JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. MENDES

Sur la forme de l'intégrale d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre en involution

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 26 (1947), p. 99-114.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1947_9_26__99_0>

Sur la forme de l'intégrale d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre en involution[1];

PAR M. MENDES.

Soit un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre en involution

$$(1) \qquad F_i(x_k, p_l) = 0 \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

les F étant des fonctions holomorphes ne contenant que les variables indépendantes x et les dérivées partielles p de la fonction inconnue z.

On sait que, si pour les valeurs x_k^0, p_l^0 attribuées aux variables et vérifiant les équations (1), le déterminant fonctionnel

$$\Delta = \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(p_1, p_2, \ldots, p_n)}$$

est différent de zéro, ces équations permettent de tirer les p comme fonctions holomorphes des x et l'on en déduit, pour l'intégrale

$$z = \int \sum p_k dx_k,$$

une fonction holomorphe des x autour du point $x_k = x_k^0$.

Nous étudions, dans ce qui suit, le cas où Δ est nul pour $x_k = x_k^0$, $p_l = p_l^0$. On ne peut plus alors tirer d'une façon régulière les p en fonction des x et la forme de l'intégrale dépend de la résolution des équations (1). Nous nous bornerons aux cas les plus simples, mais qui se présentent le plus fréquemment. Nous supposerons, en général, $x_k^0 = p_l^0 = 0$, ce qui est toujours possible, car, s'il n'en était pas ainsi,

[1] Ce Mémoire est le développement d'une Note présentée à l'Académie des Sciences (*C. R. Acad. Sc.*, **211**, 1940, p. 58).

on se ramènerait à ce cas en prenant pour variables

$$x'_k = x_k - x_k^0 \qquad \text{et} \qquad z' = z - \Sigma p_i^0 x'_i.$$

Le déterminant Δ peut être nul, soit que le système (1) admette une solution multiple, soit qu'il soit vérifié quels que soient les p pour tous les x nuls. Nous verrons des exemples de ces deux cas.

I. — Étude du système

$$p_i = \frac{A_1^i x_1 + A_2^i x_2 + \ldots + A_n^i x_n + \ldots}{B_1 x_1 + B_2 x_2 + \ldots + B_n x_n + \ldots}.$$

1. Dans l'équation précédente, comme dans celles qui suivront, les pointillés remplacent les termes d'ordre supérieur au premier.

On obtiendra en particulier ce système si le système (1) est linéaire par rapport aux p, le déterminant étant nul pour tous les x nuls, ou, comme nous dirons plus rapidement, à l'origine [1].

Les conditions d'intégrabilité montrent d'ailleurs que le système proposé peut se mettre sous la forme

$$(2) \qquad \begin{aligned} &(B_1 x_1 + B_2 x_2 + \ldots + B_n x_n + \ldots) \frac{\partial z}{\partial x_i} \\ &\quad = \lambda_i (B_1 x_1 + B_2 x_2 + \ldots + B_n x_n) + \ldots . \end{aligned}$$

Les valeurs des diverses dérivées de z à l'origine s'obtiennent par des dérivations et les coefficients de ces dérivées sont de la forme $k B_i$, k étant un entier positif. Nous pouvons donc écrire pour z un développement formel. Pour démontrer qu'il est convergent, soit B un nombre positif inférieur aux modules de tous les B_i et considérons le système

$$B(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \frac{\partial z}{\partial x_i} = \frac{M}{1 - \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{a}} - M,$$

M étant le module maximum des seconds membres des équations (2)

---

(1) On obtient aussi le même système si l'on considère une équation aux différentielles totales complètement intégrable

$$A\, dz = \Sigma B_i\, dx_i,$$

A et les B étant des fonctions des x nulles à l'origine.

lorsque les variables x restent, chacune dans son plan, à l'intérieur d'un cercle de rayon a. Cherchons pour ce système une solution fonction de

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = u;$$

on aura

$$B u \frac{dz}{du} = \frac{M}{1 - \frac{u}{a}} - M = \frac{M u}{a - u},$$

ou

$$B \frac{dz}{du} = \frac{M}{a - u},$$

d'où

$$B(z - z_0) = M \operatorname{Log} \frac{1}{a - u},$$

qui définit une solution holomorphe à l'origine.

L'application de la théorie des fonctions majorantes montre donc que *le système donné admet une solution holomorphe à l'origine.*

Remarque. — Le raisonnement précédent suppose tous les B différents de zéro; on peut toujours se ramener à ce cas en faisant, s'il est nécessaire, une transformation linéaire et homogène sur les x, à condition qu'un B au moins soit différent de zéro.

I. — Étude du système

$$(3) \quad \begin{cases} (B_1 x_1 + \ldots + B_p x_p + B'_1 y_1 + \ldots + B'_q y_q + \ldots) \dfrac{\partial z}{\partial x_i} \\ \quad = \lambda_i (B_1 x_1 + \ldots + B_p x_p) + A'^i_1 y_1 + \ldots + A'^i_q y_q + \ldots, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y_k} = \alpha^k_1 x_1 + \ldots + \alpha^k_p x_p + \alpha'^k_1 y_1 + \ldots + \alpha'^k_q y_q + \ldots. \end{cases}$$

2. Les équations relatives aux x fournissent les valeurs des dérivées contenant le x correspondant, les coefficients de ces dérivées étant de la forme kB_i ou kB'_i; celles relatives aux y fournissent les valeurs des dérivées contenant les y, avec des coefficients tous égaux à l'unité.

Soit a le rayon minimum des cercles ayant pour centre l'origine, à l'intérieur desquels les x et les y peuvent varier, chacun dans son plan, de façon que les seconds membres des équations (3) soient convergents. Nous pouvons supposer a supérieur au plus grand des rapports $\frac{1}{|B_i|}$, $\frac{1}{|B'_k|}$, sans quoi on multiplierait par un facteur convenable les équations (3) relatives aux x. Soit, dans ces conditions, M le module maximum des seconds membres des équations données. Considérons le système

$$\frac{1}{a}(x_1+\ldots+x_p+y_1+\ldots+y_1)\frac{\partial z}{\partial x_i}=\frac{M}{1-\frac{x_1+\ldots+x_p+y_1+\ldots+y_q}{a}}-M,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y_k}=\frac{M}{1-\frac{x_1+\ldots+x_p+y_1+\ldots+y_q}{a}}-M,$$

et cherchons-en une intégrale ne dépendant que de

$$u=x_1+\ldots+x_p \quad \text{et} \quad v=y_1+\ldots+y_q.$$

Celle-ci est déterminée par le système

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{Ma}{a-u-v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{M(u+v)}{a-u-v},$$

et l'on obtient

$$z=-Ma\,\mathrm{Log}(u+v-a)-Mv,$$

intégrale holomorphe pour $u=v=0$.

On en déduit que *le système* (3) *admet une intégrale holomorphe à l'origine.*

III. — Étude de l'équation

$$(4) \qquad (\lambda x_1+\ldots)\frac{\partial f}{\partial x_1}=(\lambda'+\lambda_1 x_1+\ldots+\lambda_n x_n+\ldots)f + \Lambda_1 x_1+\ldots+\Lambda_n x_n+\ldots.$$

5. Cette équation fournit pour $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$,

$$f=0.$$

Si on la dérive p fois par rapport à x_1, p_2 fois par rapport à

$x_2, \ldots, p_n$ fois par rapport à x_n, on obtient la valeur à l'origine de la dérivée $\frac{\partial^{p+p_2+\ldots+p_n} f}{\partial x_1^p \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n}}$, le coefficient de cette dérivée étant $p\lambda - \lambda'$. Le calcul précédent n'est donc possible que si λ' ne coïncide pas avec un nombre de la forme $p\lambda$ (p, nombre entier positif ou nul).

4. Nous allons montrer que, dans ces conditions, on peut déterminer un nombre positif ε vérifiant pour toutes les valeurs entières, positives ou nulles, de p, l'égalité

$$(p+1)\varepsilon < |p\lambda - \lambda'|. \tag{5}$$

Il existe en effet un nombre positif k vérifiant

$$(k-1)|\lambda| < |\lambda'| < k|\lambda|,$$

et un nombre positif δ vérifiant

$$|p\lambda - \lambda'| > \delta,$$

quel que soit p.

Si l'on suppose

$$p \leqq k-1,$$

l'inégalité (5) sera vérifiée si l'on a

$$(p+1)\varepsilon < \delta,$$

ou

$$k\varepsilon < \delta,$$

d'où

$$\varepsilon < \frac{\delta}{k}.$$

Si l'on suppose

$$p \geqq k,$$

l'inégalité (5) sera vérifiée si l'on a

$$(p+1)\varepsilon < p|\lambda| - |\lambda'|$$

ou

$$p(|\lambda| - \varepsilon) > \varepsilon + |\lambda'|,$$

inégalité elle-même vérifiée si l'on a

$$k(|\lambda| - \varepsilon) > \varepsilon + |\lambda'|,$$

ou

$$(k+1)\varepsilon < k|\lambda| - |\lambda'|,$$

d'où

$$\varepsilon < \frac{k|\lambda| - |\lambda'|}{k+1}.$$

Si ε_1 désigne le plus petit des deux nombres $\frac{\delta}{k}$ et $\frac{k|\lambda|-|\lambda'|}{k+1}$, l'égalité (5) sera vérifiée pour toutes les valeurs de p si l'on prend

$$\varepsilon < \varepsilon_1.$$

3. Cela posé, le calcul des dérivées premières de la fonction f à l'origine donne

$$\frac{\partial f}{dx_1} = \frac{A_1}{\lambda - \lambda'}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\frac{A_2}{\lambda'}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_n} = -\frac{A_n}{\lambda'}.$$

Posons donc

$$f = \frac{A_1}{\lambda - \lambda'} x_1 - \frac{A_2}{\lambda'} x_2 - \ldots - \frac{A_n}{\lambda'} x_n + v.$$

(4) devient

$$\lambda x_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} - \lambda' v = \varphi \frac{\partial v}{\partial x_1} + \chi v + \psi,$$

φ et ψ commençant par des termes du second degré, χ par des termes du premier degré.

Soit alors M le module maximum de φ, ψ, χ, lorsque $x_1, x_2, \ldots, x_n$ restent, chacune dans son plan, à l'intérieur d'un cercle de rayon a. Nous pourrons appliquer la méthode des fonctions majorantes en considérant l'équation

$$(6) \quad \varepsilon\left(x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + f\right) = \left(\frac{M}{1 - \frac{x_1 + \ldots + x_n}{a}} - M - M\frac{x_1 + \ldots + x_n}{a}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + 1\right)$$
$$+ \left(\frac{M}{1 - \frac{x_1 + \ldots + x_n}{a}} - M\right) f.$$

Le calcul des différentes dérivées partielles à l'origine fournit en effet pour coefficients de ces dérivées les quantités $(p+1)\varepsilon$. Posons

$$x_1 = u, \qquad x_2 + x_3 + \ldots + x_n = v.$$

Une solution de l'équation (6) ne dépendant que de u et v sera fournie par l'équation

$$(7)\qquad \left[\varepsilon u - \frac{M}{a}\,\frac{(u+v)^2}{a-u-v}\right]\frac{\partial f}{\partial u} - \left[\frac{M(u+v)}{a-u-v} - \varepsilon\right]f = \frac{M}{a}\,\frac{(u+v)^2}{a-u-v}.$$

Cette équation est une équation linéaire, v étant considéré comme un paramètre. En intégrant l'équation sans second membre, puis appliquant la méthode de la variation des constantes, on trouve que la fonction f est donnée par

$$f = \varphi(u, v)(u-u_1)^\alpha(u-u_2)^\beta,$$

φ vérifiant l'équation

$$(8)\qquad \left[\varepsilon u - \frac{M}{a}\,\frac{(u+v)^2}{a-u-v}\right](u-u_1)^\alpha(u-u_2)^\beta\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{M}{a}\,\frac{(u+v)^2}{a-u-v}.$$

On a

$$\alpha = -a\frac{M+\varepsilon}{M+a\varepsilon}\,\frac{u_1-u_3}{u_1-u_2}, \qquad \beta = -a\frac{M+\varepsilon}{M+\alpha\varepsilon}\,\frac{u_2-u_3}{u_2-u_1},$$

$$\left.\begin{matrix}u_1\\ u_2\end{matrix}\right\} = \frac{-[2Mv + a\varepsilon(v-a)] \pm\sqrt{\Delta}}{2(M+a\varepsilon)}, \qquad \Delta = a^2\varepsilon^2(v-a)^2 - 4Mva^2\varepsilon,$$

$$u_3 = \frac{(M+\varepsilon)v - a\varepsilon}{-\varepsilon - M}.$$

Pour $v=0$, l'équation (8) se réduit à

$$\left(\varsigma - \frac{M}{a}\,\frac{u}{a-u}\right)\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{M}{a}\,\frac{u^2}{(a-u)\left(u - \dfrac{a^2\varepsilon}{M+a\varepsilon}\right)},$$

que nous pourrons écrire

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = u^2\psi(u),$$

$\psi(u)$ étant une fonction holomorphe pour $u=0$. Il existe donc, pour $v=0$, une fonction $\varphi(u)$, holomorphe à l'origine et dont le développement commence par des termes en u^3 au moins.

Pour v quelconque, l'équation (8) admettra une solution de la forme

$$\varphi = a_1u + a_2v + b_1u^2 + b_2uv + b_3v^2 + c_1u^3 + c_2u^2v + c_3uv^2 + c_4v^3 + \ldots,$$

avec

$$a_1 = b_1 = 0.$$

On aura donc

$$\varphi = a_2 v + b_2 uv + b_3 v^2 + c_1 u^3 + c_2 u^2 v + c_3 uv^2 + c_4 v^3 + \ldots,$$

les coefficients a_2, b_3, ... étant d'ailleurs arbitraires puisque, d'après le théorème d'existence, on peut faire en sorte que la fonction φ se réduise à une fonction donnée de v pour $u = 0$.

L'équation (7) et par suite l'équation (6) admettront donc l'intégrale

$$f = (a_2 v + b_2 uv + \ldots)(u - u_1)^\alpha (u - u_2)^\beta,$$

et il suffira de prendre $a_2 = 0$ pour que les dérivées premières $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$ soient nulles à l'origine, ce qui assure l'application de la méthode des fonctions majorantes.

L'équation (4) *admet donc une solution holomorphe à l'origine et s'y annulant.*

IV. — Étude du système

$$(9) \qquad \frac{\partial z}{\partial x_i} = (B^i + B_1^i x_1 + \ldots + B_n^i x_n + \ldots)\sqrt{C_1 x_1 + \ldots + C_n x_n + \ldots} = Q_i \sqrt{R}.$$

6. Les conditions d'intégrabilité donnent, en particulier,

$$\frac{B^1}{C_1} = \frac{B^2}{C^2} = \ldots = \frac{B^n}{C_n};$$

nous désignerons par k la valeur commune de ces rapports.

Si nous posons

$$z = Z(C_1 x_n + \ldots + C_n x_n + \ldots)^{\frac{3}{2}} = ZR^{\frac{3}{2}},$$

le système (9) devient

$$R \frac{\partial Z}{\partial x_i} + \frac{3}{2} \frac{\partial R}{\partial x_i} Z = Q_i,$$

ou

$$(10) \qquad (C_1 x_1 + \ldots + C_n x_n + \ldots) \frac{\partial Z}{\partial x_i} + \frac{3}{2}(C_i + \ldots) Z = kC_i + B_1^i x_1 + \ldots + B_n x_n + \ldots.$$

Nous allons démontrer que ce système admet une solution particulière Z_1 holomorphe à l'origine.

Si nous posons

$$Z = Z_1 + T,$$

nous aurons le système

$$R\frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{3}{2}T\frac{\partial R}{\partial x_i} = 0,$$

qui donne

$$T = aR^{-\frac{3}{2}} \qquad (a, \text{ constante arbitraire}),$$

d'où

$$Z = Z_1 + aR^{-\frac{3}{2}}$$

et

$$z = Z_1 R^{\frac{3}{2}} + a,$$

ou, en faisant abstraction de la constante arbitraire additive,

$$z = Z_1(C_1x_1 + \ldots + C_nx_n + \ldots)^{\frac{3}{2}}.$$

Telle est la forme de l'intégrale du système (9) autour de l'origine.

7. Il nous reste à démontrer l'existence de l'intégrale Z_1 pour le système (10). Pour cela, prenons comme nouvelle fonction inconnue,

$$f = Z - \frac{2k}{3}.$$

Le système (10) deviendra

$$(C_1x_1 + \ldots + C_nx_n + \ldots)\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{3}{2}(C_i + \ldots)f = D_1^i x_1 + \ldots + D_n^i x_n + \ldots,$$

que, par le changement de variables

$$\begin{aligned}
C_1x_1 + \ldots + C_nx_n &= \lambda y_1,\\
C_1^2x_1 + \ldots + C_n^2x_n &= \lambda_2 y_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots,\\
C_1^nx_1 + \ldots + C_n^nx_n &= \lambda_n y_n,
\end{aligned}$$

les C_i^p étant des coefficients quelconques assujettis seulement à ne pas annuler le déterminant des coefficients des x, on ramène à la forme

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned}
(\lambda y_1 + \ldots)\frac{\partial f}{\partial y_1} &= \left(-\frac{3}{2}\lambda + \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n + \ldots\right)f\\
&\quad + \Lambda_1 y_1 + \ldots + \Lambda_n y_n + \ldots,\\
(\lambda y_1 + \ldots)\frac{\partial f}{\partial y_p} &= (\lambda'_p + \lambda_1^p y_1 + \ldots + \lambda_n^p y_n + \ldots)f\\
&\quad + \Lambda_1^p y_1 + \ldots + \Lambda_n^p y_n + \ldots.
\end{aligned}\right.$$

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, la première équation (11) suffit à elle seule pour calculer toutes les dérivées de f à l'origine et nous sommes assurés que les autres équations fourniraient les mêmes résultats; on en déduit que le système (11) admet une solution holomorphe à l'origine et s'y annulant. Si l'on désigne par f cette intégrale, on aura ensuite

$$Z_1 = f + \frac{2k}{3}$$

et

$$z = \left(f + \frac{2k}{3}\right)(C_1 x_1 + \ldots + C_n x_n + \ldots)^{\frac{3}{2}},$$

ou, F désignant une fonction holomorphe à l'origine,

$$z = F(C_1 x_1 + \ldots + C_n x_n + \ldots)^{\frac{3}{2}}.$$

V. — Étude du système

$$(12) \quad \frac{\partial z}{\partial x_i} = A^i + A^i_1 x_1 + \ldots + A^i_n x_n + \ldots + (B^i + B^i_1 x_1 + \ldots + B^i_n x_n + \ldots)\sqrt{C_1 x_1 + \ldots + C_n x_n + \ldots}.$$

8. Nous poserons

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = P_i + Q_i \sqrt{R},$$

P_i, Q_i, R ayant des significations évidentes (¹).

Les conditions d'intégrabilité donnent pour deux indices différents i, j, les relations

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} - \frac{\partial P_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(Q_i\sqrt{R}) - \frac{\partial}{\partial x_i}(Q_j\sqrt{R}) = 0,$$

ou

$$2\sqrt{R}\left(\frac{\partial P_i}{\partial x_j} - \frac{\partial P_j}{\partial x_i}\right) + 2R\left(\frac{\partial Q_i}{\partial x_j} - \frac{\partial Q_j}{\partial x_i}\right) + Q_i \frac{\partial R}{\partial x_j} - Q_j \frac{\partial R}{\partial x_i} = 0,$$

(¹) Dans la suite, les lettres P, Q, R, S, T, U désigneront des polynomes aux variables indépendantes, ordonnées suivant les puissances croissantes de ces variables, R n'ayant pas de terme constant.

qui se décomposent en

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} - \frac{\partial P_j}{\partial x_i} = 0$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(Q_i\sqrt{R}) - \frac{\partial}{\partial x_i}(Q_j\sqrt{R}) = 0.$$

Nous pourrons donc poser

$$z = z_1 + z_2,$$

avec

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_i} = P_i, \qquad \frac{\partial z_2}{\partial x_i} = Q_i\sqrt{R}.$$

Ce qui précède donne immédiatement, pour l'intégrale du système (12),

$$\begin{aligned} z &= z_1 + FR^{\frac{3}{2}}, \\ &= z_1 + F(C_1x_1 + \ldots + C_nx_n + \ldots)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

z_1 et F étant des fonctions holomorphes à l'origine.

9. Le système (12) offre, parmi ceux que nous étudions, une particulière importance du fait que la résolution du système en involution (1) conduit le plus fréquemment à un système de cette forme.

Supposons, en effet, que le déterminant Δ étant nul pour tous les x et p nuls, le déterminant $\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1})}$ soit différent de zéro. On pourra alors tirer des $n-1$ premières équations (1), $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ comme fonctions holomorphes de p_n et des x. En portant ces expressions dans la dernière équation (1), on obtient une équation

$$\varphi(x_k, p_n) = 0,$$

avec, à l'origine,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = \frac{\partial\varphi}{\partial p_n} = 0.$$

Dans le cas le plus ordinaire, φ pourra se développer suivant les puissances de p_n sous la forme

$$\varphi = \alpha_0 + \alpha_1 p_n + \alpha_2 p_n^2 + \ldots,$$

les α étant des fonctions des x telles qu'à l'origine

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 0, \qquad \alpha_2 \neq 0.$$

p_n sera alors, d'après la théorie des fonctions implicites, donné par une équation du second degré

$$A p_n^2 + B p_n + C = 0,$$

qui donnera

$$p_n = \alpha + \sqrt{\beta},$$

α et β étant des fonctions des x s'annulant à l'origine. On en déduit pour un p quelconque la forme

$$p_i = P_i + Q_i \sqrt{R},$$

la fonction R étant la même pour tous les indices i et les fonctions P_i et R s'annulant à l'origine. On obtient donc bien le système (12) avec $\Lambda' = 0$ en vertu de l'hypothèse faite.

10. On trouverait le même résultat si l'on considérait un système en involution

$$F_i(x_k, z, p_l) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1) \tag{13}$$

contenant, en plus des x et p, la fonction inconnue z, tel que le déterminant fonctionnel $\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n+1})}{D(z, p_1, \ldots, p_n)}$ soit nul pour $x_k = z = p_l = 0$, valeurs qui satisfont au système (13). On en tirerait, en général, z et les p sous la forme

$$z = P + Q\sqrt{R}, \qquad p_i = P_i + Q_i\sqrt{R},$$

et ces dernières équations donneraient

$$z = z_1 + F R^{\frac{3}{2}},$$

ce qui montre que l'on aurait

$$z_1 = P, \qquad FR = Q.$$

Q serait donc décomposable et contiendrait R en facteur.

11. Considérons deux équations seulement en involution

$$(1') \qquad F_1(x, y, p, q) = 0, \qquad F_2(x, y, p, q) = 0,$$

ne contenant pas z.

Un point critique a des coordonnées qui vérifient les équations (1′) et l'équation

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(p, q)} = 0.$$

Admettons que la résolution de ces trois équations soit possible par rapport à x, y, q; on en tirera alors

$$x = x(p), \qquad y = y(p), \qquad q = q(p),$$

et les deux premières de ces équations représentent un cylindre qui, si les équations (1′) donnent

$$p = P_1 + P_2\sqrt{R}, \qquad q = Q_1 + Q_2\sqrt{R},$$

contiendra le cylindre $R = 0$.

Plusieurs cas sont à envisager suivant la nature de ce cylindre; celui-ci peut être réel ou imaginaire, ou ne comprendre qu'une seule génératrice correspondant au point critique.

Le cas le plus général est le premier. Dans ce cas, si l'on considère une surface intégrale

$$z = z_1 + ZR^{\frac{3}{2}} \qquad (z_1 \text{ et } Z, \text{ fonctions holomorphes}),$$

l'intersection de cette surface avec le cylindre $R = 0$ vérifie $z = z_1$ et tout le long de cette ligne on a $p = P_1$, $q = Q_1$. Cette ligne est une ligne double pour la surface intégrale, et comme celle-ci est tout entière dans la région $R > 0$ de l'espace, la ligne constitue une espèce de ligne de rebroussement, le long de laquelle les deux nappes sont tangentes entre elles et tangentes à la surface $z = z_1$. *Il y dans ce cas une ligne de points critiques passant par le point étudié.*

Si le cylindre se compose d'une seule génératrice, la surface comprend deux nappes se raccordant en un seul point, *celui-ci étant un point critique isolé.*

Dans le cas enfin où R est négatif pour toutes les valeurs réelles de x, y, il n'y a plus de représentation géométrique.

Mais les deux derniers cas ne peuvent se présenter si R commence, comme nous le supposons, par des termes du premier degré.

Soit
$$R = ax + by + \varphi(x, y),$$

φ commençant par des termes du second degré au moins, et supposons $b \neq 0$. Si nous posons $R = v^2$, cette relation permettra de tirer y en fonction de x et de v, et la surface intégrale au voisinage du point singulier sera représentée par les équations

$$x = x, \qquad y = y(x, v), \qquad z = z_1(x, v) + Z(x, v)v^3,$$

c'est-à-dire que, v admettant une double détermination, x, y, z *seront des fonctions algébroïdes de deux paramètres.*

Nous généralisons dans un autre travail cette propriété.

VI. — Étude du système

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = P_i + Q_i\sqrt{R}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y_k} = S_k.$$

12. Les conditions d'intégrabilité donnent

$$\frac{\partial}{\partial y_k}(Q_i\sqrt{R}) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}(Q_i\sqrt{R}) = \frac{\partial}{\partial x_i}(Q_j\sqrt{R}),$$
$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial P_i}{\partial y_k} = \frac{dS_k}{\partial x_i},$$

et montrent que R ne peut dépendre que des x.

Nous poserons donc
$$z = z_1 + z_2,$$

z_1 et z_2 vérifiant les équations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial x_i} &= P_i, \\ \frac{\partial z_1}{\partial y_k} &= S_k, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial z_2}{\partial x_i} &= Q_i\sqrt{R}, \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_k} &= 0. \end{aligned}\right.$$

On en déduit immédiatement

$$z_1 = \text{fonction holomorphe des } x, y,$$
$$z_2 = F(x)\,[R(x)]^{\frac{3}{2}},$$

d'où

$$z = z_1(x, y) + F(x)[R(x)]^{\frac{3}{2}},$$

z_1 et F étant holomorphes à l'origine.

VII. — Étude du système

$$S\frac{\partial z}{\partial x^i} = T_i, \qquad \frac{\partial z}{\partial y_k} = P_k + Q_k\sqrt{R}.$$

13. Les conditions d'intégrabilité donnent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{T_i}{S}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{T_j}{S}\right), \\ &\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{T_i}{S}\right) = \frac{\partial P_k}{\partial x_i}, \\ &\frac{\partial P_k}{\partial y_l} = \frac{\partial P_l}{\partial y_k} \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_i}(Q_k\sqrt{R}) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial y_l}(Q_k\sqrt{R}) = \frac{\partial}{\partial y_k}(Q_l\sqrt{R}), \end{aligned}\right.$$

et montrent que Q_k et R sont indépendants de x_i pour $i \neq k$; donc Q_k ne peut dépendre, parmi les variables x, que de x_k et R ne dépend que des y.

Nous poserons donc

$$z = z_1 + z_2,$$

z_1 et z_2 vérifiant les relations

$$\left\{\begin{aligned} &S\frac{\partial z_1}{\partial x_i} = T_i, \\ &\frac{\partial z_1}{\partial y_k} = P_k, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial z_2}{\partial x_i} = 0, \\ &\frac{\partial z_2}{\partial y_k} = Q_k\sqrt{R}. \end{aligned}\right.$$

On a, d'après ce qui précède,

$$z_1 = \text{fonction holomorphe à l'origine},$$
$$z_2 = FR^{\frac{3}{2}},$$

d'où

$$z = z_1(x, y) + F(y)[R(y)]^{\frac{3}{2}},$$

z_1 et F étant holomorphes à l'origine.

VIII. — Étude du système

$$S\frac{\partial z}{\partial x_i} = T_i, \qquad \frac{\partial z}{\partial y_k} = P_k + Q_k\sqrt{R}, \qquad \frac{\partial z}{\partial t_l} = U_l.$$

14. Les conditions d'intégrabilité donnent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_{i'}}\left(\frac{T_i}{S}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{T_{i'}}{S}\right),\\ &\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{T_i}{S}\right) = \frac{\partial P_k}{\partial x_i},\\ &\frac{\partial}{\partial t_l}\left(\frac{T_i}{S}\right) = \frac{\partial U_l}{\partial x_i}, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial P_k}{\partial y_{k'}} = \frac{\partial P_{k'}}{\partial y_k},\\ &\frac{\partial P_k}{\partial t_l} = \frac{\partial U_l}{\partial y_k}, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_i}(Q_k\sqrt{R}) = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial y_{k'}}(Q_k\sqrt{R}) = \frac{\partial}{\partial y_k}(Q_{k'}\sqrt{R}),\\ &\frac{\partial}{\partial t_l}(Q_k\sqrt{R}) = 0, \end{aligned}\right.$$

et montrent que R ne peut dépendre que des y.

Nous poserons donc

$$z = z_1 + z_2,$$

z_1 et z_2 vérifiant les équations

$$\left\{\begin{aligned} &S\frac{\partial z_1}{\partial x_i} = T_i,\\ &\frac{\partial z_1}{\partial y_k} = P_k,\\ &\frac{\partial z_1}{\partial t_l} = U_l, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial z_2}{\partial x_i} = 0,\\ &\frac{\partial z_2}{\partial y_k} = Q_k\sqrt{R},\\ &\frac{\partial z_2}{\partial t_2} = 0. \end{aligned}\right.$$

On en déduit immédiatement

$$z_1 = \text{fonction holomorphe des } x, y, t,$$
$$z_2 = F(y)[R(y)]^{\frac{3}{2}},$$

d'où

$$z = z_1(x, y, t) + F(y)[R(y)]^{\frac{3}{2}},$$

z_1 et F étant holomorphes à l'origine.