JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MARCEL DECUYPER

Sur quelques congruences attachées à une surface

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 26 (1947), p. 15-98.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1947_9_26__15_0>

Sur quelques congruences attachées à une surface;

PAR MARCEL **DECUYPER**.

INTRODUCTION.

Nous nous sommes proposé dans ce travail, d'étudier quelques-unes des congruences les plus simples que la géométrie projective différentielle conduit à associer à une surface. Ce sont d'abord les congruences des axes définies à partir d'un réseau conjugué quelconque, et ensuite les congruences des directrices de Wilczynski.

Dans une première Partie, après avoir rappelé en quoi consiste la méthode du tétraèdre mobile, nous l'avons utilisée pour trouver les propriétés des premiers et des seconds axes d'un réseau conjugué. En particulier, nous avons étudié la correspondance entre les éléments focaux des deux axes et les conditions de stratifiabilité entre les congruences des axes déduites d'une suite de Laplace. Puis nous avons montré que la configuration formée par un couple de surfaces ayant mêmes premiers axes relativement à un réseau conjugué commun dépend de dix fonctions arbitraires d'un argument. Le cas particulier simple de deux réseaux qui sont doublement de Kœnigs par rapport à deux droites D, D′ a été considéré : une telle configuration ne dépend que de quatre fonctions arbitraires d'un argument.

Dans la seconde Partie, nous nous sommes attaché à reconnaître la nature d'une congruence de premiers axes. Nous nous sommes servi de la méthode classique, rapportant l'espace à un repère fixe. Nous avons montré qu'une congruence C et une surface S étant données on pourra, suivant les cas, trouver sur S zéro, un, deux ou ∞^1

réseaux conjugués admettant C pour congruence des premiers axes et nous avons donné des exemples des diverses configurations signalées. Une surface S quelconque étant donnée, on peut toujours trouver une infinité de congruences dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument telles que chacune soit congruence des premiers axes pour deux réseaux distincts tracés sur S; mais, pour que la surface S possède une infinité de réseaux conjugués admettant même congruence des premiers axes, il faut qu'elle satisfasse à une certaine condition que nous avons établie.

Nous avons reconnu, d'autre part, que toute congruence C est une congruence de premiers axes et que la surface S qu'on peut lui associer à ce point de vue dépend de quatre fonctions arbitraires d'un argument. Le cas où la congruence C est linéaire a été traité plus complètement : nous avons montré que sur la surface S la plus générale associée à C, le réseau admettant C pour congruence des premiers axes est formé par des courbes appartenant à des complexes linéaires par rapport auxquels les directrices de C sont conjuguées; nous avons donné des solutions dépendant seulement de trois fonctions arbitraires d'un argument, sur lesquelles une famille du réseau est formée de courbes appartenant au même complexe linéaire, et des solutions dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument, sur lesquelles chacune des deux familles du réseau est formée de courbes appartenant au même complexe linéaire.

Enfin, dans la troisième Partie, nous avons rassemblé quelques résultats relatifs aux directrices de Wilczynski. Il faut noter que les congruences de directrices ne sont pas des congruences générales : en effet, une surface étant donnée, la congruence des premières directrices, par exemple, est parfaitement déterminée et l'on voit ainsi qu'une telle congruence dépend seulement d'une fonction arbitraire de deux variables, alors que la congruence rectiligne la plus générale dépend de deux fonctions arbitraires de deux variables. Le problème difficile qui consisterait à reconnaître si une congruence donnée est congruence de premières directrices n'a pas été traité.

Nous sommes revenu dans cette dernière partie, à la méthode du tétraèdre mobile. Étudiant les éléments focaux, nous avons montré qu'un foyer d'une directrice est le pôle, par rapport à la quadrique de

Lie du point correspondant de la surface, d'un plan focal de l'autre directrice, et nous avons utilisé ce résultat pour l'étude des couples de surfaces ayant mêmes premières et secondes directrices de Wilczynski. Nous avons terminé en donnant les équations des directrices d'une surface définie par rapport à un trièdre fixe, par son équation $z = f(x, y)$. Ce calcul fait apparaître que les directrices dépendent de z, x, y et des dérivées partielles de z jusqu'au quatrième ordre.

Je tiens à manifester à mon maître éminent, M. Gambier, ma profonde reconnaissance pour les conseils éclairés qu'il m'a donnés et qui m'ont permis de réaliser le présent travail.

PREMIÈRE PARTIE.

Axes d'un réseau conjugué tracé sur une surface.

1. Définitions et notations. — Considérons sur une surface (M_1) un réseau de lignes coordonnées conjuguées $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ On sait que l'on peut définir à partir de ce réseau une suite de Laplace, en général illimitée dans les deux sens. Les tangentes à toutes les courbes $v = \text{const.}$ forment une congruence pour laquelle la surface (M_1) est une première nappe focale; la seconde nappe focale sera appelée (M_2); les développables de la congruence M_1M_2 sont formées pour une famille, par les tangentes en tous les points d'une même courbe $v = \text{const.}$ et pour l'autre, par les droites M_1M_2 issues des divers points d'une même courbe $u = \text{const.}$; elles déterminent sur (M_2) un réseau conjugué $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ En opérant sur la surface (M_2) comme on a fait sur (M_1), on obtient la surface suivante (M_3) de la suite et l'on peut continuer pour obtenir (M_4), (M_5), ... En remplaçant les tangentes aux courbes $v = \text{const.}$ de (M_1) par les tangentes aux courbes $u = \text{const.}$, on obtiendrait la surface (M_0) et l'on pourrait prolonger la suite dans ce sens (M_1), (M_0), (M_{-1}), ...

Nous désignerons dans ce qui suit par (M_i) une surface de la suite, ou le réseau (u, v) défini sur cette surface par les développables, réservant la notation M_i pour le point générateur de cette surface. A un point M_1 de la surface (M_1), nous faisons ainsi correspondre des points M_2, M_3, ..., M_0, M_{-1}, ... sur les surfaces (M_2), (M_3), ..., (M_0), (M_{-1}), ...

Les plans tangents aux surfaces (M_0) et (M_2) aux points homologues M_0 et M_2 se coupent suivant une droite M_1L_1 qui sera appelée *premier axe* du réseau (M_1); la droite M_0M_2 qui correspond, par dualité, à ce premier axe, sera appelée le *second axe* de (M_1).

Nous nous proposons d'étudier les congruences des axes en fonction de la congruence M_1M_2 qui caractérise la suite; nous utiliserons les notations que M. Finikoff a employées dans son traité de géométrie projective différentielle, pour l'étude de certaines questions relatives aux congruences.

2. Méthode du tétraèdre mobile. — Rappelons d'abord en quoi consiste la méthode du tétraèdre mobile.

Dans l'espace euclidien, un point quelconque M est défini par ses quatre coordonnées (x, y, z, t); ces coordonnées peuvent être remplacées par des nombres proportionnels $(\mu x, \mu y, \mu z, \mu t)$ et le choix d'une valeur particulière μ s'appelle *normalisation du point*. Si un point $M(x, y, z, t)$ est situé sur la droite qui joint le point $M_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ au point $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$, il existe deux nombres λ_0 et λ_1 définis à un facteur de proportionnalité près, tels que

$$x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1, \qquad y = \lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1, \qquad z = \lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1, \qquad t = \lambda_0 t_0 + \lambda_1 t_1.$$

Nous représenterons l'ensemble de ces quatre égalités par

$$M = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1.$$

De même, un point du plan $M_0M_1M_2$ sera défini par trois coefficients homogènes λ_0, λ_1, λ_2, et l'on écrira

$$M = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$$

pour traduire l'égalité

$$x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$$

et les analogues en y, z, t.

Enfin, un point quelconque de l'espace pourra être défini à partir de quatre points M_0, M_1, M_2, M_3 non coplanaires par un système de quatre coefficients λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, et l'on écrira

$$M = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3$$

pour traduire l'égalité

$$x = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$$

et les analogues en y, z, t.

Nous représenterons par $(M_0 M_1 M_2 M_3)$ le déterminant formé par les coordonnées des points M_0, M_1, M_2, M_3.

Si le point M, dépendant d'un paramètre u, décrit une courbe, le point $\dfrac{M(u+\Delta u) - M(u)}{\Delta u}$ est situé sur la droite qui joint les points $M(u)$ et $M(u+\Delta u)$, et le point M_u, dont les coordonnées sont les dérivées x_u, y_u, z_u, t_u de x, y, z, t par rapport à u, appartient à la tangente en M.

Un tétraèdre $M_0 M_1 M_2 M_3$ est défini dans l'espace euclidien par les seize coordonnées de ses sommets. Si les sommets dépendent de deux paramètres u, v, le tétraèdre prend ∞^2 positions et les déplacements infiniment petits des sommets du tétraèdre seront définis par les équations

$$(1) \qquad M_{i_u} = \sum_k a_i^k M_k, \qquad M_{i_v} = \sum_k b_i^k M_k \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

où les coefficients a_i^k, b_i^k satisfont aux conditions d'intégrabilité obtenues en égalant $M_{i_{uv}}$ et $M_{i_{vu}}$

$$(2) \qquad (a_i^k)_v - (b_i^k)_u = \sum_j (b_i^j a_j^k - a_i^j b_j^k).$$

Si, réciproquement, nous considérons maintenant ces 32 fonctions a_i^k, b_i^k satisfaisant aux conditions (2), elles rendent le système (1) complètement intégrable. Nous devons regarder le système (1) comme remplaçant quatre systèmes de même forme relatifs, le premier aux x, les autres aux y puis aux z, puis aux t. La solution générale de chacun d'eux dépend linéairement de quatre constantes arbitraires. Or, par leur origine, nous connaissons pour chacun quatre solutions particulières, constituées par les coordonnées des sommets du tétraèdre de départ. Ainsi, nous pouvons dire que le système relatif aux x, admet les quatre solutions particulières

$$(x_0, x_1, x_2, x_3), \quad (y_0, y_1, y_2, y_3), \quad (z_0, z_1, z_2, z_3), \quad (t_0, t_1, t_2, t_3).$$

Par conséquent, en désignant par $(\overline{x_0}, \overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3})$ la solution générale, on aura

$$(3) \qquad \begin{cases} \overline{x_0} = C_0^0 x_0 + C_0^1 y_0 + C_0^2 z_0 + C_0^3 t_0, \\ \overline{x_1} = C_0^0 x_1 + C_0^1 y_1 + C_0^2 z_1 + C_0^3 t_1, \\ \overline{x_2} = C_0^0 x_2 + C_0^1 y_2 + C_0^2 z_2 + C_0^3 t_2, \\ \overline{x_3} = C_0^0 x_3 + C_0^1 y_3 + C_0^2 z_3 + C_0^3 t_3, \end{cases}$$

où C_0^0, C_0^1, C_0^2, C_0^3 sont quatre constantes arbitraires.

Mais nous aurons de même, pour les y, z, t,

$$(4) \qquad \begin{cases} \overline{y_0} = C_1^0 x_0 + C_1^1 y_0 + C_1^2 z_0 + C_1^3 t_0, \qquad \overline{z_0} = C_2^0 x_0 + C_2^1 y_0 + C_2^2 z_0 + C_2^3 t_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \overline{y_3} = C_1^0 x_3 + C_1^1 y_3 + C_1^2 z_3 + C_1^3 t_3, \qquad \overline{z_3} = C_2^0 x_3 + C_2^1 y_3 + C_2^2 z_3 + C_2^3 t_3, \\ \qquad \overline{t_0} = C_3^0 x_0 + C_3^1 y_0 + C_3^2 z_0 + C_3^3 t_0, \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \qquad \overline{t_3} = C_3^0 x_3 + C_3^1 y_3 + C_3^2 z_3 + C_3^3 t_3. \end{cases}$$

On voit ainsi que le système de quatre points $\overline{M_0}$, $\overline{M_1}$, $\overline{M_2}$, $\overline{M_3}$ le plus général, donc le tétraèdre $\overline{\Delta}$ le plus général défini par le système (1) se déduit du tétraèdre initial $M_0M_1M_2M_3$ par une transformation homographique.

On peut donc dire que les fonctions a_i^k, b_i^k déterminent, lorsque les équations (2) *sont satisfaites, un tétraèdre mobile Δ à une transformation projective près.* Le tétraèdre étant déterminé, les congruences engendrées par ses arêtes le sont également, de même que les surfaces décrites par les sommets.

3. Dans ce qui suit, nous prendrons pour tétraèdre mobile de référence le tétraèdre $M_0M_1M_2M_3$ dont les quatre sommets sont des sommets successifs de la suite de Laplace définie par le réseau conjugué (M_1). Puisque M_{0_u}, M_{1_u}, M_{2_u} appartiennent à M_0M_1, M_1M_2,

$M_2 M_3$ respectivement, on a

$$a_0^2 = a_0^3 = a_1^0 = a_1^3 = a_2^0 = a_2^1 = 0\,;$$

en multipliant les coordonnées de M_1 par un facteur convenable, on peut réduire a_1^1 à zéro; on pourra réduire b_1^0 à l'unité par la normalisation de M_0; on a de même

$$b_1^2 = b_1^3 = b_2^0 = b_2^3 = b_3^0 = b_3^1 = 0,$$

et des normalisations convenables pour M_2 et M_3 permettent d'écrire le système (1) sous la forme

$$(5)\quad \begin{cases} M_{0_u} = m M_1, & M_{0_v} = -PM_0 + RM_1 + NM_2 - \Delta M_3, \\ M_{1_u} = \delta M_2, & M_{1_v} = M_0 + pM_1, \\ M_{2_u} = p_1 M_2 + M_3, & M_{2_v} = \delta_1 M_1, \\ M_{3_u} = -\Delta_1 M_0 + N_1 M_1 + R_1 M_2 - P_1 M_3, & M_{3_v} = m_1 M_2 \end{cases}$$

et les conditions d'intégrabilité (2) s'écrivent

$$(6)\quad \begin{cases} p = \dfrac{\partial \log \delta}{\partial v}, & p_1 = \dfrac{\partial \log \delta_1}{\partial u}, \\ m = \delta\delta_1 - \dfrac{\partial^2 \log \delta}{\partial u\, \partial v}, & m_1 = \delta\delta_1 - \dfrac{\partial^2 \log \delta_1}{\partial u\, \partial v}, \\ N = \Delta_u - P_1 \Delta, & N_1 = \Delta_{1_v} - P\Delta_1, \\ P_u = \dfrac{\partial^2 \log \delta}{\partial u\, \partial v} - \delta\delta_1 + \Delta\Delta_1, & P_{1_v} = \dfrac{\partial^2 \log \delta_1}{\partial u\, \partial v} - \delta\delta_1 + \Delta\Delta_1, \\ N_u + N\dfrac{\partial \log \delta_1}{\partial u} = R_1\Delta - R\delta, & N_{1_v} + N_1\dfrac{\partial \log \delta}{\partial v} = R\Delta_1 - R_1\delta_1, \\ m_v - R_u = -m(P+p) - \Delta N_1, & m_{1_u} - R_{1_v} = -m_1(P_1 + p_1) - \Delta_1 N. \end{cases}$$

Notons quelques propriétés que nous utiliserons par la suite.

Le tétraèdre étant donné, les quantités δ, δ_1, Δ, ... ne sont pas parfaitement déterminées; elles varient : 1° par le changement des paramètres u, v; 2° par le changement de normalisation des points M_i. Il est évident que les changements $u = u(u^\star)$, $v = v(v^\star)$ et la multiplication de M_0, M_1 par une fonction V de la seule variable v, de même que la multiplication de M_2, M_3 par une fonction U de la seule variable u ne changent pas la forme du tableau (5). En distinguant par un astérisque les nouvelles quantités, on obtient

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{ll} \delta^* = \delta \dfrac{V}{U} \dfrac{du}{du^*}, & \Delta^* = \Delta \dfrac{V}{U} \left(\dfrac{dv}{dv^*}\right)^2 \dfrac{du^*}{du}, \\ R^* = R \left(\dfrac{dv}{dv^*}\right)^2, & N^* = N \dfrac{V}{U} \left(\dfrac{dv}{dv^*}\right)^2, \\ m^* = m \dfrac{du}{du^*} \dfrac{dv}{dv^*}, & n^* = n \dfrac{V}{U} \dfrac{du}{du^*} \dfrac{dv}{dv^*}, \\ p^* = p \dfrac{dv}{dv^*} + \dfrac{d \log V}{dv^*}, & P^* = P \dfrac{dv}{dv^*} - \dfrac{d}{dv^*} \log V. \end{array}\right.$$

Il résulte de ces formules que les quantités

$$\delta\delta_1, \quad \Delta\Delta_1, \quad \frac{\Delta}{\delta}, \quad \frac{\Delta_1}{\delta_1}$$

sont invariantes par rapport au changement de normalisation des sommets.

$\delta = 0$ correspond au cas où la multiplicité (M_1) se réduit à une ligne puisque alors on a toujours

$$M_{1_u} = 0.$$

Il est facile de voir aussi que $\Delta = 0$ est la condition pour que (M_1) soit développable.

On appelle congruence W *une congruence sur les nappes focales de laquelle les asymptotiques se correspondent.* Or les asymptotiques de (M_1) sont données par l'équation

$$(M_1 M_{1_u} M_{1_v} d^2 M_1) = 0,$$

qui se réduit à

$$\delta\, du^2 - \Delta\, dv^2 = 0$$

et les asymptotiques de M_2 sont données par

$$\Delta_1 du^2 - \delta_1 dv^2 = 0$$

et la condition nécessaire et suffisante pour que ces asymptotiques se correspondent, donc pour que la congruence $M_1 M_2$ soit W, est

$$\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0.$$

Les congruences R ont été définies comme congruences W dont toutes les transformées de Laplace sont également W. Considérons la congruence M_0M_1 dont M_1M_2 est la première tranformée. Les asymptotiques de (M_0) sont données par l'équation

$$m\delta\Delta\, du^2 + (\Delta N_v - N\Delta_v - \Delta^2 m_1)\, dv^2 = 0,$$

donc les asymptotiques de (M_0) et de (M_1) se correspondent et la congruence M_0M_1 est W si l'on a

$$N_v - N\frac{\partial \log \Delta}{\partial v} + \Delta(m - m_1) = 0,$$

condition qui se transforme, en tenant compte du tableau (6), en

$$\frac{\partial^2 \log \frac{\Delta}{\delta}}{\partial u\, \partial v} + \delta\delta_1 - \Delta\Delta_1 = 0.$$

On voit donc que pour que les deux congruences successives M_0M_1 et M_1M_2 soient W, il faut et il suffit que l'on ait simultanément

$$(8) \qquad \Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0, \qquad \frac{\partial^2 \log \frac{\Delta}{\delta}}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

Il résulte de là qu'on aura aussi

$$\frac{\partial^2 \log \frac{\Delta_1}{\delta_1}}{\partial u\, \partial v} = 0,$$

et il est aisé de voir que ceci entraîne la correspondance des asymptotiques de (M_2) et (M_3). On voit ainsi que, *si deux congruences successives d'une suite de Laplace sont* W, *la congruence suivante l'est aussi, et toutes les congruences de la suite le sont.* Ces congruences R sont caractérisées par l'ensemble des conditions (8).

4. Détermination des axes et premières propriétés. — Nous déterminerons le premier axe M_1L_1 du réseau (M_1) par son intersection L_1 avec M_2M_3. Le tableau (5) met en évidence ce point, intersection de M_2M_3 avec le plan $M_1M_0M_{0_v}$,

$$(9) \qquad L_1 = NM_2 - \Delta M_3.$$

On voit aussi, aisément, que le premier axe rencontre le rayon $M_0 M_{-1}$ de la suite au point

$$l_1 = RM_1 + L_1.$$

Aux foyers $L_1 + \lambda M_1$ de ce premier axe, toutes les surfaces réglées de la congruence des axes qui contiennent cette droite touchent le même plan, et nous les déterminons donc par l'équation

$$(M_1 \quad L_1 \quad L_{1_u} + \lambda M_{1_u} \quad L_{1_v} + \lambda M_{1_v}) = 0,$$

qui donne

$$\lambda^2 - R\lambda - \frac{\Delta^2 \Delta_1}{\delta}\left(\frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial u\, \partial v} - \Delta\Delta_1\right) = 0. \tag{10}$$

Les développables de la congruence des premiers axes sont données par

$$(M_1 \quad L_1 \quad dM_1 \quad dL_1) = 0,$$

qui se réduit à

$$\Delta\Delta_1 du^2 + R\, du\, dv - \frac{\Delta}{\delta}\left(\frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial u\, \partial v} - \Delta\Delta_1\right) dv^2 = 0. \tag{11}$$

Les plans focaux de $M_1 L_1$ seront caractérisés par leurs intersections avec le deuxième axe; nous les définirons sous la forme $M_0 + \mu' M_2$. Un plan focal est un plan

$$(M_1 \quad L_1 \quad L_{1_u} + \lambda M_{1_u} \quad M) = 0,$$

où λ est solution de (10). Ceci nous conduit à l'équation

$$\Delta\Delta_1 \mu'^2 + R\,\delta\mu' - \Delta\delta\left(\frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial u\, \partial v} - \Delta\Delta_1\right) = 0. \tag{12}$$

Pour la congruence des seconds axes, nous déterminons les foyers sous la forme $M_0 + \mu M_2$ par l'équation

$$\delta_1 \mu^2 + R\mu + \Delta m = 0; \tag{13}$$

les développables sont déterminées par l'équation

$$m\, du^2 + R\, du\, dv + \Delta\delta_1 dv^2 = 0; \tag{14}$$

les plans focaux sont caractérisés par les points de rencontre $L_1 + \lambda' M_1$

avec le premier axe, λ' étant solution de

$$\lambda'^2 - R\lambda' + m\Delta\delta_1 = 0. \tag{15}$$

La comparaison des équations (10) et (15) permet d'énoncer un résultat simple, déjà publié par M. Slotnick (¹).

Les foyers du premier axe et les points de rencontre de ce premier axe avec les plans focaux du second axe sont des couples de points homologues dans l'involution définie par le point double M_1 *et le couple* $L_1 l_1$.

En effet pour ces deux équations, la somme des racines est R et si nous nous rappelons que les points M_1, L_1, l_1 correspondent aux valeurs ∞, 0, R de λ, nous voyons que le conjugué harmonique de M_1 par rapport à $L_1 l_1$ est le même que par rapport au segment limité par les foyers Φ et Φ' et que par rapport au segment découpé par les plans focaux du second axe.

De même, en considérant les équations (12) et (13), nous constatons que la somme des racines est la même dans le cas où $\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0$; cette condition caractérise les congruences W et nous pouvons énoncer :

Si la congruence $M_1 M_2$ *est* W, *les points de rencontre du deuxième axe avec les plans focaux du premier sont des points homologues dans l'involution définie par le point double* M_2 *et le couple des foyers du deuxième axe.*

5. Un cas particulier intéressant est celui où $R = 0$; l'examen de ce cas a fait l'objet d'une Note aux *Comptes rendus* (*Sur les suites de Laplace dont quatre rayons consécutifs quelconques forment un quadrilatère*, 205, 1937, p. 950). Les relations du tableau (5) font apparaître que $R = 0$ *est la condition nécessaire et suffisante poar que* $M_{-1}M_0$ *et* M_2M_3 *se coupent.*

Les équations (11) et (14) montrent qu'alors, en tout point de la surface (M_1), *les tangentes aux courbes coordonnées sont partagées harmoniquement par les tangentes aux courbes qui correspondent aux*

(¹) Slotnick, *On the projective differential geometry of conjugate nets* (*American Journal of Mathematics*, vol. LIII, 1931, § 7).

développables de la congruence des premiers axes, ainsi que par les tangentes aux courbes qui correspondent aux développables de la congruence des seconds axes. C'est là la propriété caractéristique du réseau conjugué harmonique de Wilczynski [1]. De plus, le premier axe de (M_1) qui est la droite issue de M_1 s'appuyant à la fois sur M_0M_{-1} et sur M_2M_3 passe par le point L_1 commun à ces deux rayons. Le théorème de M. Slotnick nous montre aussi que *les foyers du premier axe, ainsi que les points de rencontre du premier axe avec les plans focaux du second, partagent harmoniquement le segment* M_1L_1. Enfin, les équations (12) et (13) montrent que, dans le cas considéré, *les foyers du second axe, ainsi que les points de rencontre du second axe avec les plans focaux du premier partagent harmoniquement le segment* M_0M_2.

Nous avons cherché si ces particularités peuvent se reproduire en tous les sommets d'une suite de Laplace; or le tableau (5) fait apparaître que la condition nécessaire et suffisante pour que M_0M_1 et M_3M_4 (c'est-à-dire $M_3M_{3_u}$) se coupent est $R_1 = 0$. Supposons donc que nous ayons à la fois $R = 0$, $R_1 = 0$. Nous allons montrer que, dans ces conditions, les rayons M_1M_2 et M_4M_5 se coupent.

Nous déterminons d'abord le point M_4, second foyer de $M_3M_{3_u}$. L'équation qui détermine les foyers de $M_3M_{3_u}$ sous la forme $M_3 + \nu M_{3_u}$ est

$$(M_3 \quad M_{3_u} \quad M_{3_u} + \nu M_{3_{uv}} \quad M_{3_v} + \nu M_{3_{uv}}) = 0$$

qui donne, en utilisant le tableau (5),

$$\nu = 0 \qquad \text{et} \qquad \nu = \frac{m_1}{\Delta_1 N + P_1 m_1}.$$

On a donc

$$M_4 = -m_1\Delta_1 M_0 + m_1 N_1 M_1 + \Delta_1 N M_3$$

et, par suite,

$$M_{4_u} = -(m_{1_u}\Delta_1 + m_1\Delta_{1_u} + N\Delta_1^2)M_0 + \ldots M_1 + \ldots M_2 + (N\Delta_{1_u} + \Delta_1 N_u - \Delta_1 N P_1)M_3.$$

Nous n'avons pas précisé les coefficients de M_1 et M_2; quant à celui

---

[1] *American Journal of Mathematics*, **42**, 1920, p. 215.

de M_0, il se transforme en tenant compte des relations (6) et l'on obtient

$$M_{4_u} = m_1(p_1\Delta_1 + P_1\Delta_1 - \Delta_{1_u})M_0 + \ldots M_1 + \ldots M_2 + (N\Delta_{1_u} + \Delta_1 N_u - \Delta_1 NP_1)M_3.$$

La condition pour que M_1M_2 et $M_4M_{4_u}$ soient coplanaires est

$$- m_1\Delta_1(N\Delta_{1_u} + \Delta_1 N_u - \Delta_1 NP_1) - \Delta_1 m_1 N(p_1\Delta_1 + P_1\Delta_1 - \Delta_{1_u}) = 0;$$

dans l'hypothèse $R = R_1 = 0$, une des dernières relations du tableau (6) donne $N_u + Np_1 = 0$, et l'on constate alors que la condition précédente est satisfaite.

Donc, si $M_{-1}M_0$ et M_2M_3 se coupent, ainsi que M_0M_1 et M_3M_4, les rayons M_1M_2 et M_4M_5 se coupent aussi; par suite, il en sera de même pour M_2M_3 et M_5M_6, et ainsi de suite.

Nous concluons : *si, dans une suite de Laplace, deux rayons consécutifs d'indices n, $n+1$ sont respectivement coplanaires avec les rayons d'indices $n+3$, $n+4$, tout rayon d'indice m est coplanaire avec le rayon d'indice $m+3$; quatre rayons consécutifs quelconques forment un quadrilatère.*

6. Stratifiabilité des congruences des axes. — La notion de stratifiabilité des congruences a été introduite par M. Fubini et développée par divers auteurs, parmi lesquels M. Finikoff et M. Vincensini. Nous reprenons la définition donnée par M. Finikoff au début de son Mémoire ([1]).

Deux congruences K et K′ sont *stratifiables dans le sens* KK′ si l'on peut établir entre elles une correspondance biunivoque telle que les plans qui passent par un rayon de K′ enveloppent ∞^1 surfaces Σ, les points caractéristiques étant situés sur le rayon correspondant de K. Les deux congruences K et K′ forment un *couple stratifiable* si, de plus, il existe une famille de surfaces Σ' dont les plans tangents en leurs points d'intersection avec les rayons de K′ passent par les rayons correspondants de K.

([1]) S. Finikoff, *Sur les congruences stratifiables* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 53, 1929, p. 313.

Nous nous proposons d'établir les conditions pour lesquelles les deux axes du réseau (M_1) forment un couple stratifiable.

Nous considérons d'abord la stratifiabilité dans le sens M_0M_2, M_1L_1. Un plan passant par M_0M_2 sera caractérisé par son intersection avec M_1L_1

$$K = L_1 + kM_1.$$

En écrivant que le point caractéristique du plan M_0M_2K est le point K lui-même, nous obtenons les équations

$$[M_0 \quad M_2 \quad kM_1 - \Delta M_3 \quad (k_u - \Delta N_1)M_1] = 0,$$
$$[M_0 \quad M_2 \quad kM_1 - \Delta M_3 \quad (k_v + kp + N\delta_1)M_1 - \Delta_v M_3] = 0$$

qui se transforment en

$$k_u - \Delta N_1 = 0, \qquad k_v\Delta - k\Delta_v + k\Delta p + N\Delta\delta_1 = 0.$$

La condition de compatibilité est

$$k\left(\frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial^2 \log \delta}{\partial u\, \partial v}\right) = \Delta N_{1_v} + \Delta N_1 p + N_u\delta_1 + N\delta_{1_u}.$$

Le second membre peut se transformer par les formules (6)

$$\Delta N_{1_v} + \Delta N_1 p + \delta_1 N_u + N\delta_{1_u} = \Delta(R\Delta_1 - R_1\delta_1) + \delta_1(R_1\Delta - R\delta) = R(\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1).$$

Il nous faut exprimer que la condition de compatibilité est satisfaite identiquement, ce qui donne

$$\frac{\partial^2 \log \dfrac{\Delta}{\delta}}{\partial u\, \partial v} = 0, \tag{16}$$

$$R(\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1) = 0. \tag{17}$$

Nous étudions la stratifiabilité dans le sens M_1L_1, M_0M_2 de la même façon. Un plan passant par M_1L_1 est caractérisé par son point de rencontre K' avec M_0M_2

$$K' = M_0 + k'M_2;$$

K' est le point caractéristique du plan M_1L_1K', et ceci donne

$$[M_1 \quad NM_2 - \Delta M_3 \quad M_0 + k'M_2 \quad M_2(k'_u + k'p_1) + k'M_3] = 0,$$
$$[M_1 \quad NM_2 - \Delta M_3 \quad M_0 + k'M_2 \quad -PM_0 + M_2(N + k'_v) - \Delta M_3] = 0,$$

conditions qui se transforment en

$$\frac{\partial \log k'}{\partial u} = -p_1 - \frac{N}{\Delta}, \qquad \frac{\partial \log k'}{\partial v} = -P.$$

La condition de compatibilité est

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(p_1 + \frac{N}{\Delta}\right) = \frac{\partial P}{\partial u},$$

ce qui donne

$$\frac{\partial^2 \log \frac{\Delta}{\delta}}{\partial u\, \partial v} = 2(\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1), \tag{18}$$

Pour que les deux axes forment un couple stratifiable, il faut et il suffit que les équations (16), (17) et (18) soient satisfaites simultanément, et pour cela il faut et il suffit qne l'on ait

$$\frac{\partial^2 \log \frac{\Delta}{\delta}}{\partial u\, \partial v} = 0, \qquad \Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0.$$

Nous reconnaissons là les relations (8) caractéristiques des *congruences* R. Nous savons qu'alors toutes les congruences de la suite de Laplace sont R et nous pouvons conclure :

Si, dans une suite de Laplace, les congruences des premier et second axes correspondant à un sommet forment un couple stratifiable, il en est de même en tous les sommets.

On retrouve facilement, sans calculs, qu'une condition nécessaire pour que les axes forment un couple stratifiable est que la congruence étudiée soit R. Étant donné un couple stratifiable et deux surfaces de stratification quelconques Σ, Σ', on sait [1] que la congruence admettant Σ et Σ' pour nappes focales est une congruence W, de sorte qu'à chaque couple de congruences stratifiables se trouve associé un système de ∞^2 congruences W que M. Terracini a appelé système de M. Bianchi. Or, dans le problème que nous traitons, il est évident

[1] S. Finikoff, *Sur les congruences stratifiables*, (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **53**, § 4, 1929).

que les surfaces (M_1) d'un côté, (M_0) et (M_2) de l'autre appartiennent aux familles des surfaces de stratification pour les congruences des axes. Les droites M_1M_0 et M_1M_2 engendrent donc des congruences W, et comme il s'agit de deux rayons successifs d'une suite de Laplace, il en résulte que la congruence M_1M_2 est congruence R.

7. Il a paru intéressant de chercher si, dans certains cas, les congruences des axes ainsi obtenues ne peuvent pas être, elles-mêmes, des congruences R. Or, dans le Mémoire de M. Finikoff que nous citons au début du paragraphe précédent, il est établi que lorsque les développables des congruences du couple stratifiable se correspondent, ces congruences sont R. Nous avons vu que les développables des congruences M_1L_1 et M_0M_2 sont données par les équations (11) et (14). Nous supposons, ici, avoir affaire à une congruence R, et ces équations prennent donc une forme plus simple

$$\Delta\Delta_1\, du^2 + R\, du\, dv + \frac{\Delta}{\delta}\, m\, dv^2 = 0,$$

$$m\, du^2 + R\, du\, dv + \frac{\Delta}{\delta}\Delta\Delta_1\, dv^2 = 0,$$

et pour qu'elles se confondent, il faut et il suffit que l'on ait ou bien $m = \Delta\Delta_1$, ou bien $R = 0$ et $m = -\Delta\Delta_1$.

Premier cas. — $m = \Delta\Delta_1$. Ceci entraîne

$$\frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial u\, \partial v} = 0,$$

et ce cas est donc caractérisé par

$$(19)\qquad \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 \log \delta}{\partial u\, \partial v} = 0, \qquad \Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0.$$

Deuxième cas. — $R = 0$ et $m = -\Delta\Delta_1$.

Ces relations sont à ajouter à $\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0$ et $\dfrac{\partial^2 \log \frac{\Delta}{\delta}}{\partial u\, \partial v} = 0$.

En remplaçant les paramètres u et v par de nouveaux paramètres, on peut ramener $\frac{\Delta}{\delta}$ à l'unité, comme on le voit par application des formules (7). On a donc

$$\Delta = \delta, \qquad \Delta_1 = \delta_1.$$

Si nous nous reportons alors aux équations

$$N_1 = \Delta_{1_v} - P\Delta_1 \qquad \text{et} \qquad m_v - R_u = -m(P+p) - \Delta N_1;$$

nous en tirons

$$-\delta_v\delta_1 - \delta\delta_{1_v} = \delta\delta_1\left(P + \frac{\delta_v}{\delta}\right) - \delta(\delta_{1_v} - P\delta_1),$$

qui se simplifie, donnant

$$\delta_1(P\delta + \delta_v) = 0;$$

$\delta_1 = 0$ exprime que la nappe focale (M_2) se réduirait à une courbe; si nous écartons cette hypothèse, il nous reste

$$P = -\frac{\partial \log \delta}{\partial v}.$$

Mais alors, la condition $P_u = \dfrac{\partial^2 \log \delta}{\partial u\, \partial v}$ tirée du tableau (6), entraîne

$$\frac{\partial^2 \log \delta}{\partial u\, \partial v} = 0,$$

de sorte que les équations du groupe (19) sont encore satisfaites.

8. Conditions pour que deux premiers axes consécutifs M_1L_1 et M_2L_2 forment un couple stratifiable. — En désignant par L_2 le point de rencontre du premier axe de (M_2) avec M_0M_1, on trouve

$$L_2 = \Delta_1 M_0 - N_1 M_1.$$

Un plan issu de M_2L_2 est caractérisé par son intersection H avec M_1L_1

$$H = L_1 + hM_1.$$

En écrivant que le point caractéristique du plan M_2L_2H est H lui-même, nous obtenons les équations

$$[M_2 \quad \Delta_1 M_0 - N_1 M_1 \quad hM_1 - \Delta M_3 \quad \Delta\Delta_1 M_0 + (h_u - \Delta N_1)M_1] = 0,$$
$$[M_2 \quad \Delta_1 M_0 - N_1 M_1 \quad hM_1 - \Delta M_3 \quad h\,M_0 + (h_v + hp + N\delta_1)M_1 - \Delta_v M_3] = 0$$

qui se transforment en

$$h_u = 0, \qquad h_v + h\left(\frac{N_1}{\Delta_1} + p - \frac{\partial \log \Delta}{\partial v}\right) + N\delta_1 = 0.$$

La condition de compatibilité doit être satisfaite identiquement et ceci entraîne

$$\frac{\partial^2 \log \dfrac{\Delta_1}{\Delta}}{\partial u\, \partial v} = \Delta\Delta_1 - \delta\delta_1, \qquad R_1\Delta - R\delta = 0. \tag{20}$$

Pour la stratifiabilité dans l'autre sens, nous considérons un plan issu de M_1L_1 coupant M_2L_2 au point

$$I = L_2 + i M_2.$$

En écrivant que I est point caractéristique du plan M_1L_1I, nous sommes conduits aux équations

$$i_u + i\left(\frac{N}{\Delta} + p_1 - \frac{\partial \log \Delta_1}{\partial u}\right) - N_1\delta = 0, \qquad i_v = 0.$$

Pour que la condition de compatibilité soit satisfaite identiquement, il faut et il suffit que

$$\frac{\partial^2 \log \dfrac{\Delta_1}{\Delta}}{\partial u\, \partial v} = \delta\delta_1 - \Delta\Delta_1, \qquad R\Delta_1 - R_1\delta_1 = 0. \tag{21}$$

Pour que les congruences des premiers axes M_1L_1, M_2L_2 forment un couple stratifiable, il faut et il suffit que les conditions (20) et (21) soient satisfaites simultanément, ce qui équivaut à

$$\frac{\partial^2 \log \dfrac{\Delta_1}{\Delta}}{\partial u\, \partial v} = 0, \qquad \Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0, \qquad \frac{R}{R_1} = \frac{\Delta}{\delta}. \tag{22}$$

Nous avons, par des calculs analogues que nous ne reproduisons pas, établi que pour que les deux congruences de seconds axes consécutifs M_0M_2 et M_1M_3 forment un couple stratifiable, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial^2 \log \dfrac{\delta_1}{\delta}}{\partial u\, \partial v} = 0, \qquad \Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0, \qquad \frac{R}{R_1} = \frac{\Delta}{\delta}. \tag{23}$$

L'égalité $\dfrac{\partial^2 \log \frac{\delta_1}{\delta}}{\partial u\, \partial v} = 0$ qui exprime que les invariants ponctuels des deux réseaux focaux de la congruence M_1M_2 sont égaux, caractérise les congruences de Goursat [1]. Ainsi, *les congruences qui satisfont au dernier problème sont des congruences particulières parmi les congruences* W *qui sont en même temps congruences de Goursat.*

L'égalité $\dfrac{\partial^2 \log \frac{\Delta_1}{\Delta}}{\partial u\, \partial v} = 0$ qui exprime que les invariants tangentiels des deux réseaux focaux de la congruence M_1M_2 sont égaux, caractérise les congruences transformées par dualité des congruences de Goursat; nous les appellerons congruences *g*. *On voit ainsi que les congruences* M_1M_2 *pour lesquelles les premiers axes* M_1L_1 *et* M_2L_2 *forment un couple stratifiable sont des congruences particulières parmi celles qui sont à la fois* W *et g.*

On peut noter enfin que les congruences de Wilczynski, congruences R dont toutes les transformées de Laplace appartiennent à des complexes linéaires et pour lesquelles on peut se ramener à

$$\Delta = \Delta_1 = \delta = \delta_1, \qquad P = p, \qquad P_1 = p_1, \qquad R = R_1 = \text{const.},$$

vérifient à la fois les deux groupes de conditions (13) et (14); mais ce n'est là qu'une solution banale, car on voit immédiatement que le premier axe d'un réseau (M_2) est alors confondu avec le second axe du réseau précédent et le second axe du réseau suivant.

9. Étude d'un couple de surfaces ayant mêmes premiers axes relativement à un réseau conjugué commun. — Toute la fin de cette première Partie sera consacrée à cette question.

Nous avons utilisé un tétraèdre mobile de référence $M_0M_1M_2M_3$ défini comme suit : M_1 et M_3 sont les points correspondants sur les deux surfaces (M_1) et (M_3) du couple, le réseau conjugué commun est défini par $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$; les tangentes en M_1 à ces courbes sur (M_1) sont M_1M_0 et M_1M_2, M_0 et M_2 étant les seconds foyers de ces tangentes.

---

(1) Tzitzéica, *Sur certaines congruences de droites* (*Journ. Math.*, 7, 1928, p. 189).

Si nous nous reportons aux notations générales du paragraphe 2, il est facile de voir que l'on a, dès la définition du tétraèdre

$$a_0^2 = a_0^3 = a_1^0 = a_1^3 = a_2^0 = 0, \qquad b_0^2 = b_1^2 = b_1^3 = b_2^0 = b_2^3 = 0.$$

Par une normalisation convenable de M_1 et de M_2 on réduit a_1^1 et b_2^2 à zéro, tandis que par la normalisation de M_0 et M_3 on peut réduire b_1^0 et a_2^3 à l'unité. Des conditions (2) particulières montrent alors que $a_0^0 = b_3^3 = 0$, de sorte que les déplacements infiniment petits des sommets du tétraèdre se trouvent définis par

$$(24)\quad \begin{cases} M_{0_u} = m\,M_1, & M_{0_v} = -PM_0 + RM_1 - \Delta M_3, \\ M_{1_u} = \delta\,M_2, & M_{1_v} = M_0 + p\,M_1, \\ M_{2_u} = q_1 M_1 + p_1 M_2 + M_3, & M_{2_v} = \delta_1 M_1, \\ M_{3_u} = -\Delta_1 M_0 + N_1 M_1 + R_1 M_2 - P_1 M_3, & M_{3_v} = -q_1 M_0 + n_1 M_1 + m_1 M_2, \end{cases}$$

où les 15 quantités δ, δ_1, Δ, Δ_1, m, m_1, p, p_1, P, P_1, R, R_1, q_1, n_1, N_1 sont liées d'une part, par les conditions d'intégrabilité et, d'autre part, par les conditions exprimant que M_1M_3 est le premier axe du réseau (u, v) conjugué sur (M_3).

Les conditions d'intégrabilité, au nombre de douze, sont

$$(25)\quad \begin{cases} P_u = \Delta\Delta_1 - m, \qquad P_{1_v} = \Delta\Delta_1 - m_1, \\ p_u = \delta\delta_1 - m, \qquad p_{1_v} = \delta\delta_1 - m_1, \qquad p = \dfrac{\partial \log \delta}{\partial v}, \\ \delta_{1_u} - q_{1_v} = p_1\delta_1 + pq_1 + n_1, \qquad \Delta_u = P_1\Delta, \qquad \Delta_{1_v} - q_{1_u} = P\Delta_1 + P_1 q_1 + N_1, \\ m_v - R_u = -m(P+p) - \Delta N_1, \qquad m_{1_u} - R_{1_v} = -m_1(P_1 + p_1) - \delta n_1, \\ 0 = R\delta - R_1\Delta, \qquad n_{1_u} - N_{1_v} = R_1\delta_1 - R\Delta_1 + N_1 p - P_1 n_1 - q_1(m_1 - m). \end{cases}$$

On exprime que le réseau (u, v) est conjugué sur (M_3) en écrivant

$$(M_3 \quad M_{3_u} \quad M_{3_v} \quad M_{3_{uv}}) = 0$$

qui se transforme en

$$(26)\qquad \begin{vmatrix} \Delta_1 & q_1 & q_{1_u} \\ N_1 & n_1 & n_{1_u} - q_1 m + m_1 q_1 \\ R_1 & m_1 & m_{1_u} + n_1\delta + m_1 p_1 \end{vmatrix} = 0.$$

On exprime que le premier axe du réseau (u, v) de (M_3) est M_1M_3 par

$$(M_1 \quad M_3 \quad M_{3_u} \quad M_{3_{uu}}) = 0, \qquad (M_1 \quad M_3 \quad M_{3_v} \quad M_{3_{vv}}) = 0,$$

conditions qui se transforment en

$$(27)\quad \Delta_1 R_{1_u} - R_1 \Delta_{1_u} + \Delta_1(N_1\delta + R_1 p_1) = 0, \qquad m_1 q_{1_v} - m_{1_v} q_1 - m_1(q_1 P + n_1) = 0.$$

Ainsi la détermination du couple de surfaces que nous étudions nous conduit à la recherche des solutions du système des 15 équations (25), (26), (27) entre les 15 inconnues δ, δ_1, Δ, Δ_1, m, m_1, p, p_1, P, P_1, R, R_1, q_1, n_1, N_1. L'avant-dernière équation (25) nous permettra de diminuer le nombre des inconnues. Nous exprimons R et R_1 en fonction d'une inconnue auxiliaire S par

$$R = \Delta S, \qquad R_1 = \delta S$$

et il nous restera ainsi 14 inconnues liées par 14 relations.

Pour établir le degré de généralité de la solution, nous mettrons le système sous la forme de Cauchy; nous ferons pour cela le changement de variables défini par

$$u = a + b, \qquad v = a - b,$$

ce qui ramène le système à

$$\begin{aligned}
&P_a = 2\Delta\Delta_1 - 2m - P_b, \qquad P_{1_a} = 2\Delta\Delta_1 - 2m_1 + P_{1_b},\\
&p_a = 2\delta\delta_1 - 2m - p_b, \qquad p_{1_a} = 2\delta\delta_1 - 2m_1 + p_{1_b},\\
&\delta_a = 2p\delta + \delta_b, \qquad \Delta_a = 2P_1\Delta - \Delta_b,\\
&\delta_{1_a} - q_{1_a} = 2p_1\delta_1 + 2pq_1 + 2n_1 - \delta_{1_b} - Pq_{1_b},\\
&\Delta_{1_a} - q_{1_a} = 2P\Delta_1 + 2P_1 q_1 + 2N_1 + \Delta_{1_b} + q_{1_b},\\
&m_a - \Delta S_a = -2m(P + p) - 2\Delta N_1 + m_b - \Delta S_b - 2S\Delta_b + 2SP_1\Delta,\\
&m_{1_a} - \delta S_a = -2m_1(P_1 + p_1) - 2\delta n_1 - m_{1_b} - \delta S_b + 2p\delta S,\\
&n_{1_a} - N_{1_a} = 2S(\delta\delta_1 - \Delta\Delta_1) + 2N_1 p - 2P_1 n_1 - 2q_1(m_1 - m) - n_{1_b} - N_{1_b},\\
&\Delta_{1_a} S - \Delta_1 S_a = 2N_1\Delta_1 + \Delta_1 S p_1 - S\Delta_{1_b} + \Delta_1 S_b + 2S\Delta_1\frac{\delta_b}{\delta} + 2\Delta_1 S p,\\
&m_1 q_{1_a} - m_{1_a} q_1 = 2m_1(q_1 P + n_1) + m_1 q_{1_b} - m_{1_b} q_1,\\
&q_{1_a}(N_1 m_1 - n_1\delta S) - n_{1_a}(\Delta_1 m_1 - q_1\delta S) + m_{1_a}(\Delta_1 n_1 - q_1 N_1)\\
&\quad = -q_{1_b}(N_1 m_1 - n_1\delta S) + (n_{1_b} + 2q_1 m_1 - 2q_1 m)(\Delta_1 m_1 - q_1\delta S)\\
&\qquad - (m_{1_b} + 2n_1\delta + 2m_1 p_1)(\Delta_1 n_1 - q_1 N_1).
\end{aligned}$$

Six équations sont déjà résolues par rapport aux dérivées relatives à la variable a et le déterminant des coefficients des huit autres dérivées en a dans les huit équations qui restent est égal à $(m_1\Delta_1 - q_1 S\delta)^2$, donc, en général, différent de zéro. On pourra, par suite, résoudre ces équations et ainsi, le système sera mis sous la forme de Cauchy; la solution générale du système différentiel dépend donc de quatorze fonctions arbitraires d'un argument.

Mais le nombre de fonctions arbitraires dont dépend la configuration étudiée est inférieur à quatorze; nous avons vu, en effet, au paragraphe **3**, que les coefficients que nous avons utilisés ne sont pas entièrement déterminés par la congruence de départ, ils varient :

1° par le changement des paramètres $u = u(u^\star)$, $v = v(v^\star)$;

2° par le changement de normalisation des points M_i qui peut se faire par l'introduction de deux fonctions arbitraires d'une variable : une fonction U de u, et une fonction V de v.

Nous avons donné, d'ailleurs, les formules (7) correspondant à ces changements. Il en résulte que, dans les quatorze fonctions arbitraires dont nous avons démontré l'existence, il en est quatre qui correspondent à la représentation analytique de la configuration, mais non à cette configuration elle-même.

Ainsi, *un couple de surfaces ayant mêmes premiers axes relativement au réseau conjugué commun dépend de dix fonctions arbitaires d'un argument.*

10. Un exemple simple de cette configuration sera obtenu en considérant un couple de réseaux (M_1), (M_3) qui sont tous deux doublement réseaux de Kœnigs par rapport à deux droites non sécantes D, D'. Les sections de (M_1) et (M_3) par les plans pivotant autour de D sont aussi courbes de contact des cônes circonscrits ayant leur sommet sur D' et, d'après le théorème de Kœnigs, les rôles de D et D' peuvent s'intervertir. Nous verrons que nous pouvous ici nous débarrasser des quatre fonctions superflues, en simplifiant le système à intégrer.

En conservant les notations du paragraphe précédent, exprimons que le réseau (M_1) est doublement de Kœnigs.

La multiplicité (M_2) est l'enveloppe des plans osculateurs aux diverses courbes $v =$ const. sur la surface (M_1). D'après l'hypothèse, cette enveloppe doit ici se réduire à une droite D. Avec les notations adoptées, nous écrivons $\Delta_1 = 0$ qui exprime que (M_2) est développable et $\delta_1 = 0$ qui exprime que (M_2) se réduit à une courbe.

Nous écrirons de même, puisque (M_0) doit aussi se réduire à une droite, $m_1 = 0$ qui exprime que (M_0) est développable et $m = 0$ qui exprime que (M_0) est une courbe.

Il reste, par conséquent, pour définir la configuration, les onze fonctions δ, Δ, p, p_1, P, P_1, R, R_1, q_1, n_1, N_1 qui doivent satisfaire aux conditions d'intégrabilité

$$P_u = 0, \quad P_{1_v} = 0, \quad p_u = 0, \quad p_{1_v} = 0, \quad p = \frac{\partial \log \delta}{\partial v}, \quad -q_{1_v} = pq_1 + n_1,$$
$$P_1 = \frac{\partial \log \Delta}{\partial u}, \quad -q_{1_u} = P_1 q_1 + N_1, \quad R_u = \Delta N_1, \quad R_{1_v} = \delta n_1, \quad 0 = R\delta - R_1\Delta,$$
$$n_{1_u} - N_{1_v} = N_1 p - P_1 n_1,$$

Nous tirons de là

$$\frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial u\, \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \log \delta}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

On peut alors, par un changement des variables u et v, ramener Δ à être fonction de v uniquement et δ à être fonction de u uniquement. On aura ainsi

$$P_1 = p = 0.$$

Par conséquent, ayant choisi pour Δ et δ deux fonctions arbitraires d'un argument $\Delta(v)$, $\delta(u)$, nous aurons simplement à déterminer les sept inconnues p_1, P, R, R_1, q_1, n_1, N_1 satisfaisant aux conditions

$$P_u = 0, \quad p_{1_v} = 0, \quad q_{1_v} = -n_1, \quad q_{1_u} = -N_1, \quad R_u = \Delta N_1, \quad R_{1_v} = \delta n_1,$$
$$R\delta - R_1\Delta = 0, \quad n_{1_u} - N_{1_v} = 0, \quad R_1 q_1 N_{1_v} + R_1 N_1 n_1 - N_1 q_1 n_1 \delta = 0.$$

P est fonction de la seule variable v, p_1 de la seule variable u, mais en reprenant les formules (7) et en notant que nous ne pouvons plus modifier les paramètres, nous obtenons

$$P^* = P - \frac{d \log V}{dv}, \quad p_1^* = p_1 + \frac{d \log U}{du}.$$

On voit donc qu'on peut maintenant choisir ces fonctions U et V de façon que P et p_1 deviennent nuls.

Nous introduirons encore l'inconnue auxiliaire S telle que

$$R = \Delta S, \quad R_1 = \delta S$$

et il ne nous restera plus que quatre inconnues q_1, S, n_1 N_1 avec les six conditions

$$q_{1_v} = - n_1, \qquad S_u = N_1,$$
$$q_{1_u} = - N_1, \qquad S_v = n_1, \qquad n_{1_u} = N_{1_v}$$
$$S q_1 N_{1_v} + S N_1 n_1 - N_1 n_1 q_1 = 0.$$

$n_{1_u} = N_{1_v}$ est la condition de compatibilité des deux groupes des premières équations; on voit d'ailleurs immédiatement que $S + q_1$ se réduit à une constante; prenons-la égale à a

$$S = - q_1 + a.$$

On peut alors éliminer les diverses inconnues autres que q_1 et l'on obtient l'équation aux dérivées partielles

$$(28) \qquad (q_1 - a) q_1 q_{1_{uv}} + q_{1_u} q_{1_v} (a - 2 q_1) = 0.$$

Or la solution générale d'une telle équation ne dépend que de deux fonctions arbitraires d'un argument. q_1 étant ainsi déterminé, n_1, N_1, S en résultent sans l'introduction d'autres fonctions, ni d'autres constantes arbitraires.

En conclusion, pour ce cas particulier, la configuration ne dépend que de quatre fonctions arbitraires d'une variable qui peuvent être, d'après ce qui précède : une fonction Δ arbitraire de v; une fonction δ arbitraire de u et les deux fonctions arbitraires qui déterminent la solution de l'équation (28).

Nous allons reprendre cette question d'un point de vue un peu différent à la fin de la seconde partie de ce travail.

DEUXIÈME PARTIE.

Sur la nature des congruences de premiers axes.

11. Cette seconde Partie comporte l'étude de deux questions essentielles.

1° *On donne une congruence rectiligne* C *et une surface* S *associées de façon qu'à tout point de* S *corresponde le rayon de* C *issu de ce point* *et inversement. Existe-t-il sur* S *un réseau conjugué admettant* C *pour congruence des premiers axes ?*

Nous montrerons que, suivant les éléments C, S associés, il y a zéro, une, deux, ou ∞^1 solutions.

2° *On donne une congruence rectiligne* C. *Peut-on trouver une surface* S *contenant un ou plusieurs réseaux conjugués admettant* C *pour congruence des premiers axes ?*

Nous montrerons que ce problème admet toujours une infinité de solutions; les surfaces S étudiées dépendent de quatre fonctions arbitraires d'un argument.

Nous avons, pour traiter ces problèmes, abandonné la méthode du tétraèdre mobile. Nous avons rapporté l'espace à un trièdre fixe de coordonnées, trouvant ce procédé plus commode pour donner des exemples précis des configurations envisagées. Le problème est de nature projective, aussi le trièdre de coordonnées peut-il être quelconque, mais une solution étant trouvée, nous pourrons, sans changer les coordonnées des points, supposer le trièdre trirectangle, ce qui équivaut simplement à effectuer sur l'espace une transformation affine. Ceci nous permettra de donner des exemples en géométrie métrique.

12. Problème préliminaire. — Étant donné une congruence C et une surface S associées comme il est dit plus haut, on cherche les courbes de S telles que leur plan osculateur en tout point M contienne le rayon de C associé à ce point. Si la congruence C est celle des normales à S, nous reconnaissons le problème de la recherche des géodésiques.

Un réseau de lignes coordonnées u, v étant tracé sur la surface, le rayon issu d'un point $M(x, y, z)$ de S peut être défini par les composantes sur les tangentes aux lignes coordonnées et sur la normale en M d'un vecteur dont il serait le support. Nous avons ainsi les coefficients de direction de cette droite sous la forme

$$U\frac{\partial x}{\partial u}+V\frac{\partial x}{\partial v}+Nc, \qquad U\frac{\partial y}{\partial u}+V\frac{\partial y}{\partial v}+Nc', \qquad U\frac{\partial z}{\partial u}+V\frac{\partial z}{\partial v}+Nc'',$$

où c, c', c'' sont les cosinus directeurs de la normale et U, V, N des fonctions données de u et v qui pourront d'ailleurs être remplacées par des valeurs proportionnelles [1].

L'équation différentielle des courbes de S telles que le plan osculateur en chacun de leurs points contienne le rayon correspondant de C est

$$\left| \mathrm{U}\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{V}\frac{\partial x}{\partial v} + \mathrm{N}c \quad \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial x}{\partial u}d^2u + \frac{\partial x}{\partial v}d^2v \right| = 0.$$

Le premier membre est un déterminant du troisième ordre dont nous avons figuré la première ligne, la seconde et la troisième se déduisant de celle-là en faisant jouer aux coordonnées y et z le rôle qui y est tenu par x. En multipliant ce déterminant par

$$\left| c \;\frac{\partial x}{\partial u}\;\frac{\partial x}{\partial v} \right| = \sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}$$

nous obtenons

$$\begin{vmatrix} \mathrm{N} & 0 & \delta\,du^2 + 2\delta'\,du\,dv + \delta''\,dv^2 \\ \mathrm{EU}+\mathrm{FV} & \mathrm{E}\,du + \mathrm{F}\,dv & du^2\,\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2\,du\,dv\,\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + dv^2\,\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \mathrm{E}\,d^2u + \mathrm{F}\,d^2v \\ \mathrm{FU}+\mathrm{GV} & \mathrm{F}\,du + \mathrm{G}\,dv & du^2\,\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2\,du\,dv\,\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + dv^2\,\mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \mathrm{F}\,d^2u + \mathrm{G}\,d^2v \end{vmatrix} = 0.$$

Nous avons représenté par δ, δ', δ'' les coefficients de la forme

$$\mathrm{S}c\,d^2x = \delta\,du^2 + 2\,\delta'\,du\,dv + \delta''\,dv^2$$

et nous rappelons que ce sont les quotients par $\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}$ des coefficients de Gauss (tels que Gauss les avait conçus)

$$\mathrm{D} = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\;\frac{\partial x}{\partial v}\;\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right|, \qquad \mathrm{D}' = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\;\frac{\partial x}{\partial v}\;\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right|, \qquad \mathrm{D}'' = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\;\frac{\partial x}{\partial v}\;\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right|.$$

Nous prenons maintenant u pour variable indépendante et nous

---

[1] Le lecteur se rappellera que U est fonction de u, v à la fois et non de u seul. Remarque analogue pour V.

considérons v comme fonction inconnue de u, $v=v(u)$. En désignant par v' et v'' les dérivées première et seconde de cette fonction et en transformant par des calculs classiques l'équation obtenue, nous trouvons

$$N\begin{vmatrix} E+Fv' & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}+\frac{\partial E}{\partial v}v'+\left(\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)v'^2 \\ F+Gv' & \frac{\partial F}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}+\frac{\partial G}{\partial u}v'+\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}v'^2 \end{vmatrix}$$
$$+(EG-F^2)\,[Nv''+(\delta+2\delta'v'+\delta''v'^2)\,(Uv'-V)]=0.$$

Finalement, nous arrivons à l'équation

$$v''+Av'^3+Bv'^2+Cv'+D=0. \tag{1}$$

où A, B, C, D sont les fonctions de u et v dont nous donnons les valeurs

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned} A&=\frac{U}{N}\delta''+\frac{1}{H^2}\left(\frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v}+\frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial u}-G\frac{\partial F}{\partial v}\right),\\ B&=2\frac{U}{N}\delta'-\frac{V}{N}\delta''+\frac{1}{H^2}\left(\frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v}+\frac{3}{2}F\frac{\partial G}{\partial u}-F\frac{\partial F}{\partial v}-G\frac{\partial E}{\partial v}\right),\\ C&=\frac{U}{N}\delta-2\frac{V}{N}\delta'+\frac{1}{H^2}\left(E\frac{\partial G}{\partial u}+F\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{3}{2}F\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u}\right),\\ D&=-\frac{V}{N}\delta-\frac{1}{H^2}\left(\frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u}+\frac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial v}-E\frac{\partial F}{\partial u}\right). \end{aligned}\right.$$

On peut remarquer d'ailleurs qu'en général, une équation de la forme (1) donnée *a priori*, correspond à un problème du type étudié, car en identifiant l'équation donnée à celle que nous avons obtenue, nous obtiendrions quatre équations auxquelles nous ajouterions les trois équations de Gauss-Codazzi pour déterminer les huit inconnues E, F, G, δ, δ', δ'', $\frac{U}{N}$, $\frac{V}{N}$.

13. PREMIER PROBLÈME. — *Nous pouvons maintenant, nous donnant une congruence* C *et une surface* S *associées, chercher sur* S *un réseau conjugué admettant* C *comme congruence des premiers axes.*

Une famille à un paramètre de courbes tracées sur la surface S est définie par une équation différentielle du premier ordre

$$v'=f(u,v).$$

En tout point d'une courbe de cette famille, nous avons

$$v'' = \frac{d^2 v}{du^2} = \frac{\partial f}{\partial u} + f\frac{\partial f}{\partial v}$$

et nous exprimons que toutes les courbes de la famille considérée sont des solutions du problème préliminaire en écrivant que la fonction f des deux variables indépendantes u et v satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial u} + f\frac{\partial f}{\partial v} + Af^3 + Bf^2 + Cf + D = 0. \tag{3}$$

Pour obtenir un réseau conjugué admettant C pour congruence des premiers axes, il faudra déterminer deux solutions f et f_1 de l'équation (3) liées par la relation

$$\delta + (f + f_1)\,\delta' + ff_1\,\delta'' = 0. \tag{4}$$

On peut, par un changement de fonctions inconnues, simplifier cette équation (4); il suffit de poser

$$f = \alpha F + \beta, \qquad f_1 = \alpha F_1 + \beta \qquad \text{avec} \quad \beta = \frac{-\delta'}{\delta''}, \qquad \alpha^2 = \frac{\delta'^2 - \delta\delta''}{\delta''^2}$$

pour la ramener à la forme (1)

$$FF_1 = 1.$$

La question revient alors à déterminer une fonction $F(u, v)$ satisfaisant aux deux équations aux dérivées partielles simultanées

$$\frac{\partial F}{\partial u} + (\alpha F + \beta)\frac{\partial F}{\partial v} + A_1 F^3 + B_1 F^2 + C_1 F + D_1 = 0, \tag{5}$$

$$F\frac{\partial F}{\partial u} + (\alpha + \beta F)\frac{\partial F}{\partial v} - A_1 - B_1 F - C_1 F^2 - D_1 F^3 = 0, \tag{6}$$

où A_1, B_1, C_1, D_1 sont des fonctions de u et de v que l'on préciserait

(1) Nous écartons le cas des développables, de sorte que $\delta'^2 - \delta\delta''$ n'est pas nul et nous supposons en outre que δ'' n'est pas nul, c'est-à-dire que les courbes $u = \text{const.}$ ne sont pas asymptotiques de la surface.

aisément : pour la suite, il est nécessaire de remarquer que A, B, C, D ne font intervenir que les dérivées secondes de x, y, z; il en est de même pour α, β; mais A_1, B_1, C_1, D_1 dépendent aussi des dérivées du premier ordre de α, β, donc des dérivées d'ordre 3 de x, y, z.

En résolvant en $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial v}$, on a

$$\alpha(1-F^2)\frac{\partial F}{\partial u}+(\alpha+\beta F)(A_1F^3+B_1F^2+C_1F+D_1)$$
$$+(\alpha F+\beta)(A_1+B_1F+C_1F^2+D_1F^3)=0.$$
$$\alpha(1-F^2)\frac{\partial F}{\partial v}-(A_1+B_1F+C_1F^2+D_1F^3)-F(A_1F^3+B_1F^2+C_1F+D_1)=0.$$

Nous simplifions ce système en faisant le nouveau changement de fonction inconnue

$$\Phi=F+\frac{1}{F},$$

ce qui donne

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}=\left(1-\frac{1}{F^2}\right)\frac{\partial F}{\partial u},\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial v}=\left(1-\frac{1}{F^2}\right)\frac{\partial F}{\partial v}.$$

Nous trouvons ainsi pour déterminer la fonction Φ, les deux équations

$$(7)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial u}=\lambda\Phi^2+2\mu\Phi+\nu,\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial v}=\lambda_1\Phi^2+2\mu_1\Phi+\nu_1,$$

où λ, μ, ν, λ_1, μ_1, ν_1 sont des fonctions de u et de v que l'on peut préciser par des calculs faciles, mais assez longs; λ, μ, ν, λ_1, μ_1, ν_1 contiennent les dérivées de x, y, z jusqu'à l'ordre 3.

Ainsi le problème se trouve ramené à *l'intégration d'un système aux différentielles totales, de la forme de Riccati.*

La condition de compatibilité

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)$$

fournit une équation en termes finis du second degré

$$(8)\qquad H\Phi^2+2K\Phi+L=0,$$

de sorte que, d'après des résultats classiques, on peut conclure que *le problème proposé admet zéro, une, deux ou une infinité de solutions.*

Pour que le problème admette au moins une solution, il faut que les trois équations

$$(9)\quad \begin{cases} H\Phi^2 + 2K\Phi + L = 0, \\ 2(H\Phi + K)\,(\lambda\,\Phi^2 + 2\mu\,\Phi + \nu\,) + \dfrac{\partial H}{\partial u}\Phi^2 + 2\dfrac{\partial K}{\partial u}\Phi + \dfrac{\partial L}{\partial u} = 0, \\ 2(H\Phi + K)\,(\lambda_1\Phi^2 + 2\mu_1\Phi + \nu_1) + \dfrac{\partial H}{\partial v}\Phi^2 + 2\dfrac{\partial K}{\partial v}\Phi + \dfrac{\partial L}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

aient une solution commune, ce qui se traduit par deux conditions nécessaires et suffisantes que l'on obtient par des calculs de dérivation et des éliminations algébriques. Ces conditions étant satisfaites, si $K^2 - HL \neq 0$ et si les équations (9) ont une seule solution commune, nous aurons pour notre problème, le cas d'une solution unique et simple.

14. Nous allons maintenant donner des exemples précis des divers cas signalés.

Prenons, pour congruence C, celle des normales à la surface S : il n'existe aucune solution si S n'est ni minima, ni de Voss-Guichard; si S est minima, une solution unique existe, constituée par les lignes de longueur nulle; si la surface est de Voss-Guichard, nous avons encore une solution unique, constituée par les deux familles de géodésiques conjuguées, et si cette surface de Voss Guichard est de révolution, elle admet deux réseaux de Voss symétriques par rapport à un plan méridien quelconque, et nous obtenons ainsi un exemple du cas à deux solutions. On sait enfin que sur un hélicoïde minimum, il y a une infinité simple de réseaux de géodésiques conjuguées et on a ainsi un exemple du cas où l'on a une infinité de solutions.

Si la surface S est réglée, la congruence C étant quelconque, on peut considérer que la famille des génératrices fournit déjà une solution; en effet, les génératrices forment un réseau conjugué particulier, dégénéré, il est vrai, les deux familles du réseau coïncidant; d'autre part, en tout point M d'une génératrice G le plan osculateur est indéterminé, de sorte que le plan déterminé par G et le rayon de C issu de M peut être regardé comme osculateur. Cette solution, *a priori* peu intéressante, permet d'énoncer dès maintenant des propriétés remarquables des surfaces réglées, propriétés qui seront d'ailleurs étendues et précisées un peu plus loin.

Si une surface réglée S contient deux réseaux (distincts ou non) non rectilignes admettant la même congruence des premiers axes C, elle admet une infinité de réseaux conjugués admettant encore C comme congruence des premiers axes puisque les génératrices constituent une troisième solution. Plus bas, nous obtiendrons le résultat plus précis que, pour une surface réglée quelconque, tout réseau conjugué fournit une congruence C de premiers axes qui peut être associée à ∞^1 réseaux conjugués de la surface, mais pour le moment, nous ne pouvons encore justifier ce résultat.

Si la surface S est doublement réglée, c'est-à-dire si c'est une quadrique, nous voyons déjà que la congruence C des premiers axes d'un réseau conjugué quelconque est congruence des premiers axes d'une infinité de réseaux conjugués tracés sur C, mais la remarque précédente montre que cette propriété ne distingue pas, en réalité, les quadriques des autres surfaces réglées.

15. Dans le cas de deux solutions distinctes, les deux polynomes de degré trois qui figurent dans (9) sont divisibles par le premier, ceci conduit à *quatre équations faisant intervenir* H, K, L *et leurs dérivées du premier ordre*.

Dans le cas de ∞^1 solutions, on aura $H = K = L = 0$. Les équations qui correspondent au cas de deux solutions sont d'ailleurs satisfaites, comme conséquences de $H = K = L = 0$.

Le cas d'une solution *unique* mais *double* n'exige que trois relations, d'abord $K^2 - HL = 0$, puis les deux relations résultant de l'élimination de Φ entre les équations (9). L'élimination est ici plus facile que dans le cas général, puisqu'on a

$$\Phi = \frac{-K}{H} = \frac{-L}{K}.$$

Le cas de deux solutions distinctes entraînant quatre équations, on aurait pu croire qu'en ajoutant $K^2 - HL = 0$, on aurait eu cinq équations pour le cas de la solution unique, double. L'explication est simple; si l'équation $H\Phi^2 + 2K\Phi + L = 0$ admet deux solutions distinctes Φ_1 et Φ_2, pour écrire que chacune de ces fonctions est solution du sytème (9), nous écrivons deux équations, ce qui en donne quatre en tout; mais si Φ_1 et Φ_2 se confondent, nous n'avons à écrire que deux équations auxquelles il suffira d'adjoindre $K^2 - HL = 0$.

Nous allons montrer qu'on peut trouver le cas de deux solutions avec une surface S quelconque; de façon plus précise, nous montrerons qu'*à toute surface* S *on peut associer une infinité de congruences telles que chacune soit congruence des premiers axes pour deux réseaux distincts tracés sur* S.

Nous allons, à cet effet, reprendre la méthode du paragraphe **13**, en supposant le réseau (u, v) constitué par les asymptotiques. Pour trouver un réseau conjugué admettant une congruence C comme congruence des premiers axes, il faut déterminer deux solutions f et f_1 de l'équation (3) liées par

$$f + f_1 = 0.$$

On peut donc dire que la question revient à déterminer une seule fonction $f(u, v)$ satisfaisant aux deux équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial u} + f\frac{\partial f}{\partial v} + Af^3 + Bf^2 + Cf + D = 0,$$

$$-\frac{\partial f}{\partial u} + f\frac{\partial f}{\partial v} - Af^3 + Bf^2 - Cf + D = 0,$$

qui équivalent à

$$\frac{\partial f}{\partial u} + Af^3 + Cf = 0, \qquad f\frac{\partial f}{\partial v} + Bf^2 + D = 0. \tag{10}$$

D'autre part, les équations (2) montrent que, dans ce cas, A et D sont indépendants de U et de V, tandis que B et C peuvent être écrits sous la forme

$$B = 2\frac{U}{N}\delta' + B_1, \qquad C = -2\frac{V}{N}\delta' + C_1,$$

où B_1 et C_1 sont indépendants de U et de V.

Les équations (10) s'écrivent donc

$$\frac{\partial f}{\partial u} + Af^3 + \left(C_1 - \frac{2V}{N}\delta'\right)f = 0, \qquad f\frac{\partial f}{\partial v} + \left(2\frac{U}{N}\delta' + B_1\right)f^2 + D = 0, \tag{11}$$

où les quantités A, B_1, C_1, D sont indépendantes de U et V.

Nous cherchons maintenant à déterminer simultanément deux réseaux conjugués conduisant à la même congruence des premiers axes. Cela revient à trouver quatre fonctions $f(u, v)$, $g(u, v)$, $\frac{U}{N}$, $\frac{V}{N}$ satisfaisant aux deux équations (11) et aux deux équations déduites de celles-ci en y remplaçant f par g. Les équations sont algébriques et du premier degré par rapport à $\frac{U}{N}$ et $\frac{V}{N}$; on peut éliminer ces quantités et le problème revient à trouver deux fonctions f et g de u et v satisfaisant aux équations

$$\frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \mathrm{A}f^3 + \mathrm{C}_1 f\right) = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial g}{\partial u} + \mathrm{A}g^3 + \mathrm{C}_1 g\right),$$

$$\frac{1}{f^2}\left(f\frac{\partial f}{\partial v} + \mathrm{B}_1 f^2 + \mathrm{D}\right) = \frac{1}{g^2}\left(g\frac{\partial g}{\partial v} + \mathrm{B}_1 g^2 + \mathrm{D}\right),$$

qui se réduisent à

$$g\frac{\partial f}{\partial u} - f\frac{\partial g}{\partial u} + \mathrm{A}fg(f^2 - g^2) = 0, \qquad fg\left(g\frac{\partial f}{\partial v} - f\frac{\partial g}{\partial v}\right) + \mathrm{D}(g^2 - f^2) = 0.$$

En posant $g = f\varphi$ nous obtenons, pour les deux fonctions inconnues f et φ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \mathrm{A}f^2\varphi(1 - \varphi^2) = 0, \qquad \varphi f^2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \mathrm{D}(1 - \varphi^2) = 0.$$

On voit que φ étant connu, f^2 se trouve parfaitement déterminé; on peut éliminer f^2 et l'on voit que φ doit être solution de l'équation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \mathrm{AD}(1 - \varphi^2)^2 = 0. \tag{12}$$

La solution générale de cette équation dépend d'une fonction arbitraire d'une variable.

Une surface quelconque possède donc une infinité de couples de réseaux associés, dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument, tels que les deux réseaux du couple admettent la même congruence des premiers axes.

16. Nous allons chercher maintenant à obtenir des systèmes de ∞^1 réseaux conjugués ayant même congruence de premiers axes. Il suffit, d'après l'étude générale, qu'il existe trois réseaux admettant la même congruence de premiers axes pour qu'il en existe une infinité simple. Donc, il suffit que l'on puisse trouver deux fonctions φ et φ_1 distinctes, solutions de (12) conduisant à la même fonction f; or φ étant connu, on obtenait f par

$$f^2 = \frac{1}{A} \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\varphi(1-\varphi^2)} = \frac{-D(1-\varphi^2)}{\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial v}}.$$

Par conséquent, les deux fonctions φ et φ_1 devront être liées par

$$(13) \qquad \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\varphi(1-\varphi^2)} = \frac{\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}}{\varphi_1(1-\varphi_1^2)}, \qquad \frac{\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{1-\varphi^2} = \frac{\varphi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}}{1-\varphi_1^2}.$$

φ étant solution de (12), il suffit que φ_1 satisfasse aux deux équations (13) pour qu'elle satisfasse aussi à (12). *La forme du système* (13) *nous permettra d'obtenir simplement la condition d'intégrabilité complète et de retrouver ce résultat que si trois réseaux ont même congruence des premiers axes, il y a une infinité simple de réseaux jouissant de cette propriété.*

En effet, on peut intégrer séparément les deux équations (13); cela donne

$$\frac{1}{\varphi^2} - 1 = V_1\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - 1\right), \qquad \varphi^2 - 1 = U_1(\varphi_1^2 - 1),$$

où V_1 dépend de v seulement, U_1 de u seulement. On en déduit

$$\frac{1}{\varphi^2} = 1 + V_1\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - 1\right), \qquad \varphi^2 = 1 + U_1(\varphi_1^2 - 1),$$

d'où

$$\left[1 + V_1\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - 1\right)\right][1 + U_1(\varphi_1^2 - 1)] = 1$$

ou

$$V_1\left(\frac{1}{\varphi_1^2} - 1\right) + U_1(\varphi_1^2 - 1) - U_1 V_1 \frac{(\varphi_1^2 - 1)^2}{\varphi_1^2} = 0.$$

On peut diviser par $\varphi_1^2 - 1$ qui n'est pas nul, d'où

$$U_1 - \frac{V_1}{\varphi_1^2} - U_1 V_1 \frac{\varphi_1^2 - 1}{\varphi_1^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad U_1(1 - V_1) + \frac{V_1}{\varphi_1^2}(U_1 - 1) = 0,$$

et enfin

$$\varphi_1^2 = \frac{V_1}{1 - V_1} \frac{1 - U_1}{U_1}.$$

D'ailleurs φ^2 s'obtient en remplaçant U_1 et V_1 par leurs inverses

$$\varphi^2 = \frac{U_1 - 1}{V_1 - 1}.$$

Mais alors, si φ^2 est de cette forme, il l'est de ∞^1 façons, car si on pose avec une constante k arbitraire

$$U_1 - 1 = k(U_2 - 1), \qquad V_1 - 1 = k(V_2 - 1),$$

on peut remplacer φ^2 par $\frac{U_2 - 1}{V_2 - 1}$ et alors φ_1^2 se trouve remplacé par

$$\frac{V_2}{1 - V_2} \frac{1 - U_2}{U_2} = \frac{V_1 - 1 + k}{V_1 - 1} \frac{U_1 - 1}{U_1 - 1 + k}$$

(k infini donne φ^2, $k = 1$ donne φ_1^2).

Nous avons supposé l'existence de trois réseaux associés

$$v' = \varepsilon_1 f(u, v), \qquad v' = \varepsilon_2 f(u, v)\varphi(u, v), \qquad v' = \varepsilon_3 f(u, v)\varphi_1(u, v)$$

et nous venons de trouver que ceci entraîne l'existence de ∞^1 réseaux associés, dépendant de la constante arbitraire k; d'autre part, l'expression $\frac{V_1 - 1 + k}{V_1 - 1} \frac{U_1 - 1}{U_1 - 1 + k}$ est une fonction homographique de la constante k et l'on vérifie ainsi le résultat obtenu au paragraphe **13** d'après lequel le problème se ramène à l'intégration de deux équations de Riccati simultanées.

Il nous faut enfin exprimer que l'équation (12) admet une solution φ telle que

$$\varphi^2 = \frac{U_1 - 1}{V_1 - 1},$$

on a alors

$$1-\varphi^2=\frac{V_1-U_1}{V_1-1},\qquad \frac{2}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{U'_1}{U_1-1},$$

$$\frac{2}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\frac{-V'_1}{V_1-1},\qquad \frac{4}{\varphi^2}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\frac{-U'_1V'_1}{(U_1-1)(V_1-1)}$$

d'où

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}=\frac{-U'_1V'_1}{4(V_1-1)^2}.$$

On tire donc de l'équation (12)

$$-\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{(1-\varphi^2)^2}=\frac{U'_1V'_1}{4(U_1-V_1)^2}=\text{AD}.$$

Une surface admettant ∞^1 réseaux associés n'est pas quelconque puisque AD est d'une forme particulière.

Nous allons chercher quelles sont les surfaces sur lesquelles existent des systèmes de ∞^1 réseaux donnant la même congruence des premiers axes et combien de systèmes différents on peut obtenir sur une telle surface.

L'expression $W=\dfrac{U'_1V'_1}{(U_1-V_1^2)}$ est rencontrée comme intégrale de la célèbre équation de Liouville qui s'introduit naturellement dans l'étude des surfaces à courbure totale constante.

En effet,

$$\frac{\partial\log W}{\partial u}=\frac{U''_1}{U'_1}-\frac{2U'_1}{U_1-V_1},\qquad \frac{\partial^2\log W}{\partial u\,\partial v}=\frac{-2U'_1V'_1}{(U_1-V_1)^2}=-2W.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2\log W}{\partial u\,\partial v}+2W=0,$$

soit

$$(14)\qquad \frac{\partial^2\log \text{AD}}{\partial u\,\partial v}+8\,\text{AD}=0\quad (^1).$$

---

(1) On peut arriver plus rapidement à ce résultat, à partir des équations (10), dont on forme la condition de compatibilité. Posant $F=f^2$, on a $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial u}=-AF^2-CF$, $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial F}{\partial v}=-BF-D$ et, égalant deux valeurs de $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial v}$,

La surface S étant rapportée à ses asymptotiques, et les expressions de A, D étant tirées des formules (2), *si* AD *ne satisfait pas à l'équation* (14), *il n'existe aucun système de* ∞^1 *réseaux conjugués donnant la même congruence des premiers axes; il n'existe que des couples de réseaux conjugués ayant cette propriété.*

Si AD satisfait à cette équation, il y a autant de systèmes de ∞^1 réseaux qu'il y a de façons de mettre AD sous la forme $\frac{1}{4}\frac{U'_1V'_1}{(U_1-V_1)^2}$; or, ceci est un problème résolu par les applications de la sphère sur elle-même; *on a donc* ∞^3 *systèmes de* ∞^1 *réseaux.* Il y a toutefois à considérer à part le cas où AD est nul.

Supposons $A=0$; le système qui déterminait les deux fonctions inconnues f et φ est alors

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=0, \qquad \varphi f^2\frac{\partial\varphi}{\partial v}+D(1-\varphi^2)=0,$$

φ est donc une fonction de v, soit V_1 et $f^2=-D\,\frac{1-V_1^2}{V_1V'_1}$.

Si l'on cherche une autre fonction φ_1 conduisant à la même fonction f, on voit qu'il faut déterminer une fonction V_2 de v telle que

$$\frac{V_1V'_1}{V_1^2-1}=\frac{V_2V'_2}{V_2^2-1},$$

c'est-à-dire qu'on devra avoir

$$V_2^2-1=k(V_1^2-1).$$

Or $A=0$ est la condition pour que les courbes $u=$ const. qui sont déjà asymptotiques, soient géodésiques; donc *la surface est réglée.* Par conséquent, *les surfaces réglées n'admettent aucun système de deux réseaux associés (deux seulement), elles admettent uniquement des systèmes de* ∞^1 *réseaux.*

---

la relation $\left(2AB-\frac{\partial A}{\partial v}\right)F^2+\left(4AD-\frac{\partial C}{\partial v}+\frac{\partial B}{\partial u}\right)F+2CD+\frac{\partial D}{\partial u}=0$. Le cas d'intégrabilité complète fournit $B=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\log A$, $C=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\log D$, $8AD+\frac{\partial^2\log AD}{\partial u\,\partial v}=0$; mais la méthode du texte fournit l'intégrale de cette relation.

Nous avons signalé que, pour une surface simplement réglée, si deux réseaux donnent les mêmes premiers axes, il y a ∞^1 réseaux admettant ces premiers axes; nous obtenons ici un résultat plus intéressant : *la congruence des premiers axes d'un réseau conjugué quelconque, non formé par les génératrices, est congruence des premiers axes de ∞^1 réseaux conjugués*. La propriété qui semblait distinguer les quadriques est donc générale pour les surfaces réglées.

Une surface non réglée pour laquelle AD satisfait à (14) admet des couples de réseaux dépendant d'*une fonction arbitraire* d'une variable et des systèmes de ∞^1 réseaux associés dépendant de trois constantes arbitraires. On peut achever la détermination des réseaux cherchés; on a en effet à intégrer

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{U'_1V'_1}{4(V_1-U_1)^2}(1-\varphi^2)^2=0.$$

Si l'on pose

$$\Phi=2\int\frac{d\varphi}{1-\varphi^2}=L\left|\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\right|,$$

on a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial v}+\frac{U'_1V'_1}{(V_1-U_1)^2}=0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial U_1}\frac{\partial\Phi}{\partial V_1}+\frac{1}{(V_1-U_1)^2}=0.$$

On a aisément une intégrale complète

$$\Phi=\int\left\{\left[a+\sqrt{a^2+\frac{1}{(V_1-U_1)^2}}\right]dU_1+\left[a-\sqrt{a^2+\frac{1}{(V_1-U_1)^2}}\right]dV_1\right\}+b$$

soit

$$\Phi=a(U_1+V_1)+\int\sqrt{a^2+\frac{1}{(V_1-U_1)^2}}\,d(U_1-V_1)+b.$$

Il reste ainsi à calculer une intégrale de la forme $\int\sqrt{a^2+\frac{1}{t^2}}\,dt$

$$\int\sqrt{a^2+\frac{1}{t^2}}\,dt=\int\sqrt{a^2t^2+1}\,\frac{dt}{t}.$$

Posons

$$t^2a^2+1=\theta^2,\qquad t^2=\frac{\theta^2-1}{a^2},\qquad \frac{dt}{t}=\frac{\theta\,d\theta}{\theta^2-1}$$

et l'intégrale devient

$$\int \frac{\theta^2\, d\theta}{\theta^2 - 1} = \theta + \int \frac{d\theta}{\theta^2 - 1} = \theta - \frac{1}{2} \mathrm{L} \left| \frac{\theta + 1}{\theta - 1} \right|$$

et l'intégrale complète apparaît

$$\Phi = a(\mathrm{U}_1 + \mathrm{V}_1) + \sqrt{(\mathrm{U}_1 - \mathrm{V}_1)^2 a^2 + 1} - \frac{1}{2} \mathrm{L} \left\{ \frac{1 + \sqrt{(\mathrm{U}_1 - \mathrm{V}_1)^2 a^2 + 1}}{1 - \sqrt{(\mathrm{U}_1 - \mathrm{V}_1)^2 a^2 + 1}} \right\} + b.$$

17. Pour chercher un exemple des cas à ∞^1 solutions, il est naturel de partir d'une surface S, d'un réseau R tracé sur S et de prendre pour C la congruence des premiers axes de R; on cherchera ensuite les conditions pour qu'il y ait de nouveaux réseaux correspondant à C. En cas de possibilité, Φ satisfera à une équation de Ricatti dont on connaît une solution particulière fournie par le réseau de départ; donc la fonction cherchée $v' = f(u, v)$ pourra être obtenue par des quadratures.

Nous reprenons donc les calculs du paragraphe **13** en introduisant les hypothèses complémentaires :

$\delta' = 0$ exprimant que le réseau (u, v) est conjugué;

$\mathrm{A} = \mathrm{D} = 0$ exprimant que C est la congruence des premiers axes de ce réseau.

Ces dernières équations donnent, en remplaçant N par 1,

$$(15) \qquad \begin{cases} (\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2)\mathrm{U}\delta'' + \dfrac{\mathrm{F}}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial v} + \dfrac{\mathrm{G}}{2}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u} - \mathrm{G}\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} = 0, \\ (\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2)\mathrm{V}\delta + \dfrac{\mathrm{F}}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial u} + \dfrac{\mathrm{E}}{2}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v} - \mathrm{E}\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} = 0, \end{cases}$$

et l'équation fondamentale (1) est ramenée à la forme

$$(16) \qquad v'' + \mathrm{B}v'^2 + \mathrm{C}v' = 0.$$

Pour qu'un nouveau réseau corresponde à C, il faut qu'on puisse déterminer deux fonctions $v' = f(u, v)$, $v'_1 = f_1(u, v)$ satisfaisant à l'équation (16) et liées par

$$\delta + \delta'' f f_1 = 0.$$

Nous pouvons ramener cette dernière relation à $\mathrm{FF}_1 = 1$ comme nous avons fait dans le cas général, mais nous nous proposons simplement ici de donner un exemple et nous nous bornerons au cas où la relation entre f et f_1 est déjà sous sa forme réduite. Ceci revient à supposer d'abord que *la surface* S *est isotherme asymptotique,* c'est-à-dire qu'elle possède un réseau conjugué (u, v) donnant à l'équation des asymptotiques la forme $du^2 + K\,dv^2 = 0$, où K est une constante que l'on peut, sans restreindre, supposer égale à ± 1. Nous prenons ici $K = -1$ et il nous faut encore supposer que *le réseau particulier est notre réseau* R *de départ.* Nous avons donc à chercher une fonction f satisfaisant aux deux équations

$$\frac{\partial f}{\partial u} + f\frac{\partial f}{\partial v} + Bf^2 + Cf = 0, \qquad f\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} - Bf - Cf^2 = 0.$$

En résolvant en $\frac{\partial f}{\partial u}$ et $\frac{\partial f}{\partial v}$, on obtient

$$(17)\qquad \begin{cases} (f^2 - 1)\dfrac{\partial f}{du} = Cf^3 + 2Bf^2 + Cf, \\ (f^2 - 1)\dfrac{\partial f}{\partial v} = -Bf^3 - 2Cf^2 - Bf. \end{cases}$$

En posant

$$f + \frac{1}{f} = \varphi,$$

d'où

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \left(1 - \frac{1}{f^2}\right)\frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left(1 - \frac{1}{f^2}\right)\frac{\partial f}{\partial v},$$

on a

$$(18)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u} = C\varphi + 2B, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -B\varphi - 2C.$$

La condition de compatibilité

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)$$

donne

$$(19)\qquad \varphi\left(\frac{\partial C}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u}\right) + 2\left(\frac{\partial B}{\partial v} + \frac{\partial C}{\partial u} + B^2 - C^2\right) = 0.$$

Pour que nous ayons ∞^1 solutions, il faut et il suffit que cette condition soit identiquement satisfaite, c'est-à-dire que nous ayons

$$(20)\qquad \frac{\partial C}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial B}{\partial v} + \frac{\partial C}{\partial u} + B^2 - C^2 = 0.$$

On pourra écrire

$$B = \frac{-\partial l}{\partial v}, \qquad C = \frac{\partial l}{\partial u}$$

et l'inconnue auxiliaire l devra satisfaire à l'unique équation

$$\frac{\partial^2 l}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 l}{\partial v^2} = \left(\frac{\partial l}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial l}{\partial v}\right)^2. \tag{21}$$

Posons $u + v = x$, $u - v = y$, de sorte que x et y sont les paramètres des asymptotiques; on a

$$\frac{\partial l}{\partial u} = \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial l}{\partial y}, \qquad \frac{\partial l}{\partial v} = \frac{\partial l}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 l}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 l}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 l}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 l}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2 l}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 l}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 l}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 l}{\partial y^2}.$$

et l'équation (21) devient

$$\frac{\partial^2 l}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial l}{\partial x}\frac{\partial l}{\partial y} \tag{22}$$

qui donne

$$e^{-l} = \Phi(x) + \psi(y),$$

où φ ne dépend que de x, ψ ne dépend que de y.

On en tire donc

$$e^{-l} = \Phi(u+v) + \psi(u-v), \qquad l = -\operatorname{Log}[\Phi(u+v) + \psi(u-v)],$$

$$B = \frac{\Phi'(u+v) - \psi'(u-v)}{\Phi + \psi}; \qquad C = \frac{-[\Phi'(u+v) + \psi'(u-v)]}{\Phi(u+v) + \psi(u-v)}.$$

En nous reportant aux expressions générales de B et C données par les formules (2) en y remplaçant U et V par leur valeur tirée des équations (15) et enfin en y faisant $\delta' = 0$, $\delta'' = -\delta$, on obtient,

$$\frac{\Phi'(u+v) - \psi'(u-v)}{\Phi(u+v) + \psi(u-v)} = \frac{1}{EG - F^2}\left(E\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{F}{2}\frac{\partial E}{\partial u} - \frac{E}{2}\frac{\partial E}{\partial v} + \frac{E}{2}\frac{\partial G}{\partial v} + \frac{3}{2}F\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial F}{\partial v} - G\frac{\partial E}{\partial v}\right),$$

$$-\frac{\Phi'(u+v) + \psi'(u-v)}{\Phi(u+v) + \psi(u-v)} = \frac{1}{EG - F^2}\left(-G\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{F}{2}\frac{\partial G}{\partial v} + \frac{G}{2}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{G}{2}\frac{\partial E}{\partial u} - \frac{3}{2}F\frac{\partial E}{\partial v} + F\frac{\partial F}{\partial u} + E\frac{\partial G}{\partial u}\right).$$

Nous adjoindrons à ces deux équations les trois équations de Gauss-Codazzi qui ont ici la forme suivante :

$$(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)\frac{\partial\delta}{\partial u}+\delta\left(\frac{1}{2}\mathrm{G}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}-\mathrm{G}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial v}+\frac{\mathrm{F}}{2}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial v}-\frac{\mathrm{E}}{2}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}+\frac{\mathrm{F}}{2}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v}\right)=0,$$

$$(\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2)\frac{\partial\delta}{\partial u}+\delta\left(-\frac{\mathrm{G}}{2}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v}+\frac{\mathrm{F}}{2}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}+\frac{\mathrm{E}}{2}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v}-\mathrm{E}\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial u}+\frac{\mathrm{F}}{2}\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial u}\right)=0;$$

$$-\delta^2=\frac{1}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\begin{vmatrix}\mathrm{L} & \dfrac{\partial\mathrm{F}}{\partial v}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\mathrm{G}}{\partial u} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\mathrm{G}}{\partial v}\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\mathrm{E}}{\partial u} & \mathrm{E} & \mathrm{F}\\ \dfrac{\partial\mathrm{F}}{\partial u}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\mathrm{E}}{\partial v} & \mathrm{F} & \mathrm{G}\end{vmatrix}$$

$$-\frac{1}{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}\begin{vmatrix}0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\mathrm{E}}{\partial v} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\mathrm{E}}{\partial v} & \mathrm{E} & \mathrm{F}\\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\mathrm{G}}{\partial u} & \mathrm{F} & \mathrm{G}\end{vmatrix}$$

avec

$$\mathrm{L}=\frac{\partial^2\mathrm{F}}{\partial u\,\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial v^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathrm{G}}{\partial u^2}.$$

Nous avons ainsi un système de cinq équations pour calculer les quatre inconnues E, F, G, δ. Nous allons montrer que ce système admet des solutions, nous ne donnerons pas la solution générale, nous bornant à donner une solution précise.

Pour cela, nous ajouterons une nouvelle restriction pour le réseau de départ R; nous supposerons que R *est réseau de courbure et isotherme;* nous avons donc, en outre de $\delta^u+\delta=0$, les égalités $\mathrm{E}=\mathrm{G}$, $\mathrm{F}=0$.

Les deux formes quadratiques fondamentales sont

$$\mathrm{S}\,dx^2=\mathrm{E}(du^2+dv^2),\qquad \mathrm{S}\,c\,d^2x=\delta(du^2-dv^2).$$

On voit donc que les lignes de longueur nulle sont conjuguées et la surface est *minima*.

Les deux premières équations de Gauss-Codazzi donnent

$$\frac{\partial\delta}{\partial u}=\frac{\partial\delta}{\partial v}=0,$$

de sorte que δ est une constante que l'on peut, par un changement linéaire sur u et v, réduire à l'unité et alors la troisième équation devient

$$-E^2 = \begin{vmatrix} L & -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & E & 0 \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & 0 & E \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & E & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & 0 & E \end{vmatrix}$$

avec

$$L = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}.$$

Après réduction, nous obtenons

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{1}{E}\left[\left(\frac{\partial E}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right] = 2, \tag{23}$$

équation que l'on sait ramener à la forme de Laplace puisque l'on sait ramener la détermination des surfaces minima à celle d'une ou deux fonctions de la variable complexe.

On voit que les expressions de B et C donnent ici

$$B = -\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial v}, \qquad C = \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial u}$$

et l'on vérifie que l'on a bien

$$\frac{\partial C}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} = 0.$$

En posant $E = e^l$, on voit que le terme constant de l'équation (19) est, après division par 2,

$$\frac{\partial^2 l}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 l}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial l}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial l}{\partial u}\right)^2,$$

expression qui n'est pas nulle, si la surface minima est *quelconque*. On peut donc considérer qu'avec une surface minima quelconque, le système (18) admet pour φ la solution infinie, ce qui donne à f une valeur nulle ($dv = 0$) ou infinie ($du = 0$). Le réseau conjugué de départ constituerait donc pour notre problème la seule solution, mais qui devrait être considérée comme double. *Nous avons donc obtenu un exemple de solution double par le réseau de courbure d'une surface minima quelconque.*

18. Pour qu'il existe ∞^1 réseaux solutions, il faut que le terme constant de l'équation (19) soit nul

$$\frac{\partial^2 l}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 l}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial l}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial l}{\partial u}\right)^2 = 0.$$

Nous avons intégré cette équation dans le paragraphe précédent.

Avant de prendre l'intégrale la plus générale, commençons par *celles qui se réduisent à une fonction quelconque de $u+v$ ou de $u-v$.*

Le changement de v en $-v$ ne change pas la forme des équations et permet de n'envisager que le cas où l est fonction de $w = u+v$. En prenant ainsi $E = e^l = e^{\psi(w)}$ l'équation (23) se réduit successivement à

$$\psi'' = e^{-\psi}, \qquad 2\psi'\psi'' = 2e^{-\psi}\psi', \qquad \psi'^2 = K^2 - 2e^{-\psi},$$

où K est une constante arbitraire.

Revenons à l'inconnue $E = e^{\psi}$, on a

$$\frac{E'}{E} = \psi'$$

et ainsi

$$(24) \qquad E'^2 = K^2E^2 - 2E.$$

Or les intégrales de cette équation sont intégrales de l'équation obtenue en dérivant, ce qui donne, après avoir divisé par E' différent de zéro,

$$E'' = K^2E - 1.$$

On a ainsi

$$(25) \qquad E - \frac{1}{K^2} = \lambda \operatorname{sh} Kw + \mu \operatorname{ch} Kw,$$

où λ, μ sont deux constantes; mais ces constantes ne sont pas arbitraires, puisque E doit être intégrale de (24). En reportant la valeur de E tirée de (25) dans l'équation (24), on trouve

$$\mu^2 - \lambda^2 = \frac{1}{K^4},$$

ce qui nous conduit à prendre

$$\mu = \frac{\operatorname{ch} K w_0}{K^2}, \qquad \lambda = \frac{-\operatorname{sh} K w_0}{K^2}$$

et

$$E = \frac{1}{K^2}[1 + \operatorname{ch} K(w - w_0)] = \frac{2}{K^2} \operatorname{ch}^2 K \frac{w - w_0}{2}.$$

Il est clair que les calculs précédents restent valables quand on remplace $u - u_0$ par u et $v - v_0$ par v, ce qui nous permet de supposer w_0 nul. Une homothétie ramènera ensuite K à l'unité et nous aboutissons donc à la surface minima définie par

$$\text{(26)} \qquad ds^2 = 2 \operatorname{ch}^2\left(\frac{u+v}{2}\right)(du^2 + dv^2),$$
$$S c\, d^2 x = du^2 - dv^2.$$

Nous allons reconnaître que cette surface est l'hélicoïde minimum; en effet, en la rapportant à ses asymptotiques $u + v = u_1$, $u - v = v_1$, le ds^2 prend la forme

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2 \frac{u_1}{2}(du_1^2 + dv_1^2),$$

de sorte que les courbes $u_1 = \text{const.}$ sont des géodésiques; or elles sont asymptotiques, donc ce sont des droites; la surface minima considérée est réglée; c'est un hélicoïde minimum.

La vérification directe est aisée; nous pouvons prendre en effet l'hélicoïde sous la forme

$$x = 2 U \cos v_1, \qquad y = 2 U \sin v_1, \qquad z = 2 v_1$$

On en tire

$$ds^2 = 4 dU^2 + 4(1 + U^2) dv_1^2,$$

et si l'on pose

$$U = \operatorname{sh} u_1$$

on a

$$ds^2 = 4 \operatorname{ch}^2 u_1 (du_1^2 + dv_1^2)$$

et, en posant

$$u_1 = \frac{u+v}{2}, \qquad v_1 = \frac{u-v}{2},$$

on obtient

$$ds^2 = 2 \operatorname{ch}^2 \frac{u+v}{2}(du^2 + dv^2)$$

c'est-à-dire le ds^2 précédemment obtenu. Quant à la seconde forme quadratique fondamentale, elle s'écrit

$$\mathrm{S}\,c\,d^2x = dv^2 - du^2.$$

L'équation (16) devient

$$v'' = \frac{\operatorname{sh}\frac{u+v}{2}}{\operatorname{ch}\frac{u+v}{2}}(v'^2 - v').$$

Notre méthode nous a conduits à l'intégrale $v' + \frac{1}{v'} = \varphi$, où φ est déterminé par le système complètement intégrable (18), où nous remplaçons B et C par leur valeur

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\operatorname{sh}\frac{u+v}{2}}{\operatorname{ch}\frac{u+v}{2}}(\varphi - 2), \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{\operatorname{sh}\frac{u+v}{2}}{\operatorname{ch}\frac{u+v}{2}}(\varphi - 2).$$

On voit que $\varphi - 2$ est une fonction ψ de $w = u + v$, on a

$$\frac{d\psi}{\psi} = \frac{\operatorname{sh}\frac{w}{2}}{\operatorname{ch}\frac{w}{2}}\,dw$$

et par suite

$$\psi = \mathrm{C}\operatorname{ch}^2\frac{u+v}{2}.$$

L'équation du premier ordre qui donne les réseaux est donc

$$(27) \qquad (v' - 1)^2 = \mathrm{C}v'\operatorname{ch}^2\frac{u+v}{2},$$

où C est une constante arbitraire; cette équation donne deux valeurs de v' dont le produit est égal à 1 et, par suite, définit du même coup les deux familles du réseau; pour $\mathrm{C} = 0$ on a un réseau singulier formé par les asymptotiques rectilignes.

L'équation (27) s'intègre en prenant pour nouvelle fonction inconnue w définie par

$$w = u + v;$$

on a, en effet,

$$w' = 1 + v',$$

et l'équation devient

$$(w' - 2)^2 = C(w' - 1)\,\mathrm{ch}^2 \frac{w}{2}$$

et les variables se séparent.

19. Nous allons traiter maintenant le cas où l'on prend, pour l'intégrale l de l'équation.

$$(28)\qquad \frac{\partial^2 l}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 l}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial l}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial l}{\partial u}\right)^2 = 0,$$

une fonction qui ne se réduit pas à une fonction de la seule variable $u + v$ ou à une fonction de la seule variable $u - v$.

L'équation (23), après le changement $E = e^l$, s'écrit

$$(29)\qquad \frac{\partial^2 l}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 l}{\partial v^2} = 2e^{-l}$$

et le changement de variables $u + v = x$, $u - v = y$ ramène les deux équations (28) et (29) à la forme

$$(28')\qquad \frac{\partial^2 l}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial l}{\partial x}\frac{\partial l}{\partial y},$$

$$(29')\qquad \frac{\partial^2 l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 l}{\partial y^2} = e^{-l}.$$

La première nous permet d'écrire

$$e^{-l} = -2(X + Y),$$

où X et Y sont des fonctions respectivement de x seul et de y seul dont nous supposons ici qu'aucune n'est constante. En reportant dans l'équation (29'), on trouve

$$(30)\qquad 2(X + Y)^2 = (X'' + Y'')(X + Y) - (X'^2 + Y'^2).$$

En dérivant les deux membres par rapport à x, puis par rapport à y, on obtient

$$(31)\qquad 12(X + Y)X'Y' = X''Y' + Y''X',$$

et puisque nous avons supposé $X'Y' \neq 0$, cette équation prend la forme

$$\left(12X - \frac{X'''}{X'}\right) + \left(12Y - \frac{Y'''}{Y'}\right) = 0,$$

et cela permet d'écrire, avec des constantes arbitraires successives a, b, c, b_1, c_1,

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{X'''}{X'} - 12X - a = 0 & \dfrac{Y'''}{Y'} - 12Y + a = 0, \\
X''' - 12XX' - aX' = 0, & Y''' - 12YY' + aY' = 0, \\
X'' - 6X^2 - aX - b = 0, & Y'' - 6Y^2 + aY - b_1 = 0, \\
2X'X'' - 12X^2X' - 2aXX' - 2bX' = 0, & 2Y'Y'' - 12Y^2Y' + 2aYY' - 2b_1Y' = 0, \\
X'^2 - 4X^3 - aX^2 - 2bX - c = 0, & Y'^2 - 4Y^3 + aY^2 - 2b_1Y + c_1 = 0.
\end{array}$$

Les valeurs ainsi trouvées pour X'', Y'', X'^2, Y'^2 sont des conséquences de l'équation (31) qui contient parmi ses intégrales toutes celles de (30) mais qui est plus générale que cette dernière. En reportant les valeurs de X'', Y'', X'^2, Y'^2 dans l'équation (30) on constate que l'on doit prendre $b = b_1$, $c = c_1$, de sorte que nous avons

$$X'^2 = 4X^3 + aX^2 + 2bX + c, \qquad Y'^2 = 4Y^3 - aY^2 + 2bY - c.$$

Nous avons par conséquent, pour terminer, à faire les intégrations

$$(32) \qquad x = \int \frac{dX}{\sqrt{4X^3 + aX^2 + 2bX + c}}, \qquad y = \int \frac{dY}{\sqrt{4Y^3 - aY^2 + 2bY - c}}.$$

Celles-ci introduiront deux constantes arbitraires, si bien qu'il apparaît que la solution que nous venons de trouver pour le système (28'), (29') dépend de cinq constantes arbitraires, alors que la solution générale ne doit dépendre que de quatre constantes arbitraires; mais il faut noter que, par suite de l'égalité

$$e^{-l} = -2(X + Y),$$

l ne change pas quand on augmente X et Y respectivement de h et de $-h$, et ceci explique l'apparition d'une constante supplémentaire dans nos calculs.

Les deux constantes introduites par l'intégration de (32) ne correspondent qu'à une translation effectuée sur la surface; d'autre part, comme X et Y peuvent être augmentés respectivement de h et de $-h$, on peut supposer que $\frac{X'''}{X'} - 12X$ et $\frac{Y'''}{Y'} - 12Y$ sont nuls, et ceci annule a.

On voit qu'on introduit ainsi la fonction elliptique $p(x)$ de Weierstrass.

Des deux constantes b et c qui restent, l'une correspond à une homothétie, et l'on voit qu'il ne reste qu'un paramètre de forme pour les fonctions inconnues.

Nous pouvons interpréter cette dernière constante en établissant les trois formes quadratiques fondamentales de la surface

$$S\ dx^2 = \frac{-1}{2(X+Y)}\left(\frac{dX^2}{4X^3+aX^2+2bX+c} + \frac{dy^2}{4Y^3-aY^2+2bY-c}\right),$$

$$S c d^2 x = \frac{dX\,dY}{\sqrt{(4X^3+aX^2+2bX+c)(4Y^3-aY^2+2bY-c)}},$$

$$S\ dc^2 = -2(X+Y)\left(\frac{dX^2}{4X^3+aX^2+2bX+c} + \frac{dY^2}{4Y^3-aY^2+2bY-c}\right).$$

On reconnaît qu'avec ces paramètres asymptotiques X, Y le $d\sigma^2$ de la sphère a pris la forme classique de Liouville, correspondant à un système de coniques sphériques homofocales; l'unique paramètre de forme qui reste est donc l'écartement angulaire des foyers sphériques du faisceau des coniques images des asymptotiques. Il est commode de déterminer d'abord les surfaces minima adjointes des surfaces cherchées; les images sphériques des lignes de courbure des surfaces adjointes coïncident avec les images des asymptotiques des premières, c'est-à-dire avec les coniques sphériques dont nous venons de parler. Les formules d'Olinde Rodrigues nous permettraient donc d'obtenir ces surfaces adjointes et nous passerions ensuite aux surfaces cherchées.

Voyons maintenant ce que devient l'équation $v' + \frac{1}{v'} = \varphi$ qui doit donner les réseaux. On a

$$B = \frac{-1}{E}\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{-1}{E}\left(\frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial y}\right),$$

$$C = \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial u} = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y}\right).$$

Or

$$E = \frac{-1}{2(X+Y)}, \qquad \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{1}{2(X+Y)^2} X' \qquad \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{1}{2(X+Y)^2} Y'.$$

Donc

$$B = \frac{X'-Y'}{X+Y}, \qquad C = -\frac{X'+Y'}{X+Y}.$$

Le système qui donne φ est

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) = \frac{C-B}{2}\varphi + B - C = -\frac{X'}{X+Y}(\varphi - 2),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) = \frac{C+B}{2}\varphi + B + C = -\frac{Y'}{X+Y}(\varphi + 2).$$

On peut écrire

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} = -\frac{\varphi - 2}{X+Y}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial Y} = \frac{-(\varphi+2)}{X+Y}.$$

On trouve sans difficulté $\varphi = \dfrac{2(X - Y + 2h)}{X+Y}$, où h est une constante arbitraire. Il reste donc à intégrer

$$v' + \frac{1}{v'} = \frac{2(X - Y + 2h)}{X+Y}.$$

Or

$$v' = \frac{dv}{du} = \frac{dx - dy}{dx + dy},$$

donc

$$v' + \frac{1}{v'} = \frac{2(dx^2 + dy^2)}{dx^2 - dy^2} = \frac{2(1 + y'^2)}{1 - y'^2}.$$

On a donc à intégrer

$$\frac{1 + y'^2}{1 - y'^2} = \frac{X - Y + 2h}{X+Y}$$

ou

$$\frac{1 + y'^2}{X - Y + 2h} = \frac{1 - y'^2}{X+Y} = \frac{y'^2}{h - Y} = \frac{1}{h + X}.$$

Ainsi les variables se séparent et l'on a

$$\frac{dy}{\sqrt{h - Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X + h}}$$

ou

$$\frac{dY}{\sqrt{(h-Y)(4Y^3-aY^2+2bY-c)}} = \frac{dX}{\sqrt{(h+X)(4X^3+aX^2+2bX+c)}}.$$

On peut remarquer que toutes les courbes d'un même réseau caractérisé par une valeur de la constante h enveloppent la courbe d'équation $X+h=0$, de même que la courbe d'équation $Y-h=0$.

20. Deuxième problème. — Nous allons maintenant examiner si, une congruence C quelconque étant donnée, on peut l'obtenir comme congruence des premiers axes d'un réseau à déterminer sur une surface à déterminer.

La congruence étant définie par les équations

$$x = uz + h(u, v), \qquad y = vz + k(u, v),$$

nous pouvons reprendre les calçuls faits dans les paragraphes **12** et **13**, mais en considérant z comme une fonction inconnue de u et de v. Nous aurions ainsi à rechercher une fonction $\Phi(u, v)$ satisfaisant aux deux équations (7)

$$(7) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial u} = \lambda\Phi^2 + 2\mu\Phi + \nu, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial v} = \lambda_1\Phi^2 + 2\mu_1\Phi + \nu_1.$$

Cette fonction doit satisfaire à la condition d'intégrabilité

$$(8) \qquad H\Phi^2 + 2K\Phi + L = 0$$

et, par suite, elle devra satisfaire aux trois équations algébriques simultanées

$$(9) \qquad \left\{\begin{array}{l} H\Phi^2 + 2K\Phi + L = 0, \\ 2(H\Phi + K)(\lambda\Phi^2 + 2\mu\Phi + \nu) + \dfrac{\partial H}{\partial u}\Phi^2 + 2\dfrac{\partial K}{\partial u}\Phi + \dfrac{\partial L}{\partial u} = 0, \\ 2(H\Phi + K)(\lambda_1\Phi^2 + 2\mu_1\Phi + \nu_1) + \dfrac{\partial H}{\partial v}\Phi^2 + 2\dfrac{\partial K}{\partial v}\Phi + \dfrac{\partial L}{\partial v} = 0, \end{array}\right.$$

ce qui exige que soient satisfaites deux conditions nécessaires et suffisantes obtenues à partir de ce système par des éliminations algébriques. Or, les quantités E, F, G font intervenir les dérivées premières de z; δ, δ', δ'' font intervenir les dérivées secondes de z et λ, μ, ν les dérivées troisièmes, et H, K, L les dérivées d'ordre 4. Finalement, le système (9) met en jeu les dérivées d'ordre 5, de sorte que nous trouvons, pour déterminer z, deux équations aux dérivées partielles simultanées d'ordre 5.

On pourrait croire, d'après cela, que le problème n'est possible que sous certaines conditions que devrait vérifier la congruence C, mais il n'en est rien, Si nous nous reportons aux deux équations (5) et (6)

$$\frac{\partial F}{\partial u} + (\alpha F + \beta)\frac{\partial F}{\partial v} + A_1 F^3 + B_1 F^2 + C_1 F + D_1 = 0, \tag{5}$$

$$F\frac{\partial F}{\partial u} + (\alpha + \beta F)\frac{\partial F}{\partial v} - A_1 - B_1 F - C_1 F^2 - D_1 F^3 = 0, \tag{6}$$

qui déterminent les deux fonctions inconnues F et z, on constate que F y figure au premier ordre différentiel, z au troisième ordre et par suite, la solution générale de ce système dépend de quatre fonctions arbitraires d'un argument. La fonction z dépend elle-même de quatre fonctions arbitraires, car, une fois z obtenu, la fonction F se trouve déterminée par l'intermédiaire de Φ, sans aucune arbitraire, par la solution commune aux équations (9).

Donc *toute congruence rectiligne est une congruence de premiers axes et la surface* (S) *qu'on peut lui associer à ce point de vue dépend de quatre fonctions arbitraires d'un argument.*

Considérons d'ailleurs la figure formée par les éléments suivants : une surface S, un réseau conjugué R tracé sur cette surface, et la congruence C des premiers axes de ce réseau. On peut constituer une telle figure en prenant les éléments dans des ordres différents. Si nous commençons par prendre la surface S, nous choisissons la fonction $z(x, y)$ de deux variables définissant cette surface, puis nous pouvons définir la première famille des courbes du réseau R par l'équation générale de la projection sur le plan xOy de ces courbes, de la forme $\varphi(x, y) = C$, où nous avons pu choisir la fonction φ de façon arbitraire. Dès lors, la seconde famille des courbes du réseau se trouve déterminée sans ambiguïté et, par suite, la congruence C en résulte. Ainsi, en procédant dans cet ordre, nous avons à préciser deux fonctions arbitraires de deux arguments, et cela suffit.

Or le problème que nous abordons consiste, en somme, à constituer la figure en partant de la congruence C. Dès le début, pour la définition de cette congruence, nous fixons deux fonctions arbitraires de deux variables; nous donnant, par exemple, la congruence par les équations

$$x = uz + h(u, v), \qquad y = vz + k(u, v);$$

les fonctions $h(u, v)$, $k(u, v)$ sont ces fonctions arbitraires. Comme l'obtention de S et de R se traduit ensuite par des équations aux dérivées partielles relatives à la fonction $z(u, v)$ prise comme inconnue, le problème ne peut qu'amener des restrictions sur les fonctions h et k; si ces restrictions se présentaient, cela signifierait que C doit satisfaire à certaines conditions, les fonctions h et k ne seraient plus arbitraires; on ne pourrait, par la suite, ajouter que des fonctions d'un argument ou des constantes; il y aurait contradiction avec la conclusion obtenue en partant de S.

Nous avons dit qu'à la congruence C arbitraire, on peut associer une surface S dépendant de quatre fonctions d'une variable; il n'y a pas ici de contradiction avec la conclusion obtenue en partant de S, car dans un pareil dénombrement, seules comptent les fonctions arbitraires portant sur le plus grand nombre de variables. De telles différences se présentent souvent quand on cherche le degré d'indétermination d'une figure et qu'on bâtit cette figure en prenant les éléments dans des ordres différents.

Remarquons enfin que nous pouvons toujours donner une solution dépendant de trois fonctions arbitraires d'un argument : la solution constituée par une surface réglée quelconque. En effet, nous avons vu précédemment que le système des génératrices d'une surface réglée peut être considéré comme un réseau conjugué de courbes admettant une congruence C quelconque comme congruence des premiers axes.

21. Cas des congruences linéaires. — Nous allons traiter le problème plus complètement dans le cas où la congruence C est linéaire. Nous trouvons immédiatement une famille de surfaces S qui répondent à la question : ce sont les surfaces qui admettent un réseau doublement de Kœnigs par rapport aux directrices D, D'. Ces surfaces dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument; nous les retrouverons aisément en reprenant la méthode générale.

Prenons l'une des directrices pour axe Oz, l'autre pour droite à l'infini du plan xOy; le rayon général de cette congruence sera donné avec deux paramètres indépendants u, v par les équations

$$y = ux, \qquad z = v.$$

Nous prenons sur ce rayon le point d'abscisse $x = \rho(u, v)$, où ρ est une fonction inconnue de u et v. La surface S engendrée par ce point est donc représentée paramétriquement par

$$x = \rho(u, v), \qquad y = u\rho(u, v), \qquad z = v.$$

Les coefficients ξ, η, ζ de l'équation du plan tangent sont

$$\xi = u\frac{\partial\rho}{\partial u} + \rho, \qquad \eta = -\frac{\partial\rho}{\partial u}, \qquad \zeta = -\rho\frac{\partial\rho}{\partial v}.$$

Les coefficients D, D′, D″ de Gauss sont

$$D = \rho\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} - 2\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)^2, \qquad D' = \rho\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial v}, \qquad D'' = \rho\frac{\partial^2\rho}{\partial v^2}$$

et l'équation des asymptotiques est

$$\left[\rho\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} - 2\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)^2\right]du^2 + 2\left(\rho\frac{\partial^2\rho}{du\,dv} - \frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial v}\right)du\,dv + \rho\frac{\partial^2\rho}{\partial v^2}dv^2 = 0. \tag{33}$$

Nous voyons en passant que le réseau (u, v) est conjugué et, par suite, doublement de Kœnigs si

$$\rho\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial v} = 0.$$

ce qui entraîne que ρ est de la forme UV, où U ne dépend que de u et ne dépend que de v. Le plan osculateur d'une courbe de S, obtenue en prenant pour v une certaine fonction de u, a ses coefficients obtenus par la matrice

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\rho}{\partial u} + \frac{\partial\rho}{\partial v}v' & u\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + \frac{\partial\rho}{\partial v}v'\right) + \rho & v' \\ \frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,dv}v' + \frac{\partial^2\rho}{\partial v^2}v'^2 + \frac{\partial\rho}{\partial v}v'' & u\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,dv}v' + \frac{\partial^2\rho}{\partial v^2}v'^2 + \frac{\partial\rho}{\partial v}v''\right) + 2\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + \frac{\partial\rho}{\partial v}v'\right) & v'' \end{vmatrix}$$

L'équation fondamentale, exprimant que le plan osculateur contient le rayon de C qui passe par le point considéré, est obtenue en bordant cette matrice en bas par les paramètres directeurs de ce rayon : $1, u, 0$ et en égalant à zéro le déterminant obtenu; en retranchant de la deuxième colonne le produit par u de la première, la dernière ligne se réduit à $1, 0, 0$, de sorte que cette équation prend la forme simple

$$\frac{v''}{v'} = \frac{2}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + \frac{\partial\rho}{\partial v}v'\right). \tag{34}$$

Nous vérifions que cette équation est de la forme générale (1) où A et D sont nuls. Ceci correspond au fait que les courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ constituent des solutions particulières, puisque ce sont des courbes planes dont le plan contient le rayon de C issu de chacun de ses points.

Nous devons maintenant chercher deux familles de courbes satisfaisant à la condition (34) et qui soient, de plus, conjuguées. Or une famille de courbes peut être définie par une fonction $f(u, v)$ en écrivant

$$v' = f(u, v).$$

Pour que ces courbes soient intégrales de (34), il faut et il suffit que f soit intégrale de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial u} + f\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{2f}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + \frac{\partial\rho}{\partial v}f\right). \tag{35}$$

Le problème revient donc à chercher trois fonctions f, f_1, ρ des variables indépendantes u, v telles que l'on ait

$$\text{(E)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial u} + f\,\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{2f}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + f\,\frac{\partial\rho}{\partial v}\right),\\ &\frac{\partial f_1}{\partial u} + f_1\,\frac{\partial f_1}{\partial v} = \frac{2f_1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + f_1\frac{\partial\rho}{\partial v}\right),\\ &\rho\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} - 2\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)^2 + (f+f_1)\left(\rho\,\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial\rho}{\partial u}\,\frac{\partial\rho}{\partial v}\right) + ff_1\rho\,\frac{\partial^2\rho}{\partial v^2} = 0, \end{aligned}\right.$$

la dernière équation exprimant que les deux familles de courbes definies par f et f_1 sont conjuguées. Ce système (E) de trois équations aux trois fonctions inconnues f, f_1, ρ est résolu en $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f_1}{\partial u}$, $\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2}$ et nous pouvons donc conclure que sa solution dépend de quatre fonctions arbitraires d'un argument.

Ce système (E) une fois intégré, supposons que nous nous déplaçions sur une courbe définie par $v' = f(u, v)$, nous en déduisons

$$\frac{v''}{v'} = \frac{2}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\partial \rho}{\partial v} v'\right)$$

et, en intégrant $v' = K\rho^2$ où K *est une constante sur la courbe suivie.*

Faisons alors le changement de fonctions inconnues

$$f = K\rho^2, \qquad f_1 = K_1\rho^2,$$

où K et K_1 sont deux fonctions inconnues qui se substituent à f et f_1; on a alors pour l'équation (35)

$$\left(\frac{\partial K}{\partial u} + \frac{\partial K}{\partial v} K\rho^2\right)\rho^2 + 2K\rho\left(\frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\partial \rho}{\partial v} K\rho^2\right) = 2K\rho\left(\frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\partial \rho}{\partial v} K\rho^2\right),$$

soit, après simplification,

$$\frac{\partial K}{\partial u} + \frac{\partial K}{\partial v} K\rho^2 = 0,$$

de sorte que le système (E) devient

$$(\mathrm{E}_1)\quad \begin{cases} \rho\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} - 2\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2 + (K + K_1)\rho^2\left(\rho\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} - \dfrac{\partial \rho}{\partial u}\dfrac{\partial \rho}{\partial v}\right) + KK_1\rho^5\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} = 0, \\ \dfrac{1}{K}\dfrac{\partial K}{\partial u} + \dfrac{\partial K}{\partial v}\rho^2 = 0, \\ \dfrac{1}{K_1}\dfrac{\partial K_1}{\partial u} + \dfrac{\partial K_1}{\partial v}\rho^2 = 0. \end{cases}$$

Ce système est encore de la forme de Cauchy.

On aperçoit immédiatement une solution spéciale : K *et* K_1 *constants.* On prend pour K et K_1 des valeurs distinctes pour éviter que les deux familles de courbes correspondantes soient confondues sur S; la surface S doit alors satisfaire à cette condition : que la fonction ρ par laquelle elle est définie soit intégrale de

$$(36)\quad \rho\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} - 2\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2 + (K + K_1)\rho^2\left(\rho\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, du} - \frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial \rho}{\partial v}\right) + KK_1\rho^5\frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} = 0,$$

où les constantes distinctes K et K_1 ont été choisies arbitrairement.

Nous obtenons ainsi des surfaces S très spéciales, solutions du problème, dépendant seulement de *deux fonctions d'un argument.* On peut, au lieu de K et K_1, introduire les deux constantes λ et μ telles que $2\lambda = K + K_1$, $\mu = KK_1$, en supposant $\lambda^2 - \mu \neq 0$, et l'équation (36) prend la forme

$$\rho \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} - 2\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2 + 2\lambda\rho^2\left(\rho\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial \rho}{\partial v}\right) + \mu\rho^3\frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} = 0,$$

ou encore

$$\nu\left[\rho \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} - 2\left(\frac{\partial \rho}{\partial u}\right)^2\right] + 2\lambda\rho^2\left(\rho\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial \rho}{\partial u}\frac{\partial \rho}{\partial v}\right) + \mu\rho^3\frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} = 0,$$

où λ, μ, ν sont des constantes homogènes arbitraires. Nous reconnaissons ainsi que les surfaces à réseau doublement de Kœnigs figurent parmi celles que nous avons déterminées puisque nous les obtenons pour $\mu = \nu = 0$.

Nous pouvons obtenir d'autres solutions avec K_1 *constant*, K *variable* : la troisième équation du système (E_1) disparaît; la solution du système constitué par les deux premières équations dépend de *trois fonctions arbitraires d'une variable*; on éliminerait d'ailleurs aisément K et l'on obtiendrait ainsi une équation aux dérivées partielles du troisième ordre pour ρ.

La solution générale du système (E_1) sera obtenue en considérant K *et* K_1 comme *variables*; au lieu de conserver l'unique inconnue ρ (qui vérifierait encore un système de deux équations simultanées d'ordre 5), il est préférable d'éliminer ρ et K_1; en effet la seconde équation (E_1) permet d'exprimer ρ en fonction de K; remplaçant dans la première ρ par cette valeur, on a une équation du premier degré en K_1, d'où nous tirons K_1 en fonction de K et de ses dérivées d'ordre 3; portant ces valeurs de ρ et K_1 dans la dernière équation (E_1), nous avons une équation unique, nécessaire et suffisante, d'ordre 4 en K. Les calculs sont aisés, quoique un peu longs; ils ne contiennent de radical qu'en apparence, mais, comme ils n'apprennent rien de nouveau, nous ne les indiquons pas; la grosse simplification consiste à avoir remplacé un système de deux équations simultanées, compatibles, d'ordre 5, par une seule équation d'ordre 4, en profitant de ce que l'équation

$$v'' + A v'^3 + B v'^2 + C v' + D = 0$$

qui était à l'origine du problème, admet ici une intégrale première. L'équation d'ordre 3 correspondant au cas où K_1 reste constant se trouve avoir été écrite au cours de ce calcul, dès que ρ a été remplacé dans la première équation (E_1) par son expression en K.

22. Nous pouvons donner quelques précisions sur les surfaces auxquelles nous venons d'aboutir. Considérons une courbe gauche telle que son plan osculateur en tout point $M(x, y, z)$ contienne le rayon de C issu de ce point. Comme les paramètres directeurs de ce rayon sont $x, y, 0$, on a la relation

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0.$$

Si z' est nul, la courbe est dans un plan horizontal; si l'on écarte ce cas, on peut prendre z comme variable indépendante, de sorte que l'on a $z' = 1$, $z'' = 0$ et la relation précédente devient $xy'' - yx'' = 0$, ce qui donne

$$x\,dy - y\,dx = h\,dz, \tag{37}$$

où h est une constante; on voit par là que la courbe appartient au complexe linéaire $n = hc$ par rapport auquel les deux directrices de la congruence sont conjuguées. Réciproquement le plan osculateur en tout point d'une courbe d'un tel complexe linéaire contient le rayon de C issu de ce point.

On sait comment on peut obtenir toutes les courbes d'un complexe linéaire. On peut, suivant la méthode employée par M. Vessiot, dans son traité de Géométrie supérieure, écrire l'équation (37) sous la forme

$$x^2 d\left(\frac{y}{x}\right) = h\,dz,$$

écrire ensuite $z = F(u)$, où F est une fonction arbitraire de la variable $u = \frac{y}{x}$; on en déduit

$$x^2 = hF'(u)$$

et l'on peut, à partir de là, obtenir les expressions de x, y, z en fonction de u.

Cette méthode a l'inconvénient d'introduire un radical; pour éviter cela, on pourra regarder z et u comme les coordonnées du point caractéristique d'une droite du plan (z, u), dont l'équation, dépendant du paramètre x, est

$$z - \frac{x^2}{h} u = \Phi(x).$$

de sorte qne l'on aura

$$\frac{dz}{du} = \frac{x^2}{h}.$$

Les coordonnées du point caractéristique sont

$$u = \frac{-h\Phi'}{2x}, \qquad z = \Phi - \frac{x}{2}\Phi', \qquad \text{d'où} \quad y = \frac{-h}{2}\Phi'$$

et ainsi y et z sont donnés explicitement en fonction de x.

Les calculs précédents montrent qu'une courbe définie par $v' = K\rho^2$ appartient au complexe linéaire $c = Kn$.

Par conséquent, sur la surface la plus générale obtenue par intégration de (E_1), les courbes constituant le réseau qui admet C pour congruence des premiers axes appartiennent à des complexes linéaires par rapport auxquels les directrices de C sont conjuguées.

Sur les surfaces dépendant de trois fonctions d'un argument, obtenues par l'intégration de (E_1) où nous avons donné à K_1 une valeur constante, le réseau qui admet C pour congruence des premiers axes est formé, pour une famille, de courbes appartenant toutes au même complexe linéaire $c = K_1 n$ et, pour l'autre famille, de courbes appartenant à des complexes linéaires différents.

Enfin, sur les surfaces spéciales obtenues à partir de l'équation (36) où K et K_1 sont des constantes, le réseau conjugué qui admet C pour congruence des premiers axes est formé par une famille de courbes appartenant au complexe linéaire $c = Kn$ et une famille de courbes appartenant au complexe $c = K_1 n$.

Reportons-nous à l'équation de Monge-Ampère (36) qui correspond à ce cas; en cherchant les caractéristiques, nous trouvons pour l'une des équations $v' = K\rho^2$. Remplaçons les notations u, v, ρ par les notations plus usuelles x, y, z, de sorte que l'équation devient

$$rz - 2p^2 + (K + K_1) z^2 (zs - pq) + KK_1 z^5 t = 0.$$

Les équations des caractéristiques sont, pour un premier système,

$$(38) \qquad \begin{cases} dy - Kz^2\,dx = 0, \qquad dz = p\,dx + q\,dy, \\ z\,dp + K_1 z^3\,dq - p\,dx[2p + q(K + K_1)z^2] = 0. \end{cases}$$

Le second système se déduit du précédent par l'échange de K et K_1. Pour intégrer le système (38) on peut prendre pour y une fonction arbitraire de x, z^2 se calcule alors sans quadrature $z^2 = \frac{dy}{K\,dx}$ et les deux dernières équations, dont la première $\frac{dz}{dx} = p + q\frac{dy}{dx}$ est en termes finis, donnent p et q par une équation différentielle.

Pour pouvoir faire les calculs plus aisément, nous pouvons regarder, comme plus haut, x et y comme coordonnées d'un point d'une courbe plane enveloppe de la droite au paramètre z

$$y - Kz^2 x + F(z) = 0,$$

où F est une fonction arbitraire de z ; on a ainsi

$$x = \frac{F'(z)}{2Kz}, \qquad y = \frac{zF'(z)}{2} - F(z).$$

On a ensuite

$$1 = p\frac{dx}{dz} + q\frac{dy}{dz},$$

d'où

$$p = -Kqz^2 + \frac{2Kz^2}{zF'' - F'},$$

et il reste, puisque x, y, p ont été explicités en z, une équation différentielle entre q et z qui devient, toutes réductions faites, et en supposant $K \neq K_1$,

$$(39) \qquad z\frac{dq}{dz} + \frac{q^2}{2}(zF'' - F') - q - \frac{2Kz^2F'''}{(K_1 - K)(zF'' - F')^2} = 0.$$

C'est une équation de Riccati entre q et z et le problème de l'intégration de l'équation (36) se trouve ramené à celui de l'intégration de cette équation (39).

23. On remarque que si $K_1 = K$ les deux systèmes de caractéristiques sont confondus; l'équation (39) se réduit alors à $F'''' = 0$ et ceci nous conduit à supposer que, dans ce cas, l'équation

$$(40) \qquad \rho\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} - 2\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)^2 + 2K\rho^2\left(\rho\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial v}\right) + K^2\rho^3\frac{\partial^2\rho}{\partial v^2} = 0$$

peut être intégrée explicitement. En effet, si K et K_1 viennent se confondre, les deux familles de courbes conjuguées qui étaient définies par

$$v' = K\rho^2 \qquad \text{et} \qquad v' = K_1\rho^2$$

donnent une famille d'asymptotiques et l'on reconnaît donc que l'équation (40) exprime que la surface

$$x = \rho(u, v), \qquad y = u\rho(u, v), \qquad z = v$$

possède une famille d'asymptotiques, définie par $\dfrac{dv}{du} = K\rho^2(u, v)$ appartenant au complexe linéaire $c = Kn$.

Considérons une ligne de cette famille et supposons d'abord qu'elle ne soit pas rectiligne : le plan osculateur est le plan polaire du point de contact par rapport au complexe, donc la surface serait tangente en chacun de ses points au plan polaire de ce point et l'on sait que ceci est impossible.

Par conséquent, les asymptotiques définies par $v' = K\rho^2$ sont *rectilignes et ce sont des droites du complexe linéaire* $c = Kn$. Pour obtenir ces surfaces explicitement sans intégration d'équation différentielle, ni quadrature, il suffit d'utiliser la propriété qu'Émile Picard a signalée : une telle surface possède deux asymptotiques curvilignes qui appartiennent au complexe. Nous inspirant de cette remarque, déterminons deux courbes du complexe, Γ et Γ', toutes deux arbitraires; nous avons montré plus haut comment on obtient explicitement une courbe du complexe et l'on voit que notre opération engage deux fonctions arbitraires d'une variable : une pour chaque courbe. Cela posé, soit M un point de la première courbe Γ, son plan polaire coupe Γ' en un ou plusieurs points dont nous désignerons l'un par M'. M se déplaçant d'un mouvement continu sur Γ, nous lui associerons sur Γ' le point qui se déduit par continuité de la position initiale de M'; la droite MM' est une droite du complexe qui engendre la surface cherchée dont les deux asymptotiques particulières de Picard sont ainsi mises en évidence.

On peut, d'ailleurs, à titre de vérification, voir directement que si ρ satisfait à l'équation (40), les courbes définies par $v' = K\rho^2$ sont rectilignes. En effet, prenons une surface $x = \rho(u, v)$, $y = u\rho(u, v)$, $z = v$, où ρ est, pour le moment, quelconque et cherchons le plan osculateur d'une courbe tracée sur cette surface et satisfaisant à l'équation différentielle $\frac{dv}{du} = K\rho^2$. Les coefficients de l'équation du plan osculateur s'obtiennent en considérant x, y et z comme fonctions de u et en prenant les mineurs du tableau

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} x' & ux' + x & v' \\ x'' & ux'' + 2x' & v'' \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire

$$u(x'v'' - x''v') + v''x - 2x'v', \quad v'x'' - x'v'', \quad 2x'^2 - xx''$$

mais on a

$$x = \rho(u, v) \qquad \text{et} \qquad v' = K\rho^2 = Kx^2,$$

donc

$$v'' = 2Kxx' \qquad \text{et} \qquad v'x'' - x'v'' = Kx^2x'' - 2Kxx'^2 = -Kx(2x'^2 - xx'').$$

On trouve ainsi que ces coefficients sont les produits par $2x'^2 - xx''$ de Kxu, $-Kx$, 1 ou encore Ky, $-Kx$, 1. Donc si $2x'^2 - xx''$ n'est pas nul, on peut prendre ces coefficients égaux à Ky, $-Kx$, 1 et l'on reconnaît que le plan osculateur est le plan polaire du point (x, y, z) par rapport au complexe $c = Kn$; nous vérifions ainsi la signification de l'équation $v' = K\rho^2$. Mais si $2x'^2 - xx'' = 0$, le plan osculateur est indéterminé, la courbe se réduit à une génératrice rectiligne; on vérifie que, avec $v' = K\rho^2$, on a

$$x' = \frac{\partial\rho}{\partial u} + \frac{\partial\rho}{\partial v}K\rho^2,$$

$$x'' = \frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v}K\rho^2 + \frac{\partial^2\rho}{\partial v^2}K^2\rho^4 + 2K\rho\frac{\partial\rho}{\partial v}\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + \frac{\partial\rho}{\partial v}K\rho^2\right)$$

et l'expression $xx'' - 2x'^2$ se réduit au premier membre de l'équation (33).

Si nous imaginons que $\rho(u, v)$ soit une fonction variable qui tend à vérifier l'équation $2x'^2 - xx'' = 0$, le plan osculateur indéterminé peut être considéré à la limite, comme encore confondu avec le plan polaire du point (x, y, z) par rapport au complexe. La génératrice est donc l'intersection de ce plan, de coefficients Ky, $-Kx$, 1 et du plan tangent de coefficients

$$u\frac{\partial\rho}{\partial u} + \rho, \quad -\frac{\partial\rho}{\partial u}, \quad -\rho\frac{\partial\rho}{\partial v},$$

et l'on trouve pour paramètres directeurs

$$\frac{\partial\rho}{\partial u} + K\rho^2\frac{\partial\rho}{\partial v}, \quad \rho + u\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + K\rho^2\frac{\partial\rho}{\partial v}\right), \quad K\rho^2$$

dont on vérifie immédiatement qu'ils se confondent avec $\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dz}{du}$ en supposant $v' = K\rho^2$.

24. Il y a un fait qui apparaît maintenant clairement. Supposons que ρ soit solution commune des équations

$$(41) \qquad \rho\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} - 2\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)^2 + h\rho^5\frac{\partial^2\rho}{\partial v^2} = 0, \qquad \rho\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial v} = 0.$$

Dans ces conditions, on pourra dire que ρ satisfait à l'équation (36), où K et K_1 sont deux constantes liées par la seule relation $KK_1 = h$ puisque le terme en $K + K_1$ a disparu. Nous allons montrer plus loin que ces équations (41) sont compatibles, donc qu'il existe des surfaces solutions. Les résultats obtenus dans les paragraphes précédents montrent que ces surfaces admettent ∞^1 réseaux conjugués correspondant chacun à une valeur de la constante K; quand on a fixé K une première famille du réseau déterminée par $v' = K\rho^2$, est formée de courbes du complexe linéaire $c = Kn$ et la famille conjuguée, déterminée par $v' = \frac{h}{K}\rho^2$, est formée de courbes du complexe $c = \frac{h}{K}n$; de plus, en prenant $K = +\sqrt{h}$, l'équation $v' = \sqrt{h}\rho^2(u, v)$ donne ∞^1 génératrices; de même, pour $K = -\sqrt{h}$, $v' = -\sqrt{h}\rho^2$ donne ∞^1 génératrices, de sorte que la surface est une quadrique par rapport à laquelle les directrices de la congruence linéaire sont conjuguées.

Développons les calculs; la seconde équation (41) entraîne que ρ est de la forme UV; alors la première devient

$$\frac{UU''-2U'^2}{U^6}+hV^3V''=0. \tag{42}$$

On a une première solution

$$UU''-2U'^2=0, \qquad V''=0$$

qui donne

$$U=\frac{1}{A(u-u_0)}, \qquad V=A_1(v-v_0),$$

où A, A_1, u_0, v_0 sont des constantes; on a alors un plan

$$A(y-u_0x)=A_1(z-z_0),$$

solution sans intérêt.

On a les autres solutions en prenant avec une constante que nous supposerons positive, A^2,

$$UU''-2U'^2=A^2U^6, \qquad hV^3V''=-A^2.$$

Comme on a le droit de remplacer $\rho=UV$ par $\rho=(\lambda U)\left(\frac{V}{\lambda}\right)$, où λ est quelconque, on peut réduire la constante A à l'unité. La première équation, en posant $U'^2=p$, donne

$$U\frac{dp}{2dU}-2p=U^6,$$

d'où, par un calcul simple,

$$p=U'^2=U^6+BU^4,$$

où B est une nouvelle constante arbitraire. Prenons $B=-U_0^2$, où U_0 est une constante arbitraire. Nous avons

$$U'^2=U^6\left(1-\frac{U_0^2}{U^2}\right);$$

prenons pour nouvelle inconnue $t=1-\frac{U_0^2}{U^2}$. On a

$$t'=\frac{2U_0^2U'}{U^3},$$

de sorte que l'équation devient

$$\frac{t'^2}{4U_0^4} = t$$

qui s'intègre immédiatement

$$\frac{dt}{2\sqrt{t}} = U_0^2\,du, \qquad \sqrt{t} = \sqrt{1-\frac{U_0^2}{U^2}} = U_0^2(u-u_0),$$

où u_0 est une nouvelle constante.

Finalement

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{1-U_0^4(u-u_0)^2}}.$$

Ensuite, on a

$$V'' = -\frac{1}{hV^3}, \qquad \text{d'où} \quad 2V'V'' = \frac{-2V'}{hV^3},$$

donc $V'^2 = \frac{1}{hV^2} + B_1$, où B_1 est une constante.

$$V^2V'^2 = \frac{1}{h} + B_1V^2.$$

En posant $V^2 = w$, on a

$$w'^2 = \frac{4}{h} + 4B_1w.$$

Si $B_1 = 0$, on a

$$w' = \frac{2}{\sqrt{h}}, \qquad w = \frac{2}{\sqrt{h}}(v-v_0) = V^2.$$

Donc

$$V = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{h}}(v-v_0)}.$$

Finalement

$$x = \frac{U_0\sqrt{\frac{2}{\sqrt{h}}(v-v_0)}}{\sqrt{1-U_0^4(u-u_0)^2}}, \qquad y = \frac{uU_0\sqrt{\frac{2}{\sqrt{h}}(v-v_0)}}{\sqrt{1-U_0^4(u-u_0)^2}}, \qquad z = v.$$

L'équation de la surface s'obtient immédiatement puisque $v = z$, $u = \frac{y}{x}$. On trouve

$$x^2 - U_0^4(y-u_0x)^2 = \frac{2U_0^2}{\sqrt{h}}(z-z_0).$$

C'est un paraboloïde d'axe Oz; on fait disparaître le radical $\sqrt{h}$ en posant

$$U_0^2 = \sqrt{h}\lambda,$$

où λ est une constante et l'on a ainsi

$$x^2 - h\lambda^2(y - u_0 x)^2 = 2\lambda(z - z_0).$$

Si B_1 *n'est pas nul,* on a

$$w'^2 = \frac{4}{h} + 4B_1 w.$$

En dérivant, on a

$$w'' = 2B_1 \qquad \text{d'où} \qquad w' = 2B_1(v - v_0)$$

et w peut alors être tiré de l'équation

$$w'^2 = \frac{4}{h} + 4B_1 w, \qquad w = \frac{w'^2}{4B_1} - \frac{1}{hB_1} = B_1(v - v_0)^2 - \frac{1}{hB_1}.$$

On a donc

$$x = \frac{U_0\sqrt{B_1(v - v_0)^2 - \dfrac{1}{hB_1}}}{\sqrt{1 - U_0^4(u - u_0)^2}},$$

et l'on en tire l'équation de la surface

$$x^2 - U_0^4(y - u_0 x)^2 = B_1 U_0^2(z - z_0)^2 - \frac{U_0^2}{hB_1}.$$

C'est une quadrique d'axe Oz.

Nous avons retrouvé les résultats prévus *a priori* : les quadriques obtenues sont telles que les deux directrices de la congruence soient conjuguées par rapport à elles.

Il reste à déterminer les courbes du réseau conjugué; nous avons à intégrer

$$v' = K\rho^2 \qquad \text{et} \qquad v' = \frac{h}{K}\rho^2;$$

il suffit manifestement d'intégrer l'une de ces équations. Comme $\rho = UV$, les variables se séparent et l'on a

$$\frac{dv}{V^2} = KU^2 du.$$

Pour le paraboloïde, on a

$$\frac{\sqrt{h}\,dv}{2(v-v_0)} = \frac{\mathrm{KU}_0^2\,du}{1-\mathrm{U}_0^4(u-u_0)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{v-v_0} = \frac{2\mathrm{K}\lambda\,du}{1-h\lambda^2(u-u_0)^2}.$$

Posons $\sqrt{h}\lambda(u-u_0) = u_1$; on a donc

$$\frac{dv}{v-v_0} = \frac{2\frac{\mathrm{K}}{\sqrt{h}}du_1}{1-u_1^2} = \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{h}}\left(\frac{du_1}{1-u_1}+\frac{du_1}{1+u_1}\right),$$

d'où

$$v-v_0 = \mathrm{C}\left(\frac{1+u_1}{1-u_1}\right)^{\frac{\mathrm{K}}{\sqrt{h}}},$$

où C est une constante arbitraire; pour $\mathrm{K} = \pm\sqrt{h}$, on trouve les génératrices de l'un ou l'autre système.

Remarquons ici que la différence entre les paraboloïdes et les quadriques à centre ne tient qu'au procédé métrique qui a été employé. Les mêmes circonstances d'intégration se produisent pour les quadriques à centre ; on a alors

$$\frac{dv}{(v-v_0)^2-\frac{1}{h\mathrm{B}_1^2}} = \frac{\mathrm{B}_1\mathrm{KU}_0^2\,du}{1-\mathrm{U}_0^4(u-u_0)^2},$$

ou

$$\frac{dv}{v-v_0-\frac{1}{\sqrt{h}\mathrm{B}_1}} - \frac{dv}{v-v_0+\frac{1}{\sqrt{h}\mathrm{B}_1}} = \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{h}}\left(\frac{du_1}{1-u_1}+\frac{du_1}{1+u_1}\right),$$

soit, enfin

$$\frac{v-v_0-\frac{1}{\sqrt{h}\mathrm{B}_1}}{v-v_0+\frac{1}{\sqrt{h}\mathrm{B}_1}} = \mathrm{C}\left(\frac{1+u_1}{1-u_1}\right)^{\frac{\mathrm{K}}{\sqrt{h}}}.$$

23. Retour a l'étude d'un couple de surfaces ayant même congruence des premiers axes relativement au réseau conjugué commun. — Nous avons vu qu'une congruence C étant donnée, on peut toujours lui associer une infinité de surfaces l'admettant pour congruence des premiers axes d'un réseau conjugué. Considérons alors deux de ces surfaces S_1 et S_2. La congruence C établit entre elles une correspondance ponctuelle; il existe sur S_1 un réseau conjugué R_1 qui correspond à un réseau conjugué R_2 sur S_2, et il n'en existe qu'un, sauf si les asymptotiques des deux surfaces se correspondent. On peut chercher s'il se peut que le réseau R_1 de S_1 et le réseau R_2 de S_2 soient précisément les réseaux qui admettent C comme congruence des premiers axes, et nous retrouvons là le problème qui a été envisagé à la fin de la première partie. Nous avons conclu, à ce moment, que le problème admet une solution dépendant *géométriquement* de dix fonctions arbitraires d'un argument. Nous pouvons retrouver rapidement ce résultat. Appelons en effet x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 les coordonnées de M_1 et M_2 et u, v les paramètres des courbes du réseau conjugué commun. Nous avons les équations

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial u\, \partial v} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial u\, \partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} & x_2 - x_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} & x_2 - x_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial u^2} & x_2 - x_1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial v^2} & x_2 - x_1 \end{vmatrix} = 0.$$

La première ligne exprime que les courbes u, v sont conjuguées sur S_1 et S_2; la seconde exprime que M_1M_2 est premier axe du réseau R_1, la troisième que M_1M_2 est premier axe du réseau R_2.

Nous avons ainsi *six* fonctions inconnues qui doivent satisfaire à *six* équations aux dérivées partielles d'ordre 2; la solution générale du système dépend de *douze* fonctions d'un argument comme on pourrait le vérifier en ramenant le système à la forme de Cauchy. Mais comme on peut toujours poser $u^* = f(u)$, $v^* = \varphi(v)$, où f et φ sont des fonctions arbitraires, sur les douze fonctions dont dépend la solution du système, deux ne correspondent pas à une transformation géométrique mais à un changement de variables indépendantes; il ne reste donc que dix fonctions pour modifier la nature géométrique de la solution.

Nous allons donner un exemple précis où la solution contient *huit* fonctions arbitraires d'un argument. L'équation

$$\text{(E)} \qquad (A_1 + B_1)x + (A_2 + B_2)y + (A_3 + B_3)z + (A_4 + B_4)t = 0,$$

où les A_i dépendent de la variable a, les B_i de la variable b, définit tangentiellement une surface rapportée à un réseau conjugué (a, b) puisque les coordonnées tangentielles satisfont à $\frac{\partial^2 \theta}{\partial a \partial b} = 0$; on obtient la surface ponctuellement en adjoignant à (E) les équations

$$(\text{E}') \quad A'_1 x + A'_2 y + A'_3 z + A'_4 t = 0, \qquad B'_1 x + B'_2 y + B'_3 z + B'_4 t = 0.$$

Ceci fait apparaître que les courbes $a = \text{const.}$, $b = \text{const.}$ sont planes; le premier axe, relatif au point (a, b), est la droite définie par les équations (E').

Remarquons que cette congruence des premiers axes est *la congruence rectiligne générale à nappes focales développables.*

Donnons nous maintenant, *a priori*, une telle congruence, définie par les deux équations

$$(e') \quad \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha z + t = 0, \qquad \beta_1 x + \beta_2 y + \beta z + t = 0,$$

où α et β sont les paramètres indépendants, α_1, α_2, des fonctions de α, β_1, β_2 des fonctions de β; les surfaces S les plus générales qui correspondent à cette congruence dépendent, bien entendu, de quatre fonctions d'un argument, mais par de simples quadratures nous pouvons trouver des surfaces S particulières dépendant de deux fonctions d'un argument; ce sont les enveloppes de plans dont l'équation est de la forme

$$(e) \quad x\left[\int \alpha_1\alpha_3\,d\alpha + \int \beta_1\beta_3\,d\beta\right] + y\left[\int \alpha_2\alpha_3\,d\alpha + \int \beta_2\beta_3\,d\beta\right] + z\left[\int \alpha\alpha_3\,d\alpha + \int \beta\beta_3\,d\beta\right] + t\left[\int \alpha_3\,d\alpha + \int \beta_3\,d\beta\right] = 0,$$

où α_3 et β_3 sont des fonctions arbitraires de α et de β respectivement.

Supposons alors que nous partions de la congruence (e'), nous considérerons la surface correspondant à l'équation (e) avec un certain choix des fonctions α_3, β_3 et la surface correspondant à $(\bar{e})$

$$(\bar{e}) \quad x\left[\int \alpha_1\bar{\alpha}_3\,d\alpha + \int \beta_1\bar{\beta}_3\,d\beta\right] + y\left[\int \alpha_2\bar{\alpha}_3\,d\alpha + \int \beta_2\bar{\beta}_3\,d\beta\right] + z\left[\int \alpha\bar{\alpha}_3\,d\alpha + \int \beta\bar{\beta}_3\,d\beta\right] + t\left[\int \bar{\alpha}_3\,d\alpha + \int \bar{\beta}_3\,d\beta\right] = 0$$

et nous avons ainsi un exemple de solution du problème qui engage les huit fonctions d'un argument α_1, α_2, α_3, $\overline{\alpha}_3$, β_1, β_2, β_3, $\overline{\beta}_3$.

La propriété qui distingue les surfaces (e) parmi toutes les surfaces à quatre fonctions arbitraires qui correspondent à la congruence (e'), c'est que *le réseau conjugué dont la congruence (e') est congruence des premiers axes correspond aux développables de (e').*

Enfin, considérons le cas spécial où la congruence C est formée de toutes les droites issues de l'origine; il est clair que, dans ce cas, le réseau conjugué admettant ces droites pour premiers axes est formé de courbes planes dont les plans passent par O; la surface enveloppe du plan

$$(A_1+B_1)x+(A_2+B_2)y+(a+b)z+t=0$$

admet pour congruence des premiers axes la congruence C, et nous avons ainsi un exemple de détermination d'une surface dépendant de quatre fonctions arbitraires d'un argument, associée à une congruence donnée.

TROISIÈME PARTIE.

Directrices de Wilczynski d'une surface.

26. Rappel de quelques définitions. — Étant donné une surface S et un point M de cette surface, il existe une infinité de quadriques qui ont en M un contact du second ordre avec S. La courbe d'intersection d'une telle quadrique avec la surface présente en M un point triple. On sait que lorsque les trois tangentes en M viennent se confondre en une seule, la droite obtenue est dite *tangente de Darboux*; en un point M quelconque, de la surface, passent trois tangentes de Darboux.

On appelle *quadrique de Darboux* en M une quadrique dont l'intersection avec S présente un point triple en M, les trois tangentes en ce point étant les tangentes de Darboux. Ces quadriques forment un faisceau.

On considère les deux complexes linéaires osculateurs en M respectivement aux deux asymptotiques issues de M. Ces complexes linéaires ont en commun une congruence linéaire dont les directrices sont appelées *directrices de Wilczynski* de la surface en M. L'une d'elles, qui est appelée *première directrice*, passe par M; l'autre, située dans le plan tangent en M, est la *deuxième directrice*. Ces droites sont réciproques par rapport aux quadriques de Darboux.

Parmi les quadriques de Darboux, nous considérerons particulièrement la quadrique de Lie. Considérons la surface réglée R_1 décrite par les tangentes aux asymptotiques $v = \text{const.}$ aux points où elles rencontrent l'asymptotique $u = \text{const.}$ qui passe par le point M et, de même, la surface réglée R_2 obtenue par le procédé précédent en intervertissant les rôles de u et v. Nous considérons ensuite la demi-quadrique Q_1 osculatrice à R_1 le long de la génératrice issue de M, de même la demi-quadrique Q_2 obtenue de la même façon à partir de R_2. Les demi-quadriques Q_1 et Q_2 ont comme support une même quadrique de Darboux qui est appelée *quadrique de Lie*.

27. Nous rapporterons la surface étudiée à son tétraèdre normal de M. Cartan, $MM_1M_2M_3$. MM_1 et MM_2 sont les tangentes asymptotiques, MM_3 est la première directrice de Wilczynski, M_3 son intersection avec la quadrique de Lie du point M, M_1M_2 est la seconde directrice. u et v sont les paramètres des asymptotiques.

D'après ce qui a été vu au début de la première partie, les déplacements du tétraèdre sont caractérisés par les équations

$$(1) \qquad M_{i_u} = \sum_k a_i^k M_k, \qquad M_{i_v} = \sum_k b_i^k M_k \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

où les coefficients a_i^k, b_i^k satisfont aux conditions

$$(2) \qquad (a_i^k)_v - (b_i^k)_u = \sum_j (b_i^j a_j^k - a_i^j b_j^k).$$

D'après le choix du tétraèdre, M_u, M_v sont situés respectivement sur MM_1, MM_2 d'où

$$a_0^2 = a_0^3 = 0, \qquad b_0^1 = b_0^3 = 0.$$

En écrivant que MM_1 et MM_2 sont tangentes asymptotiques, on a

$$a_1^3 = b_2^3 = 0.$$

Les coefficients a_0^1, b_0^2 ne sont pas nuls si les courbes u, v ne dégénèrent pas en points, on les ramène à l'unité en normalisant M_1 et M_2

$$a_0^1 = 1, \qquad b_0^2 = 1.$$

L'équation (2) pour $i = 0$, $k = 3$ donne alors $a_2^3 = b_1^3$. Ces deux quantités ne peuvent être nulles sans que la surface (M) ne dégénère en plan; en effet, les six équations (1) relatives à M, M_1, M_2 ne contiendraient pas M_3. L'intégrale générale de ce système ne comprendrait que trois termes

$$M_i = x_i^0 A_0 + x_i^1 A_1 + x_i^2 A_2 \qquad (i = 0, 1, 2).$$

La surface (M) serait une transformée projective du plan $A_0 A_1 A_2$.

On peut donc les ramener à l'unité par la normalisation de M_3. Les équations (2) écrites pour $i = 1$, $k = 3$; $i = 2$, $k = 3$; $i = 0$, $k = 1$; $i = 0$, $k = 2$ donnent

$$b_1^2 = a_1^1 - a_3^2, \qquad a_1^2 = b_2^2 - b_3^3, \qquad a_0^0 + a_1^1 - a_2^2 - a_3^3 = 0,$$
$$b_0^0 - b_1^1 + b_2^2 - b_3^3 = 0.$$

Nous disposons encore de la normalisation de M: or la multiplication de tous les points M_i par λ ne change pas la forme des équations obtenues et un choix convenable de λ permet d'obtenir

$$(MM_1M_2M_3) = 1,$$

d'où suit, par dérivation,

$$a_0^0 + a_1^1 + a_2^2 + a_3^3 = 0, \qquad b_0^0 + b_1^1 + b_2^2 + b_3^3 = 0,$$

donc

$$a_0^0 + a_1^1 = 0, \qquad a_2^2 + a_3^3 = 0, \qquad b_0^0 + b_2^2 = 0, \qquad b_1^1 + b_3^3 = 0.$$

En exprimant que les arêtes MM_3, M_1M_2 sont réciproques par rapport aux quadriques de Darboux du point M, on obtient

$$a_0^0 + a_3^3 = 0, \qquad b_0^0 + b_3^3 = 0$$

et les équations (1) prennent la forme

$$\begin{aligned}
M_u &= a\,M + M_1, & M_v &= bM + M_2,\\
M_{1_u} &= a_1^0 M - aM_1 + \beta M_2, & M_{1_v} &= b_1^0 M + bM_1 + M_3,\\
M_{2_u} &= a_2^0 M + aM_2 + M_3, & M_{2_v} &= b_2^0 M + \gamma M_1 - bM_2,\\
M_{3_u} &= a_3^0 M + a_3^1 M_1 + a_3^2 M_2 - aM_3, & M_{3_v} &= b_3^0 M + b_3^1 M_1 + b_3^2 M_2 - bM_3.
\end{aligned}$$

On peut s'assurer que les quantités β, γ qui sont écrites ici sont les mêmes que celles désignées par ces lettres par MM Fubini et Čech dans leur traité de *Géométrie projective différentielle*.

Si l'on exprime que MM_3 et M_1M_2 sont les directrices de Wilczynski, on a

$$a_1^0 = a_3^2, \qquad b_2^0 = b_3^1.$$

On désignera leurs valeurs communes par B^2 et A^2 respectivement.

Les équations (2) pour $i=1$, $k=2$ et $i=2$, $k=1$ donnent

$$a = \frac{1}{2}\frac{\partial \log\gamma}{\partial u}, \qquad b = \frac{1}{2}\frac{\partial \log\beta}{\partial v}.$$

Des équations (2) écrites pour $i=0$, $k=0$ et pour $i=3$, $k=3$, on peut tirer la relation en termes finis

$$a_2^0 - a_3^1 = b_1^0 - b_3^2.$$

En exprimant que la quadrique de Lie perce en M_3 l'arête MM_3, on trouve

$$a_2^0 = a_3^1, \qquad b_1^0 = b_3^2.$$

On désignera leurs valeurs respectivement par k et l; enfin, les équations (2) pour $i=1$, $k=0$ et pour $i=3$, $k=2$ donnent

$$a_3^0 = \beta A^2$$

et ces équations pour $i=2$, $k=0$ et $i=3$, $k=1$ donnent

$$b_3^0 = \gamma B^2.$$

Finalement, le système (1) apparaît sous sa forme définitive

$$(3)\quad \begin{cases} M_u = \frac{1}{2}\frac{\partial \log\gamma}{\partial u} M + M_1, & M_v = \frac{1}{2}\frac{\partial \log\beta}{\partial v} M + M_2, \\ M_{1_u} = B^2 M - \frac{1}{2}\frac{\partial \log\gamma}{\partial u} M_1 + \beta M_2, & M_{1_v} = lM + \frac{1}{2}\frac{\partial \log\beta}{\partial v} M_1 + M_3, \\ M_{2_u} = kM + \frac{1}{2}\frac{\partial \log\gamma}{\partial u} M_2 + M_3, & M_{2_v} = A^2 M + \gamma M_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial \log\beta}{\partial v} M_2, \\ M_{3_u} = \beta A^2 M + kM_1 + B^2 M_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial \log\gamma}{\partial u} M_3, & M_{3_v} = \gamma B^2 M + A^2 M_1 + lM_2 - \frac{1}{2}\frac{\partial \log\beta}{\partial v} M_3, \end{cases}$$

les conditions d'intégrabilité s'écrivant

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &2k = \beta\gamma - \frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\,\partial v}, \qquad 2l = \beta\gamma - \frac{\partial^2 \log\gamma}{\partial u\partial v},\\ &(A^2)_u = k_v + k\frac{\partial \log\beta}{\partial v}, \qquad (B^2)_v = l_u + l\frac{\partial \log\gamma}{\partial u},\\ &A(\beta A)_v = B(\gamma B)_u. \end{aligned}\right.$$

Nous avons adopté les notations de M. Finikoff, elles ne diffèrent de celles de M. Cartan que par la normalisation des sommets.

28. Éléments focaux des directrices. — Soit une surface réglée de la congruence des premières directrices définie par $v = \varphi(u)$. Le plan tangent en un point $M + \lambda M_3$ du rayon MM_3 est déterminé comme plan contenant le rayon lui-même et la tangente à une ligne quelconque de la surface, par exemple, à la ligne $\lambda = \text{const}$. Il est déterminé par les points M, M_3, $d(M + \lambda M_3)$.

On peut écrire

$$d(M + \lambda M_3) = (M_u + \lambda M_{3_u})\, du + (M_v + \lambda M_{3_v})\, dv.$$

Ce plan ne dépend pas de $\dfrac{du}{dv}$ si l'on a

$$(5)\qquad (M \quad M_3 \quad M_u + \lambda M_{3_u} \quad M_v + \lambda M_{3_v}) = 0.$$

Cette équation du second degré en λ définit deux points sur le rayon où le plan tangent est le même pour toutes les surfaces réglées de la congruence, ce sont les foyers. En tenant compte des relations du tableau (3), cette équation donne

$$(6)\qquad \lambda^2(kl - A^2B^2) + \lambda(k + l) + 1 = 0.$$

De la même façon, on détermine les foyers de la deuxième directrice $M_1 M_2$ sous la forme $M_1 + \mu M_2$ par l'équation

$$(7)\qquad \mu^2 A^2 + \mu(l - k) - B^2 = 0.$$

Le plan focal de MM_3 correspondant à une racine λ de l'équation (6) coupe $M_1 M_2$ au point $M_1 + \mu M_2$ où μ est donné par

$$(M \quad M_3 \quad M_{3_u} + \lambda M_{3_u} \quad M_1 + \mu M_2) = 0$$

c'est-à-dire

$$\mu(1+\lambda k)-\lambda B^2=0.$$

Ainsi les points de rencontre de M_1M_2 avec ces deux plans focaux sont définis par

$$\mu^2 A^2-\mu(l-k)-B^2=0. \tag{8}$$

De même, les points de rencontre de MM_3 avec les plans focaux de M_1M_2 sont les points $M+\lambda M_3$ où λ est solution de

$$\lambda^2(kl-A^2B^2)-\lambda(k+l)+1=0. \tag{9}$$

La comparaison des équations (7) et (8) fait apparaître un résultat publié par M. Godeaux ([1]) : le plan conjugué harmonique d'un plan focal de MM_3 par rapport aux plans MM_1M_3, MM_2M_3 coupe M_1M_2 en un foyer.

De même, en comparant les équations (6) et (9), on voit apparaître une proposition analogue à celle de M. Godeaux : le plan conjugué harmonique d'un plan focal de M_1M_2 par rapport aux plans M_1M_2M et $M_1M_2M_3$ coupe MM_3 en un foyer. Si nous nous rappelons maintenant que MM_3 et M_1M_2 sont conjuguées par rapport à la quadrique de Lie du point M et que MM_1 et MM_2 sont les génératrices en M de cette quadrique, nous pouvons rassembler ces résultats sous la forme suivante.

Un foyer d'une directrice est le pôle, par rapport à la quadrique de Lie, d'un plan focal de l'autre directrice.

Une conséquence presque immédiate est la proposition suivante qui a éte établie par M. Godeaux, par un procédé différent, dans le mémoire cité.

Si une directrice de Wilczynski d'une surface engendre une congruence formée par des tangentes asymptotiques d'une surface, la congruence engendrée par l'autre directrice jouit de la même propriété.

([1]) Godeaux, *Sur les congruences formées par les directrices de Wilczynski d'une surface* (*Bull. Acad. Royale de Belg.*, 1928, p. 335-345).

En effet, pour qu'une congruence jouisse de cette propriété, il faut et il suffit que les foyers et les plans focaux de chacun des rayons soient confondus et il est clair maintenant que si cette condition est satisfaite par une congruence de directrices, elle l'est aussi pour l'autre.

29. Étude des couples de surfaces ayant mêmes premières et secondes directrices de Wilczynski. — Nous désignons par F et F′ les foyers de la première directrice MM_3 de la surface (M), par φ et φ' les points de MM_3 respectivement conjugués harmoniques de F et F′ par rapport à MM_3. Ce sont, d'après le paragraphe précédent, les intersections de MM_3 avec les plans focaux de M_1M_2. Nous allons chercher s'il existe des surfaces autres que (M) admettant pour premières et secondes directrices celles de (M). Les équations (6) et (9) montrent que les couples $\varphi\varphi'$ et FF′ sont confondus dans le cas où $k+l=0$.

1° Supposons $k+l\neq 0$; les couples $\varphi\varphi'$ et FF′ sont distincts.

Il y a au plus trois surfaces autres que (M) qui peuvent convenir. En effet, si P est le point générateur d'une telle surface, P_1 le deuxième point d'intersection de MM_3 avec la quadrique de Lie du point P, le segment PP_1 est divisé harmoniquement par $F\varphi$ et $F'\varphi'$ ou par $F\varphi'$ et $F'\varphi$. Or le seul segment qui soit conjugué à la fois par rapport à $F\varphi$ et $F'\varphi'$ est MM_3; un seul segment que nous désignerons par NN′ est conjugué par rapport à $F\varphi'$ et $F'\varphi$ à la fois. Les seules positions de P qui pourraient convenir sont donc, *a priori*, M_3, N et N′.

Si P est confondu avec M_3, en écrivant que le plan tangent en P contient M_1M_2, on obtient $A=B=0$. La configuration particulière ainsi réalisée a été étudiée par MM. Demoulin et Godeaux [1] : la quadrique de Lie du point M n'a que deux points caractéristiques : M et M_3, les asymptotiques de (M) et (M_3) se correspondent et les tangentes asymptotiques homologues concourent aux points M_1, M_2. Nous dirons que les surfaces (M) et (M_3) forment un couple de Demoulin-Godeaux.

[1] Godeaux, *Sur les surfaces ayant les mêmes quadriques de Lie* (*Bull. Acad. Royale de Belg.*, 1928, p. 345).

Pour les autres cas, où P serait en N ou en N′, on peut fixer sa position par la fonction $\lambda(u, v)$ telle que

$$P = M + \lambda M_3.$$

En écrivant que le point caractéristique du plan (PM_1M_2) est le point P, nous obtenons

$$(10) \qquad \lambda_u = \lambda \frac{\partial \log \gamma}{\partial u} + \lambda^2 \beta A^2, \qquad \lambda_v = \lambda \frac{\partial \log \beta}{\partial v} + \lambda^2 \gamma B^2.$$

La condition $\lambda_{uv} = \lambda_{vu}$ donne

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 \log \gamma}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u\, \partial v} \right) = 0.$$

On voit que nous ne pouvons avoir de solution différente de zéro que si

$$\frac{\partial^2 \log \gamma}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u\, \partial v} = 0,$$

égalité qui équivaut à $k = l$ d'après les relations (4). Cette condition caractérise les surfaces isothermes asymptotiques de M. Fubini. Les développables de la congruence des premières directrices découpent sur ces surfaces un réseau conjugué et de même les développables de la congruence des deuxièmes directrices correspondent aux lignes d'un réseau conjugué; on dit que la congruence des premières directrices est conjuguée à la surface, et que celle des deuxièmes directrices est harmonique. Nous reconnaissons immédiatement par les formules établies quelques propriétés caractéristiques de ces surfaces.

a. les plans focaux de la première directrice contiennent les foyers de la seconde;

b. les foyers de la deuxième directrice sont conjugués par rapport à la quadrique de Lie.

Nous voyons donc que si $k + l \neq 0$, il n'existe en général aucune surface (P) admettant pour premières et secondes directrices celles de (M); il ne peut en exister que si la surface (M) est isotherme asymptotique ou si elle est telle que la quadrique de Lie n'admet en tout point que deux points caractéristiques.

2° Si $k+l=0$, le couple $\varphi\varphi'$ est confondu avec FF'.

On trouve immédiatement quelques propriétés caractéristiques des surfaces correspondantes :

a. les plans focaux de la deuxième directrice contiennent les foyers de la première;

b. les foyers de la première directrice sont conjugués par rapport à la quadrique de Lie.

Voyons d'abord si le point P peut être confondu avec M_3, autrement dit, si la surface (P) peut constituer avec (M) un couple de Demoulin-Godeaux. On devrait avoir encore $A=B=0$. Les équations

$$k_v + k\frac{\partial \log\beta}{\partial v} = 0, \qquad l_u + l\frac{\partial \log\gamma}{\partial u} = 0$$

du système (4) s'intègrent alors; un choix convenable des paramètres u, v réduit les fonctions arbitraires de l'intégration à l'unité et l'on obtient

$$k = \frac{1}{\beta}, \qquad l = \frac{1}{\gamma}$$

et la condition $k+l=0$ donne $\gamma = -\beta$. Les deux premières équations (4) donnent

$$\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\,\partial v} = -\beta^2 - \frac{2}{\beta}, \qquad \frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\,\partial v} = -\beta^2 + \frac{2}{\beta}$$

qui sont incompatibles.

Si le point P est un point de MM_3 défini par $M+\lambda M_3$, les mêmes calculs que pour le 1° montrent que doit être satisfaite la condition $k=l$. Par suite, on devrait avoir $k=l=0$ et ces équations caractérisent le cas où les asymptotiques des deux familles de la surface (M) appartiennent à des complexes linéaires.

M. Gambier a étudié de telles surfaces [1] : les congruences des

---

[1] B. Gambier, *Surfaces dont les asymptotiques de l'un ou l'autre système appartiennent à des complexes linéaires* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **203**, 1936, p. 191).

directrices forment un couple stratifiable, les surfaces de stratification décrites par les points de MM_3 admettent toutes les mêmes premières et secondes directrices que la surface de départ; les surfaces de stratification décrites par les points de M_1M_2 ont aussi mêmes directrices que la surface (M) mais l'ordre est inversé, c'est-à-dire que M_1M_2 est une première directrice, MM_3 une seconde directrice. Ceci nous fournit un exemple de la configuration qui sera étudiée dans le paragraphe suivant.

30. Étude d'un couple de surfaces (M) et (P) telles que les premières et secondes directrices de l'une soient respectivement secondes et premières directrices de l'autre. — On désignera par F_1 et F'_1 les foyers de la deuxième directrice M_1M_2 de (M), par φ_1 et φ'_1 les points de M_1M_2 conjugués de F_1 et F'_1 respectivement par rapport à M_1M_2; φ_1 et φ'_1 sont donc les intersections de M_1M_2 par les plans focaux de MM_3. Nous cherchons s'il existe des surfaces admettant M_1M_2 comme première et MM_3 comme seconde directrices. Les équations (7), (8) montrent que la condition nécessaire et suffisante pour que les couples $F_1F'_1$ et $\varphi_1\varphi'_1$ soient confondus est $k=l$:

1° Supposons $k\neq l$. La surface (M) n'est pas isotherme asymptotique. P_1 désignant le deuxième point d'intersection de M_1M_2 avec la quadrique de Lie du point P, le segment PP_1 doit être divisé harmoniquement par $F_1\varphi_1$ et $F'_1\varphi'_1$ ou par $F_1\varphi'_1$ et $F'_1\varphi_1$. Donc, en désignant par $N_1N'_1$ le segment qui divise harmoniquement $F_1\varphi'_1$ et $F'_1\varphi_1$, on voit qu'il n'y a, *a priori*, que quatre positions possibles pour P : M_1, M_2, N_1, N'_1.

P ne peut être en M_1 ni en M_2. En écrivant que le point caractéristique du plan MM_1M_3, par exemple, est le point M_1, nous obtenons immédiatement $\beta=0$, ce qui entraîne que la surface (M) serait réglée, cas que nous écarterons.

Pour les autres positions de P, on peut écrire $P=M_1+\mu M_2$. Pour que le point caractéristique du plan (PMM_3) soit P lui-même, on doit avoir

$$(11)\qquad \mu_u=-\beta-\mu\frac{\partial\log\gamma}{\partial u},\qquad \mu_v=\mu^2\gamma+\mu\frac{\partial\log\beta}{\partial v}.$$

La condition $\mu_{uv} = \mu_{vu}$ donne

$$\mu\left(\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 \log\gamma}{\partial u\,\partial v} - 2\beta\gamma\right) = 0.$$

Nous avons déjà écarté la solution $\mu = 0$, le système (11) n'a donc de solutions que dans le cas de la complète intégrabilité, où l'on a

$$\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 \log\gamma}{\partial u\,\partial v} - 2\beta\gamma = 0,$$

condition qui équivaut à $k + l = 0$.

Donc, pour que les congruences des premières et secondes directrices de la surface (M) non isotherme asymptotique et non réglée puissent être congruences des secondes et premières directrices d'une autre surface, il faut que l'on ait $k + l = 0$.

2° Soit $k = l$. Les couples $F_1 F'_1$ et $\varphi_1 \varphi'_1$ sont confondus. Le calcul précédent peut encore s'appliquer et nous revenons à la condition nécessaire $k + l = 0$, ce qui entraîne $k = l = 0$; nous retrouvons les surfaces dont les asymptotiques des deux familles appartiennent à des complexes linéaires.

En conclusion, si pour la surface (M) nous avons $k + l \neq 0$, $k \neq l$, A et B non tous deux nuls, les congruences des directrices de (M) ne sont congruences de directrices pour aucune autre surface, que l'on respecte ou non l'ordre des directrices.

Si A et B sont tous deux nuls, la surface (M) forme un couple de Demoulin-Godeaux avec la surface décrite par le point M_3 de rencontre de la quadrique de Lie du point M avec la première directrice. Les deux surfaces (M) et (M_3) ont mêmes congruences des premières et secondes directrices.

$k = l \neq 0$, la surface (M) est isotherme asymptotique; aucune surface n'admet pour premières et secondes directrices respectivement les secondes et premières directrices de (M). En général, aucune surface n'admet pour premières et secondes directrices celles de (M) et s'il en existe, il en existe au plus trois.

$k + l = 0$, $k \neq l$, aucune surface n'admet pour premières et secondes directrices celles de (M); en général, aucune surface n'admet pour secondes et premières directrices les premières et secondes directrices de (M) et s'il en existe, il en existe au plus deux.

$k = l = 0$, les asymptotiques des deux familles de (M) appartiennent à des complexes linéaires; dans ce cas, il existe une infinité de surfaces admettant pour premières et secondes directrices celles de (M) et aussi, une infinité de surfaces admettant pour secondes et premières directrices respectivement les premières et secondes directrices de (M).

31. Détermination des directrices de Wilczynski d'une surface $z = f(x, y)$. — Nous nous proposons de calculer les équations des directrices d'une surface $z = f(x, y)$ en fonction des coordonnées du point correspondant de la surface et des dérivées partielles de z. Ainsi apparaîtra la façon dont ces éléments dépendent de z.

Nous commencerons par calculer les coefficients β et γ introduits dans la géométrie projective différentielle des surfaces par MM. Fubini et Čech. Nous nous reportons aux notations du début de cette troisième partie. Appelons ρx, ρy, ρz, ρ les coordonnées homogènes de M et X_i, Y_i, Z_i, T_i les coordonnées de $M_i (i = 1, 2, 3)$. On a, d'après (1) avec permutations circulaires sur x, y, z

$$(12)\quad \begin{cases} X_1 = \rho_u x + \rho x_u - \dfrac{\rho x}{2} (\log\gamma)_u, & X_2 = \rho_v x + \rho x_v - \dfrac{\rho x}{2} (\log\beta)_v, \\ T_1 = \rho_u - \dfrac{\rho}{2} (\log\gamma)_u, & T_2 = \rho_v - \dfrac{\rho}{2} (\log\beta)_v. \end{cases}$$

En reportant dans M_{1_u}, on pourra, en utilisant le résultat relatif à la quatrième coordonnée homogène, simplifier les formules correspondant aux trois premières et obtenir ainsi

$$2\frac{\rho_u}{\rho} x_u - \beta x_v + x_{uu} = 0, \qquad 2\frac{\rho_u}{\rho} y_u - \beta y_v + y_{uu} = 0,$$
$$2\frac{\rho_u}{\rho} z_u - \beta z_v + z_{uu} = 0.$$

La compatibilité de ce système linéaire en $2\frac{\rho_u}{\rho}$ et β résulte du fait que les lignes $v =$ const. sont asymptotiques. On en tire

$$\beta = \frac{x_u y_{uu} - x_{uu} y_u}{x_u y_v - x_v y_u}, \qquad 2\frac{\rho_u}{\rho} = \frac{x_v y_{uu} - x_{uu} y_v}{x_u y_v - x_v y_u}.$$

Les courbes asymptotiques $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ sont les courbes intégrales de

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

On a donc

$$ty_u + (s - \sqrt{s^2 - rt})x_u = 0 \quad \text{et} \quad ty_v + (s + \sqrt{s^2 - rt})x_v = 0,$$

d'où l'on tire

$$(13) \qquad \frac{y_u}{x_u} = \frac{\sqrt{s^2 - rt} - s}{t}, \qquad \frac{y_v}{x_v} = \frac{-\sqrt{s^2 - rt} - s}{t}.$$

Nous désignerons par a, b, c, d les dérivées partielles d'ordre 3 de z

$$a = z_{x^3}, \qquad b = z_{x^2y}, \qquad c = z_{xy^2}, \qquad d = z_{y^3}.$$

Par dérivation de la première formule (13), nous obtenons

$$x_u y_{uu} - x_{uu} y_u = \frac{x_u^3}{2t^3\sqrt{s^2 - rt}}(A + B\sqrt{s^2 - rt}),$$

où l'on pose

$$A = -at^3 + 3bt^2s + 3ct(rt - 2s^2) + ds(4s^2 - 3rt),$$
$$B = -3bt^2 + 6cst + d(rt - 4s^2).$$

On en déduit

$$(14) \qquad \beta = \frac{-x_u^2}{x_v}\,\frac{A + B\sqrt{s^2 - rt}}{4t^2(s^2 - rt)}.$$

On obtiendrait de la même façon

$$(15) \qquad \gamma = \frac{-x_v^2}{x_u}\,\frac{A - B\sqrt{s^2 - rt}}{4t^2(s^2 - rt)}.$$

Déterminons maintenant la première directrice de Wilczynski. Nous tirons des formules (3)

$$M_3 = M_{1_v} - Ml - \frac{M_1}{2}(\log\beta)_v.$$

Or

$$M_1 = M_u - \frac{M}{2}(\log\gamma)_u, \qquad M_{1_v} = M_{uv} - \frac{M_v}{2}(\log\gamma)_u - \frac{M}{2}(\log\gamma)_{uv},$$

d'où

$$M_3 = M_{uv} - \frac{M_v}{2}(\log\gamma)_u - \frac{M_u}{2}(\log\beta)_v - M\left[l - \frac{1}{4}(\log\gamma)_u(\log\beta)_v + \frac{1}{2}(\log\gamma)_{uv}\right]$$

La première directrice, issue de M peut être définie par le point N

$$N = M_3 + M\left[l - \frac{1}{4}(\log\gamma)_u(\log\beta)_v + \frac{1}{2}(\log\gamma)_{uv}\right] = M_{uv} - \frac{M_u}{2}(\log\beta)_v - \frac{M_v}{2}(\log\gamma)_u$$

dont les coordonnées homogènes sont

$$X_N = x\left[\rho_{uv} - \frac{\rho_u}{2}(\log\beta)_v - \frac{\rho_v}{2}(\log\gamma)_u\right] + x_u\left[\rho_v - \frac{\rho}{2}(\log\beta)_v\right] + x_v\left[\rho_u - \frac{\rho}{2}(\log\gamma)_u\right] + \rho x_{uv}$$

et les expressions analogues pour Y_N et Z_N et

$$T_N = \rho_{uv} - \frac{\rho_u}{2}(\log\beta)_v - \frac{\rho_v}{2}(\log\gamma)_u.$$

On tire de là les paramètres directeurs de la première directrice, sous la forme

$$\xi = \frac{x_u}{2}\left(2\frac{\rho_v}{\rho} - \frac{\beta_v}{\beta}\right) + \frac{x_v}{2}\left(\frac{2\rho_u}{\rho} - \frac{\gamma_u}{\gamma}\right) + x_{uv}, \qquad \eta = \ldots, \qquad \zeta = \ldots.$$

En utilisant les valeurs trouvées pour β, γ, $2\frac{\rho_u}{\rho}$, $2\frac{\rho_v}{\rho}$, on peut écrire

$$\xi = \frac{3}{2}x_{uv} - \frac{x_u}{2}\frac{(x_u y_{uu} - x_{uu}y_u)_v}{x_u y_{uu} - x_{uu}y_u} - \frac{x_v}{2}\frac{(x_v y_{vv} - x_{vv}y_v)_u}{x_v y_{vv} - x_{vv}y_v},$$
$$\eta = \frac{3}{2}y_{uv} - \frac{y_u}{2}\frac{(x_u y_{uu} - x_{uu}y_u)_v}{x_u y_{uu} - x_{uu}y_u} - \frac{y_v}{2}\frac{(x_v y_{vv} - x_{vv}y_v)_u}{x_v y_{vv} - x_{vv}y_v}.$$

Nous éliminons y_u et y_v par les formules (13); pour obtenir x_{uv}, y_{uv}, nous dérivons

$$rx_u^2 + 2sx_u y_u + ty_u^2 = 0 \quad \text{en } v$$

et

$$rx_v^2 + 2sx_v y_v + ty_v^2 = 0 \quad \text{en } u$$

d'où

$$\frac{x_{uv}}{x_u x_v} = \frac{at^2 - 3bst + c(2s^2 + rt) - drs}{2t(s^2 - rt)},$$
$$\frac{y_{uv}}{x_u x_v} = \frac{-ats + b(2s^2 + rt) - 3crs + dr^2}{2t(s^2 - rt)}.$$

Pour calculer ζ, nous déterminons

$$z_{uv} = px_{uv} + qy_{uv} + rx_u x_v + s(x_u y_v + x_v y_u) + ty_u y_v.$$

Finalement, ξ, η, ζ sont égaux aux produits par $x_u x_v$ de ξ_1, η_1, ζ_1 avec

$$\xi_1 = \frac{-5t^2(at-2bs+cr)+5st(bt-2cs+dr)+12(s^2-rt)(ct-ds)}{4t^2(s^2-rt)} - \frac{1}{t[A^2-(s^2-rt)B^2]}$$
$$\times\Big[tAA_x+[-sA+(s^2-rt)B]A_y-(s^2-rt)tBB_x-(s^2-rt)(A-Bs)B_y$$
$$+\frac{(A-Bs)(bt-2sc+rd)+Bt(at-2sb+rc)}{2}B\Big],$$

$$\eta_1 = \frac{5st(at-2bs+cr)-5rt(bt-2cs+dr)-6(s^2-rt)(bt-dr)}{4t^2(s^2-rt)} + \frac{1}{t[A^2-(s^2-rt)B^2]}$$
$$\times\Big[[sA+(s^2-rt)B]A_x-rAA_y-(s^2-rt)(A+Bs)B_x+(s^2-rt)rBB_y$$
$$+\frac{(A+Bs)(at-2sb+rc)-Br(bt-2sc+rd)}{2}B\Big],$$

$$\zeta_1 = p\xi_1+q\eta_1-2\frac{s^2-rt}{t}.$$

On voit que ces paramètres directeurs dépendent linéairement des dérivées partielles du quatrième ordre de z.

Enfin la seconde directrice M_1M_2 peut être définie comme intersection du plan tangent avec le plan OM_1M_2. L'équation de ce plan fait apparaître des quantités calculées précédemment, on obtient l'équation rationnelle

$$(Z-pX-qY)\Big[x(r\xi_1+s\eta_1)+y(s\xi_1+t\eta_1)$$
$$+\frac{x(at-2sb+rc)+y(bt-2sc+rd)}{2t}$$
$$+\frac{d(t^2-r^2)(sx+ty)}{4t(s^2-rt)}+\frac{2(s^2-rt)}{t}\Big]$$
$$-X(px+qy-z)\left(r\xi_1+s\eta_1+\frac{at-2sb+rc}{t}\right)$$
$$-Y(px+qy-z)\left[s\xi_1+t\eta_1+\frac{bt-2sc+rd}{2t}+\frac{d(t^2-r^2)}{4(s^2-rt)}\right]=0.$$