JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

Z. P. DIENES

Note sur la comparaison des ensembles mesurables *B*

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 26 (1947), p. 227-235.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1947_9_26__227_0>

Note sur la comparaison des ensembles mesurables B;

PAR Z. P. DIENES.

1. INTRODUCTION. — Étant donnés deux ensembles E et F, cinq cas sont possibles :

$$E < F, \tag{1}$$

$$E > F, \tag{2}$$

$$E = F, \tag{3}$$

$$EF = 0, \tag{4}$$

$$EF > 0, \tag{5}$$

E et F sont *comparables* s'il est possible de décider, lequel de ces cas a lieu. Il reste encore à préciser, quelles seront les opérations admissibles pour la décision. Aux conceptions différentes d'opérations admissibles correspondent des niveaux différents de raisonnements. Si l'on se borne à faire un nombre fini d'opérations de nature finie, on se trouve au point de vue de René Baire. Au point de vue énuméraliste, auquel se place (je crois) M. Émile Borel, on se borne à faire des opérations de nature dénombrable, en nombre effectivement énumérable. Ce niveau est un peu plus général. On pourrait admettre un nombre non dénombrable d'opérations, mais quand même exiger des démonstrations constructives pour les énoncés d'existence. Le point de vue tout à fait général serait de postuler que la pentachotomie citée est toujours une classification définie, c'est-à-dire qu'elle est définie pour n'importe quels ensembles abstraits.

Nous choisissons le deuxième niveau, et nous démontrerons qu'à ce niveau, on peut comparer les ensembles des classes B_0, B_1 et B_2 de Baire.

Définitions. — Comparer deux entiers a et b veut dire décider si

$a < b$, ou $a > b$, ou $a = b$. On admettra que deux entiers peuvent être comparés un nombre dénombrable de fois (on dira aussi δ fois). Deux ensembles E et F sont comparables, ou EγF, si l'on peut décider, dans lequel des cinq cas ils se trouvent, en comparant des entiers δ fois. Un énoncé P est démontrable D, ou PεD, s'il se vérifie par δ comparaisons d'entiers. Les procédés de δ comparaisons d'entiers sont des procédés D. On a EγF si [ou (1), ou (2), ou (3), ou (4), ou (5)] εD. Les définitions et la plupart des notations sont celles employées dans mon Mémoire du *Journal of Lond. Math. Soc.*, vol. 14, juillet 1939, p. 169.

THÉORÈME 1. — *La suite $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, étant monotone bornée,* $(\lim x_n)\varepsilon$D.

En effet, si tous les x_n sont entiers, il faut faire δ fois $x_n \gamma x_{n+1}$. En général, considérons cette suite écrite dans le système de base 2 :

$$a_{01}.a_{11}a_{21}\ldots, a_{r1}\ldots;\quad a_{02}.a_{12}a_{22}\ldots, a_{r2}\ldots;\quad \ldots;$$
$$a_{0s}, a_{1s}, a_{2s}, \ldots, a_{rs}, \ldots,$$

où les a_{rs} sont des 0 ou des 1. La suite des entiers (a_{0s}) est monotone bornée et détermine donc sa limite par ce qui précède. Une fois cette limite a_0 atteinte, (a_{1s}) devient monotone bornée, c'est-à-dire ou bien tous les termes sont 0, ou bien pour une valeur de s, a_{1s} prend la valeur 1. Une fois cette limite a_1 atteinte, on opère sur la suite (a_{2s}) et ainsi de suite. Le nombre $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$, sera la limite cherchée, et le procédé est bien un procédé D.

THÉORÈME 2. — *Les nombres x et y étant réels,* $(x\gamma y)\varepsilon$D.

Si l'on exclut les 1 indéfiniment répétés, la comparaison se fait par δ comparaisons des nombres 0 et 1.

Nous allons employer la lettre ε pour la phrase « est un élément de la classe ». Nous employerons aussi le signe $\rightarrow$ comme signe d'implication, s'il intervient entre deux propositions [1].

[1] Ce signe n'est qu'une abréviation commode, et ne doit pas être entendu comme l'implication matérielle de M. Bertrand Russell.

Théorème 3. — *Si une classe d'ensembles est telle que pour tout* $E_1 \varepsilon K$ *et pour tout* $E_2 \varepsilon K \rightarrow E_1 E_2 \varepsilon K$ *et* $CE_1 \varepsilon K$, *alors* $(E = o) \varepsilon D$ *pour tout* $E \varepsilon K \rightarrow E_1 \gamma E_2$ *pour tout* $E_1 \varepsilon K$ *et* $E_2 \varepsilon K$.

En effet, les cinq cas peuvent s'exprimer :

$$CE_1 . E_2 = o, \tag{1}$$

$$CE_2 . E_1 = o, \tag{2}$$

$$CE_1 . E_2 = CE_2 . E_1 = o, \tag{3}$$

$$E_1 E_2 = o, \tag{4}$$

$$E_1 E_2 > o \quad \text{et} \quad CE_1 . E_2 > o \quad \text{et} \quad CE_2 . E_1 > o. \tag{5}$$

Un intervalle (de nombres réels) s'écrira toujours j. On définit la classe B_0 par la condition $E = \Sigma j_n$ et $CE = \Sigma j''_n$ et l'on écrit $E \varepsilon B_0$. On définit les autres classes par des passages à la limite, c'est-à-dire si $E \varepsilon B_1$ on aura en général $E = \Sigma_k \Pi_j \Sigma_i j_{ijk}$; la réunion des classes B_n, $n \leqq \alpha$, sera écrite R_α.

Corollaire du Théorème 3. — *Si* $E_1 \varepsilon R_\alpha$ *et* $E_2 \varepsilon R_\alpha$, *alors* $E_1 \gamma E_2$, *toutes les fois que* $(E = o) \varepsilon D$ *pour tout* $E \varepsilon R_\alpha$.

En posant $a = 1$, et rappelant que $E = \Sigma_k \Pi_j \Sigma_i j_{ijk}$, on voit que pour démontrer la comparabilité des ensembles de R_1 il suffit de démontrer que $(\Pi_j \Sigma_i j_{ij} = o) \varepsilon D$. On pose $\Sigma_r j_{rs} = J_s$ et $J = \Pi J_s$. Alors le problème dans R_1 revient à décider si $J = o$.

2. La comparaison des ensembles de R_1. — Une somme non stricte c'est-à-dire dont les membres peuvent avoir des parties communes non nulles), sera écrite Σe_n. Alors on a :

Théorème 4. — $(\Sigma j_n = \Sigma j''_n) \varepsilon D$.

En effet, soit $j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots$, tel que $j_r j_s > o$ pour quelques r et s. Formons $j_{11} = \Sigma j_n$ de ces j_n, y compris j_1, pour lesquels $j_1 j_n > o$. Puis formons $j_{12} = \Sigma j_n$ de ces j_n, y compris j_{11}, pour lesquels $j_{11} j_n > o$. Opérons ainsi transfiniment jusqu'à $j_{1\alpha} j_n = o$ pour tout j_n qui n'a pas été inclus dans $j_{1\alpha}$. Mettons $j'_1 = j_{1\alpha}$. Opérons de même sur le premier $j_n < Cj'_1$. Nous obtenons j'_2 et ainsi de suite. Nous avons $j'_r . j'_s = o$ pour tous les r et s, ce qui prouve le théorème.

Corollaire. — $(\Sigma j_n)(\Sigma j'_n) = \Sigma j''_n \varepsilon D$.

En effet, le premier membre est une somme non stricte, et le théorème s'applique.

La dernière remarque montre qu'on peut remplacer J_s par $J_{s-1} J_s$ dans J. Dans la suite on supposera que J est déjà tel que $J_{n+1} < J_n$.

La pyramide d'intervalles. — Une telle pyramide sera une suite de ω lignes; les intervalles j_{r1} formeront la première ligne, les j_{i2} la deuxième ligne, en écrivant j_{i2} au-dessous de j_{r1} si $j_{i2} < j_{r1}$, la suite de ces j étant d'ordre ω^2. En général, les j_{ks} formeront la $s^{\text{ième}}$ ligne, suite d'ordre ω^s, en écrivant j_{ks} au-dessous de $j_{r,s-1}$ si $j_{ks} < j_{r,s-1}$. Une suite $j_{i1} > j_{j2} > j_{k3} > \ldots$ est un *chemin*. A tout point de J correspond un chemin, mais à un chemin peut correspondre tout un intervalle. Un chemin est *vide* si le produit $j_{i1} . j_{j2} . j_{k3} . \ldots, = 0$. Pour décider si $J = 0$ ou non, il faut décider si tous les chemins sont vides, ou s'il y en a qui ne le sont pas.

On dira que x_1 est une *extrémité fermée* de l'intervalle $(x_1, x_2) = j$ si $x_1 < (x_1, x_2)$, en abrégé $x_1 = e(j)$.

Soit $x = e(j_{is})$. Si aussi $x = e(j_{kr})$ pour un k pour tout $r \geqq s$, alors $x < J$ et $J > 0$. On peut donc supposer qu'on peut avoir $x = e(j_{kr})$ seulement pour un nombre limité des r. Puisque x ne pourrait pas faire partie de J, on supposera dès maintenant que toutes les extrémités sont ouvertes, c'est-à-dire qu'elles n'appartiennent pas aux intervalles.

Soit J une pyramide telle que tous les j_{rs} soient ouverts. Les j qui sont écrits en dessous de j_{rs} forment la *sous-pyramide* de j_{rs} qui s'écrit $p(j_{rs})$. On écrit $p(j_{rs}) = 0$ si elle ne contient aucun intervalle, et $p(j_{rs}) > 0$ dans le cas contraire.

Enlevons j de la pyramide si $p(j) = 0$. Opérons transfiniment jusqu'à $p(j) > 0$ pour chaque j de J. Cette opération ne peut pas changer l'ensemble J, et elle est évidemment un procédé D. Dès maintenant nous ne considérerons que des pyramides dans lesquelles $p(j) > 0$ pour chaque j.

Posons $j_{rs} = (a_{rs}, b_{rs})$. Si $a_{rs} = a_{tu}$ pour un t et pour tout $u \geqq s$, on construit $\lim\limits_{u} b_{tu} = b$, ce qui est possible par le théorème 1, et si $b > a_{rs}$, $(a_{rs}, b) < J$ et $J > 0$. Alors on supposera que pour chaque a_{rs}

tel que $a_{rs}=a_{tu}$ pour un t et pour tout $u\geqq s$, $\lim\limits_{u} b_{tu}=a_{rs}$ et aussi si $b_{rs}=b_{tu}$ pour un t et pour tout $u\geqq s$, $\lim\limits_{u} a_{tu}=b_{rs}$, car dans le cas contraire nous savons déjà que $J<0$.

Classification des intervalles de la pyramide. — L'intervalle $j_{rs}=(a_{rs}, b_{rs})$ est un *intervalle z*, ou $j(z)$ (ce qu'on lira « j est un intervalle z », ou simplement « intervalle z »), s'il y a un t pour chaque u tel que $a_{rs}=a_{tu}$, ou bien si $b_{rs}=b_{tu}$. $p(j)$ est *pyramide z* si tous les j sont $j(z)$; et (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n), ..., est *chemin z* si $a_1=a_n$ pour tout $n>1$ ou bien si $b_1=b_n$, pour tout $n>1$. Il faut noter qu'une pyramide z peut contenir des chemins qui ne sont pas des chemins z. Pour « pyramide z » on écrira $p_z(j)$.

THÉORÈME 5. — $j(z)\varepsilon D$.

Par le théorème 2, on compare a_{rs} avec a_{tu} pour tout $u>s$ et s'il y a un t pour chaque $u>s$ tel que $a_{rs}=a_{tu}$, alors j_{rs} est $j_{rs}(z)$; j_{rs} n'est pas $j_{rs}(z)$ dans le cas contraire.

L'intervalle j est $j(y_1)$ si $p_z(j)$. j est $j(y_2)$ si $p(j)$ n'est formée que des $j(y_1)$ et des $j(z)$ et en général j est $j(y_\alpha)$ si $p(j)$ n'est formée que des $j(y_\beta)$, $\beta<\alpha$, α étant le premier nombre transfini après les β. On dira que j est $j(y)$, s'il y a un α tel que $j(y_\alpha)$, ou bien si j fait partie d'un chemin z.

THÉORÈME 6. — $j(y)\varepsilon D$.

Il n'y a que $\aleph$ chemins z, et ($j<$ chemin z)εD. On sait aussi dénombrer les y_α dans une suite transfinie et j y sera compris si $j(y)$ (mais $j<$ chemin z), et non pas dans le cas contraire, on conclut $j(y)\varepsilon D$.

Un intervalle sera $j(x)$ quand il n'est pas $j(y)$.

Si $(a_n, b_n)<J_n$ et $(a_m, b_m)<J_m$ et $m>n$, on dira que j_m est intérieur à j_n $\left(\text{ou } \frac{j_m}{j_n}\right)$, si $a_m>a_n$ et $b_m<b_n$.

THÉORÈME 7. — *Pour qu'un chemin ne soit pas vide, il faut et il suffit qu'à chaque intervalle corresponde un autre qui lui soit intérieur.*

La démonstration est laissée au lecteur.

En vertu du théorème 6, c'est un procédé D de décider s'il y a des $j(x)$ dans une pyramide ou si chaque intervalle est $j(y)$.

THÉORÈME 8. — *Si une pyramide* J *contient un* $j(x)$, $J > o$.

En effet, soit $j_1(x)$, alors $p(j_1)$ contient $j_2(x)$ car, autrement nous aurions $j_1(y)$. On en déduit l'existence d'un chemin $j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots,$ qui contient $\delta j_r(x)$. De plus, $p[j_n(x)]$ doit contenir $j_m(x)$ tel que $\frac{j_m}{j_n}$, car autrement tous les $j_m(x)$ dans $p(j_n)$ auraient les extrémités a_n ou b_n et appartiendraient à un chemin z et nous aurions $j_n(y)$, contrairement à l'hypothèse. Le théorème 7 nous montre qu'il y a un chemin non vide et $J > o$. C. Q. F. D.

Considérons maintenant des pyramides qui soient formées entièrement des $j(y)$. Le chemin $j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots,$ est alors chemin z, ou bien $p(j_s)$ est une pyramide z pour un certain $n = s$ (et par conséquent aussi pour $n > s$). Il suffit donc de considérer δ pyramides z.

Dans une pyramide z nous dirons que j est : $j(w_1)$ si $p(j)$ contient deux chemins au plus, tous les deux des chemins z, — $j(w_2)$ si $p(j)$ ne contient que des $j(w_1)$, — et ainsi de suite transfiniment. On définit $j(w_\alpha)$ d'une manière analogue aux $j(y_\alpha)$, et nous posons $j(w)$ pour tout $j(w_\alpha)$. Un intervalle qui n'est pas $j(w)$ est $j(v)$.

THÉORÈME 9. — $j(w) \varepsilon D$ et $j(v) \varepsilon D$.

Même démonstration que pour le théorème 6.

THÉORÈME 10. — *Pour qu'une pyramide z soit vide, il faut et il suffit qu'elle ne contienne aucun* $j(v)$.

En effet, si tous les intervalles sont $j(w)$, évidemment $J = o$. S'il y a un $j_1(v)$, $p(j_1)$ contiendra $j_2(v)$, car autrement il serait $j_1(w)$. On en déduit l'existence d'un chemin $j_1, j_2, \ldots, j_n, \ldots,$ qui contient $\delta j(v)$. Chaque $p(j_r)$ doit contenir $j_s(v)$ tel que $\frac{j_s}{j_r}$, ce qu'on voit immédiatement si l'on remarque que tous les $j(w)$ peuvent être enlevés sans affecter l'ensemble J, et alors tous les j_s, $s > r$, ne peuvent pas avoir les extrémités a_r ou b_r, parce que autrement j_r serait $j_r(w)$.

On peut résumer le procédé comme suit :

La décision $J = o$ *par des procédés* D. — On arrange $J = \Pi_s \Sigma_r j_{rs} = \Pi_s J_s$

de manière que l'on ait $J_{s+1} < J_s$ et que $p(j_{rs}) > 0$ pour tout j_{rs}. Si $e(j_{rs}) = a$ et $e(j_{tu}) = a$ pour un t et pour tout $u > s$, alors $J > 0$. Dans le cas contraire on considère les extrémités comme ouvertes. Si $a_{rs} = a_{tu}$ (ou $b_{rs} = b_{tu}$) pour un t et pour tout $u \geqq s$ et $\lim_u b_{tu} \neq a_{rs}$ (ou $\lim_u a_{tu} \neq b_{rs}$), alors $J > 0$. Dans le cas contraire on détermine les $j(x)$ et les $j(y)$. S'il y a un $j(x)$, $J < 0$. Si non, on examine les pyramides z et l'on y cherche les $j(v)$ et les $j(w)$; s'il y a un $j(v)$, $J > 0$; si non, $J = 0$.

On en déduit, rappelant le théorème 3, que *tous les ensembles de* R_1 *sont comparables*.

3. La comparaison des ensembles de R_2. — Nous aurions pu définir R_1 comme des ensembles tels que E ainsi que CE soient des sommes strictes d'ensembles fermés et ouverts. Alors la décision $E = 0$ n'aurait présenté aucune difficulté. Mais avec cette définition on peut faire la décision dans R_2 en considérant des pyramides contenant des intervalles et des ensembles parfaits non denses. On a d'abord quelques théorèmes préliminaires :

Théorème 11. — *C'est un procédé* D *de décomposer un ensemble fermé en une partie dénombrable et une partie parfaite.*

La démonstration se fait comme celle de René Baire (*Leçons sur les fonctions discontinues*, § 41), qui ne contient que des procédés D.

Un intervalle ouvert sera écrit i_n, un ensemble parfait non dense π_n, et un seul point x_n. Un ensemble fermé sera écrit F_n. On a :

Théorème 12. — $(\Sigma i_n + \Sigma F_n = \Sigma i'_n + \Sigma x_n + \Sigma \pi_n) \varepsilon D$.

En effet, considérons tous les $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots, i_n = (a_n, b_n)$ avec a_n et b_n rationnels. Nous savons que $(i_n < F) \varepsilon D$. Formons $F - \Sigma i_n$ pour tout $i_n < F$. Cet ensemble est fermé, et par le théorème 11, $F - \Sigma i_n = \pi + \Sigma x_n$, π est non dense, et appliquant le théorème 4 l'énoncé est vérifié.

Pour faire la décision dans R_2 on fait des raisonnements analogues à ceux pour R_1, et la pyramide sera composée de points, d'intervalles et d'ensembles fermés (parfaits non denses). On peut aisément éliminer les points et les extrémités fermées en les considérant séparément. On étend ainsi le théorème 7 et l'on a :

Théorème 13. — *Pour qu'un chemin dans une pyramide de* R_2 *contenant des* π *et des* i *ne soit pas vide, il faut et il suffit qu'à chaque élément du chemin corresponde un autre qui lui soit intérieur.*

C'est une conséquence des propriétés bien connues des ensembles fermés, on laisse les détails au lecteur.

En vertu de 13, on généralise tous les autres théorèmes aux pyramides de R_2 et l'on conclut, en rappelant le théorème 3, que :

Les ensembles de R_2 *sont comparables.*

La faiblesse du raisonnement précédent résulte du fait que les deux définitions de la classe R_1 ne rentrent peut-être pas l'une dans l'autre par des procédés D. On peut quand même énoncer :

Théorème fondamental. — *On peut comparer deux ensembles de* R_1, *en partant de la définition de* B_1 *comme limite d'ensembles qui sont sommes d'intervalles ainsi que leurs compléments. On peut comparer deux ensembles de* R_2, *en partant de la définition de* B_2 *comme limite d'ensembles qui sont des sommes d'ensembles ouverts et fermés ainsi que leurs compléments.*

Démontrons encore quelques théorèmes :

Théorème 14. — $S \varepsilon B \rightarrow (x < S) \varepsilon D$, *$x$ étant un nombre.*

En effet, si S est un intervalle, l'énoncé est évident. Tout $S \varepsilon B$ peut être obtenu par des additions et des parties communes à partir d'intervalles. Posons

$$S = \Sigma_j \Pi_i \Sigma_k s^j_{ki} \quad \text{ou} \quad S \varepsilon B_\alpha \qquad \text{et} \qquad s^j_{ki} \varepsilon B_\beta, \ \beta < \alpha.$$

Admettons que $(x < s^j_{ki}) \varepsilon D$. Alors si $x < s^j_{ki}$ pour tout j pour une valeur de k et pour chaque $i = 1, 2, 3, \ldots$, on a $x < S$, et on ne l'a pas dans le cas contraire. Si $\alpha = 1$, les s^j_{ki} sont des intervalles et l'on a le théorème par induction transfinie.

Il serait intéressant de démontrer que $j < S$ est démontrable D pour chaque S mesurable B.

4. Construction des bornes des ensembles mesurables B. — Écrivons B(E) et b(E) pour les bornes supérieures et inférieures de E. Admettons la seconde définition des classes. Alors, pour commencer, il faut construire B(E) et b(E) dans R_1 par des procédés D. Si E est un point ou un intervalle, la construction est évidente. Il faut construire $B(\pi)$ et $b(\pi)$. Avant d'aborder cette question, nous démontrons :

THÉORÈME 15. — $[B(\Sigma x_n)$ et $b(\Sigma x_n)]\varepsilon D$, *les x_n étant des points.*

En effet, si $x_n \leqq x_1$ pour tout $n > 1$, $B(x_n) = x_1 = x_{n_1} = u_1$. Si non, soit $u_2 = x_{n_2}$ où tout $x_n \leqq x_{n_2}$ pour $n < n_2$, mais $x_{n_2} > x_{n_1}$. Si $x_n < u_2$ pour tout $n > n_2$, $B(x_n) = u_2$. Si non, soit $u_3 = x_{n_3}$ où tout $x_n < x_{n_3}$ pour $n < n_3$, mais $x_{n_3} > x_{n_2}$. Si $x_n < u_3$ pour tout $n > n_3$, $B(x_n) = u_3$ et ainsi de suite. Ou bien $B(x_n)$ est déterminé après un nombre limité d'opérations, ou bien $B(x_n) = \lim_n u_n$, qui est déterminé par le théorème 1.

Un raisonnement analogue tient pour $b(\Sigma x_n)$.

Puisqu'on peut transformer les nombres réels dans l'intervalle $(0, 1)$ par une transformation bicontinue, il suffit de considérer des ensembles dans $(0, 1)$. Dès maintenant tout ensemble sera pris dans cet intervalle.

THÉORÈME 16. — $B(\pi)\varepsilon D$, $b(\pi)\varepsilon D$.

En effet, on a $C\pi = \Sigma j_n = \Sigma(a_n, b_n)$. Si $b_i = 1$ pour un certain i, on a $B(\pi) = a_i$. Si $a_i = 0$, $b(\pi) = b_i$. Si $b_i \neq 1$ et $a_i \neq 0$ on a respectivement $B(\pi) = B(a_n, b_n)$ et $b(\pi) = b(a_n, b_n)$ et l'on est ramené au cas précédent.

THÉORÈME 17. — $S\varepsilon B \rightarrow [B(S)$ et $b(S)]\varepsilon D$.

En effet, soit $S = \Sigma s_n$, $S\varepsilon B_\alpha$ et $s_n \varepsilon B_\beta$, $\beta < \alpha$, et posons $B(s_n) = B_n$. Alors $B(S) = B(B_n)$, ce qui ramène au théorème 15.

Posons maintenant $\sigma = \Pi\sigma_n$, $\sigma\varepsilon B_\alpha$, et $\sigma_n \varepsilon B_\beta$ où $\beta < \alpha$ et $B'_n = B(\sigma_n)$ et l'on a $B(\sigma) = b(B'_n)$, ce qui ramène encore au théorème 15. En vertu du théorème 16, les bornes des intervalles, des points et des ensembles parfaits peuvent être construites par des procédés D, et l'on obtient le résultat cherché par une induction transfinie.

On peut ramener la construction des limites extrêmes à $(j < S)\varepsilon D$ si $S\varepsilon B$, mais on ne sait pas si cet énoncé est vrai. L'auteur croît quand même que $S\varepsilon B \rightarrow (S = 0)\varepsilon D$, et il est très probable que ce n'est pas vrai pour les ensembles analytiques non mesurables B.