JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GÉRARD PETIAU

Sur les relations tensorielles entre densités de valeurs moyennes en théorie de l'électron de Dirac. II. Relations différentielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 26 (1947), p. 1-14.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1947_9_26__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur les relations tensorielles entre densités de valeurs moyennes en théorie de l'électron de Dirac. II. Relations différentielles;

Par Gérard **PETIAU**.

La théorie de l'électron de Dirac représente ce corpuscule par les fonctions d'ondes $\psi_i (i = 1, 2, 3, 4)$ solutions de l'équation

$$\left[\frac{h}{2\pi i}\,\frac{1}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\psi_i + \sum_{p=1}^{3}\left(-\frac{h}{2\pi i}\right)\frac{\partial}{\partial x^p}\alpha_p + m_0 c\alpha_4\right]\psi_i = 0, \tag{1}$$

dans laquelle α_1, α_2, α_3, α_4 sont des matrices liées par les relations

$$\alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\nu\alpha_\mu = 2\,\delta_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4). \tag{2}$$

Ces quatre matrices, par leurs produits, permettent de construire un système complet de 16 matrices α_{A}, que nous écrirons

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_0 = 1, \qquad \alpha_\mu, \qquad i\alpha_{\mu\nu} = i[\alpha_\mu\alpha_\nu - \delta_{\mu\nu}], \\ i\alpha_{\mu\nu\rho} = i(\alpha_\mu\alpha_\nu\alpha_\rho - \alpha_\mu\delta_{\nu\rho} + \alpha_\nu\delta_{\rho\mu} - \alpha_\rho\delta_{\mu\nu}), \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4). \end{array}\right. \tag{3}$$

Ce système est irréductible, et par suite ces matrices sont du quatrième rang.

Les matrices α_A peuvent être considérées comme des opérateurs opérant sur les ψ_i et à ce titre représentent des grandeurs caractéristiques de la théorie de l'électron dont les densités de valeurs moyennes s'écrivent

$$\psi^* \alpha_A \psi. \tag{4}$$

De même, on définit au moyen des opérateurs

$$\frac{h}{2\pi i}\left[\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x^\mu}\alpha_A - \alpha_A \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x^\mu}\right] \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x^4} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

des densités de valeurs moyennes différentielles

$$T_{\mu,A} = \left(\frac{h}{2\pi i}\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi^*\right)\alpha_A\psi - \psi^*\alpha_A\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi\right)\right]. \tag{5}$$

A la forme d'espace temps (t, x^p) de l'équation (1), on peut faire correspondre une équation écrite en coordonnées d'univers $(x^4 = ict, x^p)$ en introduisant les matrices

$$\gamma_4 = \alpha_4, \qquad \gamma_p = i\alpha_4\alpha_p.$$

L'équation (1) est alors remplacée par l'équation

$$\left[\left(-\frac{h}{2\pi i}\right)\frac{\partial}{\partial x^\mu}\gamma^\mu + im_0c\right]\psi_i = 0 \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4) \tag{6}$$

et des densités de valeurs moyennes analogues à (4) et (5) sont définies par

$$\psi^+\gamma_A\psi; \tag{7}$$

$$\frac{h}{2\pi i}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi^+\right)\gamma_A\psi - \psi^+\gamma_A\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi\right)\right], \tag{8}$$

avec pour les γ_A les expressions

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma_0 = 1, \qquad \gamma_\mu, \qquad i\gamma_{\mu\nu} = i(\gamma_\mu\gamma_\nu - \delta_{\mu\nu}), \\ i\gamma_{\mu\nu\rho} = i(\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho - \gamma_\mu\delta_{\nu\rho} + \gamma_\nu\delta_{\mu\rho} - \gamma_\rho\delta_{\mu\nu}). \\ \gamma_{1234} = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \quad . \end{array}\right. \tag{8'}$$

et en posant

$$\psi^+ = \psi^* i\alpha_4$$

Les densités (4) ou (7) ne sont pas indépendantes et sont liées par des relations qui ont fait l'objet de nombreuses études. M. Pauli [1], le premier, les a déduit systématiquement d'une identité liant deux systèmes de matrices γ_A. Depuis, ces relations, ainsi que celles liant les $T_{\mu,A}$ ont fait l'objet de nombreux Mémoires utilisant la méthode de M. Pauli. En particulier, M. Kofink [2] a établi un très grand nombre de relations de divers types entre ces grandeurs. Mais l'obscurité de son symbolisme, ainsi que l'absence de notation tensorielle en rend l'intelligence très difficile. J'ai personnellement étudié les relations entre densités de la forme (4) ou (7) dans le cours que j'ai professé au Collège de France comme boursier de la Fondation Peccot en 1942, à partir de la méthode de Pauli. Dans un exposé [3] fait au Séminaire de Théories Physiques de l'Institut Henri-Poincaré en novembre 1944, j'ai repris cette question à partir d'une méthode plus simple que celle de M. Pauli, faisant intervenir la génération des matrices de Dirac à partir des matrices de spin. J'ai pu ainsi établir toutes les relations entre densités du type (4) d'une façon systématique en les mettant sous une forme tensorielle générale qui m'a permis de montrer que l'ensemble de ces relations se déduisaient de quatre d'entre elles. M. Costa de Beauregard a examiné également ce problème dans sa thèse [4], en étudiant par la méthode de Pauli les relations liant les densités des formes (7) et (8), mais il n'a pas établi toutes les relations entre $T_{\mu,A}$ et faute d'une notation tensorielle bien adaptée, les formes générales n'apparaissent pas clairement.

Nous allons reprendre ici cette question et obtenir sous une forme tensorielle générale, toutes les relations entre grandeurs des formes (7) et (8) que nous déduirons d'un nombre minimum d'entre elles.

Nous partirons d'une remarque préliminaire. Si l'on considère les 16 matrices α_A indiquées en (3), on constate que la matrice $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ anticommute avec α_1, α_2, α_3, α_4 et par suite ce système peut être éga-

---

(1) *Ann. Inst. H. Poincaré*, 6, 1936, p. 109.

(2) *Ann. der Physik*, 38, 1940, p. 421, 436, 565, 583.

(3) *J. de Math.*, XXV, 1946, p. 335.

(4) *Thèse*, Paris, 1943.

lement considéré comme obtenu avec 5 matrices fondamentales α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 en posant

$$\alpha_5 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4.$$

Si nous introduisons initialement ces 5 matrices liées par la relation (2), on obtient par combinaison 32 matrices, mais ce système n'est pas irréductible et se décompose en deux groupes de chacun 16 matrices obtenus en posant soit

$$\alpha_5 = + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4,$$

soit

$$\alpha_5 = - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4.$$

Par suite, nous pouvons rattacher ces cinq matrices à une équation d'ondes, dans un espace à cinq dimensions, de la forme

$$(9) \quad \begin{cases} \left[\dfrac{h}{2\pi i} \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial}{\partial t} + \left(-\dfrac{h}{2\pi i}\right) \displaystyle\sum_{p=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x^p} \alpha_p + \left(-\dfrac{h}{2\pi i}\right) \dfrac{\partial}{\partial x^5} \alpha_5 + m_0 c \alpha_4 \right] \psi_i = 0 \\ \text{avec} \quad \left(-\dfrac{h}{2\pi i}\right) \dfrac{\partial}{\partial x^5} \psi = 0. \end{cases}$$

Les 16 grandeurs $\psi^* \alpha_A \psi$ devront donc s'interpréter soit dans un espace à quatre dimensions, soit dans un espace à cinq dimensions et les relations qui les lient écrites sous formes tensorielles devront s'écrire soit avec des indices variant sur 1, 2, 3, 4, soit avec des indices variant sur 1, 2, 3, 4, 5.

Dans le premier cas, la métrique étant

$$g_{44} = +1, \qquad g_{pp} = -1, \qquad g_{4p} = g_{p4} = 0,$$

nous posons

$$(10) \quad \begin{cases} j_4 = \psi^* \alpha_0 \psi, \quad j_p = \psi^* \alpha_p \psi, \quad \omega_1 = \psi^* \alpha_4 \psi, \\ f_{4p} = \pi_p = \psi^* i \alpha_{p4} \psi, \quad s_p = s_{4qr} = \psi^* i \alpha_{qr} \psi, \\ s_4 = s_{pqr} = \psi^* i \alpha_{pqr} \psi, \quad f_{pq} = \mu_r = \psi^* i \alpha_{pq4} \psi, \\ \omega_2 = \psi^* i \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \psi. \end{cases}$$

Au tenseur $f_{\mu\nu}$ de composantes f_{4p}, f_{pq} correspond le tenseur dual

$$f^*_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\rho\sigma\mu\nu} f^{\mu\nu},$$

en posant

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \pm 1,$$

suivant que la permutation $(\mu\nu\rho\sigma)$ se déduit de $(1\ 2\ 3\ 4)$ par un nombre pair ou impair d'inversions.

Dans le second cas, nous introduisons la métrique

$$g_{44} = +1, \qquad g_{pp} = g_{55} = -1, \qquad g_{p4} = g_{p5} = g_{54} = 0,$$

et nous posons

$$(11)\quad \begin{cases} j_4 = \psi^* \alpha_0 \psi, & j_p = \psi^* \alpha_p \psi, \qquad j_5 = \psi^* \alpha_5 \psi = \psi^* \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \psi, \\ f_{4p} = \psi^* i \alpha_{p4} \psi, & f_{pq} = \psi^* i \alpha_{pq4} \psi, \\ f_{p5} = \psi^* i \alpha_{qr} \psi, & f_{45} = \psi^* i \alpha_{pqr} \psi, \\ \omega_1 = \psi^* \alpha_4 \psi. \end{cases}$$

Au tenseur $f_{\alpha\beta}$ de composantes f_{4p}, f_{pq}, f_{p5}, f_{45} nous associons encore un dual, maintenant à trois indices, que nous écrivons

$$f_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} f^{\delta\varepsilon}, \qquad \text{avec} \quad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} = \pm 1.$$

Avec la première représentation nous avons établi [cf. le travail cité p. 3, note (3)] entre densités les relations

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} j_\mu j^\mu = s_\mu s^\mu = \omega_1^2 + \omega_2^2, & j_\mu s^\mu = 0, \\ f_{\mu\nu} s^\nu = -\omega_2 j^\mu, & f_{\mu\nu} j^\nu = \mp \omega_2 s_\mu, \\ f_{\mu\nu}^* j^\nu = -\omega_1 s_\mu, & f^*_{\mu\nu} s^\nu = \omega_1 j^\mu, \\ f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} = 2(\omega_1^2 - \omega_2^2), & f^*_{\mu\rho} f^{\rho\nu} = -\omega_1 \omega_2 g_\mu^\nu. \\ s_\mu j_\nu - s_\nu j_\mu = f_{\mu\nu}\omega_2 - f^*_{\mu\nu}\omega_1, \\ s_\mu s^\nu + j_\mu j^\nu = f_{\mu\rho} f^{\rho\nu} + \omega_1^2 g_\mu^\nu. \end{cases}$$

Ces relations se déduisent de quatre relations fondamentales que nous écrivons

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} j_\mu j^\mu = s_\mu s^\mu = \omega_1^2 + \omega_2^2, \\ j_\mu s^\mu = 0, \\ f_{\mu\nu} = \dfrac{\omega_1 s_{\mu\nu\rho} j^\rho - \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu\rho\sigma} s^{\rho\sigma\lambda} j_\lambda}{\omega_2^1 + \omega_2^2}. \end{cases}$$

Avec la seconde représentation ($\alpha, \beta, \gamma \ldots = 1, 2, 3, 4, 5$), ces relations se rassemblent dans les formules

$$
\text{(III)} \quad \left|\begin{array}{ll}
(1) & j_\alpha j^\alpha = \omega_1^2, \\
(2) & f^{\alpha\beta} j_\beta = 0, \\
(3) & f_{\alpha\gamma} f^{\beta\gamma} = \omega_1^2 g_\alpha{}^\beta - j_\alpha j^\beta, \\
(4) & f_{\alpha\beta\gamma} f^{\gamma\delta} = \omega_1 (g_\alpha^\delta j_\beta - g_\beta^\delta j_\alpha), \\
(5) & f_{\alpha\beta\gamma} j^\gamma = \omega_1 f_{\alpha\beta}, \\
(6) & f_{\alpha\beta} j_\gamma + f_{\beta\gamma} j_\alpha + f_{\gamma\alpha} j_\beta = \omega_1 f_{\alpha\beta\gamma},
\end{array}\right.
$$

qui se déduisent toutes de (3) et (5), ainsi qu'on le constate facilement. Nous ramenons donc les relations indépendantes aux deux relations fondamentales qui caractériseront les grandeurs et positions relatives des tenseurs ω_1, j_α, $f_{\alpha\beta}$:

$$
\text{(IV)} \quad \left\{\begin{array}{l}
f_{\alpha\beta\gamma} j^\gamma = \omega_1 f_{\alpha\beta}, \\
f_{\alpha\beta\gamma} f^{\gamma\delta} = \omega_1 (g_\alpha^\delta j_\beta - g_\beta^\delta j_\alpha).
\end{array}\right.
$$

Nous allons maintenant examiner les relations liant les grandeurs de la forme $T_{\mu,\lambda}$. Afin de faciliter leur étude, nous emploierons les grandeurs définies au moyen des matrices γ_λ.

La métrique est alors définie par

$$
g_{\alpha\alpha} = +1, \qquad g_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, 5),
$$

nous posons

$$
(12) \quad \left\{\begin{array}{l}
\omega_1 = \psi^+\psi, \qquad j_\alpha = \psi^+\gamma_\alpha\psi, \\
f_{\alpha\beta} = \psi^+ i\gamma_{\alpha\beta}\psi,
\end{array}\right.
$$

mais ω_1, j_α et $f_{\alpha\beta}$ diffèrent des densités désignées précédemment par ces expressions par des facteurs $\pm i$, ± 1. Néanmoins, on voit facilement que, pour ces densités, les relations (III) et (IV) sont encore valables.

Les relations que nous cherchons entre grandeurs

$$
T_{\mu,A} = \frac{h}{2\pi i}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi^+\right)\gamma_A\psi - \psi^+\gamma_A\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi\right)\right\},
$$

seront déduites de la relation de Pauli liant deux systèmes de matrices γ_A, soit

$$\sum_A (\gamma_A)_{l_1 m_1} (\gamma_A)_{l_2 m_2} = 4\,\delta_{l_1 m_2}\,\delta_{l_2 m_1}. \tag{13}$$

Par combinaison nous en tirons des relations matricielles qui s'écriront

$$\sum_{B,C} (\gamma_B)_{l_1 m_1} (\gamma_C)_{l_2 m_2} = \sum_{D,E} (\gamma_D)_{l_1 m_2} (\gamma_E)_{l_2 m_1}, \tag{14}$$

Multipliées à droite par ψ_{m_1}, ψ_{m_2}, à gauche par $\psi^+_{l_1}$, $\psi^+_{l_2}$, ces relations nous donneront le système (III).

Si nous posons

$$\psi_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi, \qquad \psi_\mu{}^+ = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\psi^+,$$

et si nous multiplions (14) à gauche, puis à droite par

$$\begin{array}{llllll} \psi^+_{\mu,l_1}\psi^+_{l_2} & \text{et} & \psi_{m_1}\psi_{m_2}, & \psi^+_{l_1}\psi^+_{l_2} & \text{et} & \psi_{\mu,m_1}\psi_{m_2}, \\ \psi^+_{l_1}\psi^+_{\mu,l_2} & \text{et} & \psi_{m_1}\psi_{m_2}, & \psi^+_{m_1}\psi^+_{m_2} & \text{et} & \psi_{m_1}\,\psi_{\mu,m_2}. \end{array}$$

Nous en déduisons d'une part,

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{B,C} T_{\mu,B}(\psi^+\gamma_C\psi) + (\psi^+\gamma_B\psi)T_{\mu,C} \\ &= \sum_{D,E} T_{\mu,D}(\psi^+\gamma_E\psi) + (\psi^+\gamma_D\psi)T_{\mu,E}, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

et d'autre part,

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{B,C} T_{\mu,B}(\psi^+\gamma_C\psi) - (\psi^+\gamma_B\psi)T_{\mu,C} \\ &= \sum_{D,E}\left(+\frac{h}{2\pi i}\right)\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\psi^+\gamma_D\psi)\right)(\psi^+\gamma_E\psi) - (\psi^+\gamma_D\psi)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\psi^+\gamma_E\psi)\right)\right\}. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Nous sommes donc conduit à deux types de relations différentielles.

Les relations (15) se déduiront facilement du tableau (III), car l'on voit immédiatement que les simplifications introduites dans le calcul par la compensation de termes entre les deux membres, lors de l'établissement des relations (III) à partir de (14), se reproduiront ici.

Nous obtenons donc en posant

$$(17)\quad \begin{cases} T_{\mu,0} = \left(\dfrac{h}{2\pi i}\right)(\psi_\mu^+\psi - \psi^+\psi_\mu), \\ T_{\mu,\alpha} = \dfrac{h}{2\pi i}(\psi_\mu^+\gamma_\alpha\psi - \psi^+\gamma_\alpha\psi_\mu), \\ T_{\mu,\alpha\beta} = \dfrac{h}{2\pi i}(\psi_\mu^+ i\gamma_{\alpha\beta}\psi - \psi^+ i\gamma_{\alpha\beta}\psi_\mu), \end{cases}$$

un système de relations différentielles qui s'écrit

$$(\mathrm{V})\quad \begin{cases} (1)\ T_{\mu,\alpha}j^\alpha = T_{\mu,0}\,\omega_1, \\ (2)\ T_{\mu,\alpha\beta}j^\beta + f_{\alpha\beta}T_{\mu,}{}^\beta = 0, \\ (3)\ T_{\mu,\alpha\gamma}f^{\beta\gamma} + f_{\alpha\gamma}T_{\mu,}{}^{\beta\gamma} = 2T_{\mu,0}\,\omega_1 g_\alpha^\beta - T_{\mu,\alpha}j^\beta - T_{\mu,}{}^\beta j_\alpha, \\ (4)\ T_{\mu,\alpha\beta\gamma}f^{\gamma\delta} + f_{\alpha\beta\gamma}T_{u,}{}^{\gamma\delta} = T_{\mu,0}(g_\alpha^\delta j_\beta - g_\beta^\delta j_\alpha) + \omega_1(g_\alpha^\delta T_{u\beta} - g_\beta^\delta T_{u,\alpha}), \\ (5)\ T_{\mu,\alpha\beta\gamma}j^\gamma + f_{\alpha\beta\gamma}T_{u,}{}^\gamma = T_{\mu,0}f_{\alpha\beta} + \omega_1 T_{\mu,\alpha\beta}, \\ (6)\ T_{\mu,\alpha\beta}j_\gamma + T_{\mu,\beta\gamma}j_\alpha + T_{\mu,\gamma\alpha}j_\beta + f_{\alpha\beta}T_{\mu,\gamma} + f_{\beta\gamma}T_{\mu,\alpha} + f_{\gamma\alpha}T_{\mu,\beta} \\ \qquad = T_{\mu,0}f_{\alpha\beta\gamma} + \omega_1 T_{\mu,\alpha\beta\gamma}, \end{cases}$$

et l'on peut voir facilement que ces relations se déduisent toutes des relations (V_4) et (V_5).

Nous allons maintenant examiner les relations du type (16), dont l'étude est plus délicate.

Nous partirons de la relation de Pauli (13) que nous écrirons sous la forme

$$4(\gamma_0)_{l_1m_1}(\gamma_0)_{l_2m_2} = \sum_A (\gamma_A)_{l_1m_2}(\gamma_A)_{l_2m_1}.$$

Multipliée par (γ_B), (γ_C), nous obtenons

$$(18)\qquad 4(\gamma_B)_{l_1m_1}(\gamma_C)_{l_2m_2} = \sum_A (\gamma_{BA})_{l_1m_2}(\gamma_{CA})_{l_2m_1},$$

et par la combinaison indiquée plus haut, nous en obtiendrons une relation du type (16).

Nous remarquerons que, dans le second membre, les termes symétriques de la forme

$$(\gamma_D)_{l_1m_2}(\gamma_E)_{l_2m_1} + (\gamma_E)_{l_1m_2}(\gamma_D)_{l_2m_1},$$

donnant par combinaison la somme

$$\begin{gathered}(\psi^+_\mu \gamma_D \psi)(\psi^+ \gamma_E \psi) - (\psi^+ \gamma_D \psi)(\psi^+_\mu \gamma_E \psi),\\ +(\gamma^+_\mu \gamma_E \psi)(\psi^+ \gamma_D \psi) - (\psi^+ \gamma_E \psi)(\psi^+_\mu \gamma_D \psi) = 0,\end{gathered}$$

n'apporteront aucune contribution à la somme, tandis que les termes de la forme

$$(\gamma_F)_{l_4 m_2}(\gamma_E)_{l_4 m_1} - (\gamma_F)_{l_4 m_2}(\gamma_G)_{l_4 m_1},$$

donneront

$$2\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\psi^+ \gamma_F \psi)\right)(\gamma^+ \gamma_G \psi) - (\psi^+ \gamma_F \psi)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\psi^+ \gamma_G \psi)\right)\right]. \tag{19}$$

La relation (18) nous donnera alors une relation de la forme

$$T_{\mu,B} f_C - T_{\mu,C} f_B = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{h}{2\pi i}\right)\sum_{F,G}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}(f_F)\right)(f_G) - (f_F)\frac{\partial}{\partial x^\mu}(f_G)\right]. \tag{20}$$

Nous obtiendrons toutes les relations de ce type si nous considérons les premiers membres

$$\left\{\begin{array}{ll} T_{\mu,\alpha}\,\omega_1 - T_{\mu,0} j_\alpha, & T_{\mu,\alpha} j_\beta - T_{\mu,\beta} j_\alpha,\\ T_{\mu,\alpha\beta}\,\omega_1 - T_{\mu,0} f_{\alpha\beta}, & \\ T_{\mu,\alpha\beta} j_\gamma - T_{\mu,\gamma} f_{\alpha\beta}, & \\ T_{\mu,\alpha\beta} f_{\gamma\delta} - T_{\mu,\gamma\delta} f_{\alpha\beta}. & \end{array}\right. \tag{21}$$

Afin de faciliter l'écriture, nous désignerons, suivant une notation de M. O. Costa de Beauregard, la dérivée $\frac{\partial}{\partial x^\mu}\psi^+\gamma_A\psi$ par $\underline{\psi^+\gamma_A\psi}$ en soulignant les termes dérivés par rapport à x^μ.

La relation matricielle (13) nous donne ainsi

$$4(\gamma_\alpha)^{l_4 m_1}(\gamma_0)^{l_4 m_2} = \sum_\beta (\gamma_{\alpha\beta})_{l_4 m_2}(\gamma_\beta)_{l_4 m_1} - (\gamma_\beta)_{l_4 m_2}(\gamma_\beta)_{l_4 m_1} + \text{termes symétriques},$$

d'où nous tirons

$$T_{\mu,\alpha}\,\omega_1 - T_{\mu,0} j_\alpha = -\frac{h}{2\pi}\,\frac{1}{2}\left\{\underline{f_{\alpha\beta}} j^\beta - \underline{j^\beta} f_{\alpha\beta}\right\}.$$

Mais la relation (III_2) nous donne

$$\underline{f_{\alpha\beta}} j^\beta + \underline{j^\beta} f_{\alpha\beta} = 0.$$

Nous avons donc

$$(\mathrm{VI}_1)\qquad T_{\mu,\alpha}\omega_1 - T_{\mu,0}j_\alpha = \left(-\frac{h}{2\pi}\right)\underline{f_{\alpha\beta}}\,j^\beta = +\frac{h}{2\pi}f_{\alpha\beta}\underline{j^\beta}.$$

De même (13) multiplié par $\gamma_{\alpha\beta}.\ \gamma_0$ nous donne

$$\begin{aligned}4(\gamma_{\alpha\beta})_{i_1m_1}(\gamma_0)_{i_2m_2} = {} & (\gamma_\alpha)_{i_1m_2}(\gamma_\beta)_{i_2m_1} - (\gamma_\beta)_{i_1m_2}(\gamma_\alpha)_{i_2m_1} \\ & + \sum_\gamma (\gamma_{\beta\gamma})_{i_1m_2}(\gamma_{\alpha\gamma})_{i_2m_1} - (\gamma_{\alpha\gamma})_{i_1m_2}(\gamma_{\beta\gamma})_{i_2m_1} \\ & + \text{termes symétriques},\end{aligned}$$

d'où

$$T_{\mu,\alpha\beta}\omega_1 - T_{\mu,0}f_{\alpha\beta} = \frac{h}{2\pi}\,\frac{1}{2}\left\{\underline{j_\alpha}j_\beta - \underline{j_\beta}j_\alpha - \left(\underline{f_{\beta\rho}}f_{\alpha\sigma} - \underline{f_{\alpha\sigma}}f_{\beta\rho}\right)g^{\rho\sigma}\right\}.$$

Tenant compte de (III_8), nous obtenons

$$\begin{aligned}(\mathrm{VI}_2)\qquad T_{\mu,\alpha\beta}\omega_1 - T_{\mu,0}f_{\alpha\beta} & = \frac{h}{2\pi}\left[\underline{j_\alpha}j_\beta + \underline{f_{\alpha\rho}}f_{\beta\sigma}g^{\rho\sigma}\right] \\ & = -\frac{h}{2\pi}\left[\underline{j_\beta}j_\alpha + \underline{f_{\beta\rho}}f_{\alpha\sigma}g^{\rho\sigma}\right].\end{aligned}$$

Multipliant (13) par (γ_α), (γ_β), nous avons

$$\begin{aligned}4(\gamma_\alpha)_{i_1m_1}(\gamma_\beta)_{i_2m_2} = {} & (\gamma_{\alpha\beta})_{i_1m_2}(\gamma_0)_{i_2m_1} - (\gamma_0)_{i_1m_2}(\gamma_{\alpha\beta})_{i_2m_1} \\ & + \sum_\gamma[(\gamma_\gamma)_{i_1m_2}(\gamma_{\alpha\beta\gamma})_{i_2m_1} - (\gamma_{\alpha\beta\gamma})_{i_1m_2}(\gamma_\gamma)_{i_2m_1}] \\ & + \text{termes symétriques},\end{aligned}$$

d'où

$$T_{\mu,\alpha}j_\beta - T_{\mu,\beta}j_\alpha = \left(-\frac{h}{2\pi}\right)\frac{1}{2}\left\{\underline{f_{\alpha\beta}}\,\omega_1 - \underline{\omega_1}f_{\alpha\beta} + \underline{j^\gamma}f_{\alpha\beta\gamma} - \underline{f_{\alpha\beta\gamma}}\,j^\gamma\right\},$$

qui, en tenant compte de (III_8), donne

$$(\mathrm{VI}_3)\quad T_{\mu,\alpha}j_\beta - T_{\mu,\beta}j_\alpha = \left(-\frac{h}{2\pi}\right)\left[\underline{f_{\alpha\beta}}\,\omega_1 - \underline{f_{\alpha\beta\gamma}}\,j^\gamma\right] = +\frac{h}{2\pi}\left[\underline{\omega_1}f_{\alpha\beta} - \underline{j^\gamma}f_{\alpha\beta\gamma}\right].$$

Appliquant j^β à cette relation, nous obtenons

$$T_{\mu,\alpha}\omega_1^2 - T_{\mu,\beta}j^\beta j_\alpha = -\frac{h}{2\pi}\underline{j^\gamma}f_{\alpha\beta\gamma}j^\beta,$$

et en tenant compte de

$$T_{\mu,\beta}j^\beta = T_{\mu,0}\omega_1,$$

et de (III), il reste

$$\mathrm{T}_{\mu,\alpha}\,\omega_1 - \mathrm{T}_{\mu,0}\,j_\alpha = \frac{h}{2\pi} f_{\alpha\gamma}\,\underline{j}^{\gamma},$$

c'est-à-dire (VI_1), qui apparaît ainsi comme conséquence de (VI_3).

La relation (13) nous donne les deux relations équivalentes

$$\begin{aligned}(\gamma_\alpha\gamma_\beta)_{l_1m_1}(\gamma_\alpha)_{l_2m_2} = {} & (\gamma_0)_{l_1m_2}(\gamma_\beta)_{l_2m_1} - (\gamma_\beta)_{l_1m_2}(\gamma_0)_{l_2m_1} \\ & + \sum_\varepsilon (\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\varepsilon)_{l_1m_2}(\gamma_\alpha\gamma_\varepsilon)_{l_2m_1} - (\gamma_\alpha\gamma_\varepsilon)_{l_1m_2}(\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\varepsilon)_{l_2m_1} \\ & + \text{termes symétriques},\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}-(\gamma_\gamma\gamma_\delta\gamma_\varepsilon)_{l_1m_1}(\gamma_\alpha)_{l_2m_2} = {} & (\gamma_0)_{l_1m_2}(\gamma_\gamma\gamma_\delta\gamma_\varepsilon\gamma_\alpha)_{l_2m_1} - (\gamma_\gamma\gamma_\delta\gamma_\varepsilon\gamma_\alpha)_{l_1m_2}(\gamma_0)_{l_2m_1} \\ & + (\gamma_\varepsilon\gamma_\gamma)_{l_1m_2}(\gamma_\delta\gamma_\alpha)_{l_2m_1} - (\gamma_\delta\gamma_\alpha)_{l_1m_2}(\gamma_\varepsilon\gamma_\gamma)_{l_2m_1} \\ & + (\gamma_\delta\gamma_\varepsilon)_{l_1m_2}(\gamma_\gamma\gamma_\alpha)_{l_2m_1} - (\gamma_\gamma\gamma_\alpha)_{l_1m_2}(\gamma_\delta\gamma_\varepsilon)_{l_2m_1} \\ & + (\gamma_\gamma\gamma_\delta)_{l_1m_2}(\gamma_\varepsilon\gamma_\alpha)_{l_2m_1} - (\gamma_\varepsilon\gamma_\alpha)_{l_1m_2}(\gamma_\gamma\gamma_\delta)_{l_2m_1} \\ & + \text{termes symétriques}.\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi, d'une part,

$$\mathrm{T}_{\mu,\alpha\beta}\,j_\alpha - \mathrm{T}_{\mu,\alpha}\,f_{\alpha\beta} = \frac{h}{2\pi}\Big[(\underline{\omega_1}\,j_\beta - \underline{j_\beta}\,\omega_1)\,g_{\alpha\alpha} - (\underline{f_{\alpha\beta\rho}}\,f_{\alpha\sigma} - f_{\alpha\beta\rho}\,\underline{f_{\alpha\sigma}})\,g^{\rho\sigma}\Big],$$

qui, avec (III_4), se réduit à

$$(\mathrm{VI}_4)\qquad \begin{aligned}\mathrm{T}_{\mu,\alpha\beta}\,j_\alpha - \mathrm{T}_{\mu,\alpha}\,f_{\alpha\beta} & = \frac{h}{2\pi}(\underline{\omega_1}\,j_\beta\,g_{\alpha\alpha} + f_{\alpha\beta\rho}\,\underline{f_{\alpha\sigma}}\,g^{\rho\sigma}) \\ & = -\frac{h}{2\pi}(\omega_1\,\underline{j_\beta}\,g_{\alpha\alpha} + \underline{f_{\alpha\beta\rho}}\,f_{\alpha\sigma}\,g^{\rho\sigma}).\end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}&-(\mathrm{T}_{\mu,\gamma\delta\varepsilon}\,j_\alpha - \mathrm{T}_{\mu,\alpha}\,f_{\gamma\delta\varepsilon}) \\ &\quad = \frac{1}{2}\,\frac{h}{2\pi}(\underline{\omega_1}\,f_{\gamma\delta\varepsilon\alpha} - \omega_1\,\underline{f_{\gamma\delta\varepsilon\alpha}} + \underline{f_{\gamma\alpha}}\,f_{\delta\varepsilon} + \underline{f_{\delta\alpha}}\,f_{\varepsilon\gamma} + \underline{f_{\varepsilon\alpha}}\,f_{\gamma\delta} \\ &\qquad\qquad - f_{\gamma\alpha}\,\underline{f_{\delta\varepsilon}} - f_{\delta\alpha}\,\underline{f_{\varepsilon\gamma}} - f_{\varepsilon\alpha}\,\underline{f_{\delta\gamma}}),\end{aligned}$$

en introduisant le dual $f_{\gamma\delta\varepsilon\alpha}$ de j^β par la formule

$$f_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}\,j^\varepsilon.$$

La formule (III_4) donne alors

$$\omega_1\,f_{\gamma\delta\varepsilon\alpha} + f_{\delta\varepsilon}\,f_{\alpha\gamma} + f_{\delta\alpha}\,f_{\varepsilon\gamma} + f_{\varepsilon\alpha}\,f_{\gamma\delta} = 0,$$

ce qui réduit la relation précédente à

$$(\mathrm{VI}_5)\qquad \begin{aligned} &-(\mathrm{T}_{\mu,\gamma\delta\varepsilon}j_\alpha-\mathrm{T}_{\mu,\alpha}f_{\gamma\delta\varepsilon})\\ &=-\frac{h}{2\pi}\left[\underline{\omega_1}f_{\gamma\delta\varepsilon\alpha}-\left(\underline{f_{\gamma\alpha}}f_{\delta\varepsilon}+\underline{f_{\delta\alpha}}f_{\varepsilon\gamma}+\underline{f_{\varepsilon\alpha}}f_{\gamma\delta}\right)\right]\\ &=\ \frac{h}{2\pi}\left[\omega_1\underline{f_{\gamma\delta\varepsilon\alpha}}-\left(f_{\gamma\alpha}\underline{f_{\delta\varepsilon}}+f_{\delta\alpha}\underline{f_{\varepsilon\gamma}}+f_{\varepsilon\alpha}\underline{f_{\gamma\delta}}\right)\right].\end{aligned}$$

Cette formule n'étant valable que pour $\gamma\neq\delta\neq\varepsilon\neq\alpha$ et par suite n'ayant pas une validité tensorielle générale.

D'autre part, nous obtenons de la même façon

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}_{\mu,\alpha\beta}j_\gamma-\mathrm{T}_{\mu,\gamma}j_{\alpha\beta}\\ &\quad=-(\mathrm{T}_{\mu,\gamma\delta\varepsilon}j_\gamma-\mathrm{T}_{\mu,\gamma}f_{\gamma\delta\varepsilon})\\ &\quad=\frac{h}{2\pi}\,\frac{1}{2}\left\{\left[\left(\underline{f_{\varepsilon\rho}}f_{\delta\sigma}-f_{\varepsilon\rho}\underline{f_{\delta\sigma}}\right)g^{\rho\sigma}+\underline{j_\delta}j_\varepsilon-j_\varepsilon\underline{j_\delta}\right]g_{\gamma\gamma}\right\}\\ &\qquad+\frac{h}{2\pi}\left(\underline{f_{\delta\gamma}}f_{\varepsilon\gamma}-\underline{f_{\varepsilon\gamma}}f_{\delta\gamma}\right),\end{aligned}$$

et en tenant compte de (III_3),

$$(\mathrm{VI}_6)\qquad \begin{aligned} &-(\mathrm{T}_{\mu,\gamma\delta\varepsilon}j_\gamma-\mathrm{T}_{\mu,\gamma}f_{\gamma\delta\varepsilon})\\ &=\frac{h}{2\pi}\left[\left(\underline{f_{\varepsilon\rho}}f_{\delta\sigma}g^{\rho\sigma}+\underline{j_\delta}j_\varepsilon\right)g_{\gamma\gamma}+\left(\underline{f_{\delta\gamma}}f_{\varepsilon\gamma}-\underline{f_{\varepsilon\gamma}}f_{\delta\gamma}\right)\right].\end{aligned}$$

Nous avons ainsi deux relations sans validité tensorielle générale, mais ces deux formules peuvent se rassembler dans une formule unique à validité tensorielle générale que nous écrirons :

$$(\mathrm{VI}_7)\quad \begin{aligned} \mathrm{T}_{\mu,\gamma\delta\varepsilon}j_\alpha-\mathrm{T}_{\mu,\alpha}f_{\gamma\delta\varepsilon}=&-\frac{h}{2\pi}\Big\{\underline{f_{\gamma\alpha}}f_{\delta\varepsilon}+\underline{f_{\delta\alpha}}f_{\varepsilon\gamma}+\underline{f_{\varepsilon\alpha}}f_{\gamma\delta}-\underline{\omega_1}f_{\gamma\delta\varepsilon\alpha}\\ &+g_{\alpha\gamma}\left(\underline{f_{\varepsilon\rho}}f_{\delta\sigma}g^{\rho\sigma}+\underline{j_\gamma}j_\delta\right)\\ &+g_{\alpha\delta}\left(\underline{f_{\gamma\rho}}f_{\varepsilon\sigma}g^{\rho\sigma}+\underline{j_\varepsilon}j_\gamma\right)+g_{\alpha\varepsilon}\left(\underline{f_{\delta\rho}}f_{\gamma\sigma}g^{\rho\sigma}+\underline{j_\gamma}j_\delta\right)\Big\}\\ =&\ \frac{h}{2\pi}\Big\{f_{\gamma\alpha}\underline{f_{\delta\varepsilon}}+f_{\delta\alpha}\underline{f_{\varepsilon\gamma}}+f_{\varepsilon\alpha}\underline{f_{\gamma\delta}}-\omega_1\underline{f_{\gamma\delta\varepsilon\alpha}}\\ &+g_{\alpha\gamma}\left(f_{\varepsilon\rho}\underline{f_{\delta\sigma}}g^{\rho\sigma}+j_\delta\underline{j_\varepsilon}\right)\\ &+g_{\alpha\delta}\left(f_{\gamma\rho}\underline{f_{\varepsilon\sigma}}g^{\rho\sigma}+j_\varepsilon\underline{j_\gamma}\right)+g_{\alpha\varepsilon}\left(f_{\delta\rho}\underline{f_{\gamma\sigma}}g^{\rho\sigma}+j_\gamma\underline{j_\delta}\right)\Big\}.\end{aligned}$$

Nous allons montrer que cette relation entraîne pour conséquence la relation (VI_3).

En effet si nous multiplions la relation (VI$_7$) par $f^{\varepsilon\alpha}$, nous obtenons au premier membre,

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_{\mu,\gamma\delta\varepsilon} j_\alpha f^{\varepsilon\alpha} - \mathrm{T}_{\mu,\alpha} f_{\gamma\delta\varepsilon} f^{\varepsilon\alpha} &= - \mathrm{T}_{\mu,\alpha}(\omega_1 g_\gamma{}^\alpha j_\delta - \omega_1 g_\delta{}^\alpha j_\gamma) \\ &= \omega_1(\mathrm{T}_{\mu,\delta} j_\gamma - \mathrm{T}_{\mu,\gamma} j_\delta) \end{aligned}$$

et au second membre, après un calcul sans difficulté utilisant les relations (III),

$$- \frac{h}{2\pi}\omega_1\left(\underline{\omega_1} f_{\gamma\delta} - f_{\gamma\delta\rho}\underline{j^\rho}\right).$$

c'est-à-dire (VI$_3$).

Le produit de (13) par $(\gamma_{\alpha\beta})(\gamma_{\alpha\beta\gamma}) = -(\gamma_{\alpha\beta})(\gamma_{\delta\varepsilon})$ nous donne

$$\begin{aligned} -4(\gamma\alpha\beta)_{l_1m_1}(\gamma\delta\varepsilon)_{l_2m_2} = {} & [(\gamma\beta\delta\varepsilon)_{l_1m_2}(\gamma\alpha)_{l_2m_1} - (\gamma\alpha)_{l_1m_2}(\gamma\beta\delta\varepsilon)_{l_2m_1}] \\ & - [(\gamma\alpha\delta\varepsilon)_{l_1m_2}(\gamma\beta)_{l_2m_1} - (\gamma\beta)_{l_1m_2}(\gamma\alpha\delta\varepsilon)_{l_2m_1}] \\ & + [(\gamma\alpha\beta\delta)_{l_1m_2}(\gamma\varepsilon)_{l_2m_1}] - (\gamma\varepsilon)_{l_1m^2}(\gamma\alpha\beta\delta)_{l_2m_1}] \\ & - [(\gamma\alpha\beta\varepsilon)_{l_1m_2}(\gamma\delta)_{l_2m_1} - (\gamma\delta)_{l_1m_2}(\gamma\alpha\beta\varepsilon)_{l_2m_1}] \\ & + \text{termes symétriques,} \end{aligned}$$

d'où la relation

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_{\mu,\alpha\beta} f_{\delta\varepsilon} - \mathrm{T}_{\mu,\delta\varepsilon} f_{\alpha\beta} = - \frac{h}{2\pi}\frac{1}{2}\Big[& \left(\underline{f_{\beta\delta\varepsilon}} j_\alpha - \underline{j_\alpha} f_{\beta\delta\varepsilon}\right) - \left(\underline{f_{\alpha\delta\varepsilon}} j_\beta - \underline{j_\beta} f_{\alpha\delta\varepsilon}\right) \\ & + \left(\underline{f_{\alpha\beta\delta}} j_\varepsilon - \underline{j_\varepsilon} f_{\alpha\beta\delta}\right) - \left(\underline{f_{\alpha\beta\varepsilon}} j_\delta - j_\delta f_{\alpha\delta\varepsilon}\right)\Big] \end{aligned}$$

mais

$$f_{\gamma\beta} j^\beta = 0$$

nous donne par dualité

$$f_{\beta\delta\varepsilon} j_\alpha - f_{\alpha\delta\varepsilon} j_\beta - f_{\alpha\beta\delta} j_\varepsilon + f_{\alpha\beta\varepsilon} j_\delta = 0,$$

et il nous reste

$$\text{(VI}_8\text{)}\quad \begin{aligned} \mathrm{T}_{\mu,\alpha\beta} f_{\delta\varepsilon} - \mathrm{T}_{\mu,\delta\varepsilon} f_{\alpha\beta} &= \frac{h}{2\pi}\left(\underline{j_\alpha} f_{\beta\delta\varepsilon} - \underline{j_\beta} f_{\alpha\delta\varepsilon} + \underline{f_{\alpha\beta\varepsilon}} j_\delta - \underline{f_{\alpha\beta\delta}} j_\varepsilon\right) \\ &= - \frac{h}{2\pi}\left(j_\alpha \underline{f_{\beta\delta\varepsilon}} - j_\beta \underline{f_{\alpha\delta\varepsilon}} + f_{\alpha\beta\varepsilon}\underline{j_\delta} - f_{\alpha\beta\delta}\underline{j_\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Cette formule n'est valable que pour $\alpha \neq \beta \neq \delta \neq \varepsilon$, et par suite n'a pas une validité tensorielle générale.

Si nous calculons de même

$$\mathrm{T}_{\mu,\alpha\beta} f_{\alpha\gamma} - \mathrm{T}_{\mu,\alpha\gamma} f_{\alpha\beta},$$

nous obtenons la relation

$$\mathrm{T}_{\mu,\alpha\beta} f_{\alpha\gamma} - \mathrm{T}_{\mu,\alpha\gamma} f_{\alpha\beta} = \frac{h}{2\pi}\,\frac{1}{2}\left\{ \underline{\omega_1} f_{\beta\gamma} - \underline{f_{\beta\gamma}}\,\omega_1 - \underline{f_{\beta\gamma\rho}}\,j^\rho + f_{\beta\gamma\rho}\,\underline{j^\rho} \right\} g_{\alpha\alpha}$$
$$+ \frac{h}{2\pi}\left(\underline{f_{\beta\gamma\alpha}}\,j_\alpha - \underline{j_\alpha}\,f_{\beta\gamma\alpha}\right),$$

et en utilisant (III$_8$),

$$(\mathrm{VI}_9)\quad \mathrm{T}_{\mu,\alpha\beta} f_{\alpha\gamma} - \mathrm{T}_{\mu,\alpha\gamma} f_{\alpha\beta} = \frac{h}{2\pi}\left[\left(\underline{\omega_1} f_{\beta\gamma} - \underline{f_{\beta\gamma\rho}}\,j^\rho\right) g_{\alpha\alpha} + \left(\underline{f_{\beta\gamma\alpha}}\,j_\alpha - f_{\beta\gamma\alpha}\,\underline{j_\alpha}\right)\right]$$
$$= -\frac{h}{2\pi}\left[\left(\omega_1 \underline{f_{\beta\gamma}} - f_{\beta\gamma\rho}\,\underline{j^\rho}\right) g_{\alpha\alpha} + \left(f_{\beta\gamma\alpha}\,\underline{j_\alpha} - \underline{f_{\beta\gamma\alpha}}\,j_\alpha\right)\right].$$

Cette relation n'est valable que pour $\alpha \neq \beta \neq \gamma$. Mais nous rassemblons (VI$_8$) et (VI$_9$) dans la relation à validité tensorielle générale

$$(\mathrm{VI}_{10})\quad \mathrm{T}_{\mu,\alpha\beta} f_{\delta\varepsilon} - \mathrm{T}_{\mu,\delta\varepsilon} f_{\alpha\beta} = \frac{h}{2\pi}\left\{ \left(\underline{f_{\alpha\beta\varepsilon}}\,j_\delta - \underline{f_{\alpha\beta\delta}}\,j_\varepsilon + f_{\beta\delta\varepsilon}\,\underline{j_\alpha} - f_{\alpha\delta\varepsilon}\,\underline{j_\beta}\right)\right.$$
$$+ g_{\alpha\delta}\left(\underline{\omega_1} f_{\beta\varepsilon} - \underline{f_{\beta\varepsilon\rho}}\,j^\rho\right) - g_{\alpha\varepsilon}\left(\underline{\omega_1} f_{\beta\delta} - \underline{f_{\beta\delta\rho}}\,j^\rho\right)$$
$$\left. - g_{\beta\delta}\left(\underline{\omega_1} f_{\alpha\varepsilon} - \underline{f_{\alpha\varepsilon\rho}}\,j^\rho\right) + g_{\beta\varepsilon}\left(\underline{\omega_1} f_{\alpha\delta} - \underline{f_{\alpha\delta\rho}}\,j^\rho\right)\right\}.$$

Si nous multiplions cette dernière relation par $f^{\varepsilon\delta}$, en tenant compte de

$$f_{\delta\varepsilon} f^{\varepsilon\delta} = -4\omega_1^2, \qquad \mathrm{T}_{\mu,\delta\varepsilon} f^{\varepsilon\delta} = -4\mathrm{T}_{\mu,0}\,\omega_1,$$

nous obtenons facilement l'expression (VI$_2$) de

$$\mathrm{T}_{\mu,\alpha\beta}\,\omega_1 - \mathrm{T}_{\mu,0} f_{\alpha\beta}.$$

Nous avons ainsi obtenu dans les formules (VI$_1$), (VI$_2$), (VI$_3$), (VI$_7$) et (VI$_{10}$) toutes les relations différentielles du type étudié et nous avons montré qu'elles se déduisaient de deux d'entre elles (VI$_7$) et (VI$_{10}$).