JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. C. LEE

Sur les groupes de Lie réels à trois paramètres

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 26 (1947), p. 251-267.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1947_9_26__251_0>

Sur les groupes de Lie réels à trois paramètres;

Par H. C. LEE.

PREMIÈRE PARTIE.

Réduction canonique.

Introduction. — La classification des groupes de Lie réels est plus compliquée que celle des groupes de Lie complexes si l'on ne se restreint pas aux groupes semi-simples. Les groupes complexes à trois paramètres ont été classifiés à leur totalité en ce sens; mais, comme on verra plus tard, les résultats connus ne restent plus inchangés dans le cas réel. Le but de ce travail est de déterminer, à un isomorphisme près, tous les types de groupes *réels* à trois paramètres, et de construire une représentation de chaque type par un groupe de transformations *linéaires*.

Il est bien connu (1) qu'il y a essentiellement un seul type de groupes à un paramètre, nommément un tel groupe est isomorphe au groupe de translations sur la droite; et il y a essentiellement deux types de groupes à deux paramètres, nommément un tel groupe est isomorphe ou au groupe de translations du plan, ou au groupe de transformations linéaires de la droite. En formant les produits directs d'un groupe à un paramètre par un autre à deux paramètres, on obtient deux types de groupes à trois paramètres, mais il y a une infinité

(1) E. Cartan, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle*, p. 196-197. Les résultats ici s'appliquent à tous les deux cas, réel et complexe.

d'autres types de groupes à trois paramètres qui ne sont pas des produits directs. Nous trouverons qu'il y a sept types discrets (I)-(VII), un type continu (A) et un type semi-continu (B), tels que deux groupes sont isomorphes si et seulement s'ils appartiennent au même type.

1. Particularités du cas de trois paramètres. — Les équations de structure de M. E. Cartan s'écrivent

$$(\omega^h)' = \frac{1}{2} c^h_{ij} [\omega^i \omega^j],$$

les indices parcourant les chiffres 1, 2, 3 et la convention de sommation étant sous-entendue. Les constantes de structure c^h_{ij} étant antisymétriques en i, j, il y en a seulement neuf (à savoir c^h_{23}, c^h_{31}, c^h_{12}) que l'on peut écrire sous la forme

$$c^{hk} = \frac{1}{2} c^h_{ij} \varepsilon^{ijk},$$

ce qui s'écrit aussi

$$c^h_{ij} = c^{hk} \varepsilon_{ijk},$$

$\varepsilon^{\cdots}$ et $\varepsilon_{\ldots}$ étant les systèmes numériques antisymétriques bien connus. Les équations de structure prennent la forme

$$(\omega^h)' = c^{h1} [\omega^2 \omega^3] + c^{h2} [\omega^3 \omega^1] + c^{h3} [\omega^1 \omega^2]. \tag{1.1}$$

D'ailleurs, les constantes de structure sont assujetties à la condition

$$c^h_{i1} c^i_{23} + c^h_{i2} c^i_{31} + c^h_{i3} c^i_{12} = 0$$

qui peut s'écrire $c^h_{ij} c^{ij} = 0$, c'est-à-dire

$$c^{hk} c^{ij} \varepsilon_{ijk} = 0. \tag{1.2}$$

Plusieurs cas se présentent maintenant suivant le rang de la matrice c^{hk} à trois lignes et trois colonnes.

2. Cas non singulier. — Supposons d'abord que la matrice c^{hk} est non singulière. Alors, (1.2) implique $c^{ij} \varepsilon_{ijk} = 0$, d'où $c^{ij} - c^{ji} = 0$, c'est-à-dire que c^{hk} est une matrice symétrique. Par suite, il existe une base (réelle) dans laquelle c^{hk} devient une matrice diagonale, dont les éléments diagonaux ε_1, ε_2, ε_3 sont ± 1. Donc les équations de structure (**1**.1) se réduisent à

$$(\omega^1)' = \varepsilon_1[\omega^2\omega^3], \qquad (\omega^2)' = \varepsilon_2[\omega^3\omega^1], \qquad (\omega^3)' = \varepsilon_3[\omega^1\omega^2].$$

Changer le signe de l'une des formes ω^1, ω^2, ω^3 équivaut à remplacer $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ par $-\varepsilon_1$, $-\varepsilon_2$, $-\varepsilon_3$ respectivement; d'où, en ce qui concerne les signes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, on n'a besoin de considérer que les deux possibilités : 1° trois signes positifs, et 2° deux signes positifs et un signe négatif. La première possibilité $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = +1$, $\varepsilon_3 = +1$ donne

$$\text{(I)} \qquad (\omega^1)' = [\omega^2\omega^3], \qquad (\omega^2)' = [\omega^3\omega^1], \qquad (\omega^3)' = [\omega^1\omega^2].$$

Pour la seconde possibilité, on pourra, éventuellement par une permutation de ω^1, ω^2, ω^3, prendre $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = +1$, $\varepsilon_3 = -1$, de sorte qu'on ait

$$\text{(II)} \qquad (\omega^1)' = [\omega^2\omega^3], \qquad (\omega^2)' = [\omega^3\omega^1], \qquad (\omega^3)' = -[\omega^1\omega^2].$$

Les groupes de transformations linéaires représentatifs des types (I) et (II), ainsi que ceux des types qu'on obtiendra plus tard, seront donnés dans la seconde Partie.

3. Rang nul. — Supposons dans ce qui suit que la matrice c^{hk} est singulière. Considérons d'abord le cas où le rang de cette matrice est nul, $c^{hk} = 0$. La condition (**1**.2) est satisfaite identiquement. Dans ce cas les équations de structure (**1**.1) se réduisent au type

$$\text{(III)} \qquad (\omega^1)' = 0, \qquad (\omega^2)' = 0, \qquad (\omega^3)' = 0.$$

4. Rang un. — Si la matrice c^{hk} est de rang 1, on peut écrire $c^{hk} = u^h v^k$ où u, v sont deux vecteurs réels non nuls. La condition (**1**.2) est encore satisfaite identiquement.

Si les vecteurs u, v sont linéairement indépendants, il est clair géométriquement qu'on peut choisir une base dans laquelle leurs composantes deviennent $u^h = \delta_1^h$, $v^h = \delta_2^h$, où $\delta_i^h = 1$ ou 0 selon $h = i$ ou $h \neq i$. Alors, $c^{hk} = \delta_1^h \delta_2^k$ et par suite les équations (**1**.1) se réduisent à $(\omega^h)' = \delta_1^h[\omega^3\omega^1]$, ou

$$(\omega^1)' = [\omega^3\omega^1], \qquad (\omega^2)' = 0, \qquad (\omega^3)' = 0.$$

On peut aussi mettre celles-ci sous la forme

$$\text{(IV)} \qquad (\omega^1)' = [\omega^1 \omega^2], \qquad (\omega^2)' = 0, \qquad (\omega^3)' = 0$$

en remplaçant ω^3 par $-\omega^2$, et ω^2 par $-\omega^3$.

Si les vecteurs u, v sont linéairement dépendants, à savoir $v^h = \alpha u^h (\alpha \neq 0)$, on a $c^{hk} = \alpha u^h u^k$. Donc on peut prendre $c^{hk} = \alpha \delta_1^h \delta_1^k$ et alors les équations (**1**.1) se réduisent à $(\omega^h)' = \alpha \delta_1^h [\omega^2 \omega^3]$ ou, en remplaçant ω' par $\alpha\omega'$,

$$\text{(V)} \qquad (\omega^1)' = [\omega^2 \omega^3], \qquad (\omega^2)' = 0, \qquad (\omega^3)' = 0.$$

5. Rang deux. — Si la matrice c^{hk} est de rang 2, on peut écrire

$$c^{hk} = u_1^h v_1^k + u_2^h v_2^k, \tag{5.1}$$

où u_1 et u_2, comme aussi v_1 et v_2, sont deux vecteurs réels linéairement indépendants. La condition (**1**.2) donc implique

$$\mu u_1^h + \lambda u_2^h = 0,$$

où

$$\lambda = v_2^k u_1^i v_1^j \varepsilon_{ijk} = \quad \varepsilon_{ijk} u_1^i v_1^j v_2^k,$$
$$\mu = v_1^k u_2^i v_2^j \varepsilon_{ijk} = - \varepsilon_{ijk} u_2^i v_1^j v_2^k.$$

Mais, l'indépendance linéaire des deux vecteurs u_1 et u_2 entraîne $\lambda = 0$, $\mu = 0$, c'est-à-dire

$$\varepsilon_{ijk} u_1^i v_1^j v_2^k = 0, \qquad \varepsilon_{ijk} u_2^i v_2^j v_2^k = 0.$$

Celles-ci expriment que le déterminant formé par les trois vecteurs u_1, v_1, v_2, et celui formé par u_2, v_1, v_2, sont tous nuls. Puisque les deux vecteurs v_1, v_2 sont linéairement indépendants, chacun des vecteurs u_1, u_2 en est une combinaison linéaire

$$\begin{aligned} u_1^h &= \alpha_{11} v_1^h + \alpha_{21} v_2^h \\ u_2^h &= \alpha_{12} v_1^h + \alpha_{22} v_2^h \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Alors, (**5**.1) peut s'écrire

$$c^{hk} = \sum_{m,n=1}^{2} \alpha_{mn} v_m^h v_n^k. \tag{5.2}$$

La 2×2 matrice réelle non singulière

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

peut être modifiée par les considérations suivantes. Les deux vecteurs linéairement indépendants v_1, v_2 constituent une base d'un domaine de vecteurs. Changer la base de ce domaine équivaut [*voir* (5.2)] à transformer la matrice A par une transformation conjonctive $A \to P'AP$, où P est une 2×2 matrice réelle non singulière et P' est son transposé. Nous utiliserons de telles transformations conjonctives pour réduire la matrice A à des formes canoniques.

6. Formes canoniques de 2×2 matrices réelles non singulières contre les transformations conjonctives. — Décomposons la matrice A en une somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, ces deux parties étant définies uniquement. Par une transformation conjonctive convenable, la partie symétrique est transformable en une matrice diagonale avec les éléments diagonaux ± 1 ou 0, la même transformation conjonctive transformant la partie antisymétrique encore en une matrice antisymétrique. Alors, on peut prendre

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & p \\ -p & \varepsilon_2 \end{pmatrix},$$

ε_1, ε_2 ayant les valeurs $\pm 1, 0$, et l'on a liberté d'échanger l'ordre des deux valeurs diagonales ε_1, ε_2. La non-singularité de la matrice A implique $\varepsilon_1 \varepsilon_2 + p^2 \neq 0$.

Il y a trois cas selon que ε_1, ε_2 soient tous nuls, ou qu'un seul d'entre eux soit nul, ou qu'aucun ne soit nul.

1° Dans le premier cas, $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$, on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{pmatrix} \qquad (p \neq 0).$$

Mais on peut rendre $p = 1$ par la transformation conjonctive

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

et l'on obtient la forme canonique

$$(6.1)\qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2° Dans le deuxième cas on peut, pour l'élément diagonal nul, prendre $\varepsilon_2 = 0$. On a donc

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & p \\ -p & 0 \end{pmatrix} \qquad (p \neq 0),$$

mais on peut encore rendre $p = 1$ par la même transformation conjonctive utilisée au-dessus. Alors, on a les (deux) formes canoniques

$$(6.2)\qquad A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_1 = \pm 1.$$

3° Le troisième cas est $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$. Montrons que l'on ne peut modifier la valeur absolue du nombre réel p. En effet, supposons d'abord que ε_1, ε_2 aient le même signe. La transformation conjonctive la plus générale qui préserve la partie symétrique $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est fournie par une matrice orthogonale qui a les deux formes

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Or, on trouve

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ p & 0 \end{pmatrix},$$

et alors on peut au plus changer le signe de p. Supposons maintenant que ε_1, ε_2 aient des signes différents. La transformation conjonctive la plus générale préservant la partie symétrique $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est fournie par une matrice pseudo-orthogonale qui a les quatre formes

$$\pm \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ \sinh\theta & -\cosh\theta \end{pmatrix},$$

mais on vérifie pareillement qu'une telle transformation conjonctive, appliquée à la partie symétrique $\begin{pmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{pmatrix}$, peut au plus changer le signe de p. Alors, dans ce troisième cas, on a les formes canoniques

$$(6.3) \qquad A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & p \\ -p & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_1 = \pm 1, \qquad \varepsilon_2 = \pm 1, \qquad (p \geqq 0).$$

Il y a trois combinaisons des signes ε_1, ε_2. (Dans la combinaison $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = -1$, la valeur $p = 1$ est à rejeter, puisque l'on a $\varepsilon_1 \varepsilon_2 + p^2 \neq 0$). Pour chaque combinaison, toute valeur non négative de p donne naissance d'après (**6**.3) à une forme canonique distincte.

7. Rang deux (suite). — Les formes réduites de la matrice (**5**.3) étant obtenues, retournons à la considération de (**5**.2) qui, par un choix de base telle que $v_1^h = \delta_1^h$, $v_2^h = \delta_2^h$, devient

$$c^{hk} = \alpha_{11}\,\delta_1^h\,\delta_1^k + \alpha_{12}\,\delta_1^h\,\delta_2^k + \alpha_{21}\,\delta_2^h\,\delta_1^k + \alpha_{22}\,\delta_2^h\,\delta_2^k.$$

Par suite, les équations de structure (**1**.1) prennent la forme

$$(7.1) \qquad \begin{cases} (\omega^1)' = \alpha_{11}[\omega^2\omega^3] + \alpha_{12}[\omega^3\omega^1], \\ (\omega^2)' = \alpha_{21}[\omega^2\omega^3] + \alpha_{22}[\omega^3\omega^1], \\ (\omega^3)' = 0. \end{cases}$$

Or, pour la forme réduite (**6**.1), les équations (**7**.1) deviennent

$$(\omega^1)' = [\omega^3\omega^1], \qquad (\omega^2)' = -[\omega^2\omega^3], \qquad (\omega^3)' = 0,$$

qui, en changeant le signe de ω^3, peuvent aussi s'écrire

$$(\mathrm{VI}) \qquad (\omega^1)' = -[\omega^3\omega^1], \qquad (\omega^2)' = [\omega^2\omega^3], \qquad (\omega^3)' = 0.$$

Pour la forme réduite (**6**.2), les équations (**7**.1) se réduisent à

$$(\omega^1)' = \varepsilon_1[\omega^2\omega^3] + [\omega^3\omega^1], \qquad (\omega^2)' = -[\omega^2\omega^3], \qquad (\omega^3)' = 0.$$

Changer le signe de ω^2 équivaut à remplacer ε_1 par $-\varepsilon_1$; on n'a donc besoin qu'à assigner $\varepsilon_1 = -1$ par exemple, et alors on obtient le type

$$(\mathrm{VII}) \qquad (\omega^1)' = -[\omega^2\omega^3] + [\omega^3\omega^1], \qquad (\omega^2)' = -[\omega^2\omega^3], \qquad (\omega^3)' = 0.$$

Enfin, pour la forme réduite (6.3), les équations (7.1) s'écrivent

$$\begin{aligned}(\omega^1)' &= \varepsilon_1\,[\omega^2\omega^3] + p\,[\omega^3\omega^1],\\(\omega^2)' &= -p\,[\omega^2\omega^3] + \varepsilon_2\,[\omega^3\omega^1],\\(\omega^3)' &= 0,\end{aligned}$$

où $p \geqq 0$, la valeur $p = 1$ étant écartée quand ε_1, ε_2 sont de signes contraires. Changer le signe de ω' s'obtient en remplaçant ε_1, ε_2 par $-\varepsilon_1$, $-\varepsilon_2$ respectivement, et par suite, pour les signes ε_1, ε_2, il n'y a lieu de considérer que deux combinaisons, à savoir $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = -1$ et $\varepsilon_1 = +1$, $\varepsilon_2 = -1$. Alors, on obtient deux derniers types d'équations de structure

$$\text{(A)}\qquad\left\{\begin{aligned}(\omega^1)' &= -[\omega^2\omega^3] + p[\omega^3\omega^1]\\(\omega^2)' &= -p[\omega^2\omega^3] - [\omega^3\omega^1]\\(\omega^3)' &= 0\end{aligned}\right.\qquad (p \geqq 0).$$

$$\text{(B)}\qquad\left\{\begin{aligned}(\omega^1)' &= [\omega^2\omega^3] + p[\omega^3\omega^1]\\(\omega^2)' &= -p[\omega^2\omega^3] - [\omega^3\omega^1]\\(\omega^3)' &= 0\end{aligned}\right.\qquad (p \geqq 0,\ p \neq 1).$$

C'est seulement dans ces formes (A) et (B) qu'il y a encore un coefficient p qui n'a pas une valeur numérique déterminée. Il est facile de constater qu'*on ne peut réduire p à une valeur numérique fixe par aucune transformation linéaire réelle de* ω^1, ω^2, ω^3, *qui laisse invariante la forme* (A) *ou* (B). Par suite, à chaque valeur possible de p comme indiqué dans (A), (B), il correspond un type distinct d'équations de structure.

Remarque. — Si l'on faisait $p = 1$ dans (B), on aurait

$$\begin{aligned}(\omega^1)' &= [\omega^2\omega^3] + [\omega^3\omega^1],\\(\omega^2)' &= -[\omega^2\omega^3] - [\omega^3\omega^1],\\(\omega^3)' &= 0,\end{aligned}$$

ce qui est réductible au type (IV) par la transformation

$$\overline{\omega}' = \omega^1 - \omega^2, \qquad \overline{\omega}^2 = -2\omega^3, \qquad \overline{\omega}^3 = \omega^1 + \omega^2.$$

8. Observations sur la classification. — De la manière précédente d'obtenir les divers types d'équations de structure (I)-(VII), (A)-(B), il est clair que ces types sont exhaustifs et mutuellement exclusifs.

Comme on a remarqué à la fin du n° 7, on peut étendre la forme (B) à la valeur $p = 1$ pour l'inclusion du type (IV). Alors, on a une autre classification dans laquelle figurent seulement six types discrets

$$(\mathrm{I}),\quad (\mathrm{II}),\quad (\mathrm{III}),\quad (\mathrm{V}),\quad (\mathrm{VI}),\quad (\mathrm{VII})$$

et deux types continus, (A) et

$$(\mathrm{C})\qquad \left\{\begin{aligned} (\omega^1)' &= \quad [\omega^2\omega^3] + p[\omega^3\omega^1] \\ (\omega^2)' &= -p[\omega^2\omega^3] - \quad [\omega^3\omega^1] \\ (\omega^3)' &= 0. \end{aligned}\right. \qquad (p \geqq 0).$$

Remarque. — On pourrait aussi absorber le type (VI) dans la forme (A) ou (C) pour la limite $p \to \infty$. En effet, si l'on remplace ω^1 par $-\dfrac{\omega^3}{p}$ et fait tendre $p \to \infty$, on retrouve (VI).

9. Comparaison avec les résultats connus du cas complexe. — Il est bien connu que les équations de structure de S. Lie

$$(X_i X_j) = c_{ij}^h X_h,$$

pour les groupes complexes à trois paramètres, sont, après un changement de base, réductibles aux formes suivantes ([1])

$$(9.1)\qquad \left\{\begin{array}{llll} (1) & (X_2X_3) = X_3, & (X_3X_1) = -2X_2, & (X_1X_2) = X_1 \\ (2) & (X_2X_3) = cX_2, & (X_3X_1) = -X_1, & (X_1X_2) = 0 \qquad (c \neq 1); \\ (3) & (X_2X_3) = X_2, & (X_3X_1) = -X_1, & (X_1X_2) = 0 \\ (4) & (X_2X_3) = X_1 + X_2, & (X_3X_1) = -X_1, & (X_1X_2) = 0 \\ (6) & (X_2X_3) = X_1, & (X_3X_1) = 0, & (X_1X_2) = 0 \\ (7) & (X_2X_3) = 0, & (X_3X_1) = 0, & (X_1X_2) = 0 \end{array}\right.$$

c étant une constante complexe. On déduit facilement les formes correspondantes des équations de structure de E. Cartan

$$(\omega^h)' = \frac{1}{2} c_{ij}^h [\omega^i \omega^j],$$

([1]) L. P. Eisenhart, *Continuous groupes of transformations*, p. 137. La forme (5) s'absorbe dans (2) pour $c = 0$.

en faisant usage de la relation évidente

$$(\omega^h)' X_h = \frac{1}{2} [\omega^i \omega^j] (X_i X_j);$$

on trouve

$$(\mathbf{9}.2) \left\{ \begin{array}{llll} (1) & (\omega^1)' = [\omega^1 \omega^2], & (\omega^2)' = -2[\omega^3 \omega^1], & (\omega^3)' = [\omega^2 \omega^3] \\ (2) & (\omega^1)' = -[\omega^3 \omega^1], & (\omega^2)' = c[\omega^2 \omega^3], & (\omega^3)' = 0 \\ (3) & (\omega^1)' = -[\omega^3 \omega^1], & (\omega^2)' = [\omega^2 \omega^3], & (\omega^3)' = 0 \\ (4) & (\omega^1)' = [\omega^2 \omega^3] - [\omega^3 \omega^1], & (\omega^2)' = [\omega^2 \omega^3], & (\omega^3)' = 0 \\ (6) & (\omega^1)' = [\omega^2 \omega^3] & (\omega^2)' = 0, & (\omega^3)' = 0 \\ (7) & (\omega^1)' = 0, & (\omega^2)' = 0, & (\omega^3)' = 0 \\ & & (c \neq 1). & \end{array} \right.$$

Si l'on restreint c à être une constante réelle, $(\mathbf{9}.2)$ sont ce qu'on appelle les *formes réelles* des groupes complexes [1]. Montrons que ces formes réelles ne donnent pas tous les groupes réels comme classifiés au n° **8**.

Appliquons à la forme (1) de $(\mathbf{9}.2)$ la transformation

$$\bar{\omega}^1 = -\omega^1 + \omega^3, \qquad \bar{\omega}^2 = \omega^2, \qquad \bar{\omega}^3 = \omega^1 + \omega^3;$$

on trouve le type (II). Pour la forme (2), on applique la transformation

$$\bar{\omega}^1 = \omega^1 + \omega^2, \qquad \bar{\omega}^2 = \omega^1 - \omega^2, \qquad \bar{\omega}^3 = \frac{1}{2}(1 - c)\omega^3,$$

et trouve

$$\begin{aligned} (\bar{\omega}^1)' &= [\bar{\omega}^2 \bar{\omega}^3] + \frac{c+1}{c-1} [\bar{\omega}^3 \bar{\omega}^1], \\ (\bar{\omega}^2)' &= -\frac{c+1}{c-1} [\bar{\omega}^2 \bar{\omega}^3] - [\bar{\omega}^3 \bar{\omega}^1], \\ (\bar{\omega}^3)' &= 0; \end{aligned}$$

puisque le coefficient $p = \frac{c+1}{c-1}$ peut être rendu non négatif en changeant éventuellement les signes de $\bar{\omega}^2$ et $\bar{\omega}^3$, on se trouve au type (C). La forme (3) est du type (VI). Pour la forme (4), on change le signe de ω^3, ce qui donne le type (VII). La forme (6) est du type (V), et la

---

[1] L. Pontrjagin, *Topological groups*, p. 265-266.

forme (7) est du type (III). On a donc la table d'équivalence

(1)	(2)	(3)	(4)	(6)	(7)
(II)	(C)	(VI)	(VII)	(V)	(III)

On voit qu'on n'en obtient pas les types (I) et (A). En d'autres termes, *pour les groupes réels*, (**9**.1) *doit être complétée par les formes suivantes*

(8) $(X_2X_3) = X_1, \qquad (X_3X_1) = X_2, \qquad (X_1X_2) = X_3;$

(9) $(X_2X_3) = -X_1 - pX_2, \qquad (X_3X_1) = pX_1 - X_2, \qquad (X_1X_2) = 0 \qquad (p \gtreqless 0).$

Remarque 1. — En cas complexe, (8) et (1) de (**9**.1) sont transformables entre elles par un changement *complexe* de base, comme aussi (9) et (2) de (**9**.1). En effet, si dans (1) on pose

$$X_1 = \frac{1}{2}(\overline{X}_1 - i\overline{X}_2), \qquad X_2 = i\overline{X}_3, \qquad X_3 = 2(\overline{X}_1 + i\overline{X}_2),$$

on obtient la forme (8) en lettres barrées; de même, si l'on pose

$$X_1 = \overline{X}_1 + i\overline{X}_2, \qquad X_2 = \overline{X}_1 - i\overline{X}_2, \qquad X_3 = \frac{1}{2}i(1-c)\overline{X}_3$$

dans (2), on trouve la forme (9) où $p = i\dfrac{1+c}{1-c}$.

Remarque 2. — En cas réel, (8) et (1) de (**9**.1), comme aussi (9) et (2) de (**9**.1), ne sont transformables l'une à l'autre par aucun changement *réel* de base.

SECONDE PARTIE.

Représentations linéaires.

A partir de chaque type d'équations de structure de Cartan qu'on vient d'obtenir, on peut, par l'intégration des systèmes différentiels, déterminer un groupe de transformations linéaires ayant le même type d'équations de structure. Nous nous contenterons de donner les résultats de ces calculs, mais nous vérifierons brièvement dans la direction inverse que le groupe linéaire représentatif de chacun des types (I)-(VII), (A)-(B) a actuellement les équations de structure de ce type.

1. Le groupe de rotations. — Ce groupe (autour d'un point fixe) à n dimensions dépend de $\frac{1}{2}n(n-1)$ paramètres; c'est un groupe à trois paramètres si $n=3$. Soit $a_{\lambda\mu}$ une matrice orthogonale variable. Les formes de Ffaff ω (composantes relatives du repère mobile du groupe) sont données par

$$\omega_{\lambda\mu}=\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu\lambda}\, da_{\nu\mu} \qquad (\lambda,\ \mu=1,\ \ldots,\ n)$$

qui, comme on le constate aisément, sont antisymétriques en λ, μ, et alors sont en nombre $\frac{1}{2}n(n-1)$. Les équations de structure de Cartan du groupe de rotations s'écrivent donc

$$\omega'_{\lambda\mu}=\sum_{\nu}[\omega_{\nu\lambda}\omega_{\nu\mu}].$$

En particulier, pour $n=3$, ces équations comprennent

$$\omega'_{23}=[\omega_{31}\omega_{12}], \qquad \omega'_{31}=[\omega_{12}\omega_{23}[, \qquad \omega'_{12}=[\omega_{23}\omega_{31}]$$

qui sont de type (I) quand on pose

$$\omega^1=\omega_{23}, \qquad \omega^2=\omega_{31}, \qquad \omega^3=\omega_{12}.$$

Alors ([1])

Théorème 1. — *Les groupes de type* (I) *sont homomorphes au groupe de rotations de l'espace euclidien à trois dimensions.*

Remarque. — Ce groupe représentatif du type (I) est caractérisé

([1]) Dans les théorèmes suivants, l'homomorphisme deviendra un isomorphisme si les groupes sont simplement connexes, ou s'ils sont remplacés par leurs groupes de recouvrement. Toutefois, l'homomorphisme est un isomorphisme local.

comme le groupe de transformations linéaires en x, y, z qui laissent invariante la forme fondamentale $x^2+y^2+z^2$. Si cette forme est remplacée par $x^2+y^2-z^2$, on obtiendra un groupe de pseudo-rotations; on constate par des calculs pareils que ce dernier groupe a les équations de structure du type (II). Néanmoins, nous signalerons un autre groupe représentatif du type (II).

2. Le groupe linéaire unimodulaire. — Ce groupe (homogène) à n dimensions dépend de n^2-1 paramètres; il est un groupe à trois paramètres si $n=2$. Soit a_μ^λ une matrice variable de déterminant 1. La matrice inverse étant A_μ^λ, posons

$$\omega_\mu^\lambda = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu^\lambda \, da_\mu^\nu \qquad (\lambda, \mu = 1, \ldots, n).$$

On voit facilement que ces formes de Pfaff sont assujetties à la relation $\omega_1^1+\omega_2^2+\ldots+\omega_n^n=0$; donc, la dernière forme ω_n^n peut être écartée et les n^2-1 autres figurent seulement dans notre considération. On trouve

$$(\omega_\nu^\lambda)' = -\sum_\nu [\omega_\nu^\lambda \omega_\mu^\nu].$$

En particulier, pour $n=2$, et si l'on remplace ω_2^2 par $-\omega_1^1$ à cause de la relation citée ci-dessus, on obtient les équations de structure

$$(\omega_1^1)' = -[\omega_2^1\omega_1^2], \qquad (\omega_2^1)' = -2[\omega_1^1\omega_2^1], \qquad (\omega_1^2)' = -2[\omega_1^2\omega_1^1],$$

qui, par la substitution

$$\omega^1 = -2\omega_1^1, \qquad \omega^2 = \omega_2^1+\omega_1^2, \qquad \omega^3 = -\omega_2^1+\omega_1^2,$$

se ramènent au type (II). On a donc

Théorème 2. — *Les groupes de type* (II) *sont homomorphes au groupe*

$$\bar{x} = ax+by, \quad \bar{y} = cx+dy, \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1.$$

Remarque. — Ce groupe affine unimodulaire du plan est homomorphe au groupe de rotations de l'espace non euclidien ayant la forme fondamentale $x^2+y^2-z^2$ (*voir* la remarque à la fin du n° **1**).

3. Le groupe de translations $\bar{x}_\lambda = x_\lambda + a_\lambda (\lambda = 1, \ldots, n)$. — On a ici $\omega_\lambda = da_\lambda$, et par suite les équations de structure sont $\omega'_\lambda = 0$. Pour $n = 3$, celles-ci appartiennent au type (III). Ainsi

Théorème 3. — *Les groupes de type* (III) *sont homomorphes au groupe*

$$\bar{x} = x + a, \qquad \bar{y} = y + b, \qquad \bar{z} = z + c.$$

Remarque. — Ce groupe est le produit direct des groupes de translations du plan et de la droite.

4. Un groupe linéaire particulier. — Considérons les transformations linéaires

$$T_a \left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= a_1 + a_2 x \\ \bar{y} &= a_3 + y \end{aligned} \right. \qquad (a_2 > 0),$$

dépendant des trois paramètres a_1, a_2, a_3, la transformation identique correspondant aux « valeurs initiales » $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 0$. Ces transformations forment manifestement un groupe. On a

$$T_a^{-1} \left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= -\frac{a_1}{a_2} + \frac{x}{a_2}, \\ \bar{y} &= -\,a_3 + y, \end{aligned} \right. \qquad T_{a+da} \left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= (a_1 + da_1) + (a_2 + da_2)x, \\ \bar{y} &= (a_3 + da_3) + y. \end{aligned} \right.$$

D'où

$$T_a^{-1} T_{a+da} \left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{da_1}{a_2} + \left(1 + \frac{da_2}{a_2}\right) x, \\ \bar{y} &= da_3 + y, \end{aligned} \right.$$

dont les valeurs des paramètres diffèrent des valeurs initiales par les accroissements

$$\omega_1 = \frac{da_1}{a_2}, \qquad \omega_2 = \frac{da_2}{a_2}, \qquad \omega_3 = da_3.$$

On trouve

$$\omega'_1 = [\omega_1 \omega_2], \qquad \omega'_2 = 0, \qquad \omega'_3 = 0,$$

qui sont de type (IV). Alors

Théorème 4. — *Les groupes de type* (IV) *sont homomorphes au groupe*

$$\begin{aligned} \bar{x} &= ax + b, \\ \bar{y} &= y + c, \end{aligned} \qquad (a > 0).$$

Remarque. — Ce groupe est le produit direct du groupe linéaire (non homogène) et du groupe de translations de la droite.

5. Un autre groupe linéaire. — Prenons le groupe de transformations linéaires

$$\bar{x} = a_1 + x - a_2 y, \qquad \bar{y} = a_3 + y.$$

On trouve comme ci-dessus

$$\omega_1 = da_1 + a_2\, da_3, \qquad \omega_2 = da_2, \qquad \omega_3 = da_3,$$

et par conséquent les équations de structure sont

$$\omega'_1 = [\omega_2 \omega_3], \qquad \omega'_2 = 0, \qquad \omega'_3 = 0,$$

qui appartiennent au type (V). On a donc

Théorème 5. — *Les groupes de type* (V) *sont homomorphes au groupe*

$$\bar{x} = x + ay + b, \qquad \bar{y} = y + c.$$

Remarque. — Ce groupe est le sous-groupe du groupe affine général

$$\bar{x} = a_{11} x + a_{12} y + a_{13}, \qquad \bar{y} = a_{21} x + a_{22} y + a_{23},$$

caractérisé par les trois conditions géométriques suivantes :

1° une direction (l'axe de x) est invariante;

2° la distance le long d'une autre direction (l'axe de y) est invariante;

3° l'aire est invariante (condition unimodulaire).

6. Encore un groupe linéaire. — C'est le groupe

$$\bar{x} = a_1 + a_3 x, \qquad \bar{y} = a_2 + a_3 y \qquad (a_3 > 0).$$

On a ici

$$\omega_1 = \frac{da_1}{a_3}, \qquad \omega_2 = \frac{da_2}{a_3}, \qquad \omega_3 = \frac{da_3}{a_3},$$

et les équations de structure sont

$$\omega'_1 = -[\omega_3 \omega_1], \qquad \omega'_2 = [\omega_2 \omega_3], \qquad \omega'_3 = 0,$$

qui sont de type (VI). Ainsi

Théorème 6. — *Les groupes de type* (VI) *sont homomorphes au groupe*

$$\bar{x} = ax + a, \quad \bar{y} = ay + c, \qquad (a > 0).$$

Remarque. — Ce groupe est caractérisé géométriquement comme le sous-groupe du groupe affine général qui laisse invariantes deux directions et chacune de ses transformations multiplie toutes les distances dans la même proportion.

7. Un autre groupe linéaire. — C'est le groupe

$$\bar{x} = a_1 + a_2 y + e^{-a_3} x, \qquad \bar{y} = a_3 + y.$$

On en déduit

$$\omega_1 = e^{a_3}(da_1 - a_2\, da_3), \qquad \omega_2 = e^{a_3}\, da_2, \qquad \omega_3 = da_3,$$

et les équations de structure sont

$$\omega'_1 = -[\omega_2\omega_3] + [\omega_3\omega_1], \qquad \omega'_2 = -[\omega_2\omega_3], \qquad \omega'_3 = 0,$$

qui sont de type (VII). Ainsi

Théorème 7. — *Les groupes de type* (VII) *sont homomorphes au groupe*

$$\bar{x} = e^{-a} x + by + c, \qquad \bar{y} = y + a.$$

8. Le groupe de déplacements quasi euclidiens. — Considérons le groupe de transformations linéaires

$$\bar{x} = a_1 + (x \cos a_3 - y \sin a_3) e^{-pa_3},$$
$$\bar{y} = a_2 + (x \sin a_3 + y \cos a_3) e^{-pa_3},$$

dépendant des trois paramètres a_1, a_2, a_3, où p est une constante fixe. On trouve

$$\omega_1 = e^{pa_3}(\cos a_3\, da_1 + \sin a_3\, da_2),$$
$$\omega_2 = e^{pa_3}(-\sin a_2\, da_1 + \cos a_3\, da_2);$$
$$\omega_3 = da_3,$$

et par suite les équations de structure sont

$$\omega'_1 = -[\omega_2\omega_3] + p[\omega_3\omega_1],$$
$$\omega'_2 = -p[\omega_2\omega_3] - [\omega_3\omega_1],$$
$$\omega'_3 = 0,$$

qui appartiennent au type (A). Ainsi

THÉORÈME 8. — *Les groupes de type* (A) *sont homomorphes au groupe*

$$\bar{x} = a + (x\cos\theta - y\sin\theta)e^{-p\theta},$$
$$\bar{y} = b + (x\sin\theta + y\cos\theta)e^{-p\theta}.$$

Remarque. — Pour $p = 0$, ce groupe consiste en les déplacements euclidiens du plan.

9. LE GROUPE DE DÉPLACEMENTS QUASI-MINKOWSKIENS. — Prenons d'une manière semblable le groupe

$$\bar{x} = a_1 + (x\cosh a_3 + y\sinh a_3)e^{-pa_3},$$
$$\bar{y} = a_2 + (x\sinh a_3 + y\cosh a_3)e^{-pa_3}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= e^{pa_3}(\cosh a_3\,da_1 - \sinh a_3\,da_2),\\
\omega_2 &= e^{pa_3}(-\sinh a_3\,da_1 + \cosh a_3\,da_2),\\
\omega_3 &= 0,
\end{aligned}$$

et les équations de structure sont

$$\begin{aligned}
\omega'_1 &= [\omega_2\omega_3] + p[\omega_3\omega_1],\\
\omega'_2 &= -p[\omega_2\omega_3] - [\omega_3\omega_1],\\
\omega'_3 &= 0,
\end{aligned}$$

qui sont de type (B). Ainsi

THÉORÈME 9. — *Les groupes de type* (B) *sont homomorphes au groupe*

$$\bar{x} = a + (x\cosh\theta + y\sinh\theta)e^{-p\theta},$$
$$\bar{y} = b + (x\sinh\theta + y\cosh\theta)e^{-p\theta}.$$

J'ajoute, pour conclure, qu'à l'aide des groupes linéaires représentatifs donnés dans les théorèmes précédents, j'ai pu trouver toutes les représentations *irréductibles* de tous les groupes de Lie à trois paramètres.