_n pour lequel nons énonçons d'abord quelques propriétés simples du sous-ensemble S_n de leurs éléments qui ne sont pas diviseurs de zéro à gauche.

Le demi-groupe S_n. — Certaines propriétés de S_n tiennent simplement au caractère associatif de O_n vis-à-vis de la multiplication, par exemple :

Quand deux matrices K et $K' \in S_n$, il en est de même pour le produit $K\,K'$.

En effet, si KK' est diviseur de zéro à gauche dans O_n, on a

$$KK'u = 0 \qquad (u \neq 0),$$

d'où, puisque $K \in S_n$,

$$K'u = 0$$

et, comme $K' \in S_n$,

$$u = 0.$$

On arrive à une contradiction. Donc :

LEMME 1. — *Le sous-ensemble* S_n *des matrices de* O_n *qui ne sont pas diviseurs de zéro à gauche forme un demi-groupe multiplicatif.*

Soient A une matrice quelconque appartenant à O_n, a_i^j ses n^2 éléments, l'indice i étant celui de la ligne, l'indice j celui de la colonne

$$A = (a_i^j) \in O_n; \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$
$$a_i^j \in \mathfrak{o}$$

Pour que $A \in S_n$ il faut et il suffit que ses éléments a_i^j ne vérifient aucun système de la forme.

$$\begin{aligned} &a_1^1 u_1 + a_1^2 u_2 + \ldots + a_1^n u_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &a_n^1 u_1 + a_n^2 u_2 + \ldots + a_n^n u_n = 0, \end{aligned}$$

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ n'étant pas tous nuls; ou, en abrégé

$$(4) \qquad \begin{cases} a_i^j u_j = 0 & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ u_j \neq 0 \quad \text{pour un } j \text{ au moins}; & (j = i, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Cela s'exprime sous la forme :

Lemme 2. — *Pour que* $A \in S_n$ *il faut et il suffit que ses colonnes soient linéairement indépendantes à droite.*

On en déduit sans peine :

Lemme 3. — *Le demi-groupe* S_n *est invariant vis-à-vis des opérations suivantes effectuées sur l'une quelconque d'une matrice* A *qui lui appartient :*

1° *Échanger deux colonnes entre elles ou deux lignes entre elles ;*

2° *Multiplier à droite une colonne de* A *par un élément* k *de* $\mathfrak{o}$ *non diviseur de zéro à gauche ;*

3° *Ajouter aux éléments d'une colonne une combinaison linéaire à droite des autres colonnes, à coefficients quelconques dans* $\mathfrak{o}$.

Nous avons supposé dans $\mathfrak{o}$ l'existence d'un élément au moins, f, non diviseur de zéro à gauche.

On en déduit dans O_n la matrice scalaire

$$F = \begin{pmatrix} f & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f \end{pmatrix}$$

non diviseur de zéro à gauche, car le système (4) devient pour F

$$f u_1 = 0, \quad f u_2 = 0, \quad \dots, \quad f u_n = 0,$$
$$u_1, \quad \text{ou } u_2, \quad \dots, \quad \text{ou } u_n \neq 0$$

et il est impossible. Donc :

Lemme 4. — *Le demi-groupe* S_n *n'est pas vide* (¹).

Plus généralement :

Lemme 5. — *Pour qu'une matrice diagonale appartienne à* S_n *il faut et il suffit qu'aucun des éléments de sa diagonale ne soit diviseur de zéro à gauche.*

Soit, en effet,

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n^n \end{pmatrix};$$

Le système (4) s'écrit pour **A** :

$$a_1^1 u_1 = 0, \quad a_2^2 u_2 = 0, \quad \dots, \quad a_n^n u_n = 0,$$
$$u_j \neq 0 \qquad (\text{pour un } j \text{ au moins}).$$

Pour qu'il soit possible il faut donc que a_j^j soit nul ou véritable diviseur de zéro à gauche. Réciproquement, si $a_{j_0}^{j_0}$ est diviseur de zéro à gauche on a

$$a_{j_0}^{j_0} u_{j_0} = 0 \qquad (u_{j_0} \neq 0)$$

(¹) On peut prendre $f = e$ dans le cas où $\mathfrak{o}$ possède un élément unité e (*voir* Chap. II, § 1).

et le système (4) est possible avec la solution

$$u_j = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq j_0,$$
$$u_j = u_{j_0} \quad \text{pour} \quad j = j_0,$$

A est diviseur de zéro à gauche. Donc A est diviseur de zéro à gauche si, et seulement si, l'un des éléments de sa diagonale principale est diviseur de zéro à gauche. La propriété complémentaire constitue le lemme 5.

La dernière propriété mentionnée ici concerne des matrices appartenant à des demi-groupes S_p, S_q, S_r pour diverses valeurs de p, q, r.

Lemme 6. — *Supposons*

$$A_p \in S_p, \qquad A_q \in S_q, \qquad A_r \in S_r.$$

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} A_p & 0 & 0 \\ 0 & A_q & 0 \\ 0 & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

appartient à $S_n = S_{p+q+r}$.

Le système (4) donne en effet

$$A\begin{pmatrix} u \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = 0$$

ou

$$A_p\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} = 0, \qquad A_q\begin{pmatrix} u_{p+1} \\ u_{p+2} \\ \vdots \\ u_{p+q} \end{pmatrix} = 0, \qquad A_r\begin{pmatrix} u_{p+q+1} \\ u_{p+q+2} \\ \vdots \\ u_{p+q+r} \end{pmatrix} = 0,$$

d'où, d'après l'hypothèse,

$$u_1 = \ldots = u_p = 0, \qquad u_{p+1} = \ldots = u_{p+q} = 0, \qquad u_{p+q+1} = \ldots = u_n = 0.$$

Le système (4) est impossible et $A \in S_n$.

En particulier on peut prendre pour A_p et A_r des matrices scalaires obtenues à partir d'un élément f de $\mathfrak{o}$ non diviseur de zéro à gauche (lemme 4). Cette remarque est utilisée pour la démonstration du théorème auquel nous arrivons maintenant.

THÉORÈME 1 (ou de réduction). — *On peut, en multipliant à droite par une matrice carrée* K *d'ordre n, non diviseur de zéro à gauche dans* O_n, *ramener toute matrice* A *carrée, d'ordre n, sur un anneau* $\mathfrak{o}$ *régulier à droite, à la forme réduite de Hermite, n'ayant que des zéros au-dessus de la diagonale principale.*

$$\boxed{AK = H.}$$

Le théorème pour $n = 2$ provient directement de la définition II, comme on l'a vu au début du paragraphe. Nous raisonnons donc par récurrence sur l'ordre n, en supposant le théorème établi pour l'ordre $n - 1$.

Soit A une matrice quelconque appartenant à O_n,

$$A = (a_i^j) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

La multiplication, dans l'énoncé du théorème, peut être réalisée par un nombre fini de facteurs à droite $K_1, K_2, \ldots, K_s$ appartenant à S_n. Le facteur produit

$$K = K_1 K_2 \ldots K_S$$

appartient encore à S_n (lemme 1).

Considérons dans A la matrice d'ordre $n - 1$ obtenue par suppression de la première colonne et de la dernière ligne, soit

$$A_n^1 \in O_{n-1}.$$

Il existe, d'après l'hypothèse d'induction, une matrice Q_0 d'ordre $n - 1$, appartenant à S_{n-1}, telle que le produit

$$P_0 = A_n^1 Q_0$$

ait la forme réduite de Hermite dans O_{n-1}. Prenons

$$K_0 = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & Q_0 \end{pmatrix},$$

f étant élément de $\mathfrak{o}$ non diviseur de zéro à gauche. K_0 appartient à S_n (lemme 6).

Nous avons

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & A_n^1 \\ \hline a_n^1 & \mu \end{array}\right), \qquad K_0 = \left(\begin{array}{c|c} f & 0 \\ \hline 0 & Q_0 \end{array}\right).$$

Formons

$$A_0 = AK_0 = \left(\begin{array}{c|c} \lambda f & \diagdown P_0 \diagdown \\ \hline a_n^1 f & \mu Q_0 \end{array}\right).$$

Dans A_0, d'après la propriété de P_0, tous les éléments a_i^j situés au-dessus de la diagonale principale de P_0 sont nuls, soit pour

$$j - i > 1.$$

C'est la première étape de la réduction. Il reste pour établir le théorème, à annuler dans le produit par un facteur à droite, les termes de la diagonale non principale

$$j - i = 1.$$

Dans la première ligne de A_0, les deux premiers éléments seulement, a_1^1 et a_1^2, peuvent être différents de zéro. Il existe, d'après la définition II, une matrice

$$Q_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \in S_2,$$

telle que

$$(a_1^1 \quad a_1^2) \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = (c \quad 0).$$

Formons

$$K_1 = \left(\begin{array}{cc|cccc} a & b & & & & \\ a' & b' & & 0 & & \\ \hline & & f & 0 & \ldots & 0 \\ & & 0 & f & \ldots & 0 \\ & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & 0 & \ldots & f \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} Q_1 & 0 \\ \hline 0 & F \end{array}\right),$$

où $F \in S_{n-2}$. D'après le lemme 6, $K_1 \in S_n$. Nous avons

$$A_0 = \left(\begin{array}{cc|c} a_1^1 & a_1^2 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\lambda_0} & \mu_0 \end{array}\right),$$

μ_0 étant une matrice rectangulaire à $n - 1$ lignes et $n - 2$ colonnes, obtenue en bordant par une dernière ligne une matrice carrée d'ordre $n-2$ ayant la forme réduite de Hermite. Dans le produit

$$A_1 = A_0 K_1 = \left(\begin{array}{cc|c} c & 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\lambda_0 Q_1} & \mu_0 F \end{array}\right),$$

la matrice rectangulaire $\mu_0 F$ a les mêmes propriétés que μ_0. Le résultat de cette deuxième opération est donc d'annuler, outre les a_i^j qui vérifient $j-i>1$, le terme supplémentaire a_1^2. Supposons qu'on ait ainsi, par p multiplications successives, annulé les p premiers termes de la diagonale $j-i=1$ dans le produit A_p. Celui-ci a donc la forme

$$A_p = \left(\begin{array}{c|cc|c} H_p & \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \\ \hline \lambda'_p & a_{p+1}^{p+1} & a_{p+1}^{p+2} & 0 \\ \hline \mu'_p & \multicolumn{2}{c|}{\lambda_p} & \mu_p \end{array}\right),$$

où H_p est une matrice carrée d'ordre p ayant la forme réduite de Hermite, et μ_p une matrice rectangulaire à $n-p-1$ lignes et $n-p-2$ colonnes obtenue en bordant par une dernière ligne une matrice carrée d'ordre $n-p-2$ ayant la forme réduite de Hermite. Formons (définition II)

$$(\, a_{p+1}^{p+1} \quad a_{p+1}^{p+2}\,)\,(Q_p) = (c_p \quad 0),$$

où

$$Q_p \in S_2,$$

puis

$$K_p = \left(\begin{array}{c|c|c} F_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & Q_p & 0 \\ \hline 0 & 0 & F_{n-p-2} \end{array}\right),$$

F_p étant la matrice scalaire avec p éléments f; F_{n-p-2} la matrice scalaire à $n-p-2$ éléments f. D'après le lemme 6

$$K_p \in S_n.$$

Multiplions A_p par K_p

$$A_{p+1} = A_p K_p = \left(\begin{array}{c|cc|c} H_p F_p & \multicolumn{2}{c|}{0} & 0 \\ \hline \lambda'_p F_p & c_p & 0 & 0 \\ \hline \mu'_p F_p & \multicolumn{2}{c|}{\lambda_p Q_p} & \mu_p F_{n-p-2} \end{array}\right),$$

$H_p F_p$ est une matrice carrée d'ordre p ramenée à la forme réduite, et $\mu_p F_{n-p-2}$ a les mêmes propriétés que μ_p. Cette opération a donc pour résultat d'annuler le terme a_{p+1}^{p+2} dans le produit A_{p+1}, où les $p+1$ premiers termes a_i^j de la diagonale $j-i=1$ sont nuls.

Ainsi se trouve établi, par induction complète sur p, qu'on peut annuler tous les termes de la diagonale $j-i=1$ par $n-1$ multiplications successives, les facteurs étant

$$K_1, \quad K_2, \quad \ldots, \quad K_{n-1}.$$

En y ajoutant le premier facteur K_0, le théorème 1 est démontré, et le facteur multiplicatif est

$$K = K_0 K_1 \ldots K_{n-1}.$$

Remarque 1. — La méthode précédente donne en même temps le moyen pratique d'effectuer la réduction; il suffit au plus de

$$X_n = X_{n-1} + n - 1,$$

multiplications à droite par des facteurs dépendant de A. Comme

$$X_2 = 1$$

on en tire

$$X_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

La réduction s'obtient donc par un nombre de multiplications égal au nombre de zéros de la matrice réduite.

Remarque 2. — Remplaçons le facteur K du produit

$$AK = H$$

par le facteur K′ qu'on déduit de K en renversant l'ordre des colonnes. On obtient

$$AK' = H',$$

H′ provient de H par la même opération, il ne contient donc que des zéros au-dessus de la deuxième diagonale. De plus, d'après le lemme 3, K′ appartient à S_n comme K. Donc :

Dans le théorème 1 *la forme réduite* H *peut être remplacée par une autre forme réduite* H′ *n'ayant que des zéros au-dessus de la deuxième diagonale.*

Remarque 3. — En commençant les opérations de réduction par la matrice A_n^1 d'ordre $n+1$ obtenue en supprimant dans A la première ligne et la dernière colonne, et en appliquant la méthode suivie pour la démonstration du théorème 1, *on obtient une nouvelle forme réduite* H″ *n'ayant que des zéros au-dessous de la diagonale principale.*

Celle-ci permet à son tour d'arriver à une quatrième forme réduite H‴ *n'ayant que des zéros au-dessous de la deuxième diagonale.*

Remarque 4. — La forme réduite H n'est pas nécessairement unique pour une matrice donnée A, mais quand $H \in S_n$, il en est de même pour A. Or la propriété suivante donne un moyen de reconnaître dans certains cas que H, et par suite A, appartient à S_n :

Une condition suffisante pour qu'une matrice réduite H *ne soit pas diviseur de zéro à gauche dans* O_n *est qu'aucun des éléments de sa diagonale principale ne soit diviseur de zéro à gauche dans* $\mathfrak{o}$.

Supposons en effet H diviseur de zéro à gauche. On aurait

$$\begin{array}{l} a_1^1 u_1 = 0 \\ a_2^1 u_1 + a_2^2 u_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n^1 u_1 + a_n^2 u_2 + \dots + a_n^n u_n = 0. \end{array} \qquad (u_1, \text{ ou } u_2, \ \dots, \text{ ou } u_n \neq 0).$$

Si aucun des a_i^i n'était diviseur de zéro à gauche dans $\mathfrak{o}$, il viendrait successivement

$$u_1 = 0, \qquad u_2 = 0, \qquad \dots, \qquad u_n = 0$$

et H ne saurait être diviseur de zéro à gauche.

La condition de la remarque 4 est nécessaire et suffisante quand H est une matrice diagonale (lemme 5). Elle est également nécessaire et suffisante pour une matrice réduite H sur anneau $\mathfrak{o}$ régulier à droite ayant une propriété supplémentaire précisée au Chapitre II (propr. 1, § 1, Coroll. 1).

5. Applications du théorème de réduction. — Le théorème de réduction permet de démontrer la régularité à droite de l'anneau O_n des matrices carrées d'ordre n sur un anneau $\mathfrak{o}$ régulier à droite.

THÉORÈME 2. — *L'anneau O_n des matrices carrées d'ordre n sur un anneau $\mathfrak{o}$ régulier à droite est lui-même un anneau régulier à droite* (¹).

Soient L et M deux matrices carrées d'ordre n sur $\mathfrak{o}$. Considérons la matrice carrée d'ordre $2n$

$$A = \begin{pmatrix} L & M \\ O & O \end{pmatrix}; \qquad O,\quad L,\quad M \in O_n; \qquad A \in O_{2n}.$$

Il existe (théorème 1) une matrice $K \in O_{2n}$, non diviseur de zéro à gauche, telle que

$$AK = H,$$

H ayant la forme réduite de Hermite dans O_{2n}. Posons

$$K = \begin{pmatrix} K_1^1 & K_1^2 \\ K_2^1 & K_2^2 \end{pmatrix},$$

où les K_i^j appartiennent à O_n. On a

$$H = AK = \begin{pmatrix} LK_1^1 + MK_2^1 & LK_1^2 + MK_2^2 \\ O & O \end{pmatrix},$$

avec, puisque H est réduite dans O_{2n}

$$LK_1^2 + MK_2^2 = 0.$$

En posant

$$LK_1^1 + MK_1^2 = C \in O_n,$$

il vient

$$(LM)\begin{pmatrix} K_1^1 & K_1^2 \\ K_2^1 & K_2^2 \end{pmatrix} = (C \quad O) \tag{5}$$

tous les termes appartenant à O_n. De plus K n'est pas diviseur de zéro à gauche; la propriété caractéristique d'un anneau régulier à droite (définition II, § 1) est donc vérifiée et le théorème 2 est établi (²). On peut ajouter que dans la relation (5), C a la forme réduite sur $\mathfrak{o}$.

Le théorème 1 permet aussi de ramener une ligne de n éléments quelconques appartenant à $\mathfrak{o}$ à une forme réduite simple. Considérons

$$(u_1 u_2 \ldots u_n) \quad (u_i \in \mathfrak{o}).$$

(¹) Le demi-groupe S_n jouit alors des propriétés de S; il est comme lui réversible à gauche et simplifiable à gauche.

(²) L'idée de la démonstration est empruntée à A. Châtelet [1].

On forme une matrice carrée A en bordant par $n-1$ lignes de zéros

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

Dans la matrice réduite

$$H = AK$$

du théorème 1, on ne peut avoir obligatoirement qu'un élément au plus non nul, l'élément $a_1^1 = C$. D'où

$$\boxed{\begin{matrix} (u_1\, u_2 \dots u_n)\, K = (c\, 0 \dots 0) \\ K \in S_n. \end{matrix}} \tag{6}$$

Conséquence 1. — *Lorsque la ligne* $(u_1\, u_2 \dots u_n)$ *est singulière à gauche, c'est-à-dire quand il existe* $v \neq 0$ *tel que*

$$vu_1 = 0, \qquad vu_2 = 0, \qquad \dots, \qquad vu_n = 0;$$

on a aussi

$$vc = 0 \qquad (v \neq 0)$$

et c est diviseur de zéro à droite. La réciproque est étudiée pour les anneaux un peu plus particuliers du Chapitre II (§ **1**, Conséq. 1) et du Chapitre III (§ **2**, Conséq. 1).

Le théorème 1 donne également une importante application aux équations linéaires et homogènes sur $\mathfrak{o}$. Pour abréger le langage appelons *vecteur* à n composantes sur $\mathfrak{o}$ une colonne de n éléments appartenant à $\mathfrak{o}$

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad (x_i \in \mathfrak{o}).$$

Distinguons les *vecteurs singuliers* pour lesquels il existe un facteur à droite u tel que

$$\alpha u = 0 \qquad (u \neq 0),$$

soit

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 u = 0 \\ x_2 u = 0 \\ \dots\dots\dots \\ x_n u = 0 \end{array}\right. \qquad (u \neq 0) \tag{7}$$

et les *vecteurs non singuliers*, pour lesquels le système (7) est impossible. Définissons l'égalité de deux vecteurs par celle de leurs composantes, la somme de deux vecteurs et le produit à droite par un élément de $\mathfrak{o}$, au moyen des règles habituelles ([7], § 104, t. II, ou [3] Chap. VII, A 12, t. II). On détermine alors un module M_n, à droite, de vecteurs sur $\mathfrak{o}$, ou $\mathfrak{o}$ module à droite de dimension n.

Considérons n équations linéaires à droite, homogènes, à $n+1$ inconnues x_j

$$\begin{gathered}
a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n + a_1^{n+1} x_{n+1} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\
a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^n x_n + a_1^{n+1} x_{n+1} = 0,
\end{gathered}$$

ou, en abrégé,

$$(8) \qquad a_j^i x_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \qquad j = 1, 2, \ldots, n, n+1).$$

Elles admettent la solution banale

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x_{n+1} = 0.$$

Plus généralement, nous dirons qu'une solution

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad x_{n+1}$$

est *singulière*, ou non, suivant que le vecteur

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in M_{n+1}$$

est singulier ou non.

Nous avons alors le

THÉORÈME 3. — *Sur un anneau $\mathfrak{o}$ régulier à droite, propre ou impropre, n équations homogènes, linéaires à droite, à $n+1$ inconnues, ont toujours au moins une solution non singulière.*

Les équations (8) s'écrivent encore :

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n & a_n^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots\,\vdots\,\vdots & \vdots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n & a_n^{n+1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = 0.$$

La matrice A constituant le premier facteur appartient à l'anneau O_{n+1}. Le théorème 1 donne

$$AK = H, \qquad K \in S_{n+1},$$

où H est réduite et ne contient que des zéros dans sa dernière ligne, donc aussi dans sa dernière colonne.

Choisissons f dans $\mathfrak{o}$, non diviseur de zéro à gauche. On a

$$(9) \qquad H\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix} = 0, \qquad AK\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix} = 0, \qquad K\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

et la solution (9) ainsi obtenue n'est pas singulière, car

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} u = 0$$

entraîne

$$K\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ fu \end{pmatrix} = 0$$

et, comme K n'est pas diviseur de zéro à gauche,

$$fu = 0$$

puis, à cause du choix de f,

$$u = 0.$$

La singularité est impossible, d'après (7).

Cette méthode fournit, en même temps qu'une preuve du théorème 3, un moyen pratique pour obtenir une solution (Rem. 1, § **2**).

Le théorème (3) s'interprète immédiatement en langage géométrique pour le module de vecteurs M_n défini plus haut. Soient les $n+1$ vecteurs

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_n^1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 \\ \vdots \\ a_n^2 \end{pmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \alpha^n = \begin{pmatrix} a_1^n \\ \vdots \\ a_n^n \end{pmatrix}, \qquad \alpha^{n+1} = \begin{pmatrix} a_1^{n+1} \\ \vdots \\ a_n^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Les équations (8) traduisent la dépendance linéaire à droite de ces vecteurs :

$$\alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2 + \ldots + \alpha^n x_n + \alpha^{n+1} x_{n+1} = 0. \tag{10}$$

Les coefficients x_j d'une solution non singulière de (8) exigent même une dépendance linéaire plus forte que la dépendance linéaire ordinaire où les coefficients x_j sont seulement supposés non tous nuls. Cette dépendance linéaire définie par une solution non singulière s'appelle *dépendance linéaire non singulière* (à droite). La dépendance linéaire non singulière entraîne la dépendance linéaire ordinaire.

La non-singularité de la solution x_j admet une conséquence intéressante pour la suite (Chap. II, § 3, th. 7). Supposons les n vecteurs $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ de la relation (10) linéairement indépendants à droite; on peut montrer que le coefficient x_{n+1} est alors non diviseur de zéro à gauche. En effet,

$$x_{n+1} u = 0 \qquad (u \neq 0)$$

entraîne en multipliant par u à droite dans (10),

$$\alpha^1 x_1 u + \alpha^2 x_2 u + \ldots + \alpha^n x_n u = 0.$$

Les $x_i u (i = i, 2, \ldots, n)$ ne sont pas tous nuls, sans quoi la solution $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ serait singulière. Les vecteurs $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ se trouvent alors en dépendance linéaire à droite, contrairement à l'hypothèse. D'où :

Corollaire 1. — *Dans la dépendance linéaire, non singulière à droite exprimée par la relation* (10), x_{n+1} *n'est pas diviseur de zéro à gauche quand les n vecteurs* $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ *sont linéairement indépendants à droite.*

Quand l'anneau $\mathfrak{o}$ possède un élément unité e, le module M_n a la base unitaire

$$\varepsilon^1 = \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \varepsilon^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ e \end{pmatrix}$$

et tout $\mathfrak{o}$ — module à droite ayant une base unitaire de rang n est isomorphe au module M_n. On en déduit :

THÉORÈME 4. — *Dans un $\mathfrak{o}$ — module à droite, avec une base unitaire de n vecteurs, $\mathfrak{o}$ étant un anneau régulier à droite, propre ou impropre, $n+1$ vecteurs sont toujours en dépendance linéaire non singulière à droite.*

Cette propriété généralise un théorème établi, dans le cas particulier où $\mathfrak{o}$ est propre, par P. Dubreil ([2], th. 5, p. 9), qui utilise le corps des quotients de $\mathfrak{o}$ ([1]).

Signalons un deuxième corollaire du théorème 3.

COROLLAIRE 2. — *Quand il existe une relation linéaire à gauche entre les lignes d'une matrice carrée d'ordre n sur $\mathfrak{o}$, dont un coefficient au moins n'est pas diviseur de zéro à gauche, les colonnes sont en dépendance linéaire non singulière à droite.*

Considérons la matrice

$$A = (a_i^j) \in O_n,$$

dont les éléments sont liés par

$$(11) \qquad (v_1 v_2 \ldots v_{n-1} v_n) \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1}^1 & a_{n-1}^2 & \ldots & a_{n-1}^n \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{pmatrix} = 0,$$

où v_n n'est pas diviseur de zéro à gauche. Il existe (théorème 3) une solution $x_1\, x_2 \ldots x_n$ non singulière pour

$$\begin{aligned} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots, \\ a_{n-1}^1 x_1 + a_{n-1}^2 x_2 + \ldots + a_{n-1}^n x_n &= 0. \end{aligned}$$

---

(1) L'étude d'un *pseudo-corps de quotients* pour $\mathfrak{o}$ se trouve au Chapitre II, (§ **2**), dans le cas propre ou impropre.

On déduit de l'hypothèse (11) en multipliant par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ à droite

$$v_n(a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^n x_n) = 0$$

et

$$a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + \ldots + a_n^n x_n = 0,$$

ce qui démontre le corollaire.

Avant de quitter les anneaux réguliers les plus généraux pour aborder aux Chapitres II et III des cas particuliers remarquables, indiquons une propriété dans $\mathfrak{o}$ qui ne tient qu'à la condition 1° de la définition I et qui est valable par conséquent pour des anneaux plus généraux encore que les anneaux réguliers.

Dans le module M_n de vecteurs à n composantes sur $\mathfrak{o}$ on définit comme plus haut les vecteurs non singuliers et la dépendance non singulière à droite de deux vecteurs : *la dépendance non singulière à droite de vecteurs est une équivalence dans l'ensemble des vecteurs non singuliers de* M_n. Soient, en effet, deux vecteurs non singuliers α^1 et α^2, en dépendance non singulière

$$\text{(R)} \qquad \alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2 = 0,$$

x_1 n'est jamais diviseur de zéro à gauche, car

$$x_1 u = 0 \qquad (u \neq 0)$$

donne

$$\alpha^1 x_1 u = 0,$$

d'où

$$\alpha^2 x_2 u = 0,$$

$x_2\, u = v$ n'est pas nul à cause de la non-singularité du couple $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Comme $\alpha^2\, v = 0$, $v \neq 0$, le vecteur α^2 est singulier, contrairement à l'hypothèse. On montre de même que x_2 n'est pas diviseur de zéro à gauche. Pour que (R) qui est réflexive ($\alpha^1 f - \alpha^1 f = o$) et symétrique, soit une équivalence, il suffit qu'elle soit transitive. Supposons

$$\alpha^2 x_3 + \alpha^3 x_4 = 0,$$

x_2 et x_3 n'étant pas diviseurs de zéro à gauche on peut trouver b et b' non diviseurs de zéro à gauche tels que

$$x_2 b + x_3 b' = 0,$$

d'après une remarque suivant immédiatement la définition I. On en déduit

$$\alpha^1 x_1 b + \alpha^3 x_4 b' = 0,$$

avec des coefficients non diviseurs de zéro à gauche, ce qui prouve la dépendance non singulière de α^1 et α^3.

Les classes d'équivalence ainsi obtenues seront reprises au Chapitre II (§ 4).

CHAPITRE II.

Pseudo-corps réguliers à droite.

$\mathfrak{o}$ est toujours un anneau régulier à droite au sens généralisé, propre ou impropre, commutatif ou non, avec ou sans élément unité, comme au Chapitre I. Nous allons indiquer successivement deux propriétés supplémentaires de l'anneau $\mathfrak{o}$ (propriétés 1 et 2) qui se conservent pour l'anneau $\mathfrak{o}_n$ des matrices carrées d'ordre n sur $\mathfrak{o}$.

1. Anneaux réguliers à droite dans lesquels tout diviseur de zéro à droite est également diviseur de zéro à gauche. — Nous supposons donc pour $\mathfrak{o}$ la

Propriété 1.

$$\boxed{ua = 0 \quad (u \neq 0) \quad \text{entraîne} \quad am = 0 \quad (m \neq 0).}$$

Il s'agit là d'une hypothèse sur les véritables diviseurs de zéro dans $\mathfrak{o}$, car l'élément $a = 0$ la vérifie toujours. Par suite :

Les anneaux réguliers à droite au sens de Ore (c'est-à-dire propres) *possèdent la propriété* 1.

La propriété 1 peut encore s'énoncer sous la forme équivalente :

Dans $\mathfrak{o}$, tout élément qui n'est pas diviseur de zéro à gauche, n'est pas non plus diviseur de zéro à droite.

Nous avons déjà vu dans le cas général (remarque suivant la définition I au paragraphe **1**, Chap. I) que le sous-ensemble S des éléments de $\mathfrak{o}$ non diviseurs de zéro à gauche formait un demi-groupe réversible à gauche, dans lequel tout élément est simplifiable à gauche. La propriété 1 fait de S un *semi-groupe régulier à droite,* c'est-à-dire un demi-groupe réversible à gauche dans lequel la règle de simplification à droite et à gauche est valable. (Définition donnée dans [3], t. I, p. 42.)

Remarque. — Donnons une conséquence de la propriété 1 pour l'anneau $\mathfrak{o}$ lui-même : *deux éléments a et h quelconques de* $\mathfrak{o}$ *liés par*

$$as = h, \qquad s \in \mathrm{S}$$

sont en même temps diviseurs de zéro à gauche, ou non diviseurs de zéro à gauche (¹).

Il suffit de démontrer la propriété pour les diviseurs de zéro à gauche; il est clair que si h est diviseur de zéro à gauche, il en est de même pour a, puisque $s \in \mathrm{S}$. Réciproquement, supposons a diviseur de zéro à gauche,

$$au = 0 \qquad (u \neq 0).$$

On peut trouver l et m tels que

$$ul + sm = 0, \qquad l \in \mathrm{S}$$

d'après la remarque suivant la définition I (Chap. I, § **1**).

On en tire

$$aul = asm = hm = 0.$$

Il faut montrer que $m \neq 0$. Si m était nul, on aurait

$$ul = 0$$

et, comme $u \neq 0$, l serait diviseur de zéro à droite. D'après la propriété 1, il serait aussi diviseur de zéro à gauche, ce qui est impossible puisque $l \in \mathrm{S}$.

(¹) Cette remarque ne s'appuie que sur la propriété 1 et le 1° de la définition I du Chapitre I (§ **1**).

Étudions maintenant comment se reflète la propriété 1 pour l'anneau $\mathfrak{o}_n$. Soit A une matrice carrée d'ordre n sur $\mathfrak{o}$, diviseur de zéro à droite; ses éléments a_i^j vérifient donc

$$(1) \qquad (v^1 v^2 \ldots v^n) \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{pmatrix} = 0,$$

où les v^i ne sont pas tous nuls; les lignes de A sont donc supposées linéairement dépendantes à gauche. Nous allons montrer que A est également diviseur de zéro à gauche. Il suffit de raisonner sur la forme réduite H obtenue à partir de A par le théorème 1

$$\mathrm{H} = \mathrm{AK},$$

car si

$$\mathrm{HU} = 0 \qquad (\mathrm{U} \neq 0),$$

on a

$$\mathrm{AKU} = 0 \qquad (\mathrm{KU} \neq 0),$$

puisque K n'est pas diviseur de zéro à gauche. De plus,

$$\mathrm{VA} = 0 \qquad (\mathrm{V} \neq 0)$$

entraîne

$$\mathrm{VH} = 0 \qquad (\mathrm{V} \neq 0)$$

et H est diviseur de zéro à droite. On a donc

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{r} v^1 a_1^1 + v^2 a_2^1 + \ldots + v^n a_n^1 = 0, \\ v^2 a_2^2 + \ldots + v^n a_n^2 = 0, \\ \ddots \qquad \\ v^n a_n^n = 0, \end{array} \right.$$

l'un des v^i n'étant pas nul. Il en résulte que l'un des a_i^i est diviseur de zéro à droite; autrement, les équations (2) donneraient en partant de la dernière,

$$v^n = 0, \qquad v^{n-1} = 0, \qquad \ldots, \qquad v^1 = 0,$$

ce qui est impossible. On peut donc supposer a_p^p diviseur de zéro à droite, *donc diviseur de zéro à gauche* d'après la propriété 1. Nous allons en déduire une solution en u du système

$$(3)\qquad \begin{cases} a_1^1 u_1 = 0 \\ a_2^1 u_1 + a_2^2 u_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n^1 u_1 + a_n^2 u_2 + \dots + a_n^n u_n = 0 \end{cases} \qquad (u_1,\ \text{ou}\ u_2,\ \dots,\ \text{ou}\ u_n \neq 0).$$

Prenons $u_i = 0$ sauf pour $i = p$ et $i = p + 1$. Le système devient

$$\begin{aligned} a_p^p u_p &= 0 \\ a_{p+1}^p u_p + a_{p+1}^{p+1} u_{p+1} &= 0 \end{aligned} \qquad (u_p\ \text{ou}\ u_{p+1} \neq 0),$$

a_p^p étant diviseur de zéro à gauche, il existe $u_0 \neq 0$ tel que

$$a_p^p u_0 = 0 \qquad (u_0 \neq 0).$$

Posons

$$u_p = u_0 l, \qquad u_{p+1} = m, \qquad a_{p+1}^p = a, \qquad a_{p+1}^{p+1} = b.$$

La première équation est alors vérifiée quel que soit l, la deuxième devient

$$al + bm = 0.$$

On peut trouver, $\mathfrak{o}$ étant régulier à droite, un couple $\binom{l}{m}$ non singulier vérifiant cette relation. Cela donne pour le système la solution

$$u_p = u_0 l, \qquad u_{p+1} = m, \qquad \text{avec} \quad u_0 \neq 0,$$

pourvu que u_p et u_{p+1} ne soient pas tous deux nuls. C'est immédiat quand $m \neq 0$; supposons donc $m = 0$. Si $u_0 l$ était nul, l serait diviseur de zéro à droite puisque $u_0 \neq 0$, *donc aussi diviseur de zéro à gauche* d'après la propriété 1. Mais cela est impossible, car le couple

$$l, \qquad m = 0$$

serait singulier.

Ainsi se trouve établi, par double application de la propriété 1 dans $\mathfrak{o}$, le

Théorème 5. — *Quand un anneau $\mathfrak{o}$, régulier à droite, est tel que tout diviseur de zéro à droite constitue également un diviseur de zéro à gauche, l'anneau $\mathfrak{o}_n$ des matrices carrées d'ordre n possède la même propriété.*

Voici deux énoncés équivalents :

Toute combinaison linéaire à gauche entre les lignes d'une matrice carrée sur $\mathfrak{o}$ entraîne une combinaison linéaire à droite entre les colonnes;

ou, si les colonnes d'une matrice carrée sur $\mathfrak{o}$ sont linéairement indépendantes à droite, ses lignes sont linéairement indépendantes à gauche.

Relevons aussi le corollaire suivant, démontré auxilliairement à propos du théorème 5, et qui précise utilement la remarque 4 du Chapitre I, paragraphe **2**.

Corollaire 1. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice réduite* H *ayant la forme de Hermite, ne soit pas diviseur de zéro à gauche dans* $\mathfrak{o}_n$, *est qu'aucun des éléments de sa diagonale principale ne soit diviseur de zéro à gauche dans* $\mathfrak{o}$, *supposé régulier à droite, avec la propriété* 1.

Ce critère fournit un moyen de reconnaître si une matrice A est diviseur de zéro à gauche, car

Corollaire 2. — *Les matrices* A *et* H *liées par*

$$\mathrm{AK} = \mathrm{H}, \qquad \mathrm{K} \in \mathrm{S}_n$$

sont en même temps diviseurs de zéro à gauche, ou non diviseurs de zéro à gauche.

Cela résulte du raisonnement de la remarque 1 suivant la propriété 1, en l'appliquant à $\mathfrak{o}_n$ au lieu de $\mathfrak{o}$.

On peut aussi compléter une remarque faite à propros de la réduction (Chap. I, § **2**)

$$(u^1 u^2 \ldots u^n)\,\mathrm{K} = (c\,o \ldots o), \qquad \mathrm{K} \in \mathrm{S}_n.$$

Conséquence 1. — *Pour que la ligne* $u^1\, u^2 \ldots u^n$ *ne soit pas singulière à gauche, il faut et il suffit que* c *ne soit pas diviseur de zéro à droite.*

Démontrons la propriété complémentaire. Si la ligne est singulière, on a

$$v(u^1 \ldots u^n) = 0 \qquad (v \neq 0),$$

donc

$$vc = 0 \qquad (v \neq 0)$$

et c est diviseur de zéro à droite. Réciproquement, si c est diviseur de zéro à droite,

$$v(u^1 u^2 \ldots u^n)\mathrm{K} = 0 \qquad (v \neq 0),$$

et comme $\mathrm{K} \in \mathrm{S}_n$ il n'est pas non plus diviseur de zéro à droite (théorème 5), d'où

$$v(u^1 u^2 \ldots u^n) = 0 \qquad (v \neq 0)$$

et la ligne est singulière à gauche.

Remarquons enfin qu'un anneau $\mathfrak{o}$, régulier à droite, dans lequel diviseurs de zéro à droite et à gauche coïncident, possède en particulier la propriété 1.

Mais cette hypothèse ne se reproduit exactement pour $\mathfrak{o}_n$ que si l'on suppose $\mathfrak{o}$ régulier à droite et à gauche. Elle se place donc mieux qu'ici à propos des anneaux réguliers à droite et à gauche, que nous étudierons ultérieurement.

2. Problème d'immersion. — On sait comment O. Ore réussit à plonger un anneau régulier à droite, propre, dans un corps de quotients [6]. Tout élément b de $\mathfrak{o}$, non nul, possède alors un inverse b^{-1} dans le corps k, et tout élément de k a la forme ab^{-1}, où a et b appartiennent à $\mathfrak{o}$. C'est la *Condition* C pour le corps k [3] (t. I, Chap. V). Un anneau régulier à droite, au sens généralisé, avec véritables diviseurs de zéro, ne saurait faire partie d'un corps. D'ailleurs la propriété de corps ne se conserve pas pour l'anneau K_n des matrices carrées d'ordre n sur k; elle perd donc, suivant notre point de vue, quelque peu de son intérêt, et nous allons présenter une définition plus générale.

Définition. — Un *pseudo-corps régulier à droite* est un anneau k ayant la propriété 2.

Propriété 2. — *Dans l'anneau k, régulier à droite, avec élément unité e, tout élément non diviseur de zéro à gauche est inversible à droite.*

a étant un élément de k non diviseur de zéro à gauche, on a par hypothèse

$$\boxed{ab = e.} \tag{4}$$

La propriété 2 entraîne la propriété 1 pour k, car si a était diviseur de zéro à droite on aurait

$$ua = 0 \qquad (u \neq 0),$$

d'où

$$uab = ue = u = 0,$$

ce qui est impossible. Donc si $a \in S$, il n'est pas diviseur de zéro à droite, et la propriété complémentaire est la propriété 1.

De plus (4) entraîne

$$aba = ea = ae,$$
$$a(ba - e) = 0$$

et comme $a \in S$

$$\boxed{ba = e.} \tag{5}$$

On en déduit

Le demi-groupe S est un groupe multiplicatif d'unités de k.

Il est clair, aussi, qu'un corps, commutatif ou non, est pseudo-corps régulier à droite (et aussi à gauche).

Le théorème d'immersion s'énonce alors :

Théorème 6. — *Tout anneau régulier à droite, propre ou impropre, dans lequel tout diviseur de zéro à droite est aussi diviseur de zéro à gauhe, peut être plongé dans un pseudo-corps k régulier à droite.*

La démonstration repose sur quatre hypothèses énoncées de la façon suivante par P. Dubreil ([3], t. I, p. 142).

I. Il existe dans $\mathfrak{o} = D$ un sous-ensemble S multiplicativement formé.

II. Tout élément de S est simplifiable dans D à droite et à gauche.

III. Si b et $b' \in S$, il existe au moins un couple d'éléments s et $s' \in S$ tels que $bs = b's'$.

IV. Si $s \in S$ et $t \in D$, il existe au moins un couple d'éléments $m \in D$ et $n \in S$ tels que $sm = tn$.

En prenant pour S le demi-groupe des éléments de $\mathfrak{o}$ qui ne sont pas diviseurs de zéro à gauche (ni à droite par conséquent, d'après la propriété 1) les propriétés 1, 2, 3, 4 sont vérifiées; elles découlent du 1° de la définition 1 (Chap. I, § 1) et de la remarque qui suit cette définition.

Ces quatre hypothèses entraînent ([3], t. I, p. 147). « Il existe un anneau k, extension de $\mathfrak{o}$, dans lequel tout élément de S possède un inverse; k est appelé anneau des quotients à droite de $\mathfrak{o}$ par rapport à S; chaque élément de k est de la forme ab^{-1}, où $a \in \mathfrak{o}$, $b \in S$ (Condition C généralisée) ».

L'anneau k des quotients, ainsi construit, est pseudo-corps régulier à droite. En effet, soient deux éléments quelconques ab^{-1} et $a'b'^{-1}$ de k; on peut trouver, $\mathfrak{o}$ étant régulier à droite, deux couples $\begin{pmatrix} p \\ p' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} q \\ q' \end{pmatrix}$ linéairement indépendants à droite, tels que

$$(a \quad a') \begin{pmatrix} p & q \\ p' & q' \end{pmatrix} = (c \quad 0).$$

Les couples $\begin{pmatrix} bp \\ b'p' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} bq \\ b'q' \end{pmatrix}$ sont aussi linéairement indépendants à droite puisque b et $b' \in S$; et l'on a

$$(ab^{-1} \quad a'b'^{-1}) \begin{pmatrix} bp & bq \\ b'p' & b'q' \end{pmatrix} = (c \quad 0),$$

ce qui montre la régularité à droite de l'anneau k; cet anneau contient en outre un élément unité e, et tout élément ab^{-1} non diviseur de zéro à gauche, c'est-à-dire tel que $a \in S$ possède un inverse ba^{-1}. L'anneau k jouit ainsi de la propriété 2; c'est un pseudo-corps régulier à droite.

Un anneau ayant la propriété 1 a donc une extension où la propriété 2 est vérifiée. Nous allons montrer que la propriété 2, c'est-à-dire l'axiome de pseudo-corps régulier à droite pour k, vérifie comme la propriété 1 le principe de transfert pour l'anneau K_n des matrices carrées d'ordre n sur k.

3. L'ANNEAU K_n DES MATRICES CARRÉES D'ORDRE n SUR UN PSEUDO-CORPS RÉGULIER A DROITE. — L'existence d'un élément unité e, qui n'était pas supposée pour l'anneau $\mathfrak{o}$, se trouve établie pour son extension k. Or la présence de l'élément unité e dans k entraîne celle de l'élément unité E pour l'anneau K_n des matrices carrées d'ordre n sur k

$$E = \begin{pmatrix} e & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e \end{pmatrix}.$$

Il suffit donc, sachant que K_n est anneau régulier à droite (th. 2), de montrer que toute matrice appartenant à K_n et qui n'est pas diviseur de zéro à gauche, est inversible à droite.

Soit $A \in S_n$.

Ses colonnes $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n$ sont donc linéairement indépendantes à droite. Donnons-nous un vecteur

$$\eta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}$$

arbitrairement fixé, et cherchons un vecteur

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

tel que

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_n^1 \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \tag{6}$$

ou

$$\eta = \alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots + \alpha^n x_n. \tag{7}$$

On a vu (th. 3 et Corol. 1, au Chap. I, § 5) qu'il existe des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n, a \in k$, où a n'est pas diviseur de zéro à gauche, tels que

$$\eta a = \alpha^1 a_1 + \alpha^2 a_2 + \ldots + \alpha^n a_n. \tag{8}$$

D'après la propriété 2 supposée pour k, on peut trouver b tel que

$$ab = ba = e.$$

En multipliant par b à droite dans (8) il vient

$$\eta = \alpha^1(a_1 b) + \alpha^2(a_2 b) + \ldots + \alpha^n(a_n b),$$

et cette solution est unique, car une solution différente entraînerait la dépendance linéaire à droite des vecteurs $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$.

Dans le module de vecteurs ξ, un vecteur quelconque η est donc une combinaison linéaire à droite des vecteurs $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$, qui constituent une nouvelle base unitaire pour le module M_n.

L'ancienne base unitaire était formée par les vecteurs

$$\varepsilon^1 = \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \varepsilon^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

dont les nouvelles composantes sont :

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_n^1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \\ \vdots \\ x_n^n \end{pmatrix}.$$

La matrice B, obtenue par ces colonnes juxtaposées, vérifie

$$AB = E,$$

car

$$(\varepsilon^1 \varepsilon^2 \ldots \varepsilon^n) = (\alpha^1 \alpha^2 \ldots \alpha^n)\,B = (\varepsilon^1 \varepsilon^2 \ldots \varepsilon^n)AB.$$

Toute matrice $A \in K_n$, non diviseur de zéro à gauche, est donc inversible à droite. Ainsi se trouve démontré le

THÉORÈME 7. — *L'anneau K_n des matrices carrées d'ordre n sur un pseudo-corps k régulier à droite, est lui-même un pseudo-corps régulier à droite.*

Par exemple, l'anneau des matrices carrées d'ordre n sur un corps commutatif est un pseudo-corps régulier à droite (et à gauche).

On déduit aussi du théorème 7, comme pour k (§ **2**), que

$$BA = E,$$

et que les matrices inversibles dans K_n *forment un groupe* S_n.

Nous avons en même temps résolu les équations linéaires (6), d'où :

THÉORÈME 8. — *n équations linéaires à droite, homogènes ou non, à n inconnues, ont toujours une solution unique sur un pseudo-corps régulier à droite, lorsque la matrice* A *des coefficients est à colonnes linéairement indépendantes à droite.*

Avec le corollaire immédiat : n équations linéaires à droite, homogènes ou non, à $n+p$ inconnues

$$(AC)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n+p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}, \qquad A \in S_n$$

ont une infinité de solutions sur k, dans lesquelles $x_{n+1}, \ldots, x_{n+p}$ sont arbitraires et $x_1, \ldots, x_n$ données par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} - BC\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ \vdots \\ x_{n+p} \end{pmatrix}.$$

Enfin les n équations linéaires *à gauche*

$$\text{(A)} \qquad (a'_1 a'_2 \ldots a'_n) = (x_1 x_2 \ldots x_n)\, A$$

ont aussi une solution unique donnée par

$$\text{(B)} \qquad (x_1 x_2 \ldots x_n) = (a'_1 a'_2 \ldots a'_n)\, B.$$

THÉORÈME 9. — *n équations linéaires,* à gauche, *homogènes ou non, à n inconnues, ont toujours une solution unique sur un pseudo-corps régulier* à droite, *lorsque la matrice* A *des coefficients est à colonnes linéairement indépendantes* à droite.

4. Espace projectif défini par un pseudo-corps régulier a droite. — Le groupe S_n des matrices inversibles dans K_n permet d'obtenir un groupe de transformations linéaires du module M_n des vecteurs

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

par la correspondance

$$\xi \to \eta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (A) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad A \in S_n.$$

La transformation inverse est la transformation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (B) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \qquad AB = BA = E, \qquad B \in S_n$$

et les transformations forment un groupe isomorphe à S_n. La base unitaire $\varepsilon^1, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^n$ est transformée en la base unitaire $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^n$ et la correspondance est définie par

$$\xi = \varepsilon^1 x_1 + \varepsilon^n x_2 + \ldots + \varepsilon^n x_n,$$
$$\eta = \alpha^1 x_1 + \alpha^2 x_2 + \ldots + \alpha^n x_n.$$

Lorsque k est un corps commutatif ordinaire, on obtient le groupe linéaire de l'espace linéaire à n dimensions.

Rappelons qu'un vecteur

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \in M_{n+1}; \qquad a_j \in k$$

est non singulier lorsque

$$\alpha u = 0, \qquad u \neq 0, \qquad u \in k$$

est impossible.

Considérons la relation

$$\boxed{\alpha' = \alpha s; \qquad s \in S}$$

entre deux vecteurs α et α' de M_{n+1}. Cette relation est réflexive

$$\alpha = \alpha e, \qquad e \in S;$$

symétrique

$$\alpha = \alpha' s^{-1}, \qquad s^{-1} \in S$$

et transitive

$$\alpha' = \alpha s; \qquad \alpha'' = \alpha' s' \qquad \text{entraîne} \qquad \alpha'' = \alpha(ss') \qquad ss' \in S.$$

Elle définit donc une *équivalence* R dans l'ensemble des vecteurs de M_{n+1}, qu'elle partage en classes. Deux vecteurs α et α' d'une même classe sont en même temps singuliers ou non, car

$$\alpha' u = 0 \qquad (u \neq 0)$$

entraîne

$$\alpha(su) = 0 \qquad (su \neq 0).$$

L'équivalence R partage donc l'ensemble F des vecteurs non singuliers de M_{n+1} en classes. *L'ensemble* $\frac{F}{R}$ *de ces classes constitue par définition l'espace projectif généralisé* Π_n *défini par* k. Chaque point P de Π_n correspond à l'une des classes; un représentant de P, c'est-à-dire d'une classe, est un vecteur non singulier de M_{n+1}.

Exemple 1. — *Lorsque k est un corps commutatif,* Π_n *est l'espace projectif à n dimensions.* Les vecteurs non singuliers dans M_{n+1} sont alors des vecteurs non nuls, et les vecteurs non nuls de même support appartiennent à une même classe de F; cette classe est un point P de l'espace projectif Π_n.

Exemple 2. — *k étant le pseudo-corps régulier des matrices carrées d'ordre 2 sur un corps commutatif,* Π_1 *représente l'espace des droites de l'espace projectif ordinaire* $\mathcal{S}_3$ *à 3 dimensions.*

On peut en effet définir une droite de $\mathfrak{S}_3$ par deux points distincts P_0 et P_1.

$$P_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \qquad P_1 = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Associons à ces deux points les deux éléments de k

$$a'_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix},$$
$$a'_1 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Ils déterminent un vecteur α de M_2

$$\alpha = \begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix},$$

qui n'est pas singulier, supposons en effet

$$\alpha u = 0 \qquad (u \neq 0).$$

Une colonne $\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$ de u n'a pas ses deux termes nuls; on en déduit

$$P_0 l + P_1 m = 0$$

et les deux points P_0 et P_1 ne seraient pas distincts.

Les vecteurs de la classe α dans M_2 sont

$$\alpha' = \alpha s = \begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix} s; \qquad s \in S.$$

En posant

$$s = \begin{pmatrix} l & l' \\ m & m' \end{pmatrix},$$

on a

$$\alpha' = (P_0 l + P_1 m \quad P_0 l' + P_1 m');$$

α' représente donc la droite qui joint les deux points

$$Q_0 = P_0 l + P_1 m, \qquad Q_1 = P_0 l' + P_1 m',$$

qui sont distincts et situés sur la droite $P_0 P_1$. Cette droite est donc $P_0 P_1$.

Chaque droite de l'espace $\mathfrak{S}_3$ est ainsi en correspondance biunivoque avec une classe d'éléments non singuliers de M_2, c'est-à-dire avec un point de l'espace projectif généralisé Π_1.

On établit de la même façon, k étant toujours le pseudo-corps régulier des matrices carrées d'ordre 2 sur un corps commutatif, *que* Π_n *représente l'espace des droites plongées dans un* $\mathfrak{S}_{2n+1}$. Plus généralement k étant le pseudo-corps régulier des matrices carrées d'ordre q sur un corps commutatif, Π_n représente l'espace des S_{q-1} plongés dans un $\mathfrak{S}_{(n+1)q-1}$.

Transformations homographiques de Π_n. — Soit un vecteur non singulier dans M_{n+1}

$$\xi = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Le vecteur η, transformé par une opération A du groupe linéaire

$$\eta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad A \in S_n,$$

n'est pas singulier non plus, car

$$\eta u = 0 \qquad \text{donne} \quad A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0, \qquad \text{puis} \quad \xi u = 0 \qquad \text{et} \qquad u = 0.$$

Le groupe linéaire opère donc sur l'ensemble F des vecteurs non singuliers de M_{n+1}; mieux, *il opère sur les classes de* F, *relatives à l'équivalence qui définit* Π_n, puisque

$$\xi' = \xi s; \qquad s \in S$$

donne

$$A\xi' = A\xi s$$

ou

$$\eta' = \eta s; \qquad s \in S.$$

Les opérations Z du groupe S_{n+1}, qui laissent toute classe invariante sont représentées par des matrices scalaires ayant pour élément sur la diagonale principale un élément z de k permutable avec tout élément de k. Elles forment un sous-groupe invariant Z de S_{n+1}. *Le groupe des transformations homographiques de Π_n est par définition le groupe induit sur Π_n par le groupe linéaire S_{n+1}. Il est isomorphe au groupe quotient*

$$\frac{S_{n+1}}{Z}.$$

Lorsque k est un corps commutatif on obtient le groupe projectif de Π_n ([8], § 3).

Les propriétés géométriques dans Π_n sont les propriétés invariantes vis-à-vis du groupe homographique pris comme groupe principal de la géométrie dans Π_n. Il en est ainsi par exemple pour la *dépendance linéaire de deux points de* Π_n définie par la dépendance linéaire à droite des vecteurs qui représentent ces points dans M_{n+1}. Cette définition ne dépend pas du choix des vecteurs représentatifs, la relation

$$\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 = 0 \qquad (u_1 \text{ ou } u_2 \neq 0)$$

entraîne

$$A\xi_1 u_1 + A\xi_2 u_2 = 0$$

ou

$$\eta_1 u_1 + \eta_2 u_2 = 0 \qquad (u_1 \text{ ou } u_2 \neq 0)$$

pour les vecteurs transformés.

La dépendance linéaire non singulière de deux points de Π_n n'est autre que la coïncidence de ces deux points; c'est une équivalence, contrairement à la dépendance linéaire ordinaire. Par exemple, dans la représentation de l'espace réglé par Π_1 le groupe des transformations homographiques de $\mathfrak{S}_3$ a pour image le groupe des transformations homographiques de Π_1, et deux points linéairement dépendants de Π_1 représentent deux droites incidentes de S_3. Cette incidence ne vérifie pas l'axiome de transitivité.

Dans le cas général, on définit de même la *dépendance linéaire de plusieurs points,* ainsi que leur *dépendance linéaire non singulière.* Ce sont des propriétés géométriques de ces points. Le théorème 4

(Chap. I, § 5) montre que $n+2$ points de Π_n sont toujours en dépendance linéaire non singulière.

Par exemple, dans la représentation de l'espace des droites de $\mathfrak{S}_3$ par Π_2 le groupe homographique de $\mathfrak{S}_3$ a pour image le groupe homographique de Π_2, la dépendance linéaire de deux points traduit la rencontre des deux droites correspondantes de $\mathfrak{S}_3$; la dépendance linéaire de trois points exprime que les trois droites correspondantes appartiennent à un même $\mathfrak{S}_2$; la dépendance linéaire non singulière exprime qu'elles appartiennent à un même $\mathfrak{S}_1$. Enfin quatre droites sont toujours en dépendance linéaire non singulière.

CHAPITRE III.

Anneaux réguliers particuliers.

1. Le pseudo-corps régulier à droite est un exemple d'anneau avec élément unité e dans lequel deux éléments quelconques l et m ont toujours une matrice facteur à droite $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$, *inversible*, telle que

$$(l \quad m)\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = (c \quad 0).$$

En effet, la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ de la définition II, qui n'est pas diviseur de zéro à gauche, est inversible dans le cas du pseudo-corps régulier à droite (th. 7, Chap. **II**, § **5**).

On est ainsi conduit à considérer les anneaux vérifiant la

Propriété 3. — $\mathfrak{o}$ *est un anneau avec élément unité* e, *dans lequel deux éléments quelconques* l *et* m *ont toujours une matrice facteur à droite* $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$, *inversible, telle que*

$$(l \quad m)\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = (c \quad 0).$$

Dans la suite la propriété 3 est toujours supposée pour $\mathfrak{o}$. Elle entraîne la régularité à droite de $\mathfrak{o}$, puisque la définition II est vérifiée.

L'anneau $\mathfrak{o}$ est donc cas particulier d'anneaux réguliers à droite, mais il comprend à son tour le pseudo-corps régulier à droite comme cas particulier. La propriété 3 se place donc, comme la propriété 1, à mi-chemin entre la définition générale et la définition d'un pseudo-corps.

Un exemple d'anneau ayant la propriété 3 est celui d'un domaine d'intégrité, avec élément unité, dans lequel tout idéal est principal. (C'est le cas de l'anneau des entiers.) Pour un tel anneau on peut trouver ([7], t. I, § 16) un plus grand commun diviseur c de deux éléments quelconques l et m, tel que

$$l = ca_1; \qquad m = cb_1; \qquad c = la + ma'; \qquad e = a_1 a + b_1 a'.$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} a & -b_1 \\ a' & a_1 \end{pmatrix}$$

est inversible, avec inverse

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -a' & a \end{pmatrix}$$

et l'on a

$$(l \quad m)\begin{pmatrix} a & -b_1 \\ a' & a_1 \end{pmatrix} = (c \quad 0).$$

Un autre exemple figure dans [9] : « Non commutative domains of integrity ».

L'existence d'un élément unité e pour $\mathfrak{o}$ entraîne celle de l'élément unité E pour $\mathfrak{o}_n$.

Les opérations élémentaires à droite (*cf.* [4], p. 41) sur une matrice A sont :

1° L'échange de deux colonnes;

2° La multiplication à droite d'une colonne par un élément k unité dans $\mathfrak{o}$;

3° L'addition aux éléments d'une colonne d'une combinaison linéaire à droite des autres colonnes à coefficients quelconques dans $\mathfrak{o}$.

Une opération élémentaire à droite revient à une multiplication à droite par une *matrice élémentaire à droite,* c'est-à-dire une matrice déduite de la matrice unité par la même opération élémentaire. Toute matrice élémentaire est *inversible*. Le produit de plusieurs matrices élémentaires se déduit de la matrice unité par une succession d'opérations élémentaires : c'est une matrice élémentaire. Les matrices élémentaires forment un sous-groupe G' du groupe G des matrices unités de $\mathfrak{o}_n$.

La relation

$$A' = A\,U, \qquad U \in G$$

définit une équivalence dans $\mathfrak{o}_n$; deux matrices A et A' d'une même classe *sont associées à droite* (*cf.* right associated matrices [4], § III). La relation

$$A\,U' = A', \qquad U' \in G'$$

définit une équivalence contenue dans la précédente; deux matrices d'une même classe sont *associées à droite modulo une matrice élémentaire*.

2. Théorème de réduction et applications. — La démonstration du théorème 1 (Chap. I, § **2**) s'applique aux anneaux réguliers à droite particuliers considérés ici, en y remplaçant les facteurs à droite non diviseurs de zéro à gauche, par des facteurs inversibles. On en déduit :

Théorème 10. — *Toute matrice* A *carrée d'ordre* n *sur un anneau* $\mathfrak{o}$ *qui possède la propriété* 3 *est associée à droite d'une matrice* H *réduite, n'ayant que des zéros au-dessus de la diagonale principale.*

Le corollaire établi au Chapitre II pour un anneau ayant la propriété 1 (corol. 2, § **1**) est valable ici pour des raisons différentes :

Corollaire 1. — *Les matrices* A *et* H *de la réduction précédente sont en même temps diviseurs de zéro, à gauche, ou non diviseurs de zéro à gauche, car*

$$A\,U = H$$

et

$$A = H\,U^{-1}.$$

A *et* H *sont également tous les deux diviseurs de zéro à droite ou non diviseurs de zéro à droite.*

La méthode du théorème 22.2, page 33 de [4] donne :

COROLLAIRE 2.— *Dans les réductions* $AU = H$, $AU_1 = H_1$ *les matrices* H *et* H_1 sont *associées à droite modulo une matrice élémentaire lorsque* A *n'est pas diviseur de zéro à gauche*

$$H_1 = HU', \qquad A \in S_n.$$

On démontre ensuite, comme au paragraphe 5, Chapitre I.

THÉORÈME 11. — *L'anneau* $\mathfrak{o}_n$ *des matrices carrées d'ordre n sur un anneau* $\mathfrak{o}$ *ayant la propriété* 3 *possède aussi la propriété* 3.

La réduction d'une ligne $u^1\ u^2 \dots u^n$ se fait sous la forme :

$$(u^1 u^2 \dots u^n)(U) = (c \quad 0 \dots 0),$$

d'où

$$(u^1 u^2 \dots u^n) = (c \quad 0 \dots 0)U^{-1}.$$

En particulier, pour deux éléments l m la propriété 3 donne directement

$$(l \quad m)\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = (c \quad 0); \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = U,$$

d'où

$$(c \quad 0)\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a'_1 & b'_1 \end{pmatrix} = (l \quad m); \qquad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a'_1 & b'_1 \end{pmatrix} = U^{-1}.$$

Par suite,

$$c = la + ma', \qquad l = ca_1, \qquad m = cb_1 \qquad (a_1 a + b_1 a' = e)$$

et

THÉORÈME 12. — *Dans l'anneau* $\mathfrak{o}$, *tout idéal à droite engendré par deux éléments l et m est un idéal principal à droite, de base c.*

La propriété s'étend aussitôt à plusieurs éléments $u^1, u^2, \dots, u^n$. C'est sur elle que reposent les réductions obtenues dans [4] (§ III) à propos d'un domaine d'intégrité avec élément unité, où tout idéal est principal.

La réduction de la ligne $u^1\ u^2 \dots u^n$ donne immédiatement :

CONSÉQUENCE 1. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la ligne* $(u^1\ u^2\ \dots\ u^n)$ *ne soit pas singulière à gauche, est que le p. g. c. d. c ne soit pas diviseur de zéro à droite.*

et, en désignant par $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ la première colonne de U :

CONSÉQUENCE 2. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la ligne* $(u^1\ u^2 \dots u^n)$ *ne soit pas singulière à gauche, est qu'il existe un vecteur* $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ *tel que*

$$u^1 a_1 + u^2 a_2 + \dots + u^n a_n = c,$$

où c n'est pas diviseur de zéro à droite.

3. AUTRES ANNEAUX PARTICULIERS. — Nous supposons maintenant vérifiée une propriété supplémentaire pour l'anneau $\mathfrak{o}$: *l'idéal à droite annulant un terme a de* $\mathfrak{o}$ *est un idéal principal à droite.* Les solutions de

$$ax = 0$$

sont alors

$$x = a_0 u \qquad (u \text{ arbitraire}).$$

Cette propriété est vérifiée pour un anneau sans véritable diviseur de zéro où l'idéal annulant a est l'idéal de base (e) quand $a = 0$, et l'idéal nul de base (0) quand $a \neq 0$.

THÉORÈME 13. — *Quand l'idéal à droite annulant un terme quelconque a de* $\mathfrak{o}$ *est principal, l'idéal de matrices annulant à droite une matrice* A *quelconque de* $\mathfrak{o}_n$ *est également principal.*

Le théorème étant vrai pour $n = 1$, raisonnons par récurrence sur n. Supposons qu'il soit vrai pour l'ordre $n - 1$. Cherchons toutes les solutions de

$$(1) \qquad (A)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

On peut trouver U inversible, tel que

$$AU = H.$$

Posons

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (U) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Le système à résoudre devient

$$H \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = 0$$

ou

$$(2) \qquad \begin{cases} a_1^1 Y_1 = 0, \\ a_2^1 Y_1 + a_2^2 Y_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_n^1 Y_1 + a_n^2 Y_2 + \ldots + a_n^n Y_n = 0. \end{cases}$$

D'après l'hypothèse sur $\mathfrak{o}$

$$Y_1 = a_0 Z_1.$$

Posons

$$Y_2 = Z_2, \\ \dots\dots, \\ Y_n = Z_n.$$

Il faut alors résoudre

$$\begin{pmatrix} a_2^1 a_0 & a_2^2 & \ldots & 0 \\ a_3^1 a_0 & a_3^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_n^1 a_0 & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = 0,$$

ou

$$(B) \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = 0,$$

B étant matrice à $n-1$ lignes et n colonnes. Il existe V, inversible, tel que

$$BV = C,$$

où

$$C = \begin{pmatrix} c_2^1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ c_3^1 & c_3^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots & \vdots \\ c_n^1 & c_n^2 & \ldots & c_n^{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice d'ordre $n-1$ bordée par une colonne de zéros. Effectuons un nouveau changement de variables

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = (V)\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = V^{-1}\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons le nouveau système

$$(C)\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-1} \\ t_n \end{pmatrix} = 0,$$

$u_n = t_n$ est arbitraire, et d'après l'hypothèse d'induction,

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-1} \end{pmatrix} = (C_0)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix},$$

où les u sont arbitraires. En revenant aux x_i on obtient

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (A_0)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

où la colonne $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ est arbitraire. La solution générale de

$$AX = 0$$

est donc

$$X = A_0 \Lambda,$$

où la matrice Λ est arbitraire. Ces solutions sont les éléments d'un idéal principal à droite, de base A_0. Le théorème 13 est démontré.

Nous avons, au fond, résolu les équations (1) qui sont linéaires et homogènes par rapport aux inconnues x_i. Abordons le problème plus général de la résolution de p équations linéaires à droite par rapport aux n inconnues x_i

$$(3)\qquad \begin{cases} a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + \ldots + a_1^n x_n = b_1, \\ a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + \ldots + a_2^n x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_p^1 x_1 + a_p^2 x_2 + \ldots + a_p^n x_n = b_p. \end{cases}$$

Supposons d'abord $p = n$. Les équations (3) en Y_i auxquelles on se ramène ont la forme déduite de (2), obtenue précédemment, en remplaçant les seconds membres par

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}.$$

La première de ces équations s'écrit

$$b_1^1 Y_1 = b_1.$$

Pour qu'elle ait des solutions il faut donc une condition de compatibilité : *b_1 doit être multiple à droite de b_1^1.*

Supposons-la remplie

$$b_1 = b_1^1 \lambda_1,$$

d'où

$$b_1^1 (Y_1 - \lambda_1) = 0,$$

ce qui donne, d'après l'hypothèse sur $\mathfrak{o}$,

$$y_1 - \lambda_1 = b_0 Z_1.$$

En posant en outre

$$\begin{gathered} y_2 = Z_2 \\ \vdots \\ y_n = Z_n, \end{gathered}$$

on se ramène comme plus haut à une équation de moins et à la résolution de $n - 1$ équations à $n - 1$ inconnues $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$; sur ce système on applique à nouveau le procédé, et ainsi de suite. On arrive dans tous les cas, lorsque les conditions de compatibilité sont remplies, à une solution générale dépendant linéairement à droite, de n paramètres arbitraires $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$(4)\qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (A_0)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Il est clair que $\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ est une solution particulière, et que l'existence d'une solution particulière est nécessaire et suffisante pour que les conditions de compatibilité soient remplies. On se ramène alors au cas des équations (1) en considérant les différences $x_1 - x'_1$, $x_2 - x'_2$, $\ldots$, $x_n - x'_n$; dans les formules (4) de résolution, A_0 est une base de l'idéal à droite annulant A.

Lorsque $p \neq n$, on se ramène au cas précédent en bordant la matrice A par des lignes de zéros (cas $p > n$), ou par des colonnes de zéros (cas $p > n$), pour la rendre carrée.

Théorème 14. — *Les conditions de compatibilité remplies assurent l'existence d'une solution particulière* $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$, *et la solution générale est donnée par*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (A_0)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix},$$

A_0 *étant une base de l'idéal de matrices annulant* A *à droite.*

Les conditions de compatibilité sont toujours remplies dans le cas d'équations homogènes ($b_i = 0$), où la solution particulière est la solution nulle

$$x_i = 0.$$

Elles le sont encore dans le cas d'un pseudo-corps à droite lorsque la matrice A est à colonnes linéairement indépendantes à droite (*Cf.* Chap. II, § 3, th. 8).

BIBLIOGRAPHIE.

Les références bibliographiques renvoient aux Mémoires suivants, désignés par un chiffre entre crochets.

[1] A. Châtelet, *Groupes abéliens finis*, Paris, 1924.

[2] P. Dubreil, *L'indépendance linéaire dans un module sur un anneau non nécessairement commutatif* (*Bulletin des Sc. Math.*, t. 67, 1943, p. 1-18).

[3] Id., *Algèbre*, t. 1, Paris, Gauthier-Villars, 1946; t. 2 (à paraître).

[4] Mac Duffee, *The theory of matrices* (*Ergebnisse der Mathematik*, II, 5, 1933).

[5] L. Lesieur, *Sur les anneaux réguliers, avec ou sans diviseurs de zéro* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **223**, 1946, p. 1083-1085, et t. **224**, 1947, p. 321-323).

[6] O. Ore, *Linear equations in non commutative fields* (*Annals of Math.*, t. **32**, 1931, p. 463).

[7] B. L. Van der Waerden, *Moderne Algebra*, t. 1 et 2 (*die grundlehren der Math. Wissensch.*, vol. 33 et 34).

[8] Id., *Gruppen von linearen Transformationen* (*Ergebnisse der Mathematik*, IV, 2, 1935).

[9] J. H. M. Wedderburn, *Non commutative domains of integrity* (*Journal für r. und ang. Math.*, t. **167**, 1932, p. 129-141).