JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

GUSTAVE CHOQUET

Application des propriétés descriptives de la fonction contingent à la théorie des fonctions de variable réelle et à la géométrie différentielle des variétés cartésiennes

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 26 (1947), p. 115-226.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1947_9_26__115_0>

Application des propriétés descriptives de la fonction contingent à la théorie des fonctions de variable réelle et à la géométrie différentielle des variétés cartésiennes (¹);

PAR GUSTAVE CHOQUET.

INTRODUCTION.

Le but de ce travail est de montrer l'usage qu'on peut faire des propriétés descriptives de certaines fonctions, telles que la fonction *contingent* d'un ensemble cartésien en un de ses points pris comme variable.

C'est lorsque ces fonctions sont continues ou ponctuellement discontinues qu'elles sont le plus maniables. Nous montrerons que dans des cas très étendus il en est bien ainsi. Dans d'autres cas où cette circonstance n'a pas lieu, nous montrerons le rôle que peuvent jouer des fonctions auxiliaires qui, elles, sont ponctuellement discontinues.

Nous appliquerons ces résultats à l'extension et à la résolution de deux problèmes non résolus jusqu'ici. Le premier de ces problèmes a été posé par Lebesgue. Il consiste en la recherche d'un procédé de calcul régulier d'une fonction continue $F(x)$ dont on connaît la dérivée $g(x)$ par rapport à une fonction continue donnée $\alpha(x)$.

(¹) Ce travail a été présenté comme Thèse de doctorat devant la Faculté des Sciences de Paris, le 16 mars 1946.

Lorsque celle-ci est une fonction à variation bornée, le problème est résolu par une intégration de Stieltjes classique, associée au procédé de totalisation de M. Denjoy; sinon les méthodes classiques ne permettent pas de résoudre le problème, même lorsque $g(x) \equiv 0$.

L'idée directrice qui nous guidera sera d'essayer de montrer que, sur tout ensemble parfait, il existe une portion sur laquelle $F(x)$ est fonction uniforme de $\alpha(x)$; pour mettre en œuvre cette idée, nous géométriserons le problème en introduisant l'ensemble plan paramétré $X = \alpha(x)$, $Y = F(x)$; on sera ainsi ramené à l'étude des propriétés différentielles d'un ensemble plan.

Ces considérations sont valables, que x parcoure un segment de droite ou un espace topologique localement compact et localement connexe quelconque; c'est dans ce cas général que nous nous placerons.

Le second problème a été posé par M. Fréchet. Il consiste en ceci: Lorsqu'un arc simple γ de l'espace cartésien R_n est doué en tout point d'une tangente, peut-on le paramétrer régulièrement, c'est-à-dire avec des fonctions $x_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ dérivables pour tout t, et dont les dérivées ne s'annulent jamais toutes pour une même valeur de t. Autrement dit, en termes plus vagues, si l'arc γ possède une certaine régularité, peut-on le paramétrer par des fonctions possédant un degré de régularité analogue?

M. Pauc a montré que l'existence, dans le cas général, de points de γ dits *contrariants*, au voisinage desquels γ a des sinuosités de trop grande amplitude, rend impossible une paramétrisation régulière.

Nous montrerons que la condition nécessaire et suffisante pour que γ admette une paramétrisation régulière est que γ ne contienne aucun point contrariant. Nous montrerons en même temps qu'il faut répondre négativement à la question posée par M. Pauc, de savoir si l'on peut trouver pour γ une paramétrisation partout dérivable, qui soit régulière en tout point non contrariant.

Nous résoudrons ensuite un problème voisin de celui de M. Fréchet, à savoir le problème de caractériser les arcs susceptibles d'une paramérisation dérivable, à dérivée éventuellement nulle.

Les méthodes utilisées pour résoudre le problème de M. Fréchet s'appliquent aussi à l'examen d'une généralisation de ce problème, à savoir : A quelles conditions une variété douée en tout point d'une variété linéaire tangente est-elle susceptible d'une paramétrisation régulière? Nous répondrons à cette question après une étude des propriétés tangentielles de ces variétés, et nous montrerons que tous ces résultats restent valables pour des variétés paramétrées, susceptibles d'avoir des points multiples.

Nous avons essayé de mettre en évidence la raison du succès des méthodes utilisées dans la résolution de ces divers problèmes.

Nous avons pu mettre en évidence un théorème général qui non seulement donne une démonstration immédiate de plusieurs de nos autres résultats, mais encore semble devoir s'appliquer toutes les fois qu'interviendra l'ensemble des éléments-limites d'une famille de fonctions continues.

Dans un cas particulier concret ce théorème s'énonce ainsi : Sur tout ensemble cartésien E, il existe des points en lesquels le contingent possède la semi-continuité supérieure d'inclusion; plus précisément, sur tout un résiduel de E, le contingent est identique au paratingent.

En termes volontairement vagues, le théorème général revient à dire que sur tout ensemble fermé, presque partout (au sens topologique) la convergence ordinaire entraîne la convergence uniforme locale.

Donc, d'une part, ce théorème élargit le théorème de Baire, puisqu'il s'applique à l'ensemble des éléments-limite d'une famille de fonctions (la notion de fonction ponctuellement discontinue étant remplacée alors par celle de fonction ponctuellement semi-continue supérieurement), d'autre part, grâce à l'introduction d'un *paratingent abstrait*, il renseigne sur la façon dont se fait la convergence.

De ce théorème peuvent se déduire trois remarquables théorèmes topologiques énoncés par M. Denjoy et dont il a montré la portée très générale (Denjoy IV).

Au cours de l'étude des problèmes de Lebesgue et de Fréchet, nous démontrerons incidemment des propriétés d'ensembles cartésiens paramétrés, qui généralisent directement les propriétés classiques des fonctions dérivées. Par contre, dans un dernier chapitre, nous reviendrons à l'étude des fonctions dérivées de fonctions continues d'une variable réelle. Nous en ferons une étude à la fois topologique et métrique qui nous permettra de caractériser, d'une part la nature métrique de certains ensembles associés aux fonctions dérivées, d'autre part la nature topologique des fonctions dérivées semi-continues ([1]).

Nous terminerons ce Chapitre par l'étude des transformations topologiques qui permettent d'obtenir de nouvelles fonctions dérivées à partir d'une fonction dérivée donnée.

C'est pour moi un agréable devoir de rendre ici hommage à M. A. Denjoy, dont l'œuvre lumineuse et multiple a été mon constant modèle, et qui s'est dès le début de mes recherches intéressé à mes efforts. Je ne saurais trop remercier M. G. Bouligand qui n'a cessé de suivre mes travaux et de me faire profiter de ses points de vue féconds. J'adresse ma respectueuse reconnaissance à M. P. Montel pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant la présidence du jury. Enfin je remercie très vivement M. E. Cartan pour l'encouragement qu'il m'a apporté par son intérêt à mes recherches.

Conventions et notations.

1° Nous utilisons en général les notations de Bourbaki, auquel nous renvoyons (Bourbaki I).

2° Pour la définition des termes *épaisseur, épais en soi, résiduel, clairsemé, ..., voir* Denjoy IV.

3° Pour la définition des termes *espace séparable, distance de deux courbes de Jordan, voir* Fréchet II.

4° Nous disons qu'une application T d'un espace E dans un

([1]) Nous avons pu par la suite simplifier considérablement notre démonstration et trouver dans toute sa généralité la caractérisation topologique des fonctions dérivées. Le résultat peut s'énoncer ainsi : « Pour toute fonction $g(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ de première classe possédant la propriété de Darboux, il existe une fonction continue strictement croissante $\alpha(x)$ telle que $g[\alpha(x)]$ soit une fonction dérivée ».

La méthode est basée sur le fait, facile à établir, que, sous les hypothèses ci-dessus, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fontion $\alpha(x)$ telle que $g[\alpha(x)]$ ait une intégrale indéfinie $F(x)$ dont tout nombre dérivé, pour tout x, diffère de $g[\alpha(x)]$ de ε au plus.

espace F est ponctuellement discontinue sur un sous-ensemble P de E lorsque la restriction de T à P possède au moins un point de continuité sur P.

5° Nous appelons *application canonique* d'un espace E sur lui-même l'application T telle que, pour tout $m \in E$, on ait

$$T(m) = m.$$

6° R_n désigne l'espace cartésien à n dimensions;

F_σ désigne une réunion dénombrable d'ensembles fermés, G_δ une intersection dénombrable d'ensembles ouverts, $F_{\sigma\delta}$ une intersection dénombrable d'ensembles du type F_σ, ...

Si A et B sont deux sous-ensembles d'un espace E, nous dirons, en suivant M. Menger, que $A < B$ lorsque $\bar{A} \ll \mathring{B}$, c'est-à-dire lorsque la *fermeture* de A est contenue dans l'*intérieur* de B.

7° Pour des raisons de commodité, nous remplacerons parfois les notations $A \cup B$ et $A \cap B$ par $A + B$ et $A.B$.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DE LA CLASSE D'UNE APPLICATION ET DES PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DE LA FONCTION « CONTINGENT ».

Nous allons d'abord étudier brièvement les propriétés topologiques de certaines familles d'applications d'un espace topologique E dans un autre espace topologique E'.

M. Kuratowski et M. Banach (¹) ont montré qu'on pouvait étendre presque toutes les propriétés classiques des classes boréliennes de fonctions numériques aux applications de E dans E', lorsque E et E' sont des espaces métriques.

Lorsque E et E' sont des espaces de Hausdorff quelconques, on se heurte à des difficultés que l'on ne pourra sans doute vaincre qu'en partant de définitions nouvelles plus larges de la convergence, et en modifiant parallèlement la définition classique des ensembles boré-

(¹) Kuratowski [I] et [II]; Banach [I].

liens. Une telle reconstruction pourrait être basée par exemple sur la notion de filtre introduite par M. H. Cartan ([1]).

Comme nous n'avons en vue que des applications, nous respecterons ici le point de vue classique; nous nous bornerons également en général au cas où E est compact.

1. Applications ponctuellement discontinues et applications de 1^re^ classe borélienne. — *Définition.* — *Soient* E *et* E′ *deux, espaces topologiques quelconques.*

Une application f de E *dans* E′ *est dite* ponctuellement discontinue *sur le sous-ensemble* P *de* E, *si sa restriction à* P *possède au moins un point de continuité sur* P ([2]).

Elle est dite de 1^re^ *classe borélienne si l'image réciproque, par f, de tout sous-ensemble ouvert de* E′ *est un* F_σ.

Théorème 1. — *Soit f une application de* E *dans* E′.

1° *Si* E *est localement compact* ([3]) *et si* E′ *est un espace métrique séparable, toute f de* 1^re^ *classe borélienne est ponctuellement discontinue sur tout sous-ensemble fermé de* E.

2° Si E et E′ sont des espaces topologiques dans lesquels tout ensemble ouvert est un F_σ, et si E possède la propriété de Cantor ([4]), toute *f* ponctuellement discontinue sur tout sous-ensemble fermé de E est de 1^re^ classe borélienne.

Démonstration. — 1° Soit P un sous-ensemble pafait de E; on peut toujours le supposer compact.

Pour tout nombre $\rho > 0$, la séparabilité de E′ entraîne que E′ peut être recouvert par une suite dénombrable de sphères ouvertes S'_1, S'_2, ..., de rayon ρ. L'image réciproque par *f* de toute sphère S'_i est

([1]) *Voir* Bourbaki [I].

([2]) En un point isolé *m* d'un ensemble F de E, on considère que la restriction de *f* à F est continue en *m*.

([3]) Cet énoncé reste vrai si E est un espace topologique dont tout point possède un voisinage homéomorphe à un espace métrique complet.

([4]) C'est-à-dire que, dans E, toute famille bien ordonnée strictement décroissante d'ensembles fermés est au plus dénombrable.

un F_σ de E. Donc l'image réciproque de l'une de ces sphères S'_i contient une portion de P; sur une telle portion de P, l'oscillation de f est au plus égale à 2ρ; comme ρ est quelconque et que P est compact, il existe donc des points de P en lesquels l'oscillation de f sur P est nulle.

2° Soit G' un ensemble ouvert quelconque de E'; nous voulons montrer que $f^{-1}(G')$ est un F_σ. Posons $E = F_1$.

On peut poser $G' = (F'_1 + F'_2 + \ldots)$, où tout F'_i est fermé et $F'_{i+1} \supset F'_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Soit n un entier positif fixe quelconque.

Soit m un point de continuité de f.

Si $f(m) \in G'$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}_1$ de m dans F_1 tel que $f(\mathcal{V}_1) \subset G'$.

Si $f(m) \notin G'$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}_1$ de m dans F_1 tel que $f(\mathcal{V}_1) \subset \complement(F'_n)$.

Soit $F_2 = F_1 - \bigcup_i \mathcal{V}^1_i$. On peut raisonner sur F_2 comme on a raisonné sur F_1; on définit donc un ensemble fermé $F_3 \subset F_2$, ... Puis l'on pose $F_\omega = \bigcap_i F_i (i = 1, 2, \ldots)$; on définit alors $F_{\omega+1}$, $F_{\omega+2}$, ..., transfiniment.

Comme la famille des F_α est strictement décroissante et que E possède la propriété de Cantor, il existe un ordinal α_0 de 2^e classe tel que F_{α_0} soit vide. A tout $\beta \leqq \alpha_0$, on a associé pour la construction des F_β un $\mathcal{V}_\beta$ ouvert dans F_β. Ces $\mathcal{V}_\beta$ sont de deux sortes :

Pour les uns on a $f(\mathcal{V}_\beta) \subset G'$, pour les autres $f(\mathcal{V}_\beta) \subset \complement(F'_n)$.

Soit φ_n la réunion des $\mathcal{V}_\beta$ de la première sorte.

On a

$$f(\varphi_n) \subset G' \qquad \text{et} \qquad f[\complement(\varphi_n)] \subset \complement(F'_n).$$

Comme

$$G' = \bigcup_n F'_n \qquad \text{on a} \qquad f^{-1}(G') = \bigcup_n \varphi_n.$$

Il résulte des hypothèses que tout $\mathcal{V}_\beta$ est un F_σ; comme $\bigcup_n \varphi_n$ est une réunion dénombrable de $\mathcal{V}_\beta$, c'est également un F_σ.

Donc $f^{-1}(G')$ est bien un F_σ.

COROLLAIRE. — *Lorsque* E *est un espace métrique localement complet et séparable et que* E′ *est un espace métrique séparable, il y a équivalence entre la famille des applications f ponctuellement discontinues sur tout ensemble fermé et la famille des applications de* 1re *classe borélienne.*

Ce corollaire résulte immédiatement du théorème 1; mais c'est aussi un cas particulier des résultats de Kuratowski [1].

2. SEMI-CONTINUITÉ SUPÉRIEURE ET INFÉRIEURE D'INCLUSION. — Dans le cas où f est une application d'un espace E dans l'espace $2^{E'}$ des sous-ensembles fermés d'un espace E′, on se trouve en présence de circonstances nouvelles permettant par exemple d'élargir la notion classique de semi-continuité.

DÉFINITIONS. — *Soit f une application d'un espace topologique* E *dans l'espace* $2^{E'}$ *des sous-ensembles fermés d'un espace de Hausdorff* E′.

1° *Nous dirons que f est* semi-continue supérieurement *si, pour tout* $m \in E$ *et pour tout voisinage* $\mathcal{V}[f(m)]$ *dans* E′ *du sous-ensemble* $f(m)$ *de* E′, *il existe dans* E *un voisinage* $V(m)$ *de m tel que pour tout* $m_1 \in V(m)$, *on ait*

$$f(m_1) \subset \mathcal{V}[f(m)];$$

2° *Nous dirons que f est* semi-continu inférieurement *si, pour tout* $m \in E$, *et pour tout voisinage* $\mathcal{V}(n')$ *dans* E′ *d'un point arbitraire* $n' \in f(m)$, *il existe dans* E *un voisinage* $V(m)$ *de m tel que pour tout* $m_1 \in V(m)$ *on ait*

$$f(m_1) . \mathcal{V}(n') \neq \emptyset.$$

Autrement dit f est semi-continue supérieurement lorsque

$$\limsup_{m_1 \to m} f(m_1) \subset f(m),$$

et f est semi-continue inférieurement lorsque

$$f(m) \subset \liminf_{m_1 \to m} f(m_1).$$

Nous n'utiliserons en fait ces définitions que pour des espaces E′ métriques. La topologie sur $2^{E'}$ se définit alors simplement.

---

(1) *Voir* KURATOWSKI [I].

Soit E' un espace métrique; si A_1 et A_2 sont deux sous-ensembles fermés de E', soit $\delta(A_1, A_2)$ leur écart au sens de Hausdorff. Cet écart satisfait à l'inégalité triangulaire. L'espace $2^{E'}$ sera l'espace des sous-ensembles fermés de E', métrisé par cet écart $\delta(A_1, A_2)$. On sait que $2^{E'}$ est compact lorsque E' l'est.

Il est immédiat que l'application limite d'une suite convergente d'applications continues d'un espace E dans l'espace $2^{E'}$ attaché à un espace métrique E' est semi-continue supérieurement lorsque cette suite est décroissante (au sens de l'inclusion dans E') et semi-continue inférieurement lorsque cette suite est croissante.

Voici maintenant un résultat moins immédiat :

Théorème 2. — *Toute application f semi-continue supérieurement ou inférieurement, d'un espace compact* (1) E *dans l'espace $2^{E'}$ attaché à un espace métrique compact* E', *est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait* P *de* E.

Démonstration. — Il suffit évidemment de faire la démonstration en supposant $P \equiv E$.

1° *Semi-continuité supérieure.* — Si f n'est pas ponctuellement discontinue sur E, il existe un nombre $l > 0$ tel que, en tout point d'une portion de E, l'oscillation de f soit $\geqq l$. Nous supposerons désormais que cette portion a été prise pour espace E.

Soient $m_1 \in E$ et V_1 un voisinage de m_1.

On peut trouver un point $m_2 \subset V_1$ et un voisinage V_2 de m_2 tel que $V_2 \subset V_1$ et tel qu'il existe sur le sous-ensemble $f(m_1)$ de E' un point I_1 situé à une distance $> \frac{l}{2}$ de tout ensemble $f(m)$, quand $m \in V_2$.

De façon générale, supposons définis les m_i, V_i et I_{i-1} pour $i = 1, 2, \ldots, p$. On peut trouver un point $m_{p+1} \subset V_p$ et un voisinage de m_{p+1}, $V_{p+1} \subset V_p$, tel qu'il existe sur le sous-ensemble $f(m_p)$ de E' un point I_p situé à une distance $> \frac{l}{2}$ de tout ensemble $f(m)$, quand $m \in V_{p+1}$.

---

(1) Le théorème subsiste si E est localement compact ou localement homéomorphe à un espace métrique complet. Voir aussi, dans ce dernier cas : Kuratowski [I].

On a donc pu trouver dans E′ une suite infinie de points I_1, I_2, ..., dont toutes les distances mutuelles sont $> \frac{l}{2}$. Or ceci est impossible à cause de la compacité de E′.

2° *Semi-continuité inférieure.* — Le raisonnement est analogue au précédent; il consiste encore à montrer que si le théorème était en défaut, il existerait une suite infinie de points I_1, I_2, ... de E′ dont toutes les distances mutuelles soient supérieures à une même constante positive.

3. Suites convergentes presque continues d'applications. — Définition. — *Si $f_n(m)$ (où $n = 1, 2, \ldots$) est le terme général d'une suite convergente d'applications d'un espace topologique* E *dans un espace topologique* E′, *nous dirons que cette suite est* presque continue *si, en désignant par $f(m)$ l'application limite, pour tout $m \in$* E *et pour tout voisinage $\mathcal{V}'$ du point $f(m)$ de* E′, *il existe un nombre n_0 tel que, pour tout $n > n_0$, on puisse trouver un voisinage $\mathcal{V}_n$ de m dans* E *dont l'image par f_n soit incluse dans $\mathcal{V}'$.*

Remarquons ici qu'il est immédiat que toute suite convergente d'applications continues est une suite presque continue.

On peut se faire une idée assez nette de ce qu'est une suite convergente presque continue de fonctions numériques $f_n(x)$ en remarquant que la fonction limite est aussi la limite des fonctions semi-continues supérieurement

$$f'_n(x) = \overline{f_n(x)},$$

dont l'oscillation, pour tout x, tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Théorème 3. — *L'application limite $f(m)$ d'une suite convergente presque continue d'applications $f_n(m)$ d'un espace localement compact* E *dans un espace métrique* E′ *est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait de* E.

Démonstration. — On peut évidemment toujours se ramener au cas où E est compact. C'est dans ce cas que nous nous placerons.

Nous allons montrer que l'ensemble des points de continuité de $f(m)$ est un résiduel de E.

Nous appelons oscillation de $f(m)$ au point $m \in E$ la borne inférieure du diamètre de l'image dans E', par $f(m)$, des voisinages de m; soit $\omega(m)$ cette oscillation.

Il est évident que pour tout $l > 0$, l'ensemble des points de E en lesquels $\omega(m) \geq l$ est un ensemble fermé. L'ensemble des points de discontinuité de $f(m)$ est donc un F_σ. Si son complémentaire n'est pas un résiduel de E, c'est qu'il existe un nombre $l_0 > 0$ et un ensemble ouvert non vide $\Omega \subset E$ tels qu'en tout point m de Ω, on ait $\omega(m) > l_0$.

Soit ε un nombre > 0 quelconque; soit m_1 un point de Ω. Par hypothèse, il existe un nombre n_1 et un voisinage $\mathcal{V}(m_1)$ de m_1 tel que $\mathcal{V}(m_1) < \Omega$ et tel que pour tout $m \in \mathcal{V}(m_1)$, on ait

$$\delta[f_{n_1}(m), f(m_1)] < \varepsilon;$$

en désignant par $\delta(a, b)$ la distance des points a, b de l'espace métrique E'.

D'autre part on peut trouver un point $m_2 \in \mathcal{V}(m_1)$ et un voisinage $\mathcal{V}(m_2)$ de m_2 tels que

$$\delta[f(m_1), f(m_2)] \geq \frac{l}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{V}(m_2) < \mathcal{V}(m_1),$$

et tels que pour un certain nombre $n_2 > n_1$ on ait, pour tout $m \in \mathcal{V}(m_2)$, la relation

$$\delta[f_{n_2}(m), f(m_2)] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De façon générale, supposons définis les points $m_1, m_2, \ldots, m_p$, ainsi que les voisinages $\mathcal{V}(m_1), \ldots, \mathcal{V}(m_p)$ de ces points. On peut trouver un point $m_{p+1} \in \mathcal{V}(m_p)$ et un voisinage $\mathcal{V}(m_{p+1})$ de m_{p+1} tels que

$$\delta[f(m_p), f(m_{p+1})] \geq \frac{l}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{V}(m_{p+1}) < \mathcal{V}(m_p)$$

et tels que pour un certain nombre $n_{p+1} > n_p$, on ait, pour tout $m \in \mathcal{V}(m_{p+1})$ la relation

$$\delta[f_{n_{p+1}}(m), f(m_{p+1})] < \frac{\varepsilon}{2^{p+1}}.$$

Soit m_∞ un point commun aux ensembles décroissants

$$\mathcal{V}(m_1) > \mathcal{V}(m_2) > \ldots.$$

En m_∞ la suite $f_{n_i}(m_\infty)$ ne peut avoir de limite puisqu'on peut en extraire deux points consécutifs d'indices arbitrairement grands, et de distance $\delta > \left(\frac{l_0}{2} - \alpha\right)$, quel que soit α.

On arrive donc bien à une contradiction.

Remarque. — On peut définir de façon naturelle la notion de suite convergente *presque semi-continue supérieurement* d'applications d'un espace E dans l'espace $2^{E'}$ attaché à un espace E'. On montre alors aisément qu'une telle suite a même limite qu'une suite convergente d'applications semi-continues supérieurement.

L'extension de ce résultat aux suites presque semi-continues inférieurement est moins immédiate.

4. Définition de la classe d'une application. — Par la suite il s'agira toujours d'applications f d'un espace localement compact E dans un espace métrique compact E'. Nous adopterons la définition suivante :

1° f est de classe 0 si elle est continue;

2° f est de classe 1 au plus si elle est ponctuellement discontinue sur tout sous-ensemble parfait de E.

Pour tout ordinal α de 2e classe, les applications de classe α se définissent par des passages à la limite, à partir de celles de classe 0 et 1, par récurrence transfinie.

Il résulte du théorème 3 que toute f limite d'applications de classe 0 est au plus de classe 1; l'inverse n'est pas toujours vrai, d'après une remarque de Hausdorff (1).

5. Étude de la classe du contingent et du paratingent d'un ensemble cartésien. — Désignons par Θ l'espace métrique des directions de demi-droite d'un espace cartésien R_n, métrisé en prenant comme distance de deux telles directions leur angle cartésien.

L'espace Θ est compact et homéomorphe à la sphère unitaire S_{n-1} de R_n.

Désignons par 2^Θ l'espace des sous-ensembles fermés de Θ métrisé

(1) *Voir* Hausdorff [I], p. 269 et Kuratowski [I], p. 281.

au moyen de l'écart de Hausdorff entre deux sous-ensembles fermés de Θ.

L'espace 2^{Θ} est compact et séparable.

Soit maintenant E un ensemble fermé de R_n ; son contingent (1) C(M) au point M est un ensemble fermé de demi-droites. L'ensemble des directions de ces demi-droites est donc un sous-ensemble fermé de Θ. La fonction C(M) réalise donc une application de E dans 2^{Θ}.

Le théorème suivant montre quelle est la nature topologique de cette application.

THÉORÈME 4. — *Le contingent* C(M) *d'un ensemble fermé cartésien* E *au point* M *est une fonction de 2e classe au plus du point* M. *Plus précisément,* C(M) *est la limite d'une suite décroissante d'ensembles* $C_i(M)$ *présentant, pour tout* i, *la semi-continuité inférieure d'inclusion.*

Démonstration. — Soit ρ un nombre > 0. Désignons par $S_\rho(M)$ la sphère *ouverte* (2) de rayon ρ et de centre $M \in E$.

Soit $C_\rho(M)$ la fermeture de l'ensemble des rayons MP joignant M à un point $P \in E . S_\rho(M)$.

L'ensemble $C_\rho(M)$, fonction de M, possède la semi-continuité inférieure d'inclusion. Il suffit pour le prouver de montrer que tout rayon Δ de $C_\rho(M)$ est un élément limite de $C_\rho(M')$ lorsque $M' \to M$.

En effet, pour tout ε il existe un point P de $C_\rho(M)$ tel que $\delta(\overrightarrow{MP}, \Delta) < \varepsilon$. Or, dès que MM' est assez petit, on a $P \in C_\rho(M')$. Comme $\delta(\overrightarrow{M'P}, \overrightarrow{MP}) \to 0$ lorsque $MM' \to 0$, la distance angulaire de Δ à $C_\rho(M')$ tend bien vers zéro lorsque $MM' \to 0$.

Or le contingent C(M) de E en M est défini par

$$C(M) = \lim_{\rho \to 0} [C_\rho(M)].$$

Comme $C_\rho(M)$ est une fonction décroissante de $\frac{1}{\rho}$, et que $C_\rho(M)$

(1) *Voir* BOULIGAND [1].

(2) Lorsque la métrique cartésienne de E est équivalente à une métrique convexe, on peut remplacer ces sphères ouvertes $S_\rho(M)$ par des sphères fermées relatives à cette nouvelle métrique.

est, à cause de sa semi-continuité inférieure une fonction de 1[re] classe, le théorème est entièrement démontré.

Remarque 1. — Lorsque E est une variété de l'espace R_n, on peut mettre C(M) sous la forme plus précise suivante

$$\text{(1)} \qquad C(M) = \lim_{R \to 0} \left[\lim_{r \to 0} C_{r,R}(M) \right] \qquad \text{avec} \quad 0 < r < R < \infty,$$

où $C_{r,R}(M)$ est une fonction continue de M qui croît lorsque r décroît.

En effet, supposons que E soit une image topologique d'un espace cartésien R_p par une homéomorphie H. Dans l'espace R_p, on désignera par $k_{r,R}(m)$ l'ensemble des points m' tels que $r \leqq mm' \leqq R$.

Si $M = H(m)$, posons

$$K_{r,R}(M) = H[k_{r,R}(m)]$$

et désignons par $C_{r,R}(M)$ l'ensemble des rayons MP, où $P \in K_{r,R}(M)$.

L'ensemble $C_{r,R}(M)$ est évidemment une fonction continue de M. Comme de plus C(M) est bien donné par la formule (1) ci-dessus, le résultat annoncé est bien établi.

Remarque 2. — On sait que le *paratingent* (¹) d'un ensemble cartésien s'étudie plus facilement que le contingent du fait qu'il possède la semi-continuité supérieure d'inclusion (²). Cette simplicité se révèle aussi dans l'évaluation de sa classe. En effet, le théorème 2 montre que *ce paratingent est une fonction de* 1[re] *classe au plus*.

Remarque 3. — La démonstration du théorème 3, ainsi que celle de beaucoup d'autres théorèmes de ce Mémoire, fait appel à très peu de propriétés du contingent : un rayon de C(M) est l'élément limite d'une suite de rayons joignant M à un autre point $M' \in E$.

Plus généralement, on peut associer à tout couple ordonné (M, M') de points distincts de E, un élément $\Delta(M, M')$ d'un espace compact auxiliaire E (ici l'espace Θ des directions de demi-droite) de telle façon que cet élément varie continûment avec le couple (M, M'). On définit alors naturellement le *contingent* de E en un point $M \in E$

(¹) *Voir* BOULIGAND [I].
(²) *Voir* BOULIGAND [I].

comme ensemble d'accumulation dans E′ de $\Delta(M, M')$ lorsque $M' \to M$. Ce *contingent* possède toutes les propriétés fonctionnelles du contingent ordinaire.

On étudierait de même des *paratingents* abstraits, et même des contingents et des paratingents d'ordre n, associés à la donnée d'un élément abstrait $\Delta(M_1, M_2, \ldots, M_n)$ fonction continue de n points distincts M_i de E (¹), où E pourrait être d'ailleurs un espace compact quelconque.

C'est pour ne pas perdre contact avec la réalité géométrique que nous n'avons pas dans ce Mémoire adopté ce point de vue abstrait, malgré la simplicité et l'unité qu'il peut parfois apporter.

6. Étude de variétés linéaires attachées a certains contingents. — On ne peut améliorer le théorème 4. En effet, le contingent d'une courbe plane $y = f(x)$ peut ne pas être une fonction de 1re classe, puisque les nombres dérivés extrêmes de $f(x)$ peuvent être des fonctions de 2e classe de x.

Pour trouver des cas étendus où C(M) soit de 1re classe, nous sommes donc conduits à faire une hypothèse sur la structure des ensembles C(M), en fait nous allons plutôt étudier la classe de certaines fonctions liées à C(M), lorsque C(M) est soumis à certaines conditions géométriques.

Nous allons démontrer un théorème dont voici un cas particulier. Si C(M) est en tout point M de E porté par une seule droite, la direction de cette droite est une fonction de 1re classe au plus.

Pour généraliser ce cas particulier, on pourrait penser à considérer le cas où, par exemple, C(M) est, en tout point, situé dans un plan unique; mais nous montrerons par un contre-exemple que ceci ne suffit pas pour que la direction de ce plan soit une fonction de 1re classe au plus de M; en fait il faut faire l'hypothèse supplémentaire que C(M) contient deux rayons dont l'angle ne soit pas trop voisin de 0.

(¹) Pour l'introduction de tels contingents et paratingents abstraits, voir C. Pauc, *C. R. Acad. Sc.*, 203, 1936, p. 153; 204, 1937, p. 841; *Journal de Crelle*, 1939 et 1940.

ou de π, ce qui assure en quelque sorte une rigidité convenable à la planéité du contingent.

Ceci nous amène à introduire une définition.

Définition. — *Soient* $\Delta_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, *n directions de droite d'un espace cartésien quelconque.*

Nous appellerons coefficient d'indépendance linéaire *des directions* Δ_i *le volume n-dimensionnel* λ *d'un parallélépipède construit sur n vecteurs unitaires parallèles aux n directions* Δ_i.

Il est immédiat que $\lambda = 0$ si, et seulement si, les directions Δ_i sont linéairement dépendantes, autrement dit si elles sont contenues dans une infinité de variétés linéaires à n dimensions.

Il résulte donc de la définition que si l'on a dans un espace cartésien quelconque deux variétés linéaires L_n distinctes, chacune contenant n directions de droite ayant un coefficient d'indépendance linéaire non nul, il n'existe aucune variété linéaire L_n contenant ces $2n$ directions de droite.

Théorème 5. — *Soient, dans un espace cartésien, un ensemble quelconque* E *et un ensemble parfait* P. *S'il existe un entier n et un nombre* $\lambda_0 > 0$ *tels que, en tout point* M *de* P *le contingent* C(M) *de* E *soit contenu dans une variété linéaire* $L_n(M)$ *à n dimensions et contienne n rayons dont les directions aient un coefficient d'indépendance linéaire* $\lambda > \lambda_0$, *alors la variété* $L_n(M)$ *est une fonction ponctuellement discontinue de* M *sur* P *et sur tout sous-ensemble parfait de* P.

Démonstration. — Soient E, P, n, λ_0 des éléments satisfaisant aux hypothèses du théorème. Il suffit évidemment, pour démontrer le théorème, de démontrer que $L_n(M)$ est ponctuellement discontinue sur P.

S'il n'existait sur P aucun point de continuité pour $L_n(M)$, on pourrait trouver un nombre $\omega > 0$ tel que, pour tout point M d'une portion de P, il y ait des points M' de cette portion arbitrairement voisins de M et tels que $\delta[L_n(M'), L_n(M)] > \omega$. Pour simplifier les notations, nous continuerons à désigner cette portion par P.

Si ε est un nombre positif quelconque, pour tout point M de P, les hypothèses sur la structure de C(M) entraînent l'existence de n points

$N_1, N_2, \ldots, N_n$ de E tels que : 1° les demi-droites MN_i fassent avec $L_n(M)$ un angle inférieur à ε; 2° les droites MN_i aient un coefficient d'indépendance linéaire $>(\lambda_0-\varepsilon)$; 3° toutes les distances MN_i soient inférieures à ε.

Nous dirons que ces points N_i sont associés à M et à ε.

Soit alors M_1 un point quelconque de P et $\varepsilon_1=\varepsilon$; soient $N_i^1 (i=1, 2, \ldots, n)$ n points associés à M_1 et ε_1. On peut trouver un voisinage ouvert $\mathcal{V}(M_1)$ de M_1, de diamètre $<\varepsilon_1$, tel que pour tout point M de $P.\mathcal{V}(M_1)$: 1° les demi-droites MN_i^1 fassent avec $L_n(M_1)$ un angle $<\varepsilon_1$; 2° les droites MN_i^1 aient un coefficient d'indépendance linéaire $>(\lambda_0-\varepsilon_1)$; 3° toutes les distances MN_i^1 soient $<\varepsilon_1$.

De façon générale, supposons définis $M_1, M_2, \ldots, M_p$, ainsi que les ensembles $(N_1^i, N_2^i, \ldots, N_n^i)$ et les voisinages ouverts $\mathcal{V}(M_i)$ des points M_i (où $i=1, 2, \ldots, p$). Soit M_{p+1} un point quelconque de $P.\mathcal{V}(M_p)$ tel que $\delta[L_n(M_{p+1}), L_n(M_p)]>\omega$; soient $N_1^{p+1}, \ldots, N_n^{p+1}$, n points associés à M_{p+1} et à ε_{p+1}, où $\varepsilon_{p+1}=\varepsilon.2^{-p}$.

On peut trouver un voisinage ouvert $\mathcal{V}(M_{p+1})$ de M_{p+1}, de diamètre $<\varepsilon_{p+1}$, tel que $\mathcal{V}(M_{p+1})\ll\mathcal{V}(M_p)$ et tel que pour tout point M de $P.\mathcal{V}(M_{p+1})$, les couples MN_i^{p+1} aient par rapport à $L_n(M_{p+1})$ et ε_{p+1} les mêmes propriétés que les couples MN_i^1 ci-dessus par rapport à $L_n(M_1)$ et ε_1.

Soit M_∞ le point commun à tous les $\mathcal{V}(M_i) (i=1, 2, \ldots)$; c'est un point de P. Il est évident qu'en M_∞ le contingent de E contient au moins deux systèmes de n rayons, situés dans deux variétés linéaires distinctes à n dimensions et d'écart $\delta\geqq\omega$, chacun des systèmes ayant un coefficient d'indépendance linéaire $\geqq\lambda_0$. Donc en M_∞ le contingent de E ne peut être contenu dans une seule variété linéaire à n dimensions, ce qui est en contradiction avec les hypothèses.

Remarque. — Il résulte immédiatement de la démonstration que sur tout sous-ensemble parfait de P, l'ensemble des points de continuité de $L_n(M)$ forme tout un résiduel de P (ce résiduel étant de plus, évidemment, un G_δ).

7. Cas particulier $n=1$. — Nous avons déjà remarqué la simplification qui s'introduit lorsqu'on fait $n=1$ dans le théorème précédent.

Il n'est plus alors nécessaire de postuler explicitement l'existence du nombre $\lambda_0 > 0$ puisque l'on est assuré *a priori* que $\lambda = 1$ en tout point.

Cette simplification permet de donner, du cas particulier $n = 1$, une seconde démonstration. Celle-ci fait appel au théorème 3 relatif aux suites convergentes presque continues.

Soit E un ensemble fermé cartésien et P un sous-ensemble parfait de E en tout point M duquel le contingent C(M) de E est porté par une seule droite.

Pour tout $M \in P$, soit $S_n(M)$ l'ensemble des points M' de E tels que $MM' \leq \frac{1}{n}$ (n entier > 0). Soit $\Delta_n(M)$ la droite portant l'un des diamètres de $S_n(M)$. Il est évident que, en tout point M de P, on a, en désignant par L(M) la droite portant le contingent C(M),

$$L(M) = \lim_{n \to \infty} [\Delta_n(M)].$$

D'autre part, pour tout $M_0 \in P$, l'oscillation de $\Delta_n(M)$ en M_0 tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Il résulte donc immédiatement du théorème 3 que L(M) est ponctuellement discontinue sur tout sous-ensemble parfait de P.

8. Extension du théorème 5 a des ensembles cartésiens paramétrés. — Le théorème 5, valable pour tous les ensembles fermés cartésiens est en particulier valable pour les arcs simples; mais on conçoit que, si ce théorème n'était pas vérifié pour un arc ayant un seul point double, on puisse, dans certains cas, le vérifier après une convention convenable, en dédoublant ce point double par une paramétrisation de l'arc.

Ceci nous amène à étendre le théorème 3 en remplaçant les ensembles cartésiens étudiés ci-dessus par des ensembles cartésiens paramétrés. Nous aurons besoin pour cela d'une définition.

Définition. — *Soit* T *une application continue d'un espace topologique* E *dans un espace cartésien quelconque* R_n. *On désignera par des petites lettres les points de* E, *par des grandes lettres les points de* R_n [*Exemple* $M = T(m)$].

Pour tout $m \in E$, *on appelle* contingent de l'application T en m *l'ensemble d'accumulation éventuel des demi-droites* MM' *d'origine* M

$[\mathrm{M} = \mathrm{P}(m), \mathrm{M}' = \mathrm{T}(m')]$ *lorsque le point* m' *de* E *tend vers* m *en évitant les points en lesquels* $\mathrm{M} = \mathrm{M}'$.

Lorsque m *est tel qu'en tout point* m' *d'un de ses voisinages on ait* $\mathrm{T}(m) = \mathrm{T}(m')$, *on dit que le contingent de l'application est vide.*

Il est immédiat que l'ensemble des points de E en lesquels le contingent de l'application T n'est pas vide est fermé.

Lorsqu'une confusion sera possible, nous dirons *contingent ordinaire* lorsqu'il s'agira du contingent d'ensembles cartésiens non paramétrés.

Théorème 5'. — *Soit* T *une application continue d'un espace topologique* E *dans un espace cartésien. Si pour un sous-ensemble parfait compact* P *de* E, *il existe un entier* n *et un nombre* $\lambda_0 > 0$ *tels que, pour tout* $m \in \mathrm{P}$, *le contingent de l'application* T *soit contenu dans une variété linéaire* $\mathrm{L}_n(m)$ *à* n *dimensions et contienne* n *rayons dont les directions aient un coefficient d'indépendance linéaire* $\lambda > \lambda_0$, *alors la variété linéaire* $\mathrm{L}_n(m)$ *est une fonction ponctuellement discontinue de* m *sur* P *et sur tout sous-ensemble parfait de* P.

Démonstration. — Elle se fait de la même façon que celle du théorème 5. Il suffit de remplacer dans cette démonstration les lettres majuscules par des lettres minuscules et d'utiliser la compacité de P, comme nous l'avons fait dans la démonstration du théorème 3.

9. Construction d'un contre-exemple. — Dans l'énoncé du théorème 5, l'hypothèse portant sur l'existence d'une constante $\lambda_0 > 0$ est essentielle. Nous allons en effet construire dans R_3 un continu K dont le contingent C(M) en tout point contient au moins trois rayons et est contenu dans un plan, et tel cependant que le plan contenant C(M) varie de façon totalement discontinue sur un certain sous-ensemble parfait P de K.

Le continu K est la somme de deux continus K_1 et K_2 qui ont en commun l'ensemble parfait P (*voir fig.* 1).

Soient dans R_3 trois axes rectangulaires orientés $\mathrm{O}xyz$.

Construction de K_1. — Soit, sur l'axe $x'x$, P l'ensemble parfait triadique classique de Cantor construit sur le segment (0 — 1).

K_1 est la réunion de P et de triangles isoscèles τ construits sur les intervalles contigus à P et obtenus ainsi : pour tout intervalle fini contigu à P, si 3^{-n} est sa longueur, le triangle isoscèle τ correspondant a pour base cet intervalle, pour angle à la base 3^{-n}, et son demi-plan fait avec $\overrightarrow{Oy}$ un angle de n radians.

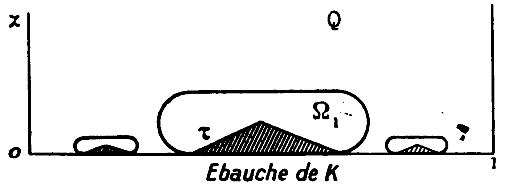

Fig. 1.

Il est immédiat qu'en tout point de 2[e] espèce de P, le contingent de K_1 se compose de deux rayons portés par $x'x$. En tout point de 1[re] espèce de P, le contingent de K_1 se compose de toutes les demi-droites contenues dans l'angle du triangle τ dont M est un sommet, et d'une autre demi-droite portée par $x'x$.

Construction de K_2. — Le continu K_2 est situé dans le demi-plan xOz, $z \geqq 0$. Il se déduit du carré Q ayant pour côté le segment $(0 - 1)$ de $x'x$ en enlevant de Q une suite de domaines ouverts.

De façon générale, si AB est un segment de l'axe $x'x$ de longueur l, nous désignerons par $\Omega(AB, \rho)$ (où $0 < \rho \leqq 1$) le domaine ouvert convexe suivant : il est limité par AB, par le segment $A'B'$ déduit de AB par une translation parallèle à $\overrightarrow{Oz}$ d'amplitude $l.\rho$, et par les deux demi-cercles de diamètres AA', BB' choisis de telle sorte que le domaine soit convexe.

Désignons alors par σ_n tout intervalle contigu à P et de longueur 3^{-n}. Soit Ω_1 le domaine $\Omega(\sigma_1, \rho_1)$, où ρ_1 est choisi assez petit pour que tout point de $(\overline{\Omega_1} - \sigma_1)$ soit intérieur à Q; puis soit Ω_2 tout domaine $\Omega(\sigma_2, \rho_2)$, où ρ_2 est choisi assez petit pour que tout point de $(\overline{\Omega_2} - \sigma_2)$ soit intérieur à $(Q - \overline{\Omega_1})$; de façon générale, désignons par Ω_p tout domaine $\Omega(\sigma_p, \rho_p)$, où ρ_p est choisi assez petit pour que tout point de $(\overline{\Omega_p} - \sigma_p)$ soit intérieur à $\left[Q - \bigcup_1^{(p-1)} \overline{\Omega_i}\right]$.

On pose alors $K_2 = Q - \bigcup_1^{\infty} \Omega_i$.

Par construction K_2 est un continu. En tout point de 1^{re} espèce de P, K_2 a un contingent porté par $x'x$. En tout point M de 2^e espèce de P, K_2 a pour contingent le demi-plan $z \geq 0$; coupons en effet K_2 par une demi-droite D de ce demi-plan et d'origine M; notre affirmation sera démontrée si l'ensemble $D.K_2$ est parfait. Or ceci est évident si D est portée par $x'x$; sinon cela résulte de ce que tous les domaines Ω_i sont convexes et ont leurs frontières disjointes deux à deux.

Posons $K = K_1 + K_2$. En tout point de P, le contingent de K est situé dans un plan et contient au moins trois rayons distincts.

D'autre part, dans tout voisinage de tout point M de P, on peut trouver deux points M′, M″ de 1^{re} espèce de P en lesquels les contingents de K sont dans des plans dont l'angle est égal à 1 radian. Donc le plan de C(M) varie bien de façon totalement discontinue sur P.

10. Étude détaillée des applications continues a contingent partout porté par une droite. — Théorème 6. — *Pour toute application continue* T *d'un espace compact* E *dans l'espace cartésien* R_n, *lorsque en tout point m de* E *le contingent de l'application est vide ou porté par une droite de direction g(m), l'ensemble des points de* E *en lesquels g(m) est déterminée est un ensemble fermé* F, *et g(m) est une fonction de m ponctuellement discontinue sur tout sous-ensemble parfait de* F.

Il en résulte qu'on peut, pour tout nombre $\varepsilon > 0$, *attacher à tout sous-ensemble fermé* P *de* E *un ensemble ouvert* D *de* E *contenant des points de* P *de telle sorte que :*

1° *L'angle d'une corde quelconque joignant un point de* $T(\overline{D}.P)$ *à un point de* $T(\overline{D})$ *avec toute autre corde analogue, soit* $< \varepsilon$.

2° *Il existe un* $(n-1)$*-hyperplan* H *tel que tout* $(n-1)$*-hyperplan passant par un point de* $T(\overline{D}.P)$ *et parallèle à* H *ne rencontre* $T(\overline{D})$ *qu'en ce point.*

Si de plus on suppose que E *est localement connexe, on peut prendre pour* D *un ensemble ouvert connexe de* E, *de manière que :*

3° *Le contingent ordinaire de* $T(\overline{D}.P)$ *en chacun de ses points* M *soit, ou bien vide, ou bien réduit à deux rayons faisant un angle compris entre* π *et* $(\pi-\varepsilon)$; *on peut même choisir* D *pour que ce contingent soit* *porté par une droite unique quand* T *n'a son contingent vide en aucun point de* E.

Démonstration. — La 1^{re} partie du théorème est un cas particulier du théorème 5′ et d'une remarque qui le précède. Démontrons la seconde partie.

Pour fixer les idées et simplifier le langage, nous ferons la démonstration dans le cas où $n=2$; nous supposerons éventuellement le plan R_2 rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy.

Première propriété. — Si elle n'était pas vérifiée, sur tout ensemble ouvert D de E contenant des points de P, on pourrait trouver deux couples de points (m, n), (m', n'), où m et $m' \in P$, n et $n' \in D$, de telle sorte que dans le plan R_2, les cordes homologues MN, M′N′ fassent un angle $> \varepsilon$.

On montrerait alors, par un procédé calqué sur celui de la démonstration du théorème 3, l'existence d'un point a de P en lequel le contingent de l'application devrait contenir deux rayons portés par deux droites faisant un angle $> \varepsilon$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous désignerons maintenant par D un ensemble ouvert de E contenant des points de P et pour lequel la 1^{re} propriété est vérifiée.

Deuxième propriété. — Elle résulte immédiatement de la 1^{re} propriété. Prenons en effet pour $x'x$ un axe contenant une des cordes joignant un point de $T(\overline{D}.P)$ à un point de $T(\overline{D})$. [Si une telle corde n'existait pas, c'est que $T(\overline{D})$ serait réduit à un point et alors on prendrait pour $x'x$ un axe quelconque.] Pour le $(n-1)$-hyperplan H du théorème, on peut prendre alors par exemple l'axe $y'y$ perpendiculaire à $x'x$.

Ces deux premières propriétés montrent que l'ensemble $T(\overline{D})$ est situé dans l'ensemble fermé défini par $f_1(x) \leqq y \leqq f_2(x)$, où $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont des fonctions lipschitziennes définies sur un segment de $x'x$, et telles que les courbes $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ aient pour intersection l'ensemble $T(\overline{D}.P)$.

Troisième propriété. — On suppose maintenant E localement connexe. On peut alors toujours supposer que D est connexe.

L'ensemble $T(\overline{D})$ est alors un continu; et l'on remarque que tout sous-continu de $T(\overline{D})$ contenant un point M de $T(\overline{D}.P)$ contient aussi tous les points de $T(\overline{D}.P)$ situés, soit à droite, soit à gauche de M, et dans un certain voisinage de M.

Soit alors $M_1, M_2, \ldots$ une suite de points de $T(\overline{D}.P)$ tendant vers M, par exemple à droite de M. Il existe sur E une suite de points $m_1, m_2, \ldots$ de $\overline{D}.P$ tels que $T(m_i) = M_i (i = 1, 2, \ldots)$: soit m un point d'accumulation de cette suite. On a $T(m) = M$; en m l'application T a un contingent porté par une droite unique; comme d'autre part l'image de tout voisinage de m contient un continu qui contient tous les points $M_1, M_2, \ldots$ d'indice assez grand, il en résulte que $T(\overline{D}.P)$ a en M, à droite, un contingent réduit à un seul rayon. Le même raisonnement peut se faire également à gauche; la propriété annoncée en résulte aussitôt.

Supposons de plus maintenant qu'aucun point m de E ne possède un voisinage dont l'image dans R_2 soit réduite à un point.

Soit M un point de $T(\overline{D}.P)$ qui soit point d'accumulation de cet ensemble à droite et à gauche. Désignons par A (resp. B) l'ensemble des points de $\overline{D}$ dont l'image est strictement à droite (resp. à gauche) de M.

Si $\overline{A} + \overline{B} = \overline{D}$, comme $\overline{D}$ est connexe, il en résulte que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ ont au moins un point commun m; on a $T(m) = M$ et en un tel point m (qui ne fait d'ailleurs pas forcément partie de P), le contingent de l'application se compose de deux rayons opposés. Donc en M le contingent ordinaire de $T(\overline{D}.P)$ est porté par une seule droite.

Si $\overline{A} + \overline{B} \neq \overline{D}$, soit $m \in D - (\overline{A} + \overline{B})$; un tel point m possède un voisinage dont tous les points ont pour image M. Comme nous avons exclu la possibilité de tels points m, on voit qu'en chacun de ses points, l'ensemble $T(\overline{D}.P)$ a bien un contingent porté par une droite.

Par contre, lorsqu'on n'exclut pas la possibilité de tels points m, on peut aisément montrer par des exemples que l'ensemble des points de $T(\overline{D}.P)$ en lesquels le contingent de $T(\overline{D}.P)$ n'est pas porté par une droite, peut être partout dense sur cet ensemble, même lorsque E est homéomorphe à un segment de droite.

Remarque. — Soulignons ici le complément d'information qu'apporte le fait que l'espace E soit localement connexe.

Les mêmes précisions sont valables lorsque E est un ensemble cartésien et que T est l'application canonique de E sur lui-même.

THÉORÈME 7. — *Pour toute application continue* T *d'un espace compact* E *dans l'espace euclidien* R_n, *lorsqu'en tout point* m *de* E *le contingent de l'application est vide ou porté par une droite de direction constante* Δ, *l'ensemble* T(E) *est un ensemble compact dont le contingent ordinaire en tout point est porté par une parallèle à* Δ.

Il en résulte que toute composante connexe de T(E) *est un point ou un segment parallèle à* Δ, *et que la projection de* T(E) *sur un* $(n-1)$-*hyperplan perpendiculaire à* Δ *a une mesure linéaire nulle et est une réunion dénombrable d'ensembles fermés dont chacun est situé sur un arc rectifiable.*

Démonstration. — L'ensemble T(E), image d'un espace compact, est compact. Supposons qu'en un de ses points M, son contingent possède un rayon $\overrightarrow{Mt}$ non parallèle à Δ; soit $M_1, M_2, \ldots$ une suite de points de T(E) tendant vers M tangentiellement à $\overrightarrow{Mt}$; tout point M_i est image d'au moins un point m_i de E; si m est un point d'accumulation des m_i, on a $T(m) = M$, et au point m, le contingent de l'application contient le rayon $\overrightarrow{Mt}$, contrairement à l'hypothèse. Donc en tout point de T(E), le contingent ordinaire est porté par une parallèle à Δ.

On peut alors montrer simplement que la projection orthogonale de T(E) sur un hyperplan à $(n-1)$ dimensions perpendiculaire à Δ est de mesure linéaire nulle et est située sur une réunion dénombrable d'arcs rectifiables. Mais ceci résulte aussi directement d'un théorème général de M. F. Roger [1].

Or cet ensemble de mesure linéaire nulle est fermé; il est donc totalement discontinu. Donc toute composante connexe de T(E) est un point ou un segment de droite parallèle à Δ. En particulier, si E

---

[1] *Voir* ROGER [I].

contient n (resp. $\aleph_0$) composantes connexes, T(E) se compose d'au plus n (resp. $\aleph_0$) points ou segments parallèles à Δ.

Ajoutons qu'un tel ensemble T(E) n'est coupé qu'en un nombre fini de points par tout hyperplan non parallèle à Δ. Il en résulte en particulier que, pour tout $l > 0$, il n'y a dans T(E) qu'un nombre fini de composantes connexes de diamètre $> l$.

Réciproque. — Si A est un ensemble compact cartésien dont le contingent en tout point est porté par une droite parallèle à une droite fixe Δ, A peut être considéré comme un des ensembles T(E) ci-dessus. Il suffit en effet de prendre $E \equiv A$ et de prendre pour T l'application canonique de A sur lui-même.

Nous allons montrer maintenant que le résultat relatif à la mesure de la projection de T(E) sur un hyperplan ne peut être amélioré.

Plus précisément :

Si $\mathcal{A}$ est un ensemble compact quelconque de mesure linéaire nulle situé sur l'axe $x'x$ du plan xOy, on peut définir sur $\mathcal{A}$ une fonction $y = \varphi(x)$ continue et croissante, dont l'image A *dans le plan ait en tout point son contingent et même son paratingent portés par une parallèle à Oy.*

Prenons en effet pour segment $(0 - 1)$ de $x'x$ le segment minimum contenant $\mathcal{A}$.

Soit ω_n l'ensemble des intervalles contigus à $\mathcal{A}$ dont la longueur δ vérifie $\frac{1}{n+1} < \delta \leqq \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, et soit l_n la mesure linéaire de ω_n. La série de terme général l_n est convergente et a pour somme 1.

On sait qu'on peut trouver une suite de nombres positifs α_n tendant vers $+\infty$ avec n, et tels que la série $\sum_n \alpha_n l_n$ converge.

Soit alors $g(x)$ la fonction définie sur $(0 - 1)$, égale à 0 en tout point de $\mathcal{A}$, et égale à α_n en tout point de ω_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

La restriction à l'ensemble $\mathcal{A}$ de la fonction $\varphi(x) = \int_0^x g(x)\,dx$ répond évidemment à la question.

Il est probable que ce résultat peut s'étendre et qu'on peut énoncer :

Si L_{n-1} est un hyperplan à $(n-1)$ dimensions de l'espace R_n, et $\mathcal{A}$ un sous-ensemble compact de L_{n-1}, de mesure linéaire nulle, et situé sur une réunion dénombrable d'arcs rectifiables, $\mathcal{A}$ est la projection orthogonale sur L_{n-1} d'un ensemble compact A de R_n dont le contingent en tout point est porté par une droite perpendiculaire à $L_{(n-1)}$.

Cet énoncé se vérifie immédiatement dans le cas où $\mathcal{A}$ est porté par un arc rectifiable, en utilisant le résultat ci-dessus relatif aux ensembles $\mathcal{A}$ linéaires.

Remarque. — On ne pourrait pas généraliser le théorème 7 en remplaçant la direction de droite Δ par une direction de plan, car nous avons pu montrer qu'il existe dans R_3 des arcs simples de Jordan dont aucun sous-arc n'est plan, et tels cependant qu'en tout point, leur contingent et même leur paratingent soient contenus dans un plan parallèle à un plan fixe [1].

CHAPITRE II.

Dérivée et primitive d'une fonction.

11. Définition et étude de la dérivée d'une fonction par rapport a une autre. Définition. — *Soient* $F(m)$ *et* $\alpha(m)$ *deux fonctions à valeurs réelles définies en tout point d'un espace topologique* E. *On dit que* $F(m)$ *admet au point m, par rapport à* $\alpha(m)$, *une dérivée* déterminée $g(m)$, *finie ou infinie* [2] ($+\infty$ *et* $-\infty$ *étant considérés comme un seul et même nombre*), *si le rapport* $\dfrac{F(m')-F(m)}{\alpha(m')-\alpha(m)}$ *tend vers* $g(m)$ *lorsque* m' *tend vers* m *en évitant les points qui annulent les deux termes du rapport.*

Lorsque pour tout point m' *d'un voisinage de m les deux termes de ce rapport sont nuls, on dit qu'en m la dérivée est* indéterminée.

---

(1) *Voir* Choquet [I].

(2) Il est artificiel en général, lorsque la dérivée est infinie, de vouloir lui donner un signe déterminé; cette discrimination ne prend vraiment un sens que lorsque E est un segment de droite et $\alpha(x)$, une fonction croissante ou décroissante de x.

Nous nous intéresserons surtout au cas où $\alpha(m)$ et $F(m)$ sont continues sur E. La définition précédente peut alors se traduire en langage géométrique.

Associons aux fonctions $\alpha(m)$ et $F(m)$ l'application continue T de E sur le plan xOy définie par les formules

$$x = \alpha(m), \qquad y = F(m).$$

Dire que la dérivée $g(m)$ de $F(m)$ par rapport à $\alpha(m)$ est déterminée (resp. indéterminée) en m revient à dire que le contingent de l'application T au point m est non vide (resp. vide) et porté par une droite de direction $g(m)$.

Nous désignerons désormais par $\mathcal{C}$ l'espace des directions de droite du plan xOy. L'espace $\mathcal{C}$ est homéomorphe à une circonférence; le terme « arc de $\mathcal{C}$ » a donc un sens immédiat.

C'est dans ce langage géométrique, plus maniable, que nous formulerons les résultats relatifs aux fonctions dérivées.

Définition. — *Pour toute application continue d'un espace* E *dans un espace cartésien, nous dirons qu'au point m de* E *l'application a une vraie tangente (resp. une* tangente de rebroussement) *lorsque le contingent de l'application en m est non vide et réduit à deux rayons opposés (resp. réduit à un seul rayon).*

Théorème 8. — *Soit* T *une application continue d'un espace compact connexe* E *dans un plan, admettant en tout point m de* E *une tangente, vraie ou de rebroussement, de direction* $g(m)$.

1° α. *Si* T *admet au plus un point de rebroussement, l'ensemble des valeurs prises par* $g(m)$ *sur* E *est identique à* $\mathcal{C}$.

β. *Si* T *n'admet que deux points de rebroussement* a, b, *il existe, pour toute droite contenant les points* $T(a)$, $T(b)$, *un point m de* E *en lequel* $g(m)$ *est parallèle à cette droite [cf. le théorème des accroissements finis].*

De plus l'ensemble des valeurs de $g(m)$ *prises sur* E *contient un sous-continu de* $\mathcal{C}$ *contenant* $g(a)$ *et* $g(b)$ *[cf. la propriété de Darboux].*

2° *Si* E *est localement connexe* (¹) *et si* T *n'admet qu'un nombre fini de points de rebroussement, désignons par* K *un sous-continu quelconque de* E *tel que* $K(\overline{E - K}) =$ *nombre fini de points.*

Alors l'ensemble des valeurs prises par $g(m)$ *sur* K *forme un sous-ensemble connexe de* $\mathcal{C}$, *c'est-à-dire un arc ouvert, semi-ouvert ou fermé.*

Si l'on ajoute à ces propriétés le fait, démontré dans le théorème 6, que $g(m)$ est une fonction de 1^re^ classe au plus, on voit que l'on a retrouvé toutes les propriétés des fonctions dérivées classiques.

Ce théorème que nous démontrerons plus loin donne également l'explication d'un paradoxe relatif à des exemples qui semblent mettre en défaut le théorème classique des accroissements finis : soit $\widehat{AB}$ un arc analytique plan possédant un point de rebroussement intérieur à $\widehat{AB}$; cet arc peut ne posséder aucun point en lequel la tangente soit parallèle à AB, bien que le support de la tangente varie continûment sur $\widehat{AB}$. Cela tient à ce que, dans l'espace $\mathcal{C}$ des directions de droite, il existe deux arcs distincts joignant deux points quelconques de $\mathcal{C}$.

Il faut donc dissocier la propriété de Darboux du théorème des accroissements finis; la propriété de Darboux reste valable dans des cas où le théorème des accroissements finis ne s'applique plus.

Avant de passer à la démonstration du théorème, montrons par des

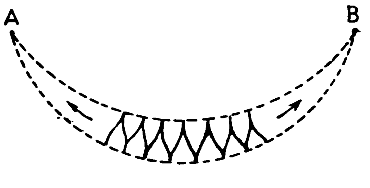

Fig. 2.

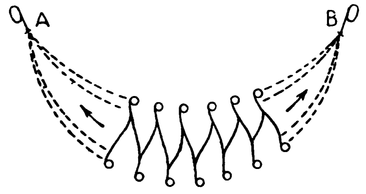

Fig. 3.

contre-exemples la nécessité de certaines hypothèses faites dans l'énoncé; on suivra mieux ainsi la marche des raisonnements.

Voici (*fig.* 2) un exemple de continu plan γ localement connexe en

---

(¹) Lorsqu'on suppose seulement que E est compact et connexe, on rencontre des difficultés qu'on ne peut lever que par une étude préalable de la transformation T permettant de se ramener au cas où E est localement connexe.

tout point m duquel il y a une tangente, vraie ou de rebroussement, de direction $g(m)$, et sur lequel l'ensemble des valeurs de $g(m)$ ne forme pas un ensemble connexe. Cela tient à l'existence, sur γ, d'une infinité de points de rebroussement.

On peut déduire de ce continu γ un continu Γ (voir *fig.* 3) tel que :

1° $\gamma \subset \Gamma$; 2° $\gamma.(\overline{\Gamma - \gamma}) = \aleph_0$ points; 3° Γ ait en tout point une vraie tangente.

Ces deux exemples montrent la nécessité des hypothèses faites dans la 2e partie du théorème sur T et sur K.

Le continu γ est un arc simple d'extrémités A et B. Les valeurs $g(A)$ et $g(B)$ sont isolées dans l'ensemble des valeurs prises par $g(m)$ sur γ.

Le continu Γ montre aussi incidemment que sur un continu plan ayant en tout point une vraie tangente, il n'y a pas toujours entre deux points donnés du continu un sous-arc simple n'admettant que ces deux points comme points de rebroussement.

Démonstration. — Nous devrons faire appel à des propriétés particulières au plan, car on peut montrer qu'il existe dans R_3 des arcs simples ayant une vraie tangente en tout point, et tels cependant que l'ensemble des directions de ces tangentes ne soit pas connexe.

Première partie. — α. Soit A l'image du point de rebroussement éventuel a de T.

Soit Δ le plus petit corps convexe contenant T(E). Comme T admet au plus un point de rebroussement, Δ ne peut être réduit à un segment de droite; donc, pour toute direction de droite L du plan, il existe deux droites d'appui distinctes du corps Δ parallèles à L; l'une d'elles, soit L_1, ne contient pas A; comme T(E) est compact, L_1 rencontre T(E) en au moins un point M. Si m est un point de E tel que $T(m) = M$, comme $m \neq a$, le contingent de T en m contient deux rayons opposés; il est donc porté par L_1 et $g(m)$ est bien parallèle à L.

β. Si T admet deux points de rebroussement a, b, posons $A = T(a)$ et $B = T(b)$. Utilisons les mêmes notations que ci-dessus.

Si Δ est réduit à un segment, la propriété annoncée est triviale.

Si A et B sont confondus ou s'il y a au plus un des points A, B, sur la frontière de Δ, la même démonstration que ci-dessus montre que $g(m)$ prend toute valeur sur E.

Si A et B sont distincts et situés sur la frontière de Δ, il est immédiat que pour toute direction L qui ne soit pas direction d'appui de Δ à la fois en A et B, il existe un point M (distincts de A et B) de T(E) sur la frontière de Δ en lequel Δ admet une droite d'appui parallèle à L. On montre alors comme ci-dessus l'existence d'un point m de E en lequel $g(m)$ est parallèle à L et $T(m) = M$.

Or l'ensemble de ces directions L est évidemment un ensemble connexe contenant $g(a)$ et $g(b)$ ou les admettant comme points d'accumulation. Donc la propriété annoncée est bien démontrée.

Deuxième partie. — Remarquons que la restriction de T à tout continu K satisfaisant aux conditions de l'énoncé jouit évidemment des mêmes propriétés que T sur E. Nous pouvons donc nous borner à faire la démonstration dans le cas où $K \equiv E$. D'autre part, pour simplifier l'exposition, nous expliciterons la démonstration seulement dans le cas particulier où E est un continu plan et où T est l'application canonique de E sur lui-même; il suffira de peu de modifications pour atteindre le cas général.

Il résulte du théorème 6 qu'il existe des domaines ouverts de E dont l'image par T est un arc simple ayant une vraie tangente en tout point distinct des extrémités; sur un tel domaine l'ensemble des valeurs prises par $g(m)$ est un ensemble connexe de $\mathcal{C}$.

Soit Ω la réunion de tous les domaines ouverts de E sur chacun desquels l'ensemble des valeurs de $g(m)$ est connexe. Sur chacune des composantes connexes de Ω, l'ensemble des valeurs de $g(m)$ est connexe; sinon, soit λ une de ces composantes connexes; il existerait une partition de λ en deux ensembles ouverts, ce que rend impossible la connexité de λ.

Soit $P = \complement(E - \Omega)$. Notre but est de montrer que l'ensemble fermé P est vide.

a. Supposons que P possède un point isolé M_0. Soit $\mathcal{V}$ un voisinage ouvert connexe de M ne contenant aucun autre point de P.

Toute composante connexe de $(\mathcal{V} - M_0)$ admet M_0 comme point frontière, à cause de la connexité de $\mathcal{V}$; soit μ une telle composante connexe. Elle n'admet aucun autre point frontière dans $\mathcal{V}$ que le point M_0; donc $(\mu + M_0)$ est fermé au voisinage de M_0. Soit $\overrightarrow{Mt}$ un des rayons du contingent de $(\mu + M_0)$ en M_0.

Soit N un point du plan tel que

$$M_0N = \rho \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{M_0t}, \overrightarrow{M_0N}) = \frac{\pi}{2} - \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0).$$

Soit N' l'une des projections de N sur $(\mu + M_0)$; le point N' est distinct de M; comme E ne possède qu'un nombre fini de points de rebroussement, dès que ρ est assez petit, en N' l'ensemble $(\mu + M_0)$ admet une tangente perpendiculaire à NN'; or lorsque $\rho \to 0$, la direction NN' tend à devenir perpendiculaire à $\overrightarrow{M_0t}$. Il existe donc sur μ des points N' en lesquels la tangente à E fait avec $\overrightarrow{Mt}$ un angle arbitrairement petit.

Donc, sur la composante connexe de Ω contenant μ l'ensemble des valeurs de $g(m)$ forme avec le point $g(M_0)$ un ensemble connexe.

Le même raisonnement est valable quel que soit μ. Donc si l'on désigne par D l'ensemble des composantes connexes de Ω admettant M_0 comme point frontière, comme $(D + M_0)$ est un voisinage connexe du point M_0, on voit que l'on arrive à une contradiction en supposant que $M_0 \in (E - \Omega) = P$.

b. Supposons P parfait. Soit D un domaine de E contenant des points de P, et vérifiant les conditions 1°, 2°, 3° du théorème 6. Il est évident qu'on pourra même toujours supposer que la frontière de D se réduit à deux points a, b de P, et que D ne contient aucun point de rebroussement de E.

Nous prendrons, pour fixer les idées, un axe $x'x$ parallèle à une corde de D.P; l'ensemble D.P est alors en correspondance biunivoque avec sa projection sur $x'x$.

Si m et n sont deux points quelconques de D.P, ils déterminent sur D un continu admettant m et n comme seuls points de rebroussement; il résulte donc de la première partie de ce théorème que l'ensemble des valeurs prises par $g(m)$ sur D contient un ensemble connexe contenant tous les $g(m)$ où $m \in D.P$. Si d'autre part μ

désigne une composante connexe quelconque de $(D - D.P)$, c'est aussi évidemment une composante connexe de $\Omega = (E - P)$; or μ a au plus deux points-frontière, qui sont sur $D.P$; le même raisonnement que celui appliqué ci-dessus au cas d'un point M_0 isolé montre que sur $\overline{\mu}$ l'ensemble des valeurs de $g(m)$ est connexe. Comme $\overline{\mu}.P$ est non vide, à cause de la connexité de D, et que ce raisonnement est valable quel que soit μ, on voit que l'ensemble des valeurs de $g(m)$ sur D est connexe. Ceci est en contradiction avec le fait que $D.P$ n'est pas vide.

Le théorème est donc entièrement démontré.

COROLLAIRE. — *Si γ désigne un continu plan quelconque ayant en tout point une vraie tangente, sauf peut-être en un nombre fini de points en lesquels γ admet une tangente de rebroussement, l'ensemble des valeurs prises par $g(m)$ sur γ est connexe.*

Ceci résulte immédiatement du théorème 8 et du fait qu'un tel continu γ est forcément localement connexe.

12. THÉORÈME D'UNICITÉ DES PRIMITIVES D'UNE FONCTION. — Le problème général de la recherche de la primitive d'une fonction par rapport à une autre est le suivant : Connaissant la dérivée $g(m)$, finie, infinie, ou indéterminée d'une fonction inconnue $F(m)$ par rapport à une fonction connue $\alpha(m)$, retrouver par un procédé régulier, par exemple analogue à la totalisation de M. Denjoy, la fonction $F(m)$ et toutes les fonctions admettant la même dérivée que $F(m)$ par rapport à $\alpha(m)$; et étudier en particulier comment l'on peut déduire toutes ces fonctions de l'une d'elles.

Pour rendre ce problème accessible, il faut faire des hypothèses supplémentaires sur la nature topologique de l'espace E et des fonctions $F(m)$ et $\alpha(m)$.

La méthode que nous utiliserons repose essentiellement sur la considération de l'ensemble plan paramétré : $x = \alpha(m)$; $y = F(m)$.

Cette géométrisation du problème nous permettra d'utiliser les résultats du chapitre précédent sur les ensembles cartésiens paramétrés.

Théorème 9 (*d'unicité*) (1). — *Si* E *est un espace compact, toutes les fonctions* F(m) *définies et continues sur* E, *qui admettent en tout point de* E (*sauf peut-être sur un ensemble* I *au plus dénombrable*) *une même dérivée* $g(m)$ *finie ou indéterminée, par rapport à une même fonction continue* $\alpha(m)$, *se déduisent de l'une d'elles par l'addition d'une fonction continue qui est* constante sur toute composante connexe de E, *et dont l'ensemble des valeurs est un ensemble linéaire compact de mesure linéaire nulle.*

Démonstration. — Si $F_1(m)$ et $F_2(m)$ sont deux primitives de $g(m)$ par rapport à $\alpha(m)$, leur différence $\delta(m) = F_1(m) - F_2(m)$ a en tout point de E, sauf peut-être sur l'ensemble dénombrable I, une dérivée nulle ou indéterminée.

Donc l'application continue T de E sur le plan xOy, définie par

$$x = \alpha(m), \qquad y = \delta(m),$$

a en tout point, sauf peut-être sur I, un contingent vide ou porté par une parallèle à $x'x$.

Si I est vide, le théorème résulte alors aisément du théorème 7; si I n'est pas vide, on remarque que le contingent ordinaire de T(E) en tout point, sauf peut-être sur l'ensemble T(I) est vide ou porté par une parallèle à $x'x$; tous les résultats du théorème 7 restent alors valables et se démontrent par la même méthode; l'application au cas présent est immédiate.

Il résulte de la réciproque du théorème 7 qu'on ne peut rien dire de plus, sur l'ensemble des valeurs prises par $\delta(m)$, que le fait que c'est un ensemble compact de mesure linéaire nulle.

---

(1) Dans le cas particulier où E est un segment de droite, Petrowsky [I] a démontré l'unicité à une constante près de la fonction F(m). Sa méthode est toute différente du procédé géométrique utilisé ici, et consiste en ceci : Il montre que si l'unicité n'était pas réalisée, il existerait une fonction non constante et non décroissante de x, de dérivée non nulle par rapport à la fonction continue $\alpha(x)$; il démontre alors qu'on arrive à une contradiction, en utilisant le fait que l'unicité est réalisée, d'après Lebesgue, lorsque $\alpha(x)$ est à variation bornée.

13. Recherche des fonctions $\delta(m)$ a dérivée nulle par rapport a une fonction donnée. — Lorsque E est connexe, $\delta(m)$ est identique à une constante quelconque; dans le cas général, le problème se pose de déterminer toutes ces fonctions $\delta(m)$ dès que la fonction continue $\alpha(m)$ est connue. Nous allons montrer comment on peut ramener ce problème à une forme canonique.

Nous supposerons que I est vide, c'est-à-dire que $\delta(m)$ a partout, par rapport à $\alpha(m)$, une dérivée nulle ou indéterminée.

Pour tout nombre $k > 0$, $\delta(m)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes sur l'ensemble des points m de E en lesquels $\alpha(m) = k$; donc pour tout nombre ε, si $H(\varepsilon)$ désigne l'ensemble des composantes connexes de E sur chacune desquelles l'oscillation de $\alpha(m)$ est $\geq \varepsilon$, $\delta(m)$ ne prend sur $H(\varepsilon)$ qu'un nombre fini de valeurs distinctes.

Donc si H désigne la réunion des composantes connexes de E sur chacune desquelles $\alpha(m)$ ne se réduit pas à une constante, $\delta(m)$ ne prend sur H qu'au plus une infinité dénombrable de valeurs distinctes.

De plus l'image sur le plan, par T, de toute composante connexe de E est un point ou un segment parallèle à $x'x$: Ceci nous conduit à essayer de remplacer l'espace E par un espace dans lequel toute composante connexe serait réduite à un point ou serait homéomorphe à un segment de droite.

Désignons par e l'espace quotient de E par la relation d'équivalence R suivante $m \sim m'$ si m et m' sont sur une même composante connexe de E et si $\alpha(m) = \alpha(m')$.

L'espace e est séparé. En effet (¹) X et Y étant deux classes d'équivalence suivant R, on construit toujours aisément (après avoir distingué le cas où X et Y sont sur une même composante connexe de E, du cas où ils ne le sont pas) une application continue f de E dans le plan de telle sorte que :

1° f soit constante sur toute classe d'équivalence suivant R.

2° f prenne des valeurs distinctes sur X et Y.

Comme e est séparé et que E est compact, e est aussi compact (¹) et

---

(¹) *Voir* Bourbaki, [I], Chap. I, pp. 57 et 63.

chacune de ses composantes connexes est, soit un point, soit homéomorphe à un segment de droite.

Soit $\alpha'(\mu)$ [resp. $\delta'(\mu)$], où $\mu \in e$ la fonction continue définie sur e et déduite de $\alpha(m)$ [resp. $\delta(m)$] par l'application canonique de E sur e.

Nous avons dès lors ramené la recherche de $\delta(m)$ sur E au problème suivant :

Soit e un espace compact dont toute composante connexe est, soit réduite à un point, soit homéomorphe à un segment de droite, et soit $\alpha'(\mu)$ une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur e, et univalente sur toute composante connexe de e.

Déterminer toutes les fonctions $\delta'(\mu)$ définies et continues sur e, et dont la dérivée par rapport à $\alpha'(\mu)$ soit, en tout point de e, nulle ou indéterminée.

Lorsque l'espace e est séparable, e est homéomorphe à un ensemble compact *plan* e_0 dont toute composante connexe est, soit un point, soit un segment parallèle à $x'x$ et qu'on peut choisir de telle sorte que pour tout point $\mu_0 \in e_0$, on ait

$$\delta'(\mu_0) = x_0,$$

en désignant par x_0 l'abscisse de μ_0.

Il suffit pour le voir de remarquer que l'espace quotient de e par la relation d'équivalence « se trouver sur une même composante connexe de e » est compact, totalement discontinu et séparable, donc homéomorphe à un sous-ensemble compact de l'axe $y'y$.

On a donc, lorsque e est séparable, une image très commode de cet espace.

14. Calcul régulier de la primitive d'une fonction.

Théorème 10. — *Si* E *est un espace compact connexe et localement connexe, toutes les fonctions* F(m) *définies et continues sur* E, *qui admettent en tout point, par rapport à une fonction donnée* $\alpha(m)$, *une dérivée finie ou indéterminée* $g(m)$ *sont de la forme* $F_0(m) +$ *const.*

Ces primitives F(m) *s'obtiennent à partir de* $g(m)$ *et* $\alpha(m)$ *par une suite transfinie d'opérations basées sur les propriétés suivantes :*

1° *A tout ensemble fermé* P *de* E *on peut attacher un domaine* D *de* E *contenant des points de* P *et tel que :*

a. Sur $\overline{\mathrm{D}}.\mathrm{P}$ *on ait* $\mathrm{F}(m)=\varphi[\alpha(m)]$, $\varphi(m)$ *étant une fonction définie et continue sur l'ensemble* Π *des valeurs* μ *prises par* $\alpha(m)$ *sur* $\overline{\mathrm{D}}.\mathrm{P}$, *ayant sur* Π *en tout point d'accumulation à droite (resp. à gauche) de* Π *une dérivée à droite (resp. à gauche) finie ;*

b. Tous les rapports $\left|\dfrac{\varphi(\mu')-\varphi(\mu)}{\mu'-\mu}\right|$, *où* μ *et* μ' *sont deux points distincts de* Π *soient bornés supérieurement par un même nombre fini* k ;

c. Pour tout point m *de* $\overline{\mathrm{D}}$ *tel que* $\alpha(m)\in\Pi$, *on ait*

$$\mathrm{F}(m)=\varphi[\alpha(m)].$$

2° *Si* β_1 *et* β_2 *sont les extrémités d'un intervalle contigu à* Π, *on peut trouver sur* $\overline{\mathrm{D}}$ *deux points* b_1 *et* b_2 *tels que* $\alpha(b_1)=\beta_1$, $\alpha(b_2)=\beta_2$, *les deux points* b_1 *et* b_2 *étant sur la frontière d'une même composante connexe de* $(\mathrm{E}-\mathrm{P})$.

3° *Si l'on connaît pour tout couple de points* a_1 *et* a_2 *d'une composante connexe arbitraire de* $(\mathrm{E}-\mathrm{P})$ *la différence* $[\mathrm{F}(a_1)-\mathrm{F}(a_2)]$, *on pourra calculer la même expression lorsque* a_1 *et* a_2 *seront deux points quelconques d'une même composante connexe de* $[\mathrm{E}-(\mathrm{P}-\mathrm{D}.\mathrm{P})]$, *comme somme d'une intégrale définie de Lebesgue et d'une série absolument convergente.*

4° *Pour toute suite bien ordonnée* $\{\mathrm{P}_i\}$ *d'ensembles fermés* P_i *décroissants* $(i=1, 2, \ldots)$, *si pour tout* i *et pour tout couple de points* a_1, a_2 *d'une même composante connexe de* $(\mathrm{E}-\mathrm{P}_i)$ *on connaît* $[\mathrm{F}(a_1)-\mathrm{F}(a_2)]$, *on pourra calculer la même expression lorsque* a_1 *et* a_2 *seront deux points quelconques d'une même composante connexe de* $\left[\mathrm{E}-\bigcap_i \mathrm{P}_i\right]$.

Démonstration. — La 1^re^ partie du théorème est un cas particulier du théorème 9. Démontrons maintenant les quatre propriétés énoncées :

Première propriété. — C'est la traduction analytique de résultats énoncés dans le théorème 6.

Deuxième propriété. — Supposons $\beta_1<\beta_2$. Soit A_1 (resp. A_2) l'ensemble fermé des points de $\overline{\mathrm{D}}$ en lesquels $\alpha(m)=\beta_1$ (resp. β_2).

Soit B l'ensemble des points de $\overline{D}$ en lesquels $\beta_1 < \alpha(m) < \beta_2$; c'est un ensemble ouvert relativement à $\overline{D}$.

S'il existe une composante connexe K de B telle que $\overline{K}.A_1 \neq \emptyset$ et $\overline{K}.A_2 \neq \emptyset$, l'affirmation est démontrée : En effet une telle composante connexe ne contient aucun point de P; elle est donc bien incluse dans une composante connexe de $(E - P)$.

Je dis qu'il existe toujours une telle composante connexe K : En effet, toute composante connexe K' de B est telle que $\overline{K'}.A_1 \neq \emptyset$ ou bien $\overline{K'}.A_2 \neq \emptyset$, sinon K' serait à la fois ouverte et fermée dans $\overline{D}$, ce qui est impossible puisque $\overline{D}$ est connexe. Désignons par A'_1 l'ensemble des points de $\overline{D}$ en lesquels $\alpha(m) \leqq \beta_1$, et par A'_2 l'ensemble des points de $\overline{D}$ en lesquels $\alpha(m) \geqq \beta_2$. Puis posons $C_1 = A'_1 +$ ensemble des composantes connexes de B dont la fermeture a des points communs avec A_1 (et *idem* pour C_2).

On a

$$C_1 . C_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad C_1 + C_2 = \overline{D}.$$

Chacun des ensembles C_1, C_2 est non vide et il est ouvert dans $\overline{D}$: Or ceci est impossible puisque $\overline{D}$ est connexe.

Cette contradiction démontre la 2e propriété.

Troisième propriété. — Supposons qu'on connaisse pour tout couple de points a_1, a_2 d'une même composante connexe de $(E - P)$ la différence $[F(a_1) - F(a_2)]$.

Il résulte de la 2e propriété (et en utilisant les mêmes notations), que l'on peut, par continuité, calculer $[F(a_1) - F(a_2)]$ lorsque $a_1 \in \overline{D}$ et $a_2 \in \overline{D}$ et $\alpha(a_1) = \beta_1$, $\alpha(a_2) = \beta_2$.

Désormais la 1re propriété nous permet de calculer, comme dans la totalisation ordinaire pour une fonction $y = f(x)$, la différence $[\varphi(\mu_1) - \varphi(\mu_2)]$, où μ_1 et μ_2 sont deux points quelconques de Π. Cette différence est la somme de l'intégrale, sur la portion $\mu_1 \mu_2$ de Π, de la dérivée à droite $\varphi'(\mu)$ de $\varphi(\mu)$ qui est connue, et de la série absolument convergente $\Sigma[\varphi(\beta_1) - \varphi(\beta_2)]$ étendue à tous les intervalles finis contigus à la portion $\mu_1 \mu_2$ de Π.

Donc si a_1 et a_2 sont deux points quelconques de $\overline{D}$, on peut calculer

$[F(a_1) - F(a_2)]$, car chacun de ces points se trouve sur une composante connexe de $(\overline{D} - P)$ ayant des points-frontière sur $\overline{D}.P$. Il en est évidemment de même si a_1 et a_2 sont deux points quelconques d'une même composante connexe de $[E - (P - D.P)]$.

Quatrième propriété. — Elle résulte immédiatement du fait géométrique suivant : si a_1 et a_2 sont deux points d'une même composante connexe de $\left(E - \bigcap_i P_i\right)$, il existe un indice i pour lequel a_1 et a_2 sont sur une même composante connexe de $(E - P_i)$; démontrons ce fait.

Remarquons tout d'abord qu'il existe un indice i tel que a_1 et a_2 soient dans $(E - P_i)$, sinon l'un des points a_1 ou a_2 ferait partie de tous les ensembles P_i, donc aussi de $\bigcap_i P_i$.

Nous pourrons donc toujours supposer que $(E - P_1)$ contient a_1 et a_2. Soit alors λ_i (resp. λ) la composante connexe de $(E - P_i)$ $\left[\text{resp. } \left(E - \bigcap_i P_i\right)\right]$ contenant a_1. Montrons que $\lambda = \bigcup_i \lambda_i$.

En effet, $\bigcup_i \lambda_i$ est un ensemble ouvert connexe et l'on a

$$\lambda \supset \bigcup_i \lambda_i.$$

Si

$$\lambda \neq \bigcup_i \lambda_i, \qquad \text{soit} \qquad \delta = \lambda - \bigcup_i \lambda_i,$$

On a donc

$$\lambda = \delta + \bigcup_i \lambda_i \qquad \text{et} \qquad \delta.\left[\bigcup_i \lambda_i\right] = 0.$$

Comme λ est connexe et que $\left(\bigcup_i \lambda_i\right)$ est ouvert dans λ, il existe un point m de δ qui est point frontière de $\left(\bigcup_i \lambda_i\right)$; un tel point m fait partie de P_i quel que soit i, puisque E est localement connexe; il fait donc aussi partie de $\bigcap_i P_i$, contrairement à l'hypothèse que c'est un point de $\delta \subset \left[E - \bigcap_i P_i\right]$. On a donc bien

$$\lambda = \bigcup_i \lambda_i;$$

donc il existe un i tel que a_1 et a_2 soient sur λ_i, ce qui démontre la propriété.

Procédé opératoire pour le calcul de $F(m)$. — Voici le procédé transfini qui permet de déterminer, à partir de ces quatre propriétés, la différence $[F(a_1) - F(a_2)]$ lorsque a_1 et a_2 sont deux points quelconques de E :

Posons $E = P_1$. La 1re propriété permet de trouver un domaine D_1 de E sur lequel $g(m)$ est une fonction uniforme et bornée en module de $\alpha(m)$.

Posons

$$g(m) = \varphi'[\alpha(m)].$$

On peut calculer sur D la différence $[F(a_1) - F(a_2)]$ par l'intégrale de Lebesgue $\int \varphi'(\mu)\, d\mu$.

Posons $P_2 = E - D_1$; soit D_2 le domaine de E que la 1re propriété permet d'attacher à P_2; puis posons $P_3 = P_2 - D_2$, etc.

Soit

$$P_\omega = \bigcap_{i<\omega} P_i.$$

A partir de P_ω on définit $P_{\omega+1}$, etc.

De façon générale, P_α étant défini et non vide, la 1re propriété permet de lui attacher un domaine D_α, et l'on pose $P_{\alpha+1} = P_\alpha - D_\alpha$; si maintenant P_β est défini pour tout $\beta < \alpha$, on pose

$$P_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} P_\beta.$$

Il existe un ordinal α_0 tel que P_{α_0} soit vide, car toute suite transfinie strictement décroissante d'ensembles est bornée. Cet ordinal α_0 sera de 2e classe si E est un espace séparable.

On a alors

$$E - P_{\alpha_0} = E.$$

Les propriétés 1, 2, 3, 4 ci-dessus permettent donc de calculer $[F(a_1) - F(a_2)]$ sur E tout entier.

15. Extensions. — 1° L'étude précédente montre que la notion de fonction dérivable d'une variable peut être conservée même dans le cas où l'espace de la variable n'est pas le continu linéaire numérique.

Il est naturel de se demander si l'on peut généraliser de la même façon la notion de fonction dérivable de plusieurs variables.

Nous allons indiquer comment peut se faire cette extension, que nous aurons à utiliser, dans un cas particulier, à propos de l'étude des variétés cartésiennes paramétrées.

Soient E_x, E_y deux espaces topologiques, compacts pour fixer les idées, et $X(x)$, $Y(y)$ deux fonctions continues à valeurs réelles, définies respectivement sur E_x et E_y.

Une fonction continue $F(x, y)$ définie sur l'espace produit $E_x \times E_y$ est dite dérivable au point (x_0, y_0) par rapport à $X(x)$, si le rapport

$$\frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{X(x) - X(x_0)}$$

tend vers une limite $\frac{\partial F}{\partial X}$ lorsque, y_0 restant fixe, x tend vers x_0 dans E_x, en évitant les points qui annulent les deux termes du rapport. Si les deux termes de ce rapport sont nuls pour tout point x d'un voisinage de x_0 dans E_x, on dit que la dérivée $\frac{\partial F}{\partial X}$ est *indéterminée*.

On définit de même $\frac{\partial F}{\partial Y}$.

On dit que $F(x, y)$ admet une différentielle en x_0, y_0, s'il existe deux nombres finis A et B tels que

$$F(x, y) - F(x_0, y_0) = (A + \varepsilon_A)[X(x) - X(x_0)] + (B + \varepsilon_B)[Y(y) - Y(y_0)],$$

où les nombres ε_A, ε_B tendent vers zéro lorsque (x, y) tend vers (x_0, y_0) dans l'espace $E_x \times E_y$.

Voici un exemple de propriété des fonctions $F(x, y)$:

On peut montrer que si E_x et E_y sont compacts et localement connexes, et si $F(x, y)$ admet en tout point (x, y) des dérivées $\frac{\partial F}{\partial X}$ et $\frac{\partial F}{\partial Y}$ continues sur $E_x \times E_y$, on peut trouver un domaine D de $E_x \times E_y$ sur lequel $F(x, y)$ est de la forme $\Phi[X(x), Y(y)]$, où la fonction uniforme $\Phi(u, v)$ admet, par rapport à u, v des dérivées partielles continues égales respectivement à $\frac{\partial F}{\partial X}$ et $\frac{\partial F}{\partial Y}$; $F(x, y)$ possède donc en tout point de D une différentielle au sens précédent.

On pourrait étendre cet énoncé dans le sens indiqué par le théorème 6.

Indiquons enfin une notion plus générale : Celle de dérivées partielles de $F(x, y)$ par rapport à une fonction continue $\alpha(x, y)$ définie sur $E_x \times E_y$; la dérivée partielle relative à x, par exemple, sera ici définie à partir du rapport

$$\frac{F(x, y_0) - F(x_0, y_0)}{\alpha(x, y_0) - \alpha(x_0, y_0)}.$$

2° L'extension de la notion de fonction d'une ou plusieurs variables possédant des dérivées jusqu'à l'ordre n n'offre aucune difficulté.

Ici encore, c'est le recours aux propriétés descriptives des fonctions dérivées qui permettra de trouver sur tout ensemble parfait de l'espace étudié une portion sur laquelle les fonctions étudiées manifesteront les mêmes propriétés que les fonctions de l'analyse classique.

3° Une autre voie (¹), pour l'extension de la notion de fonction dérivable pour une fonction définie dans un espace, s'offre grâce à l'introduction d'une fonction continue $\delta(x_0, x_1)$ d'un couple de points quelconques de E, où (x_0, x_1) est telle que pour tout x_0, $\delta(x_0, x_1)$ tende vers zéro quand x_1 tend vers x_0.

La dérivée d'une fonction $F(x)$ se définit alors en x_0 comme

$$\lim_{x_1 \to x_0} \left[\frac{F(x_1) - F(x_0)}{\delta(x_0, x_1)}\right].$$

Si l'on suppose seulement que ce rapport reste uniformément borné en module par une constante k, on obtient une généralisation de la notion de fonctions lipschitziennes [celles-ci étant obtenues, dans un espace cartésien E, en prenant pour $\delta(x_1, x_2)$ la distance ordinaire entre x_1 et x_2].

4° Indiquons pour terminer la possibilité d'édifier, comme dans le cas où $\alpha(m)$ est une variable numérique indépendante, une théorie de

(¹) Pour l'étude de cette extension lorsque E est un espace cartésien, *voir* Choquet, *Mathematica*, 1944.

la totalisation par rapport à une fonction $\alpha(m)$ continue, pour des fonctions $g(m)$ satisfaisant à des conditions convenables.

On obtient ainsi un prolongement naturel de la théorie de la totalisation de M. Denjoy.

Il n'est pas impossible *a priori* d'étudier la dérivation et la totalisation par rapport à des fonctions $\alpha(m)$ discontinues; cette étude est en particulier assez simple lorsque $\alpha(m)$ n'admet qu'une infinité dénombrable au plus de points de discontinuité. Mais dans le cas général une telle étude rentre encore dans le cadre des questions tératologiques.

CHAPITRE III.

Paramétrisation des courbes et des variétés.

Jusqu'ici, lorsque nous étudiions les applications continues T d'un espace E dans un espace euclidien, nous nous intéressions uniquement à la structure différentielle de l'image de E.

Nous allons voir maintenant comment, lorsque E est lui-même un ensemble cartésien doué d'une structure différentielle, on peut astreindre l'application T à révéler l'analogie éventuelle des structures différentielles de E et de son image.

Nous étudierons d'abord le cas où E est un intervalle ouvert de la droite numérique. Puis nous étendrons les résultats obtenus au cas des variétés à n dimensions.

16. Applications régulières. Définition. — *Soit* T *une application continue de l'intervalle ouvert* E : $0 < t < 1$, ... *de l'axe $t't$, dans un espace cartésien* R_n.

Soient m un point de E, *et* $M = T(m)$.

Nous dirons que T *est* régulière *en m s'il existe dans* R_n *une droite* L_1 *passant par* M *et telle que pour tout intervalle ouvert v de* E *contenant m, il existe un intervalle ouvert* V *de* L_1 *contenant* M *tel que, si δ désigne le* *diamètre de* V, *et* ε *l'écart de Fréchet* [1] *entre* V *et* T(v), *on ait*

$$\lim_{\delta \to 0} \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right) = 0.$$

LEMME 4. — *Lorsque l'application continue* T *de l'intervalle* E *dans* R_n *est régulière en* m, *la droite* L_1 *est unique, le contingent en* m *de l'application* T *pour chacun des ensembles* $t \leq m$, $t \geq m$ *est réduit à un seul rayon.*

D'autre part, si m' *et* m'' *sont deux points quelconques de* E *et si* $\delta(\widehat{M'M''})$ *désigne le diamètre de l'arc* $\widehat{M'M''} = T(m'm'')$, *le rapport* $\dfrac{\delta(\widehat{M'M''})}{MM'}$ *tend vers zéro, en même temps que* $\left(\dfrac{M'M''}{MM'} + mm'\right)$.

Démonstration. — Soit $m' < m$. L'hypothèse $\lim\limits_{\delta \to 0}\left(\dfrac{\varepsilon}{\delta}\right) = 0$ entraîne que lorsque $m' \to m$, on ait $\dfrac{h'}{MM'} \to 0$, en désignant par h' la distance de M' à L_1.

Donc le contingent de T en m est bien porté par L_1, ce qui entraîne l'unicité de L_1.

Si T avait sur l'ensemble $t \leq m$ un contingent contenant deux rayons, le point T(m) serait un point multiple de T(mm'), quel que soit m'. On en déduirait qu'il existe des intervalles $m'm''$ contenant m et arbitrairement petits, tels que $\dfrac{\delta(\widehat{M'M''})}{M'M''}$ puisse être arbitrairement grand, ce qui est impossible puisque l'hypothèse entraîne que ce rapport tend uniformémend vers 1 lorsque $m'm'' \to 0$.

Donc T a en m sur l'ensemble $t \leq m$ un contingent formé d'un seul rayon.

Si le contingent de T en m était sur E réduit à un seul rayon, on mettrait en évidence de la même façon deux points $m', m'' \in E$, de part et d'autre de m, et tels que $\dfrac{\delta(\widehat{M'M''})}{M'M''}$ puisse être arbitrairement grand, ce qui est impossible.

---

[1] Si H est une homéomorphie quelconque entre v et V, soit ε(H) la borne supérieure des distances T(m')H(m') (où $m' \in v$). Lorsque H varie arbitrairement, l'écart de Fréchet entre V et T(v) est la borne inférieure de ε(H).

La dernière partie du lemme est également une conséquence immédiate de la relation

$$\lim_{\delta \to 0}\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right) = 0.$$

Remarque. — Il résulte de ce lemme que pour tout point m' d'un certain voisinage de m, on a

$$T(m) \neq T(m').$$

Donc si l'application T de l'intervalle E dans R_n est partout régulière, l'image réciproque par T de tout point de R_n ne contient que des point isolés.

LEMME 2. — *Lorsque l'application continue* T *de l'intervalle ouvert* $E(0 < t < 1)$ *dans l'espace cartésien* R_n *est régulière en tout point, on peut, pour tout* ε, *attacher à tout ensemble fermé* P *de* E *un intervalle* D *de* E *qui contienne des points de* P *et tel que :*

1° *Les deux premières propriétés énoncées dans le théorème* 6 *soient vérifiées ;*

2° *Le contingent ordinaire de* T(D) *soit en chacun des points de* T(D.P) *porté par une seule droite ;*

3° *L'application* T *soit une homéomorphie entre* D.P *et* T(D.P) *et que pour tout point* $m \in (D - D.P)$, *on ait*

$$T(m) \in T(D) - T(D.P).$$

Démonstration. — L'application T étant régulière en tout point, le contingent de T est en tout point de E porté par une droite. On peut donc utiliser les résultats du théorème 6.

1° Se reporter à la démonstration du théorème 6.

2° Cette propriété résulte immédiatement de la 3ᵉ propriété du théorème 6 et du fait que T n'a son contingent vide en aucun point.

3° Soit D_1 un intervalle de E possédant les propriétés précédentes.

Si $D_1.D$ n'est pas parfait, la propriété à démontrer résulte immédiatement de la remarque du lemme précédent.

Supposons donc $D_1.P$ parfait. Supposons aussi que sur tout sous-intervalle D de D_1 contenant des points de P on puisse trouver un point $m_1 \in D.P$ et un point $m'_1 \in D$ tels que $T(m_1) = T(m'_1)$.

Comme $T(D_1.P)$ est, d'après le théorème 6 en correspondance biunivoque avec sa projection sur une droite parallèle à l'une de ses cordes, la régularité de T entraîne que, lorsque $T(m_1) = T(m'_1)$, pour tout point n_1 de $D_1.P$ assez voisin de m_1, il existe un point n'_1 de D_1 voisin de m'_1, tel que $T(n_1) = T(n'_1)$.

Donc le point m_1 possède dans $(D_1.P)$ un voisinage compact V_1 dont tous les points m ont une image $T(m)$ double; par itération, on détermine une suite de sous-ensembles compacts décroissants de $D_1.P$: $V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$ tels que pour tout n, tout point m de V_n ait une image $T(m)$ qui soit n-uple.

L'ensemble $\bigcap\limits_i V_i$ n'est pas vide. Si $m_0 \in \bigcap\limits_i V_i$, le point $T(m_0)$ a pour image réciproque sur $D_1.P$ un ensemble admettant un point d'accumulation sur V_1; ceci est en contradiction avec la remarque au lemme précédent.

On peut donc bien trouver sur D_1 un sous-intervalle D contenant des points de P et pour lequel la troisième propriété soit vérifiée.

17. Applications positivement dérivables. Résolution du problème de Fréchet généralisé.

Définitions. — 1° *Deux applications continues* T, T′ *de l'intervalle* $E(0 < t < 1)$ *dans* R_n *sont dites équivalentes lorsqu'il existe une homéomorphie* H *de* E *sur lui-même telle que, lorsque* $m' = H(m)$, *on ait*

$$T(m) = T'(m').$$

2° *Une application continue* T *de l'intervalle* $E(0 < t < 1)$ *dans* R_n *est dite* dérivable (*resp.* positivement dérivable) *au point m d'abscisse t de* E *si en m, le vecteur* $\overrightarrow{OM}$ [*où* $M = T(m)$] *possède une dérivée* $\dfrac{d(\overrightarrow{OM})}{dt}$ *finie* (*resp. finie et non nulle*).

Si T *est dérivable* (*resp. positivement dérivable*) *en tout point, on dit simplement que* T *est dérivable* (*resp. positivement dérivable*).

Théorème 11 (¹). — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une application continue* T *de l'intervalle* E $(0 < t < 1)$ *dans* R_n *soit équivalente à une application positivement dérivable est que* T *soit régulière en tout point m de* E.

Il existe un procédé régulier de recherche de cette application positivement dérivable.

Démonstration. — 1° *La condition est nécessaire.* — En effet, une application positivement dérivable T′ est en tout point point m tangente à une transformation linéaire non dégénérée H de l'intervalle $(0-1)$ dans R_n. Pour tout $m \in E$, H est telle que, pour tout $m' \in E$, si l'on pose

$$\lambda = H(m')T'(m') \qquad \text{et} \qquad \delta = H(m')T'(m),$$

on ait

$$\lim_{m' \to m} \left(\frac{\lambda}{\delta}\right) = 0.$$

Donc T′ est bien régulière en tout point.

2° *La condition est suffisante.* — D'après le lemme 2 nous pouvons, sur tout intervalle de E, trouver un sous-intervalle D tel que T soit une homéomorphie entre T(D) et D, ce qui entraîne que T(D) soit un arc simple. Nous pouvons même choisir D de telle sorte que l'arc T(D) soit en correspondance biunivoque avec sa projection sur une droite Δ parallèle à l'une de ses cordes, la tangente à T(D) en chacun

---

(¹) Voici l'historique du problème que nous résolvons ici sous une forme généralisée : M. Fréchet a posé d'abord la question de savoir si tout arc simple de R_3 possédant une tangente en tout point possède une paramétrisation positivement dérivable (*Espaces abstraits*, Paris, 1928, p. 153, et *Fund. Math.*, t. **26**, 1936, p. 334).

M. Valiron a montré par un exemple qu'un tel arc peut avoir une tangente ordinaire en un point sans posséder une paramétrisation positivement dérivable en ce point (*Nouv. Ann. Math.*, t. **84**, 1927).

M. Ward a donné un exemple où ce phénomène est réalisé en tous les points d'un ensemble parfait (*Fund. Math.*, t. **28**, 1937).

M. Pauc a donné la condition nécessaire et suffisante pour qu'un arc simple possède un paramétrage positivement dérivable en un point particulier, et a pu préciser ainsi l'énoncé de la question posée par M. Fréchet (*Act. Sc.*, Hermann, **886**, 1941, p. 96).

de ses points faisant avec Δ un angle inférieur à un nombre ε choisi arbitrairement.

Sur D l'application T est équivalente à une application dérivable. En effet, prenons Δ comme axe $x'x$ et désignons par x l'abscisse de la projection, sur $x'x$, du point M de T(D). Le vecteur $\frac{d\overrightarrow{\mathrm{M}}}{dx}$ est bien défini et n'est, ni nul, ni infini. L'équivalence annoncée s'obtient alors par une homéomorphie entre D et le segment projection de T(D) sur $x'x$.

Désignons par Ω l'ensemble ouvert des points de E dont chacun soit situé sur un sous-intervalle de E sur lequel T est équivalente à une application positivement dérivable.

Je dis que $\Omega \equiv \mathrm{E}$.

Sinon, soit $\mathrm{P} = \mathrm{E} - \Omega$. L'ensemble P est fermé dans E.

Soit C une composante connexe de Ω. Pour tout point m de C, il existe un sous-intervalle I de C contenant m, sur lequel T est équivalente à une application positivement dérivable. Si I_1 et I_2 sont deux tels intervalles contenant un même point m, il est immédiat que sur $(\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2)$, T est équivalente à une application positivement dérivable. Il en résulte aisément qu'il en est de même sur C tout entière.

Soit alors m_0 une extrémité de C intérieure à E.

Sur l'ensemble $(\mathrm{C} + m_0)$, T possède en m_0 un contingent réduit à un seul rayon $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\tau}$, et en m_0 l'application T est régulière sur $(\mathrm{C} + m_0)$.

On peut trouver une suite de points distincts de C : $m_1, m_2, \ldots$ tendant vers m_0 de telle façon que $m_0 m_{i+1} \subset m_0 m_i$ pour $i = 1, 2, \ldots,$ et que leurs images $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \ldots$ soient telles que si l'on désigne par μ_1, $\mu_2, \ldots$ leurs projections orthogonales sur $\overrightarrow{\mathrm{M}_0\tau}$ on ait

$$\mathrm{M}_0\mu_i = \frac{1}{i} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

(en choisissant convenablement l'unité de longueur).

Comme, sur $m_i m_{i+1}$, T est équivalente à une application positivement dérivable, on peut trouver une application T' équivalente à T sur $(C + m_0)$, définie sur l'axe $\tau \geqq 0$ et telle que

$$T'(0) = M_0; \qquad T'\left(\frac{1}{i}\right) = M_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

T' étant positivement dérivable sur tout segment $\frac{1}{i+1} \leqq \tau \leqq \frac{1}{i}$.

Cette application T' est positivement dérivable à droite pour $\tau = 0$; et à droite et à gauche pour

$$\tau = \frac{1}{i} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Or pour tout segment $\frac{1}{i+1} \leqq \tau \leqq \frac{1}{i}$, on peut trouver aisément une automorphie de ce segment de la forme $\theta = f_i(\tau)$, où $f(\tau)$ est une fonction croissante de τ, à dérivée finie strictement positive, et telle que

$$f_i\left(\frac{1}{i+1}\right) = \frac{1}{i+1} \qquad \text{et} \qquad f\left(\frac{1}{i}\right) = \frac{1}{i},$$

de telle sorte que l'application T'' transformée de T' par ces automorphies, et définie pour $0 \leqq \theta \leqq 1$, soit :

1° Positivement dérivable à droite pour $\theta = 0$;

2° Positivement dérivable pour tout $\theta > 0$;

3° Équivalente à la restriction de T à $(C + m_0)$.

Nous avons donc montré que sur $(C + m_0)$, T est équivalente à une application positivement dérivable; si C a deux extrémités m_0 et m'_0 intérieures à E, il en est de même sur $(C + m_0 + m'_0)$.

Deux cas sont alors à distinguer.

1° P *a un point isolé* m. — Soient C_1 et C_2 les deux composantes connexes de Ω d'extrémité m. Sur $(C_1 + m)$ et $(C_2 + m)$, T est équivalente à une application positivement dérivable. Il est immédiat qu'il en est alors de même sur $(C_1 + m + C_2)$.

Donc $m \in \Omega$, contrairement à l'hypothèse.

2° P *est parfait*. — Soit D un intervalle ouvert de E contenant des points de E et satisfaisant aux conditions du lemme 2.

Soit $x'x$ une droite de R_n parallèle à une corde de $T(D.P)$.

Soit x l'abscisse de la projection d'un point de $T(D.P)$ sur $x'x$, et soit Π la projection de $T(D.P)$ sur $x'x$.

L'application T engendre entre M et D.P une homéomorphie conservant l'ordre des points sur $x'x$ et sur E respectivement.

Soient m_1, m_2 les extrémités d'un intervalle contigu à M, et x_1, x_2 les points correspondants de Π. Sur le segment $m_1 m_2$ de E, T est, d'après ce qui précède, équivalente à une application positivement dérivable T'. Prenons par exemple comme paramètre de cette application T' un point variable du segment $x_1 x_2$.

Nous allons imposer à cette application T' définie sur $x_1 x_2$ une autre condition :

Supposons $x_1 < x_2$. Désignons par $I(x_1 x_2)$ l'ensemble des points du segment $x_1 x_2$ qui ont une abscisse de la forme

$$\left(x_1 + \frac{1}{p}\right) \quad \text{ou} \quad \left(x_2 - \frac{1}{p}\right) \quad (p \text{ étant un entier} > 0).$$

Cet ensemble $I(x_1 x_2)$ a pour seuls points d'accumulation x_1 et x_2. Nous désignerons un élément quelconque de $I(x_1 x_2)$ par x^i.

L'arc $T(m_1 m_2)$ se projette sur $x'x$ suivant $x_1 x_2$. Lorsque m parcourt $m_1 m_2$ de m_1 vers m_2, soit m^i le premier point de $m_1 m_2$ dont l'image $T(m_i)$ se projette orthogonalement sur $x'x$ en x^i.

Un raisonnement déjà utilisé ci-dessus montre que T est équivalente, sur $(m_1 m_2)$, à une application T' positivement dérivable définie sur $(x_1 x_2)$ et telle que, pour tout x^i, on ait

$$T'(x^i) = T(m_i).$$

Nous définissons ainsi une application T' sur tout intervalle contigu à M. Convenons maintenant que pour tout point $x \in M$, projection d'un point M de $T(D.P)$, on posera $T'(x) = M$.

Alors T' est définie sur tout le segment minimum σ de $x'x$ contenant Π. Par construction T' est positivement dérivable en tout point de $(\sigma - \Pi)$. D'autre part, si $x_0 \in \Pi$, nous allons voir que T' est positivement dérivable en x_0 :

En effet, T' est en x_0 positivement dérivable sur M, à cause des propriétés différentielles de $T(D.P)$; il en est de même d'ailleurs sur $M + \bigcup_{(x_1 x_2)} I(x_1 x_2)$.

Or, si x'_0 est un point de $x'x$ voisin de x_0, le choix des $I(x_1 x_2)$ entraîne que x'_0 soit sur un segment déterminé par deux points a_1 et a_2 de $\Pi + \bigcup_{(x_1 x_2)} I(x_1 x_2)$ tels que $\frac{a_1 a_2}{x_0 a_1} \to 0$ lorsque $x'_0 \to x_0$.

Or, si δ est le diamètre de l'arc $T'(a_1 a_2)$, la régularité de T' en x_0 entraîne que $\frac{\delta}{x_0 a_1} \to 0$ lorsque $x'_0 \to x_0$.

Donc T' est aussi positivement dérivable en x_0.

Nous avons ainsi prouvé que T est équivalente sur D à une application positivement dérivable. Comme D contient des points de P, nous sommes ici encore conduits à une contradiction.

18. Construction d'une application positivement dérivable équivalente a une application régulière. — Le raisonnement précédent conduit seulement à un théorème d'existence. Mais il suffit de le modifier très peu pour en déduire un procédé régulier de construction d'une application positivement dérivable équivalente à une application régulière T.

Il suffit de rappeler que sur E on peut toujours trouver un intervalle D dont l'image est un arc simple qu'on peut très simplement paramétrer de façon positivement dérivable.

On remarque ensuite que toutes les fois qu'il existe un ensemble fermé P de E tel que, sur toute composante connexe de $(E - P)$, T soit équivalente à une application positivement dérivable constructible, le raisonnement fait dans le paragraphe précédent pour démontrer le théorème d'existence montre qu'il en est encore de même si l'on remplace P par un vrai sous-ensemble fermé convenable P' de P.

D'autre part, on remarque que si T est équivalente à une application positivement dérivable et constructible sur une suite d'intervalles $D_1, D_2, \ldots$ contenant un point m, il en est encore de même sur $\bigcup_i D_i$.

Le procédé transfini classique permet alors, après une suite dénombrable bien ordonnée d'opérations, de construire une application positivement dérivable équivalente à T sur E tout entier.

Remarque. — Nous avons supposé, pour ne pas avoir à faire intervenir des extrémités, que E était un intervalle ouvert. Mais il est immédiat que tous les résultats précédents restent valables lorsque E est un segment.

19. Étude de l'ensemble des points contrariants d'un arc doué de tangentes. — Il résulte du théorème précédent que si une application continue de l'intervalle E $(0 < t < 1)$ dans R_n n'est pas régulière en tout point, elle n'est équivalente à aucune application positivement dérivable.

Mais on peut se poser la question de savoir si, étant donnée une application continue T de E dans R_n, douée en tout point d'une vraie tangente, on peut toujours trouver une application T′ équivalente à T, qui soit partout dérivable, et qui soit positivement dérivable en tout point régulier de T.

Cette question a été posée par C. Pauc [1] pour le cas où T est une homéomorphie. Nous allons montrer que, même dans ce cas particulier, la réponse est négative. Cela résultera de ce que l'ensemble des points non réguliers d'un arc simple doué en tout point d'une tangente peut avoir une structure topologique plus complexe que l'ensemble des valeurs pour lesquelles une fonction numérique dérivable a une dérivée nulle.

Définition. — Un point M d'un arc simple γ de R_n est dit *régulier* si l'application canonique T de γ sur lui-même est régulière en M.

Un point M de γ qui n'est pas régulier et en lequel γ possède une vraie tangente est dit *contrariant.*

Théorème 12. — *Soit γ un arc simple de* R_n *en tout point duquel le contingent de γ est porté par une seule droite :*

1° *L'ensemble* R *des points de rebroussement de γ est clairsemé* [2];

2° *L'ensemble* C *des points contrariants de γ est un* $G_{\delta\sigma}$ *non dense sur γ, et de mesure linéaire nulle.*

Démonstration. — 1° Supposons R partout dense sur un sous-ensemble parfait P de γ. Soit alors D un sous-intervalle de γ

---

(1) *Voir* C. Pauc [I].

(2) Par contre, on pourrait montrer que l'ensemble des points de rebroussement d'une application continue T de l'intervalle E$(0 < t < 1)$ dans R_n, à contingent porté partout par une droite, peut constituer un sous-ensemble parfait de E.

contenant des points de P et satisfaisant aux conditions du théorème 6.

Il résulte immédiatement de ces conditions que le contingent de γ en tout point de D.P se compose de deux demi-rayons opposés; aucun point de D.P n'est donc point de rebroussement de γ.

Ceci est contraire à l'hypothèse. Donc R est clairsemé puisqu'il est non dense sur tout ensemble parfait.

2° *a*. On sait déjà que tout intervalle de γ contient un sous-intervalle dont tous les points sont réguliers. Donc C est non dense sur γ.

b. Soit d'autre part P un sous-ensemble parfait de γ, et D un intervalle de γ contenant des points de P et possédant les propriétés indiquées dans le théorème 6.

Soit Π la projection de D.P sur une droite parallèle à une corde de D.P. Soit m un point de 2ᵉ espèce de Π; et soit M son homologue sur D.P.

Si M est contrariant, on peut trouver des intervalles $m'm''$ contigus à Π et arbitrairement voisins de m, tels que

$$\limsup_{m', m'' \to m} \left[\frac{m'm''}{mm'}\right] > 0.$$

Donc m n'est pas un point de densité 1 pour Π.

Donc la projection sur Π de l'ensemble C.D.P des points contrariants de D.P a une mesure linéaire nulle. Il en est donc de même de C.D.P.

Comme P était arbitraire, il en résulte que C lui-même est de mesure linéaire nulle.

c. Étudions maintenant la structure topologique de C.

Soient M, $M' \in \gamma$. Désignons par $\varepsilon(M, M')$ l'écart au sens de Fréchet entre l'arc $\overset{\frown}{MM'}$ de γ et le segment orienté $\overrightarrow{MM'}$.

Posons

$$\omega(M, M') = \frac{\varepsilon(M, M')}{MM'},$$

puis

$$\varphi(M) = \limsup_{M' \to M} [\omega(M, M')]$$

Or on peut toujours supposer que les valeurs du paramètre t fixant les positions de M et M′ sur γ sont de la forme t, $(t+h)$.

Quand $h \rightarrow 0$, $\varphi(M)$ apparaît donc comme la limite supérieure d'une suite de fonctions continues. C'est donc la limite d'une suite décroissante de fonetions semi-continues inférieurement.

Donc $\varphi(M)$ est une fonction de 2ᵉ classe de Baire. Donc l'ensemble des points M de γ en lesquels $\varphi(M) > 0$ est un $G_{\delta\sigma}$.

Or un point contrariant M de γ est caractérisé par le fait que $\varphi(M) > 0$, et que M n'est pas un point de rebroussement de γ.

Comme l'ensemble des points de rebroussement de γ est un F_σ, l'ensemble C est un $G_\delta . G_{\delta\sigma}$, donc aussi un $G_{\delta\sigma}$.

Nous allons montrer, ce qui suffira pour notre but, que cet ensemble C peut ne pas être un G_δ.

20. Construction d'un contre-exemple et réponse a une question de C. Pauc.

Théorème 13. — *Soit* P *un ensemble parfait linéaire non dense, pour lequel il existe un nombre* $\mu > 0$ *tel que si a, b sont deux points quelconques de* P, *il existe sur le segment ab un intervalle contigu à* P *et de longueur* $\geq \mu . ab$. (*Par exemple,* P *peut être l'ensemble triadique de Cantor, avec* $\mu = \frac{1}{3}$.)

Alors, pour tout ensemble $A \subset P$ *qui soit un* F_σ, *il existe un arc simple plan* γ *contenant* P, *ayant une vraie tangente en tout point, et sur lequel l'ensemble des points contrariants est identique à* A (*les points de* P *ayant de plus sur* γ *le même ordre que sur la droite*).

Démonstration. — Supposons P situé sur l'axe $x'x$ d'un plan rapporté aux axes rectangulaires xOy.

Pour tout point x de l'axe $x'x$, soit $\delta(x)$ sa distance à P. L'arc γ sera astreint à être contenu dans l'ensemble fermé

$$-\delta^2(x) \leq y \leq \delta^2(x).$$

Cette condition lui assurera d'avoir en tout point de P une tangente ordinaire portée par $x'x$.

Pour tout segment a, b de $x'x$, désignons par $C_\lambda(ab)$ tout arc simple ouvert d'extrémités a et b et dont la forme est indiquée par la figure ci-jointe (λ étant une constante, avec $0 < \lambda < 1$).

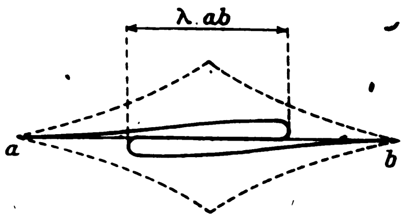

Fig. 4.

On suppose l'arc $C_\lambda(ab)$ compris entre les deux courbes en pointillé d'équation $y = \pm \delta^2(x)$. On le suppose de plus doué d'une tangente continue.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ une suite de nombres positifs < 1 et tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Soit $F_1, F_2, \ldots$ une suite de sous-ensembles fermés de P.

Pour tout intervalle σ_n^i contigu à F_n, soit τ_n^i le ou l'un des plus grands intervalles contigus à P et intérieurs à σ_n^i.

D'autre part, pour tout point isolé M_n^i de F_n, soit $\tau_n^{i,k}$ ($k = 1, 2, \ldots$) une suite d'intervalles contigus à P et tendant vers M_n^i de façon que, si $\delta_n^{i,k}$ désigne la distance de $\tau_n^{i,k}$ à M_n^i, on ait

$$\limsup_{k \to \infty} \left(\frac{|\tau_n^{i,k}|}{\delta_n^{i,k}} \right) > 0,$$

en désignant par $|\tau|$ la longueur de l'intervalle τ. (Il résulte de la structure de P qu'un tel choix des $\tau_n^{i,k}$ est toujours possible.)

L'arc cherché est défini comme suit :

Soit Ω_1 l'ensemble des arcs simples ouverts $C_{\lambda_1}[\tau_1^i]$ et $C_{\lambda_1}[\tau_1^{i,k}]$. De façon générale, si $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{n-1}$ sont déjà définis, soit Ω_n l'ensemble des arcs simples ouverts $C_{\lambda_n}[\tau_n^i]$ et $C_{\lambda_n}[\tau_n^{i,k}]$ relatifs aux τ_n^i et $\tau_n^{i,k}$ qui n'ont pas encore été utilisés pour définir $\Omega_1, \ldots, \Omega_{n-1}$.

Puis posons $\Omega_\omega =$ l'ensemble des intervalles finis contigus à P qui ne soient, ni un τ_n^i, ni un $\tau_n^{i,k}$.

Nous posons enfin

$$\gamma = P + \bigcup_n \Omega_n + \Omega_\omega.$$

Je dis que γ répond aux conditions du théorème :

1° γ est évidemment un arc simple doué d'une vraie tangente en tout point. D'autre part γ contient P.

2° Tout point de Ω_ω ou de $\Omega_n (n = 1, 2, \ldots)$ est un point régulier de γ, puisqu'il est situé sur un sous-arc de γ à tangente continue.

Donc les seuls points contrariants de γ sont sur P.

a. Tout point M de $\bigcup_n F_n$ est un point contrariant de γ. En effet, soit $M \in F_n$. Si M est un point isolé de F_n, c'est évident à cause du choix des $\tau_n^{i,k}$. Sinon, à cause de la structure de P, il existe une suite de τ_p^i d'indices $p \leqq n$ tendant vers M et jouissant des mêmes propriétés que toute suite de $\tau_p^{i,k}$ tendant vers un point M_n^i. Donc on retrouve les mêmes circonstances que lorsque M est un point isolé de F_n.

b. Tout point M de P étranger à $\bigcup_n F_n$ est un point régulier de γ. En effet, pour aucune valeur de n, le point M n'est point d'accumulation d'intervalles τ_p^i, $\tau_p^{i,k}$, où $p \leqq n$. Donc si τ désigne un intervalle contigu à P et tendant vers M, et si $j(\tau)$ désigne l'indice de l'ensemble Ω_j dont τ fait partie, ou bien $j(\tau) = \omega$, ou bien $j(\tau)$ tend vers l'infini lorsque τ tend vers M.

Il en résulte aussitôt que M est régulier.

Corollaire. — *Tout sous-ensemble dénombrable* A *de* P *partout dense sur* P *peut être identique à l'ensemble des points contrariants d'un arc* γ.

Or un tel ensemble A ne peut être un G_δ. Nous allons en déduire le théorème suivant :

Théorème 14. — *Si γ est un arc simple de R_n ayant en tout point une vraie tangente, il est en général impossible de trouver une paramétrisation partout dérivable de γ, qui soit positivement dérivable en tout point régulier.*

Démonstration. — L'ensemble des valeurs de t pour lesquelles une fonction $X(t)$ continue, partout dérivable, a une dérivée nulle est un G_δ. Il en est évidemment de même si $X(t)$ est remplacée par une fonction vectorielle $\overrightarrow{M(t)}$.

Or nous venons de voir que l'ensemble des points contrariants d'un arc γ peut ne pas être un G_δ. Une paramétrisation du type cherché est donc en général impossible.

Ce théorème 14 donne donc une réponse négative à la question posée par C. Pauc, et *a fortiori* à la question analogue relative aux arcs paramétrés susceptibles de points multiples.

21. Recherche de la meilleure paramétrisation dérivable d'un arc doué de tangentes. — Le théorème précédent montre qu'une paramétrisation dérivable d'un arc simple γ doué partout d'une vraie tangente ne sera en général positivement dérivable que sur un vrai sous-ensemble de l'ensemble des points réguliers de γ.

On peut se proposer de rendre maximum ce vrai sous-ensemble. A vrai dire il n'existe pas de tel sous-ensemble maximum car, pour tout point régulier M d'un arc simple γ, on peut trouver une paramétrisation de γ qui soit positivement dérivable en ce point [1].

Aussi nous devrons nous contenter du théorème suivant, dont nous donnerons plus loin une large généralisation, basée sur un principe différent.

Théorème 15. — *Si γ est un arc simple de R_n, doué en tout point d'une vraie tangente, on peut en trouver une paramétrisation* dérivable $T : M = T(t)$ (*où* $0 \leqq t \leqq 1$), *qui est* positivement *dérivable*, sauf *aux points d'un ensemble* I *qui est un* G_δ *non dense sur* $(0 - 1)$, *de mesure linéaire nulle, et dont l'image* $T(I)$ *est de mesure linéaire nulle et a même fermeture que l'ensemble des points contrariants de γ.*

Démonstration. — Appelons *arc normal* tout sous-arc, ouvert ou fermé de γ susceptible d'une paramétrisation satisfaisant aux conditions du théorème.

---

[1] *Voir* C. Pauc [I].

On montre aisément, par le procédé déjà utilisé dans la démonstration du théorème 11 que :

1° si un arc est normal, sa fermeture est aussi normale;

2° si deux arcs normaux ont un point commun, leur réunion est un arc normal;

3° si ω_1, ω_2, ... est une suite d'arc normaux dont la réunion est un arc, cet arc est normal.

Nous savons déjà que sur tout intervalle de γ on peut trouver un sous-intervalle normal. Soit Ω l'ensemble des points de γ dont chacun soit situé sur un sous-arc normal de γ; chacune des composantes connexes de Ω est un arc normal. Nous voulons montrer que $\Omega \equiv \gamma$.

Si $\Omega \not\equiv \gamma$, posons $P = (\gamma - \Omega)$.

L'ensemble fermé P est, d'après ce qui précède, parfait et non dense sur γ. Le théorème 11 montre d'ailleurs que P est inclus dans la fermeture de l'ensemble des points non réguliers de γ.

Soit D un intervalle de γ contenant des points de P et satisfaisant aux conditions du théorème 6.

Soit $x'x$ un axe parallèle à l'une des cordes de D.P; l'ensemble D.P est en correspondance biunivoque avec sa projection orthogonale Π sur $x'x$.

Soit K l'ensemble des points de première espèce de Π et des points m de 2^e^ espèce de Π tels que, si $m'm''$ désigne un intervalle quelconque contigu à Π, on ait

$$\limsup_{m', m'' \to m} \left[\frac{m'm''}{mm'} \right] > 0.$$

On sait déjà que tout point contrariant de γ situé sur D.P a sa projection sur $x'x$ incluse dans K.

D'autre part K ne possède évidemment aucun point de densité linéaire 1; c'est donc un ensemble de mesure linéaire nulle. Soit Q un G_δ de mesure linéaire nulle tel que

$$K \subset Q \subset \Pi.$$

Il est immédiat qu'il existe de tels ensembles Q.

D'après le théorème 26 du Chapitre IV, il existe une fonction numérique $f(x)$ absolument continue et strictement croissante définie sur le segment minimum $A_0 A_1$ de $x'x$ contenant Π, partout dérivable, dont la dérivée $g(x)$ est ≥ 1 partout et devient infinie en tout point de Q et en ces points seulement, cette dérivée étant continue en tout point de Q et dans tout intervalle contigu à $\overline{Q}$.

Soit $x = F(t)$ la fonction inverse de la fonction $t = f(x)$. Soit par exemple $(0 - 1)$ l'intervalle de définition de $F(t)$, et soit π (resp. q) l'ensemble image par $f(x)$ de l'ensemble Π (resp. Q).

La fonction $F(t)$ est strictement croissante, a partout une dérivée ≤ 1; et sa dérivée s'annulle sur q et sur $\bar{q}$ seulement, et est continue en tout point de q et dans tout intervalle contigu à $\bar{q}$.

Pour tout $t \in \pi$, soit $M(t)$ le point correspondant de D.P.

Il s'agit maintenant de définir $M(t)$ lorsque t est sur un intervalle contigu à π.

Soit σ un intervalle d'extrémités α, β contigu à π. Il lui correspond un intervalle s, d'extrémités a, b contigu à Π. L'intervalle s est la projection sur $x'x$ d'un arc $\widehat{AB}$ de γ.

Nous savons déjà qu'on peut définir un paramétrage de $\widehat{AB}$ par une fonction $M(t)(t \in \sigma)$ qui jouit des propriétés exigées par le théorème. Nous ne laisserons pas quelconque ce paramétrage.

Nous allons nous arranger pour que la presque totalité de $\widehat{AB}$ soit l'image d'un sous-intervalle très petit de σ concentrique à σ :

Soient ω le milieu de σ, et o le milieu de s.

Soient $\mu_\alpha(n)$ le point de σ défini par $\alpha\mu_\alpha(n) = \dfrac{\alpha\omega}{n+1}$, $\mu_\beta(n)$ « « « $\beta\mu_\beta(n) = \dfrac{\beta\omega}{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Soient $m_a(n)$ le point de s défini par $am_a(n) = \dfrac{ao}{2^n}$, $m_b(n)$ » « « $bm_b(n) = \dfrac{bo}{2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Soient $M_A(n)$ le premier point de $\widehat{AB}$ à partir de A qui se projette sur $x'x$ en $m_a(n)$.
$M_B(n)$ « « « B « « $m_b(n)$.

On posera

$$(1) \quad \begin{cases} M(t) = M_A(n) & \text{pour} \quad t = \mu_\alpha(n) \\ M(t) = M_B(n) & \text{pour} \quad t = \mu_\beta(n) \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Sur le reste du segment σ on définira $M(t)$ de façon quelconque en respectant simplement les relations (1) et de façon que ce paramétrage $M(t)$ de $\widehat{AB}$ satisfasse aux conditions du théorème.

Il est clair qu'en α et β on a, relativement à σ,

$$\overrightarrow{M'(t)} = 0 \quad \text{pour} \quad t = \alpha \quad \text{et} \quad t = \beta.$$

Soit alors $M(t)$ le paramétrage de D défini grâce aux définitions précédentes sur l'intervalle $0 < t < 1$.

Sur tout intervalle contigu à π, ce paramétrage satisfait par construction aux conditions du théorème.

Pour tout $t \in (\pi - q)$, $\overrightarrow{M'(t)}$ existe et est non nulle, et pour tout $t \in q$, on a

$$\overrightarrow{M'(t)} = 0.$$

Ceci résulte aisément des conditions imposées à $M(t)$ dans tout intervalle σ contigu à π, et des propriétés de la fonction $F(t)$.

Comme q et son image sur γ sont de mesure linéaire nulle, on voit que l'arc D de γ possède une paramétrisation satisfaisant aux conditions du théorème. Donc D est un arc normal et il ne peut contenir de points de P, contrairement à l'hypothèse.

Donc P est vide, ce qui démontre le théorème.

Remarque. — Comme pour le théorème 11, on peut remarquer que la démonstration précédente peut fournir une méthode de construction de la paramétrisation de γ satisfaisant aux conditions du théorème.

22. Caractérisation des applications équivalentes a une application dérivable. — M. Zahorski a énoncé (1) le théorème suivant, à la fois plus large et moins précis que le théorème 15 ci-dessus :

« *Tout arc simple ayant partout une tangente, sauf au plus sur un ensemble dénombrable, possède une paramétrisation dérivable* », en

(1) Cet énoncé a été donné, sans démonstration, dans une lettre adressée à la *Société Mathématique de France* et communiquée à la séance du 21 novembre 1945.

ajoutant qu'on pouvait donner une condition suffisante plus large, mais exprimable moins simplement.

Nous allons ici, en utilisant le théorème 26 du Chapitre IV sur les G_δ de mesure linéaire nulle, démontrer un théorème qui englobe à la fois le théorème 11 et le théorème 16, ainsi que le théorème de M. Zahorski, et qui donne la caractérisation des arcs, simples ou paramétrés, susceptibles d'une paramétrisation dérivable.

Nous commencerons par démontrer que tout arc rectifiable est susceptible d'une paramétrisation dérivable.

Définition 1. — *Nous appellerons* longueur *de l'application continue* T *de l'intervalle* $E(0 < t < 1)$ *dans* R_n *la longueur de la courbe paramétrée définie par cette application. Lorsque cette longueur est finie, l'application* T *est dite* rectifiable.

On définirait aisément aussi la longueur d'une application continue d'un espace quelconque E dans R_n.

Théorème 16. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une application continue* T *de l'intervalle* $E(0 < t < 1)$ *dans* R_n, *soit équivalente à une application dérivable* T' *à dérivée* bornée en module, *est que l'application* T *soit* rectifiable.

Lorsque T *n'est constante sur aucun intervalle de* E, *on peut toujours choisir* T' *telle que l'ensemble des points de* E *en lesquels sa dérivée est nulle soit de mesure linéaire nulle et ait même fermeture que l'ensemble des points non réguliers de* T'.

Démonstration. — 1° *La condition est nécessaire.* — En effet, une application T de E dans R_n, dérivable et à dérivée bornée en module par une constante k a évidemment une longueur au plus égale à k.

2° *La condition est suffisante.* — Supposons d'abord que T ne soit constante sur aucun intervalle de E. Soit $s(t)$ la longueur de l'application T du segment $(0, t)$.

$s(t)$ est une fonction strictement croissante de t. Donc si nous prenons $s(t)$ comme paramètre, nous obtenons une application T_1 équivalente à T.

L'application T_1 a partout des nombres dérivés bornés en module par 1. Donc T_1 est dérivable pour presque tout s; et même sa dérivée est égale en module à 1 pour presque tout s.

Soit A l'ensemble des points du segment $[0, s(1)]$ en lesquels T_1 n'est pas dérivable ou n'a pas le module de sa dérivée égal à 1. L'ensemble A est inclus dans un G_δ de mesure linéaire nulle ayant même fermeture que A.

Appliquons le théorème 26 du Chapitre IV. On peut définir sur le segment $0 \leqq y \leqq 1$ une fonction continue strictement croissante $s = s_0(y)$, où $s_0(0) = 0$ et $s_0(1) = s(1)$, dérivable et à dérivée partout finie, telle que l'ensemble des points en lesquels $\frac{ds_0}{dy} = 0$ soit un ensemble de mesure linéaire nulle qui a pour image l'ensemble A du segment $[0, s(1)]$.

Soit T′ l'application définie sur le segment $0 \leqq y \leqq 1$, transformée de T_1 par la transformation topologique $s = s_0(y)$.

La formule

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dy} = \frac{d\overrightarrow{M}}{ds} \cdot \frac{ds}{dy}$$

montre que T′ est bien la transformation cherchée, puisque $\frac{ds}{dy}$ est déterminée et finie pour tout y, et que lorsque $\frac{d\overrightarrow{M}}{ds}$ est nulle ou n'a pas une valeur unique, on a

$$\frac{ds}{dy} = 0.$$

Il se peut que l'ensemble des points en lesquels $\frac{d\overrightarrow{M}}{dy} = 0$ n'ait pas même fermeture que l'ensemble I des points non réguliers de T′. Il est aisé alors, en utilisant le théorème 11 dans chacun des intervalles contigus à la fermeture de cet ensemble I, de modifier T′ pour obtenir une paramétrisation satisfaisant à toutes les conditions du théorème.

Lorsque T est constant sur certains intervalles de E, la fonction $s(t)$ n'est pas strictement croissante. On la remplace alors par $t + s(t)$ et tous les raisonnements ci-dessus restent valables.

Définition 2. — *On dit qu'une application continue* T *de l'intervalle* $E(0 < t < 1)$ *dans* R_n *est* partiellement rectifiable *sur le sous-ensemble* *parfait* P *de* E *lorsqu'il existe un intervalle* D *de* E *contenant des points de* P *et tel que :*

1° *l'application* T *ait sur* D.P *une mesure linéaire* finie ;

2° *si* δ_i *désigne le diamètre de l'image* $T(\sigma_i)$ *dans* R_n *d'un intervalle* σ_i *contigu à* D.P, *la somme* $\sum_i \delta_i$ *étendue à tous les* σ_i *contigus à* D.P *soit* finie.

Lorsque T *est partiellement rectifiable sur tout ensemble parfait, on dit simplement que* T *est* partiellement rectifiable.

THÉORÈME 17. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une application continue* T *de l'intervalle* $E(0 < t < 1)$ *dans* R_n *soit équivalente à une application* T′ *dérivable est que* T *soit partiellement rectifiable.*

Lorsque T *n'est constante sur aucun intervalle, on peut toujours choisir* T′ *telle que l'ensemble des points de* E′ *en lesquels sa dérivée s'annule soit de mesure linéaire nulle et ait même fermeture que l'ensemble des points non réguliers de* T′.

DÉMONSTRATION. — 1° *La condition est nécessaire.* — En effet, soit T′ une application dérivable de E dans R_n. Soit P un sous-ensemble parfait de E.

Il est immédiat [1] qu'il existe un intervalle D de E contenant des points de P et tel que, pour une certaine constante $k(0 \leqq k < \infty)$:

1° $\left|\dfrac{\overrightarrow{aM}}{dt}\right| < k$ en tout point de D.P, ce qui entraîne que T′(D.P) ait une mesure linéaire finie ;

2° si ab désigne un intervalle quelconque contigu à D.P, on ait, en désignant par m un point quelconque de ab,

$$\frac{T(a)T(m)}{ab} < k.$$

Cette condition entraîne que $\delta[T(ab)] < 2k|ab|$, en désignant par

---

[1] *Voir*, par exemple, le théorème 6.

$\delta(A)$ le diamètre d'un ensemble cartésien A, et par $|ab|$ la longueur de ab.

Cette relation entraîne évidemment la 2[e] condition nécessaire pour que T′ soit partiellement rectifiable.

2° *La condition est suffisante.* — Supposons d'abord que T ne soit constante sur aucun intervalle de E.

Désignons par Ω l'ensemble des points de E dont chacun soit situé sur un intervalle sur lequel T soit équivalente à une application dérivable T′ dont la dérivée ne s'annule que sur un ensemble de mesure nulle (une telle application sera dite normale, pour abréger).

L'ensemble Ω est ouvert et l'on montrerait aisément, par un mode de raisonnement déjà utilisé plusieurs fois, que si σ désigne une composante connexe quelconque de Ω, l'application T est sur $\bar{\sigma}$ équivalente à une application dérivable normale à dérivée nulle aux extrémités de σ.

Posons $P = (E - \Omega)$. Nous voulons montrer que P est vide. Il est immédiat que P ne peut contenir de point isolé. Nous supposerons donc P parfait et non vide.

Soit D un intervalle de E contenant des points de P et sur lequel soient vérifiées, pour P, les deux conditions de la définition 2 ci-dessus.

Soient a, b les extrémités de D, que nous supposerons être des points de P. Si m est un point quelconque de D.P d'abscisse t, on désignera par $s(t)$ la somme

$$s(t) = l(t) + \sum_i \delta_i,$$

où $l(t)$ désigne la mesure linéaire de l'application T sur l'ensemble P.(am), et où $\sum_i \delta_i$ est la somme, étendue à tous les intervalles σ_i contigus à P.(am), des diamètres des images $T(\sigma_i)$.

La fonction $s(t)$ est strictement croissante sur D.P. Donc si nous prenons $s(t)$ comme paramètre, nous obtenons une paramétrisation T_1 équivalente à T sur (D.P). Cette application a, pour tout s, ses nombres dérivés bornés en module par 1 ; et elle a presque partout une dérivée de module égal à 1.

Soit Π l'ensemble des points s, images des points de (D.P). La transformation T_1 est définie pour tout $s \in \Pi$. On va maintenant définir T_1 sur tout intervalle contigu à Π.

Soit $(\alpha_i \beta_i)$ un tel intervalle et $(a_i b_i)$ son homologue sur D. Par construction, la longueur $|\alpha_i \beta_i|$ est égale au diamètre de $T(a_i b_i)$.

Nous savons que T est équivalente sur $(a_i b_i)$ à une application dérivable normale définie sur l'intervalle $(\alpha_i \beta_i)$. Il est aisé de montrer qu'on peut toujours choisir cette application normale T_1 de telle sorte que, pour tout point μ de $(\alpha_i \beta_i)$ on ait

$$\frac{T(\alpha_i)T(\mu)}{\alpha_i \mu} < 3 \quad \text{et} \quad \frac{T(\beta_i)T(\mu)}{\beta_i \mu} < 3 \quad (^1).$$

Supposons cette application T_1 définie pour tout intervalle $(\alpha_i \beta_i)$. Alors T_1 est définie sur tout le segment minimum Δ contenant Π. Cette application est équivalente à l'application T sur $\bar{D}$; d'autre part, en chacun des points de $(\Delta - \Pi)$ elle est dérivable et en chacun des points de Π on vérifie aisément que ses nombres dérivés sont en module au plus égaux à 3; de plus, presque partout sur Π elle a une dérivée de module égal à 1.

On peut alors appliquer le théorème 26 du Chapitre IV comme on l'a fait déjà pour la démonstration du théorème 16 ci-dessus. L'ensemble A qui interviendra ici sera un G_δ de mesure linéaire nulle et inclus dans Π.

Il existe donc une application T′ dérivable et normale, équivalente à la restriction de T à D. Ceci est en contradiction avec le fait que D contient des points de P.

Donc T est, sur E tout entier, équivalente à une application T′ dérivable et normale.

Pour montrer qu'on peut choisir T′ telle que l'ensemble des points en lesquels sa dérivée s'annule ait même fermeture que l'ensemble de ses points non réguliers, il suffit d'appliquer le procédé indiqué déjà dans la démonstration du théorème 16.

Lorsque T est constante sur certains intervalles de E, il suffira de

---

(1) Le nombre 3 n'est pas essentiel. On peut le remplacer par un nombre quelconque supérieur à 2.

remplacer dans la démonstration la fonction $s(t)$ par $t+s(t)$. Il va sans dire qu'alors T est encore équivalente à une application dérivable, mais qui n'est plus normale.

Remarque 1. — Il est remarquable que les applications équivalentes à une application dérivable puissent être caractérisées d'une façon indépendante de la notion de dérivabilité.

Remarque 2. — Si T est une application dérivable de l'intervalle E dans R_n, et H une projection orthogonale de R_n sur une sous-variété linéaire de R_n, l'application T' produit de T par H est encore dérivable.

Inversement, il est évident que T est le produit d'une application *positivement* dérivable de E dans R_{n+1} par une projection orthogonale de R_{n+1} sur R_n.

23. Commentaires. Applications a contingent incomplet. — 1° Soit T une application dérivable de l'intervalle $E(0<t<1)$ dans R_n. L'image dans R_n de l'ensemble des points de E en lesquels $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}=0$ a évidemment une mesure linéaire nulle. Donc l'ensemble des points non réguliers d'une application dérivable T a dans R_n une image de mesure linéaire nulle.

On pourrait croire qu'inversement si γ est un arc simple de R_n sur lequel l'ensemble des points non réguliers a une mesure linéaire nulle, on peut trouver une paramétrisation dérivable de γ.

Nous allons voir qu'il n'en est rien, même si l'on suppose que l'ensemble I *des points non réguliers de* γ *est un ensemble fermé de mesure nulle situé sur une droite.*

Soient $Oxyz$ trois axes rectangulaires dans R_3.

Soit I l'ensemble parfait triadique de Cantor construit sur le segment $(0-1)$ de l'axe $x'x$.

Soit $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ la suite des intervalles contigus à I; désignons par 3^{-n_i} la longueur de σ_i.

Soit $u_1, u_2, \ldots$ une suite de nombres positifs tendant vers zéro et tels que $\sum_i u_i=\infty$.

Pour tout intervalle σ_i, désignons par γ_i un arc simple ouvert rectifiable, à tangente continue, de diamètre égal à u_{n_i}, ayant mêmes extrémités que σ_i, et situé dans le demi-plan ouvert limité par $x'x$ et faisant avec $\overrightarrow{Oy}$ un angle de i radians.

On pose

$$\gamma = \mathrm{I} + \bigcup_i \gamma_i.$$

Il est immédiat que γ est un arc simple et que tout point de $(\gamma - \mathrm{I})$ est régulier. Cependant aucun intervalle de γ contenant des points de I ne possède une paramétrisation dérivable.

En effet, on vérifie aisément que γ n'est pas partiellement rectifiable sur I, parce que la 2ᵉ condition imposée dans la définition 2 du paragraphe **22** ci-dessus n'est pas vérifiée.

Une construction analogue pourrait se faire dans le plan, et pour tout ensemble parfait I totalement discontinu.

2° Il n'est pas toujours immédiat de vérifier si une application continue de l'intervalle E dans R_n est partiellement rectifiable. Aussi est-il intéressant d'avoir des conditions suffisantes assez simples. Nous savons déjà, par le théorème 15, que tout arc doué en tout point d'une tangente admet une paramétrisation dérivable; un tel arc est donc partiellement rectifiable.

Plus généralement, on pourrait démontrer que :

THÉORÈME 18. — *Toute application continue* T *de l'intervalle* E$(0 < t < 1)$ *dans* R_n, *dont le contingent en tout point laisse échapper* (¹) *une variété linéaire à* $(n - 1)$ *dimensions, est une application partiellement rectifiable, donc équivalente à une application dérivable.*

24. ÉQUIVALENCE ENTRE APPLICATIONS PARTIELLEMENT RECTIFIABLES, PONCTUELLEMENT RECTIFIABLES, ET DÉRIVABLES. — DÉFINITION. — *Soit* T *une application continue d'un espace métrique* E *dans un espace métrique* E'.

(¹) Si l'on disait seulement que la partie bilatérale du contingent (*voir* ROGER [I]) laisse échapper une variété linéaire à $(n - 1)$ dimensions, le théorème serait faux. On peut le montrer par un contre-exemple simple.

Si m_1, m_2 sont deux points quelconques de E, *posons*

$$k(m_1) = \limsup_{m_2 \to m_1} \left(\frac{M_1 M_2}{m_1 m_2} \right), \qquad \text{où} \quad M_i = T(m_i) \qquad (i = 1, 2).$$

Si $k(m_1)$ est uniformément borné supérieurement, on dit que T *est* rectifiable.

Si $k(m_1)$ est seulement fini pour tout m_1, on dit que T *est* ponctuellement rectifiable.

THÉORÈME 19. — *Toute application partiellement rectifiable* T *de l'intervalle* $E(0 < t < 1)$ *dans* R_n *est équivalente à une application ponctuellement rectifiable.*

Inversement toute application T *ponctuellement rectifiable est partiellement rectifiable.*

Démonstration. — 1° Toute application T partiellement rectifiable est, en vertu du théorème 17, équivalente à une application dérivable. Or toute application dérivable est évidemment ponctuellement rectifiable. La 1re partie du théorème en résulte aussitôt.

2° Soit T une application ponctuellement rectifiable de E dans R_n. Soit P un sous-ensemble parfait de E. Je dis qu'il existe un intervalle D de E contenant des points de P, et une constante $\lambda(0 < \lambda < \infty)$ tels que, si (m, m') est un couple quelconque de points de E, avec $m \in D.P$ et $m' \in D$, on ait

$$\frac{MM'}{mm'} < \lambda \qquad [M = T(m);\ M' = T(m')].$$

Sinon, le procédé utilisé dans la démonstration du théorème 6 mettrait en évidence un point m de P en lequel $k(m) = \infty$.

Il en résulte que T est rectifiable sur D.P, et que pour tout intervalle σ de longueur $|\sigma|$ contigu à D.P, le diamètre de $T(\sigma)$ est inférieur à $2\lambda\sigma$.

Ceci montre bien que T est partiellement rectifiable.

COROLLAIRE. — *Il y a équivalence, au sens de la définition* 1 *du paragraphe* 17, *entre les trois classes d'applications : partiellement rectifiables, ponctuellement rectifiables, et dérivables.*

25. Examen des possibilités d'extension des résultats précédents. — Nous avons, dans ce qui précède, donné une caractérisation complète des applications T de l'intervalle $E(0 < t < 1)$ dans R_n, qui sont équivalentes, soit à une application positivement dérivable, soit à une application dérivable; et dans chaque cas, nous avons mis en évidence une de ces applications qui montrait le mieux possible les caractères de régularité de l'application T.

On peut se poser un problème plus général en remplaçant l'intervalle E par d'autres ensembles cartésiens.

Par exemple, supposons que E soit un ensemble cartésien dont le contingent en tout point soit porté par une droite.

Soit T une application continue de E dans R_n. On peut définir aisément ce qu'on entendra ici par application T dérivable ou positivement dérivable. La question se pose alors de rechercher les conditions pour qu'une application T définie sur E soit équivalente à une application dérivable, la notion d'équivalence étant ici associée au groupe des automorphies de E.

Signalons toutefois la différence entre ce cas général et le cas où E est un segment. C'est que dans ce dernier cas, le groupe des automorphies de E est transitif. Il peut arriver en particulier, dans le cas général, que certains points de E soient invariants dans toute automorphie de E.

En fait, ce genre de problèmes ne reprend son intérêt que lorsque E est un domaine d'un espace cartésien. C'est ce que nous supposerons dans ce qui suit, où nous allons généraliser le problème de Fréchet au cas des variétés paramétrées.

Les méthodes que nous utiliserons sont une extension des méthodes utilisées jusqu'ici dans le cas où E est un intervalle linéaire. Aussi énoncerons-nous en général les résultats sans démonstration. Nous insisterons surtout sur les faits nouveaux qui se présentent.

26. Variétés paramétrées. Notion générale de régularité et de dérivabilité. — Définition 1. — *Soit* T *une application continue d'un domaine* E *de l'espace* R_p *dans* R_n. (*On dit que* T *définit une variété paramétrée à p dimensions.*)

Soit m un point de E, *et* $M = T(m)$.

Nous dirons que T *est* régulière *en* m *s'il existe dans* R_n *une variété linéaire* L_p *à p-dimensions passant par* M *et telle que pour tout domaine* v *de* E *contenant* m, *il existe un domaine* V *de* L_p *homéomorphe à* v *et contenant* M *tel que, si* δ *désigne le diamètre de* V *et* ε *l'écart de Fréchet* [1] *entre* V *et* $T(v)$, *on ait uniformément*

$$\lim_{\delta \to 0} \left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right) = 0.$$

On peut démontrer, sur l'application T régulière au point m, un lemme analogue au lemme 1 du paragraphe **16**; en particulier le contingent de l'application T en m est identique à l'ensemble des demi-droites de L_p issues de M.

Nous énoncerons maintenant sans démonstration un lemme analogue au lemme 2 du paragraphe **16**.

Lemme. — *Lorsque l'application continue* T *du domaine* E *de* R_p *dans* R_n *est régulière en tout point, on peut, pour tout nombre* $\varepsilon > 0$, *attacher à tout ensemble fermé* P *de* E *un sous-domaine* D *de* E *contenant des points de* P *et tel que :*

1° *l'angle d'une corde quelconque joignant un point de* $T(D.P)$ *à un point de* $T(D)$ *avec une variété linéaire fixe* L_p, *soit* $< \varepsilon$;

2° *il existe un* $(n-p)$*-hyperplan* H *totalement perpendiculaire à* L_p *tel que tout* $(n-p)$*-hyperplan passant par un point de* $T(D.P)$ *et parallèle à* H *ne rencontre* $T(D)$ *qu'en ce point;*

3° *le contingent ordinaire de* $T(D)$ *soit en chacun des points de* $T(D.P)$ *un p-hyperplan faisant avec* L_p *un angle* $< \varepsilon$;

4° *l'application* T *soit une homéomorphie entre* $D.P$ *et* $T(D.P)$ *et que pour tout* $m \in (D - D.P)$, *on ait* $T(m) \in T(D) - T(D.P)$.

Définition 2. — *Deux applications continues* T_1, T_2 *d'un domaine* E *de* R_p *dans* R_n *sont dites équivalentes lorsqu'il existe une homémorphie* H *de* E *sur lui-même telle que, lorsque* $m_2 = H(m_1)$, *on ait*

$$T_1(m_1) = T_2(m_2).$$

---

[1] La définition de ε, donnée en note dans le paragraphe **16**, s'étend immédiatement au cas présent.

Définition 3. — *Une application continue* T *d'un domaine* E *de* R_p *dans* R_n *est dite* dérivable (*resp.* positivement dérivable) *au point m de* E *lorsque* T *est, en m, tangente à une transformation linéaire de* R_p *dans* R_n (*resp. linéaire et non dégénérée*).

Si T *est dérivable* (*resp. positivement dérivable*) *en tout point m de* E, *on dit simplement que* T *est dérivable* (*resp. positivement dérivable*).

Le problème se pose de rechercher les applications continues T qui sont équivalentes, soit à une application dérivable, soit à une application positivement dérivable.

Nous n'étudierons pas ici le problème de la caractérisation des applications dérivables comme nous l'avons fait ci-dessus pour les applications d'un intervalle de droite. Toutefois les résultats obtenus dans ce cas particulier indiquent une direction possible de recherche.

En effet, il est immédiat que si T est dérivable sur E, il existe une portion de E sur laquelle T est une application rectifiable au sens de Lebesgue [1]. La première question à résoudre est donc de rechercher si, inversement, toute application rectifiable au sens de Lebesgue est équivalente à une application dérivable. Ce résultat est rendu probable par le fait qu'une application rectifiable est presque partout dérivable sur E.

Il suffirait pour démontrer ce résultat, de démontrer d'abord un théorème généralisant le théorème 26 du Chapitre IV relatif aux homéomorphies d'un domaine sur un autre.

Ensuite on pourrait chercher à démontrer qu'il y a équivalence entre la classe des applications ponctuellement rectifiables [2] et celle des applications dérivables.

Enfin il faudrait introduire une définition convenable des applications partiellement rectifiables, analogue à la définition 2 du paragraphe **22**.

27. Caractérisation des applications d'un domaine de R_p équivalentes a une application positivement dérivable. — Théorème 20. — *La condi-*

---

(1) *Voir* la définition dans le paragraphe **24**.

(2) *Loc. cit.*

tion nécessaire et suffisante pour qu'une application continue T *d'un domaine* E *de* R_p *dans* R_n *soit équivalente à une application positivement dérivable, est que* T *soit régulière en tout point m de* E.

Il existe un procédé régulier de recherche de cette application positivement dérivable.

Démonstration. — Il est immédiat que la condition est nécessaire. Nous n'entrerons pas dans tous les détails de la démonstration du fait que la condition est suffisante.

Les idées directrices sont les mêmes que celles qui ont conduit au théorème **11**.

Voici le schéma de la démonstration :

On remarque d'abord que sur tout domaine de E il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un sous-domaine D tel que :

1° T réalise une homéomorphie entre D et T(D);

2° L'opération projection orthogonale de T(D) sur un p-hyperplan convenable L_p réalise une homéomorphie entre T(D) et sa projection sur L_p;

3° La variété linéaire tangente à T(D) en chacun de ses points fasse avec L_p un angle inférieur à ε.

Il est alors évident que T est sur D équivalente à une application positivement dérivable.

On désigne alors par Ω l'ensemble ouvert des points de E dont chacun possède un voisinage ouvert sur lequel T soit équivalente à une application positivement dérivable. Le but est de montrer que

$$E \equiv \Omega.$$

Voici les lemmes qui conduisent au résultat.

Pour fixer les idées et simplifier les notations, nous supposerons que $p = 2$ et $n = 3$.

Lemme A (dilatation d'un domaine) (*voir fig.* 5). — *Soient* $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ *trois arcs simples plans d'extrémités communes* A *et* B, *n'ayant deux à deux en commun que* A *et* B, *et tels que* γ_1 *soit intérieur au domaine fini limité par* $(\gamma_0 + \gamma_2)$.

Nous dirons que $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ *sont trois arcs associés.*

Soit D_1 (resp. D_2) *le domaine fini limité par* $(\gamma_0+\gamma_1)$ [resp. $(\gamma_0+\gamma_2)$].

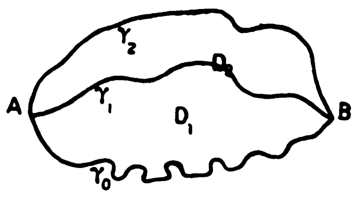

Fig. 5.

Il existe une homéomorphie H *de* $\overline{D_1}$ *sur* $\overline{D_2}$, *positivement dérivable sur* D_1, *et qui se réduit à l'identité au voisinage de tout point de* $[\gamma_0-(A+B)]$.

Lemme B (mélange de domaines) (*voir fig.* 6, 7, 8). —

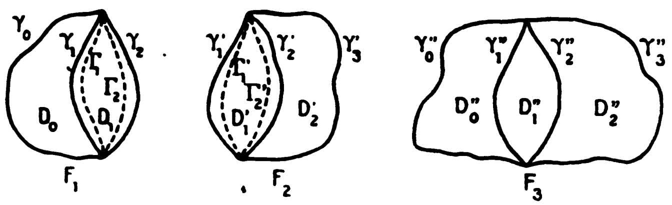

Fig. 6. Fig. 7. Fig. 8.

Soient F_1 *et* F_2 *deux figures planes disposées comme l'indiquent les figures* 6, 7. F_1 (resp. F_2) *est formée de trois arcs associés* $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$ [resp. $(\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3)$] *limitant deux domaines* disjoints D_0 *et* D_1 (resp. D'_1 *et* D'_2).

On suppose donnée une homéomorphie $\mathcal{H}$ *entre* $\overline{D_1}$ *et* $\overline{D'_1}$ *telle que* $\mathcal{H}$ *soit positivement dérivable sur* D_1 *et telle que*

$$\mathcal{H}(\gamma_1)=\gamma'_1 \quad \text{et} \quad \mathcal{H}(\gamma_2)=\gamma'_2.$$

Soient encore Γ_1, Γ_2 *deux arcs disjoints de* D_1, *ayant mêmes extrémités que* γ_1 *et* γ_2 *et disposés comme l'indique la figure* 1. *Soit* Δ_1 *le domaine fini limité par* $(\Gamma_1+\Gamma_2)$.

Posons

$$\mathcal{H}(\Gamma_1)=\Gamma'_1, \qquad \mathcal{H}(\Gamma_2)=\Gamma'_2, \qquad \mathcal{H}(\Delta_1)=\Delta'_1.$$

Alors il existe une figure plane F_3 *formée de quatre arcs d'extrémités* *communes* γ''_0, γ''_1, γ''_2, γ''_3, *disposés comme l'indique la figure* 8 *et limitant les domaines disjoints* D''_0, D''_1, D''_2, *telle qu'il existe une homéomorphie* H *de* $\overline{D''_0+D''_1}$ *sur* $\overline{D_0+D_1}$ *positivement dérivable en tout point intérieur de* $(\overline{D''_0+D''_1})$, *telle que :*

$$H(\gamma''_0)=\gamma_0, \qquad H(\gamma''_1)=\gamma_1, \qquad H(\gamma''_2)=\gamma_2,$$

et une homéomorphie H′ *de* $\overline{D''_1+D''_2}$ *sur* $\overline{D'_1+D'_2}$, *positivement dérivable en tout point intérieur de* $\overline{D''_1+D''_2}$, *telle que*

$$H'(\gamma''_1)=\gamma'_1, \qquad H'(\gamma''_2)=\gamma'_2, \qquad H'(\gamma''_3)=\gamma'_3,$$

l'homéomorphie entre Δ_1 *et* Δ'_1 *engendrée par* H *et* H′ *étant de plus identique à* $\mathcal{H}$.

Ce lemme B se démontre en utilisant le lemme A [1].

Il permet de montrer que si une application T d'un domaine plan E dans R_p est, sur deux sous-domaines D_1 et D_2 de E équivalente à une application positivement dérivable, elle l'est aussi sur la réunion (D_1+D_2).

Lemme C. — *Soit* E *un domaine plan,* P *un sous-ensemble fermé de* E. *Si une application continue* T *de* E *dans* R_n *est, sur tout sous-domaine* D *de* E *tel que* $D \ll (E-P)$, *équivalente à une application positivement dérivable, il existe une automorphie* H *de* E *laissant invariant tout point de* P, *et telle que la transformée de* T *par* H *soit positivement dérivable sur* $(D-P)$.

Lemme D. — *Soit* E *un domaine plan limité par une circonférence et* P *un ensemble compact intérieur à* E *(donc situé à une distance positive de la circonférence de* E*).*

Soit T *une application continue de* $\overline{E}$ *dans le plan, telle que pour tout couple* (m, m'), *où* $m \in P$ *et* $m' \in \overline{E}$, *on ait*

$$T(m) \neq T(m'),$$

---

[1] Remarquons ici l'analogie entre le lemme B et un lemme utilisé par Caratheodory dans la théorie de la représentation conforme [Voir *Conformal representation*, par C. Caratheodory (*Cambridge Tracts in Mathematics*, 1932, p. 98)].

alors il existe une partition (¹) *de* P *en un nombre fini d'ensembles fermés* P_i (*si* P_i *est connexe, il y a un seul ensemble* P_i) *telle que pour tout* P_i *l'homéomorphie engendrée par* T *entre* P_i *et* $T(P_i)$ *soit prolongeable à tout le plan.*

Lemme E. — *Soit* xOy *un plan de* R_3. *Soit* E *un domaine du plan* xOy *limité par une circonférence et* P *un ensemble compact intérieur à* E.

Soit T *une application continue de* $(\bar{E})$ *dans* R_3 *telle que pour tout couple* (m, m'), *où* $m \in P$ *et* $m' \in \bar{E}$, *on ait*

$$T(m) = m; \qquad T(m') \neq m.$$

On suppose que T *est régulière en tout point m de* P, *que le contingent ordinaire de* $T(\bar{E})$ *est en tout point m de* P *confondu avec le plan* xOy, *et que toute corde joignant un point m de* P *à un point quelconque de* $T(\bar{E})$ *fait avec* xOy *un angle* $< \varepsilon$ (*avec* $\varepsilon > 0$ *fixe*).

Alors si T *est sur* $(E - P)$ *équivalente à une application positivement dérivable, il existe un sous-ensemble* P_i *de* P *à la fois ouvert et fermé dans* P, *et un voisinage* $\mathcal{V}_i$ *de* P_i *tels qu'il existe une automorphie* H *de* E *laissant invariant tout point de* P_i *et pour laquelle la transformée de* T *par* H *soit positivement dérivable sur* $\mathcal{V}_i$.

28. Étude de l'ensemble des points contrariants d'une variété. — Nous avons démontré dans le théorème 12 que l'ensemble des points contrariants d'un arc simple γ, dont le contingent en tout point est linéaire, est un $G_{\delta\sigma}$ non dense sur γ et de mesure linéaire nulle.

Ce résultat ne s'étend pas au cas des variétés à plusieurs dimensions.

Soit V_p une variété à p dimensions dont le contingent en tout point soit une variété linéaire à p dimensions. Nous appellerons encore ici *point contrariant* tout point de V_n qui n'est pas régulier dans l'application canonique de V_n sur lui-même.

Soit C l'ensemble des points contrariants de V_n.

Il est encore exact que C est un $G_{\delta\sigma}$ non dense sur V_n. Mais il est

(¹) Il est essentiel d'introduire cette partition, car il peut arriver que l'homéomorphie T entre P et T(P) ne soit pas prolongeable à tout le plan, bien qu'étant cependant toujours prolongeable à un certain voisinage de P et T(P).

inexact que C soit de mesure n-dimensionnelle nulle. Nous allons le montrer par un contre-exemple.

Soient $Oxyz$ trois axes rectangulaires dans R_3, et soit P un sous-ensemble parfait borné du plan xOy. Nous supposerons P totalement discontinu et défini par la formule

$$P = \bigcap_i S_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

où S_i est une réunion de 2^n rectangles $R_{i,j}$ égaux et disjoints deux à deux, tels que chacun d'eux contienne deux rectangles de S_{i+1} strictement intérieurs à $R_{i,j}$.

On suppose les S_i choisis de telle sorte que P ait une aire > 0.

Nous allons construire dans R_3 une variété V_2 contenant P, douée en tout point d'un plan tangent variant continuement sur $(V_2 - P)$, et pour laquelle $C = P$.

Nous astreignons V_2 à être comprise entre les deux surfaces S_+ et S_- d'équations $z = \delta^2(m)$ et $z = -\delta^2(m)$, où $\delta(m)$ désigne la distance du point m de xOy à l'ensemble P.

Pour tout $R_{i,j}$, désignons par $c_{i,j}$ une circonférence intérieure à $R_{i,j}$ et extérieure aux deux rectangles de S_{i+1} contenus dans $R_{i,j}$.

Soit $\sigma_{i,j}$ une surface d'allure serpentine, homéomorphe à l'intérieur d'un cercle, limitée par $c_{i,j}$, située entre S_+ et S_-, et dont la projection

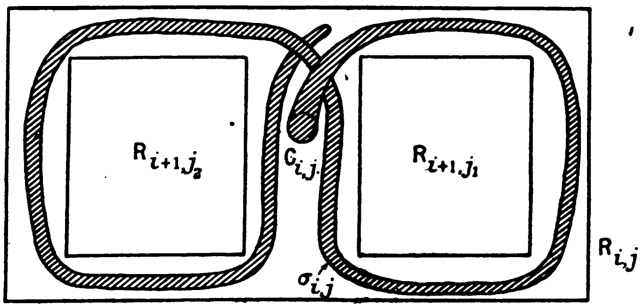

Fig. 9.

sur xOy est intérieure à $R_{i,j}$ et extérieure aux deux rectangles de S_{i+1} contenus dans $R_{i,j}$. On astreint de plus cette projection à tourner au moins une fois autour de chacun de ces deux rectangles de S_{i+1}; et l'on suppose que $\sigma_{i,j}$ est douée en tout point d'un plan tangent variant continuement, et que son raccord avec le plan xOy se fait avec continuité du plan tangent (*voir fig.* 9).

La variété V_2 est celle qu'on déduit du plan xOy en remplaçant tout cercle $c_{i,j}$ par la surface serpentine $\sigma_{i,j}$ correspondante.

Il est immédiat que V_2 répond bien à la question.

29. Analyse des méthodes. Théorème fondamental. — Nous avons fréquemment, au cours de ce travail, utilisé un mode de raisonnement consistant à montrer que, pour tout ensemble parfait P d'un espace E, il existait un ensemble ouvert D de E contenant des points de P et tel que sur D une certaine propriété faisant intervenir à la fois les points de D.P et les points de D soit vérifiée [1].

Nous allons mettre en évidence la raison du succès de ces raisonnements par un théorème topologique très simple, jouant dans toutes les questions où intervient l'ensemble des valeurs limites d'une suite de fonctions continues, le même rôle que le théorème de Baire pour les suites convergentes de fonctions continues.

Notre théorème fait appel, non plus à la notion de fonction ponctuellement discontinue, mais à celle de fonction ponctuellement semi-continue.

Dans le cas particulier où les éléments étudiés sont les contingents d'un ensemble cartésien, une partie de ce théorème peut s'énoncer ainsi :

Sur tout ensemble parfait, il existe un point en lequel le contingent possède la semi-continuité supérieure d'inclusion; et même il existe un point en lequel le paratingent est continu et identique au contingent.

Nous allons maintenant énoncer ce résultat sous une forme à la fois plus générale et plus précise.

Pour ne pas compliquer l'énoncé des résultats nous supposerons, bien que ce ne soit pas partout nécessaire, que tous les espaces topologiques envisagés sont métrisables.

---

[1] C'est un raisonnement de cette nature qui a permis à M. Denjoy de réaliser la totalisation de toute fonction dérivée.

Définitions. — *Soient* U *un espace métrique et deux ensembles* $E \subset U$, $P \subset U$, *l'ensemble* E *étant quelconque, l'ensemble* P *étant complet.*

Soit d'autre part Δ *un espace compact.*

Soit δ *une fonction faisant correspondre à tout couple ordonné* [1] (m, m') *de points* distincts *de* U *tels que* $m \in P$ *et* $m' \in E$, *un point* $\delta(m, m')$ *de* Δ *variant continuement avec m pour tout m' fixe.*

1° *Pour tout point* $m \in P$ *et pour tout voisinage* $\mathcal{V}$ *de m dans* U, *désignons par* $\mathcal{C}_E(\mathcal{V})$ *la fermeture de l'ensemble des points* $\delta(m, m')$ *de* Δ, *où* $m' \in \mathcal{V}.E$.

Puis posons $\mathcal{C}_E(m) = \bigcap \mathcal{C}_E(\mathcal{V})$, *cette intersection étant étendue à tous les voisinages* $\mathcal{V}$ *de m.*

L'ensemble $\mathcal{C}_E(m)$ *est un sous-ensemble fermé de* Δ. *Il apparaît comme un contingent associé à la fonction* δ.

Nous dirons que $\mathcal{C}_E(m)$ *est le contingent de* E *en m associé à la fonction* δ.

2° *Pour tout point* $m \in P$ *et pour tout voisinage* $\mathcal{V}$ *de m dans* U, *désignons par* $\mathfrak{T}_{E,P}(\mathcal{V})$ *la fermeture de l'ensemble des points* $\delta(m', m'')$ *de* Δ, *où* $m' \in \mathcal{V}.P$ *et* $m'' \in \mathcal{V}.E$.

Puis posons $\mathfrak{T}_{E,P}(m) = \bigcap \mathfrak{T}_{E,P}(\mathcal{V})$, *cette intersection étant étendue à tous les voisinages* $\mathcal{V}$ *de m.*

L'ensemble $\mathfrak{T}_{E,P}(m)$ *est un sous-ensemble fermé de* Δ. *On a évidemment* $\mathcal{C}_E(m) \subset \mathfrak{T}_{E,P}(m)$ [2]; *d'autre part il est immédiat que* $\mathfrak{T}_{E,P}(m)$ *jouit de la semi-continuité supérieure d'inclusion.*

---

(1) On se souviendra mieux du sens de ces notations en remarquant que U est l'Univers contenant les êtres étudiés, que E est l'Ensemble à étudier, que P est surtout intéressant lorsqu'il est Parfait ; enfin les notations Δ, δ rappellent que Δ peut être, dans l'étude des contingents et paratingents des ensembles cartésiens, l'espace des directions δ de droites ou demi-droites de R_n.

Il pourra se faire qu'incidemment, ou pour certaines fonctions δ, on ait

$$\delta(m, m') = \delta(m', m).$$

C'est ce qui se produit lorsque δ est une direction de droite, U étant un espace cartésien.

(2) On peut remarquer que l'on pourrait déduire la définition du contingent $\mathcal{C}_E(m)$ de celle du paratingent $\mathfrak{T}_{E,P}(m)$ en prenant pour P l'ensemble formé du seul élément m.

Nous dirons que $\mathcal{T}_{E,P}(m)$ *est le paratingent de* E *en* m *relatif à l'ensemble* P, *et associé à la fonction* δ.

Dans ces définitions, $\mathcal{C}_E(m)$ et $\mathcal{T}_{E,P}(m)$ ne sont définis que pour $m \in P$. Dans l'énoncé du théorème, c'est toujours aussi ce que nous supposerons.

Nous énoncerons sans démonstration le théorème suivant :

Théorème 21 (fondamental). — *Les notations étant celles adoptées dans les définitions ci-dessus, il existe toujours sur toute portion de* P *un point* m_0 *en lequel* $\mathcal{C}_E(m)$ *possède la semi-continuité supérieure d'inclusion.*

Plus précisément, l'ensemble des points m *de* P, *en lesquels* $\mathcal{T}_{E,P}(m)$ *est continu et identique à* $\mathcal{C}_E(m)$, *est un* G_δ *partout dense sur* P, *donc un résiduel de* P (¹).

On peut donner de ce théorème diverses extensions qui, dans certains cas, peuvent être utiles.

1° Les points m' de $(E - P)$ ne jouent qu'un rôle passif de paramètres. Autour de chacun de ces points m', la topologie de E peut être arbitraire. Seule importe la topologie de P et celle liant P à E. Pour définir ce lien topologique entre P et E, il suffit par exemple de se donner pour tout couple de points distincts (m, m'), où $m \in P$ et $m' \in E$ un nombre positif $\varepsilon(m, m')$ assujetti seulement à varier continuement en fonction de m. On dira alors que $m' \to m$ lorsque

$$\varepsilon(m, m') \to 0.$$

Sous ces faibles hypothèses, le théorème reste encore valable.

2° La fonction δ, au lieu d'être définie pour des couples (m, m') peut être définie pour des ensembles ordonnés de $(n+1)$ points *dis-*

(¹) Il ne faut cependant pas croire qu'inversement en tout point de continuité m_0 de $\mathcal{T}_{E,P}(m)$, on ait

$$\mathcal{T}_{E,P}(m_0) = \mathcal{C}_E(m_0).$$

tincts (¹)

$$m,\quad m^{(1)},\quad m^{(2)},\quad m^{(n)},\qquad \text{où } m\in P \quad \text{et} \quad m^{(i)}\in E \quad (i=1,2,\dots,n),$$

la fonction δ étant toujours supposée continue par rapport à m.

On obtient alors un théorème applicable dans les questions de courbure, d'osculation, etc.

3° On peut considérer P et E comme des ensembles paramétrés (²) autrement dit, soient U′ un espace auxiliaire, et deux ensembles $E'\subset U'$ et $P'\subset U'$, l'ensemble P′ étant complet.

Soit T une application de U′ dans U, continue en tout point de P′ et telle que si $\mu\in E'$, on ait $T(\mu)\in E$, et si $\mu\in P'$, on ait $T(\mu)\in P$.

On peut définir alors en tout point de P′ le contingent de l'application T associé à la fonction δ; on peut définir de même le paratingent relatif à P′, etc.

4° Enfin on peut supposer, dans l'esprit du théorème 3, que la fonction $\delta(m, m')$ n'est plus forcément continue par rapport à m, mais seulement que son oscillation, en tout point m, tend vers zéro lorsque $m'\to m$.

Remarque. — On peut montrer aisément que toute suite décroissante (resp. croissante) d'applications f_i ponctuellement discontinues sur tout ensemble parfait (³), d'un espace complet P dans l'espace 2^Δ des sous-ensembles fermés d'un espace complet Δ, a pour limite une application ponctuellement semi-continue supérieurement (resp. inférieurement) sur tout ensemble parfait.

Il serait intéressant de chercher si la réciproque est exacte.

30. Applications du théorème fondamental. — Le théorème 21 devrait, dans une exposition synthétique, être placé en tête de ce travail. Il contient en effet plusieurs de nos théorèmes antérieurs.

(¹) Il semble même possible d'introduire des fonctions δ définies, non plus pour des ensembles finis de points, mais pour des ensembles infinis satisfaisant à certaines conditions.

(²) C'est ce que nous avons fait dans l'étude des ensembles cartésiens.

(³) En particulier, d'après le théorème 4 du paragraphe 5, le contingent d'un ensemble cartésien est la limite d'une suite décroissante d'applications semi-continues inférieurement.

Nous allons indiquer ici diverses applications de ce théorème en nous limitant aux applications géométriques.

1° Supposons que E soit le segment (0 — 1), Δ le segment $(-\infty, +\infty)$, et $\delta(x, x')$ le rapport $\dfrac{f(x')-f(x)}{x'-x}$, où $f(x)$ est une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur E.

Si P est alors un sous-ensemble fermé de E, on déduit du théorème 21 les propriétés qui ont permis à M. Denjoy de totaliser toute fonction dérivée et tout nombre dérivé.

Plus généralement, notons ici qu'on peut déduire du théorème 21 trois remarquables théorèmes topologiques de M. Denjoy (1).

Montrons-le pour le premier de ces théorèmes, en priant le lecteur de bien vouloir se reporter au texte de M. Denjoy pour les notations :

Dans l'énoncé de M. Denjoy interviennent un ensemble parfait que nous noterons P_0, et un ensemble e admettant un point d'accumulation T_0 étranger à e.

Soient alors

$$U = P_0 \times (e + T_0); \qquad E = P_0 \times e; \qquad P = P_0 \times T_0 \quad (^2).$$

On a bien ainsi $E \subset U$, $P \subset U$ et P est complet.

Notre fonction δ se déduit de la fonction $f(X, T)$ à valeurs réelles de M. Denjoy en posant

$$\delta(m, m') = f(X, T) \qquad \text{lorsque} \quad m = X \times T_0 \qquad \text{et} \qquad m' \in P_0 \times T.$$

Le théorème de M. Denjoy résulte alors immédiatement du fait que l'ensemble $\mathcal{C}(m)$ des valeurs limites de $\delta(m, m')$ lorsque $m' \to m$ est, sur tout un résiduel de P, identique à $\mathfrak{T}_{E,P}(m)$.

2° Le théorème 21 donne une démonstration rapide du théorème 5, du début du théorème 6, du théorème 19, et du 1er lemme du paragraphe **26**.

Prenons par exemple le théorème 5 :

Soit E un ensemble cartésien dont le contingent en tout point m

(1) *Voir* Denjoy [II], p. 175, 199 et 208.

(2) La notation $A \times B$ désigne le produit des espaces A et B.

d'un ensemble parfait P est situé sur un n-hyperplan $L(m)$ et contient n rayons de coefficient d'indépendance linéaire $> \lambda_0 > 0$.

En tout point m_0 de P en lequel le contingent $\mathcal{C}_E(m)$ est semi-continu supérieurement, $L(m)$ est évidemment continu.

Donc $L(m)$ est bien ponctuellement discontinu.

3° Une conséquence immédiate du théorème 21 est la suivante :

Si E est un ensemble fermé cartésien, en tous les points d'un résiduel de E, le paratingent ordinaire de E est continu et identique au contingent ordinaire.

4° Nous allons montrer comment on peut retrouver, en les précisant, certains résultats de M. Roger [I].

Soit E un ensemble fermé du plan R_2.

Définition. — *Nous dirons qu'un sous-ensemble* A *de* E *est* situé au bord de E *si* A *est situé sur un arc ouvert de Lipschitz tel que* E *soit, au voisinage de* γ, *tout entier d'un seul côté de* γ.

Soit alors P un sous-ensemble *fermé* de E.

Supposons que le contingent $\mathcal{C}_E(m)$ en tout point de P soit incomplet. Soit m_0 un point de P en lequel $\mathfrak{T}_{E,P}(m_0) = \mathcal{C}_E(m_0)$.

Le paratingent de P en m_0 étant inclus dans $\mathfrak{T}_{E,P}(m_0)$ est incomplet; donc, au voisinage de m_0, P est situé sur un arc de Lipschitz (¹).

D'autre part, comme $\mathfrak{T}_{E,P}(m_0)$ est aussi incomplet (²), il est immédiat que P, au voisinage de m_0, *est situé au bord de* E (³).

Le procédé classique d'itération transfinie permettrait de montrer

---

(¹) *Voir* Bouligand [I], p. 76.

(²) $\mathfrak{T}_{E,P}(m)$ n'est pas en général identique à sa partie bilatérale; mais il le devient lorsque $E = P$; de même $\mathcal{C}_E(m)$ est identique à sa partie bilatérale en tout point de semi-continuité supérieure sur E. Ceci subsiste pour les contingents et paratingents abstraits lorsqu'on peut donner à la bilatéralité un sens précis, ce qui n'est pas toujours le cas.

(³) Ceci amène à penser que, sauf sur un ensemble de mesure linéaire nulle, le contingent de E en tout point de P admet une direction de translation. Pour l'exploitation systématique de cette idée, voir Choquet et Pauc (*Bull. Sc. math.*, 1945, *Étude des propriétés tangentielles des ensembles euclidiens à partir de la notion d'invariance par translation*).

à partir de là que P est une réunion dénombrable d'ensembles fermés dont chacun est situé au bord de E.

En particulier, si l'ensemble I des points de E en lesquels E a un contingent incomplet est fermé ou est un F_σ, on retrouve sous une forme plus précise le résultat de Roger sur la localisation de I. Mais il faut bien remarquer qu'en général I n'est pas fermé, et il peut arriver qu'aucune portion ouverte de I ne soit située au bord de E; il peut même arriver qu'on ne puisse pas faire une partition dénombrable de I en ensembles dont chacun soit situé au bord de E. Cela arrivera toutes les fois que I (qui est un $G_{\delta\sigma}$) ne sera pas un F_σ.

On trouverait des résultats tout à fait analogues en prenant E dans un espace R_n quelconque, et en supposant qu'en tout point m d'un sous-ensemble fermé P de E, la partie bilatérale de $\mathcal{C}_E(m)$ laisse échapper une variété linéaire à p dimensions, ou bien jouit de propriétés convenables de raréfaction, relatives par exemple à sa connexité.

CHAPITRE IV.

Étude topologique et métrique des fonctions dérivées dans le domaine réel.

31. Propriétés topologiques des fonctions dérivées et des fonctions de 1re classe. — Soit $F(x)$ une fonction continue définie sur le segment $(0-1)$, et douée en tout point d'une dérivée $g(x)$, finie ou infinie.

On sait que $g(x)$ est une fonction de 1re classe et qu'elle possède la propriété de Darboux.

Mais inversement toute fonction de 1re classe possédant la propriété de Darboux n'est pas une fonction dérivée. On le voit immédiatement sur des exemples simples. Cela tient à ce que la propriété de Darboux et la classe sont des invariants dans toute transformation topologique de la forme $X = X(x)$, $Y = Y(y)$, où $X(x)$ et $Y(y)$ sont des fonctions continues strictement croissantes, alors que la propriété d'être une fonction dérivée n'est pas invariante par de telles transformations.

On est alors amené à se poser la question suivante :

Est-ce que toute fonction de 1re classe $y = g(x)$ définie sur le segment $(0-1)$, à valeurs finies ([1]), et possédant la propriété de Darboux est topologiquement équivalente à une fonction dérivée ?

Autrement dit, est-ce qu'il existe des fonctions continues strictement croissantes $X(x)$, $Y(y)$ telles que la fonction $Y = G(X)$ transformée de $y = g(x)$ par la transformation

$$X = X(x), \qquad Y = Y(y)$$

soit une fonction dérivée.

Le théorème suivant conduit, ainsi que son corollaire, à prévoir la validité d'une telle caractérisation topologique des fonctions dérivées, et nous montrerons que cette caractérisation est valable pour les fonctions semi-continues.

Théorème 22. — *Soit $g(x)$ une fonction de 1re classe définie sur le segment $(0-1)$ et prenant ses valeurs sur le segment $(-\infty, +\infty)$ (bornes comprises).*

La condition nécessaire et suffisante pour que la courbe $y = g(x)$ [ensemble des points $[x, g(x)]$, où $0 \leqq x \leqq 1$] soit un ensemble connexe est que $g(x)$ possède la propriété de Darboux ([2]).

Démonstration. — Pour pouvoir dire que $g(x)$ peut prendre des valeurs infinies, on est amené à compléter chaque droite $x =$ const. par deux points à l'infini. Une homéomorphie convenable de la forme $Y = Y(y)$ ramène alors immédiatement au cas où $g(x)$ est borné en module. Pour fixer les idées, nous supposerons qu'on s'est ramené à ce cas.

Désignons par E la courbe représentative de $y = g(x)$.

La condition est nécessaire. — Supposons E connexe. Soient x_1, x_2

([1]) On peut aussi admettre que $g(x)$ prend des valeurs infinies sur un certain ensemble, en faisant sur cet ensemble des hypothèses convenables. Par exemple que son complémentaire a la puissance du continu sur tout intervalle.

([2]) On obtient une propriété analogue, dans R_3, en étudiant les plans tangents à une surface. Si une surface de R_3 possède en tout point un plan tangent, son image sphérique est un ensemble connexe, de même que l'ensemble des éléments de contact (plans pointés) de cette surface.

deux points du segment $(0-1)$ tels que $g(x_1) < g(x_2)$, et λ un nombre tel que $g(x_1) < \lambda < g(x_2)$.

Désignons par (x_1, x_2) l'ensemble des points du plan d'abscisse x telle $x_1 \leqq x \leqq x_2$. L'ensemble $E(x_1, x_2)$ est connexe.

Soit e_2 (resp. e_2) l'ensemble des points de $E(x_1, x_2)$ d'ordonnée $y < \lambda$ (resp. $y > \lambda$). Les ensembles e_1 et e_2 sont disjoints et non vides et sont ouverts dans $E(x_1, x_2)$; la connexité de $E(x_1, x_2)$ entraîne donc l'existence d'un point de $E(x_1, x_2)$ sur la droite $y = \lambda$.

Ceci montre que $g(x)$ possède la propriété de Darboux.

La condition est suffisante. — Supposons que $g(x)$ soit de 1^re^ classe et possède la propriété de Darboux.

Si E n'est pas connexe, il existe une partition de E en deux ensembles non vides E_1, E_2 ouverts dans E. On a donc

$$\bar{E}_1 . \bar{E}_2 . E = 0; \quad E_1 + E_2 = E.$$

Soient e_1 et e_2 les projections de E_1 et E_2 sur $x'x$.

Si x_0 est un point de continuité de $g(x)$, il existe évidemment tout un voisinage ouvert de x_0 qui fait partie, soit de e_1, soit de e_2. Donc si $\mathring{e}_1$ (resp. $\mathring{e}_2$) désigne l'intérieur de e_1 (resp. e_2), l'ensemble ouvert $(\mathring{e}_1 + \mathring{e}_2)$ est partout dense sur $(0, 1)$. Son complémentaire I sur $(0-1)$ est un ensemble fermé non dense.

Tout intervalle σ contigu à I fait en entier partie, soit de e_1, soit de e_2, et comme $g(x)$ possède la propriété de Darboux, chaque extrémité de σ fait partie du même e_i que σ.

Donc I ne peut contenir de point isolé; il est donc parfait ou vide.

Si I n'est pas vide, il existe sur I des points de continuité relative de $g(x)$; si x_0 est un tel point, il existe un voisinage ouvert connexe $\mathcal{V}(x_0)$ de x_0 sur I dont tous les points font partie d'un seul e_i. Il en est alors de même de tout intervalle contigu à I et ayant ses extrémités sur $\mathcal{V}(x_0)$. Autrement dit il existe un voisinage de x_0 sur $(0-1)$ qui appartient en entier, soit à e_1, soit à e_2.

Ceci est en contradiction avec le fait que x_0 est un point de I. Donc I est vide.

Autrement dit, l'un des ensembles e_1, e_2 est vide, contrairement à l'hypothèse.

Corollaire. — *Si $y = g(x)$ est une fonction de 1re classe possédant la propriété de Darboux et définie sur le segment* $(0 - 1)$, *pour toute fonction $c(x)$ continue, la fonction $z = g(x) + c(x)$ possède aussi la propriété de Darboux.*

Remarque 1. — Il est essentiel pour la validité du théorème 22 que $g(x)$ soit de 1re classe; en effet il existe des fonctions $y = g(x)$ qui ne sont pas de 1re classe, qui possèdent la propriété de Darboux et dont cependant la courbe représentative n'est pas un ensemble connexe.

D'autre part si $g(x)$ est de 1re classe, ses points de continuité sont partout denses sur $(0 - 1)$; mais par contre l'image de ces points sur la courbe E peut être non dense sur E, même si $g(x)$ est une fonction dérivée.

Remarque 2. — Le théorème 22 s'applique en particulier aux fonctions $g(x)$ qui sont des fonctions dérivées. Ce théorème souligne donc une espèce de continuité que possède toute fonction dérivée.

Il est bon toutefois de noter que cette continuité n'est valable que dans le plan. On construit en effet aisément dans l'espace une courbe γ

$$y = y(x), \qquad z = z(x),$$

où $y'(x)$ et $z'(x)$ existent pour tout x, et telle que l'image sphérique des demi-tangentes orientées à γ soit un ensemble fermé discontinu (¹).

32. Cas particulier des fonctions semi-continues. — Pour fixer les idées, nous supposerons qu'il s'agit de semi-continuité inférieure. Soit $y = g(x)$ une fonction semi-continue inférieurement. Nous allons mettre sous une forme commode la condition pour que $g(x)$ possède la propriété de Darboux.

Définition. — *Si* E_1 *et* E_2 *sont deux sous-ensembles fermés du segment* $(0 - 1)$, *nous dirons que* E_1 *est* parfaitement non dense *sur* E_2 *et nous noterons* $E_1 \prec E_2$, *si tout point de* E_1 *est un point de 2e espèce du*

(¹) M. Zahorski [I] a même énoncé que l'image sphérique de ces demi-tangentes pouvait avoir une fermeture totalement discontinue. D'après M. Aronszjan, M. Besicovitch en aurait aussi construit un exemple.

noyau parfait de E_2. [*Si éventuellement le point* o *ou* 1 *fait partie de* E_1, *ce point devra être un point du noyau parfait de* E_2].

Il est évident que si $E_1 \prec E_2$, on a aussi

$$E_1 \subset E_2.$$

THÉORÈME 23. — *Soit* $g(x)$ *une fonction semi-continue inférieurement définie sur le segment* (o — 1). *Pour tout nombre* λ, *soit* E_λ *l'ensemble fermé des points* x *tels que* $g(x) \leq \lambda$.

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1° $g(x)$ *possède la propriété de Darboux :*

2° *Pour tout couple de nombres* λ_1, λ_2 *tels que* $\lambda_1 < \lambda_2$, *on a*

$$E_{\lambda_1} \prec E_{\lambda_2};$$

3° *Pour tout* x *on a*

$$g(x) = \liminf g(x_+) = \liminf g(x_-).$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que (1) → (2); (2) → (3); (3) → (1).

a. (1) → (2). — Sinon il existerait un couple λ_1, λ_2 (avec $\lambda_1 < \lambda_2$) et un point x_1 de E_{λ_1} qui serait extrémité d'un intervalle (x_1, x_2) sur lequel E_{λ_2} serait au plus dénombrable.

On a $g(x_1) = \lambda_1$ et l'on peut choisir x_2 tel que $g(x_2) \geq \lambda_2$.

D'après (1), pour tout nombre λ compris entre λ_1 et λ_2, il existe sur $(x_1 x_2)$ un point x en lequel $g(x) = \lambda$. Or un tel point x fait partie de E_{λ_2} puisque $\lambda > \lambda_1$; comme E_{λ_2} est dénombrable sur $(x_1 x_2)$, ceci est en contradiction avec le fait que les valeurs λ forment un ensemble non dénombrable.

b. (2) → (3). — En effet, la propriété (2) entraîne que pour tout x_0 il y ait de chaque côté de x_0 des points x arbitrairement voisins de x_0 et tels que $g(x)$ diffère arbitrairement peu de $g(x_0)$.

c. (3) → (1). — Soient x_1, x_2 deux points tels que $g(x_1) = \lambda_1$, $g(x_2) = \lambda_2$, avec $\lambda_1 < \lambda_2$. Soit λ un nombre tel que $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$.

L'ensemble $(x_1 x_2).E_\lambda$ ne contient pas x_2. Soit alors x_0 le point de $(x_1 x_2).E_\lambda$ qui est extrémité de l'intervalle contigu à E_λ contenant x_2. L'existence de ce point x_0 résulte du fait que x_1 fait partie de E_λ.

Je dis que $g(x_0) = \lambda$, sinon on aurait $g(x_0) < \lambda$ et alors x_0 serait, en vertu de la propriété (3), point d'accumulation à droite et à gauche pour E_λ, contrairement à l'hypothèse que x_0 est extrémité d'un intervalle contigu à E_λ.

On a donc bien montré que $g(x)$ possède la propriété de Darboux.

33. Caractérisation métrique des fonctions dérivées semi-continues. — Soit $y = g(x)$ une fonction dérivée définie sur le segment $(0 - 1)$ et semi-continue. Pour fixer les idées, nous supposerons $g(x)$ semi-continue inférieurement.

Définition. — *Si* E_1 *et* E_2 *sont deux sous-ensembles fermés du segment* $(0 - 1)$, *nous dirons que* E_1 *est* métriquement non dense *sur* E_2 *et nous noterons* $E_1 -\!\!\ll$ *si tout point de* E_1 *est un point d'épaisseur* 1 *pour* E_2. (*Si éventuellement le point* 0 *ou* 1 *fait partie de* E_1, *ce point devra être un point d'épaisseur unilatérale* 1 *pour* E_2.)

Remarquons que si $E_1 -\!\!\ll E_2$, on a aussi $E_1 -\!\!< E_2$, donc aussi $E_1 \subset E_2$.

Théorème 24. — *Soit* $g(x)$ *une fonction, à valeurs finies ou infinies, semi-continue inférieurement et définie sur le segment* $(0 - 1)$. *Pour tout nombre* λ, *soit* E_λ *l'ensemble fermé des points* x *tels que* $g(x) \leqq \lambda$.

Considérons les deux propriétés suivantes :

1° $g(x)$ *est une fonction dérivée;*

2° *Pour tout couple de nombres* λ_1, λ_2 *tels que* $\lambda_1 < \lambda_2$, *on a* $E_{\lambda_1} -\!\!\ll E_{\lambda_2}$.

Alors (1) *entraîne* (2). *Et si* $g(x)$ *est sommable et bornée supérieurement,* (2) *entraîne* (1).

Démonstration. — *a.* $(1) \rightarrow (2)$. — Soit en effet $F(x)$ une primitive de $g(x)$; soit λ_0 un nombre fini et soit x_0 un nombre quelconque de $(0 - 1)$ tel que $g(x_0) = \lambda_0$.

Pour tout nombre $\Delta\lambda > 0$, je dis que $E_{(\lambda_0+\Delta\lambda)}$ a en x_0 l'épaisseur 1. Sinon il existerait un nombre fixe $\theta < 1$ tel que je puisse trouver, à droite de x_0 par exemple, des points x arbitrairement voisins de x_0 et pour lesquels $E_{(\lambda_0+\Delta\lambda)}$ ait sur $(x_0 x)$ une épaisseur moyenne $< \theta$. On aurait alors

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} > \theta(\lambda_0-\varepsilon)+(1-\theta)(\lambda_0+\Delta\lambda),$$

ε étant un nombre >0 qui tend vers zéro avec $(x-x_0)$.

Lorsque $x \to x_0$, on obtiendrait

$$\lambda_0 \geqq \theta\lambda_0+(1-\theta)(\lambda_0+\Delta\lambda) \quad \text{ou} \quad 0 \geqq (1-\theta)\Delta\lambda,$$

Cette inégalité est *impossible* puisque $\theta < 1$.

Donc pour tout couple de nombres finis λ_1, λ_2 tels que $\lambda_1 < \lambda_2$, on a $E_{\lambda_1} \prec E_{\lambda_2}$. La propriété générale en résulte aisément.

b. Supposons $g(x)$ bornée supérieurement par une constante K et sommable.

Soit $F(x)$ l'intégrale indéfinie de $g(x)$, et soit x_0 un point quelconque de $(0-1)$. Posons $g(x_0)=\lambda_0$, et soit λ_1 un nombre $>\lambda_0$.

Pour tout point x à droite de x_0 (par exemple), désignons par $\theta(x)$ la densité moyenne de E_{λ_1} sur $(x_0 x)$. On a

$$\theta(x)[\lambda_1]+[1-\theta(x)].[k-\lambda_1] > \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} > \theta(x)[\lambda'_0]+[1-\theta(x)]\,[\lambda_1]$$

où $\lambda'_0 \to \lambda_0$ et $\theta(x) \to 1$ lorsque $x \to x_0$.

Lorsque $x \to x_0$, l'inégalité limite montre que tout nombre dérivé de $F(x)$ est compris entre λ_0 et λ_1. Comme le nombre λ_1 est un nombre arbitraire $>\lambda_0$, on a bien

$$F'(x_0)=\lambda_0=g(x_0).$$

Remarque. — Il est essentiel de supposer dans la deuxième partie du théorème que $g(x)$ est bornée supérieurement. Soit, en effet, $g(x)$ la fonction partout continue sauf pour $x=0$, et ainsi définie

$$g(x) \neq 0 \quad \text{pour} \quad \frac{1}{n}-\frac{1}{4^n} < x < \frac{1}{n}+\frac{1}{4^n} \quad (n=1, 2, \ldots),$$

$$g(x)=0 \quad \text{pour toute autre valeur de } x.$$

On suppose $g(x)$ linéaire sur tout segment

$$\left[\frac{1}{n}, \left(\frac{1}{n} \pm \frac{1}{4^n}\right)\right] \quad (n=1, 2, \ldots).$$

La fonction $g(x)$ sera donc entièrement définie par la donnée de ses valeurs $g\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ aux points $x = \frac{1}{n}$.

Cette fonction $g(x)$ est semi-continue inférieurement et possède la propriété (2) du théorème ci-dessus. Et cependant on peut aisément choisir la croissance de $g\left(\frac{1}{n}\right)$ en fonction de n de telle sorte que $g(x)$ soit sommable et que son intégrale indéfinie $F(x)$ n'admette pas de dérivée pour $x = 0$.

Corollaire. — *Soit $g(x)$ une fonction semi-continue inférieurement et prenant des valeurs finies ou infinies.*

Si $g(x)$ est une fonction dérivée ou plus généralement une fonction possédant la propriété 2 du théorème 24, et si $Z = \varphi(y)$ est une fonction continue à variation bornée définie sur le segment $-\infty \leqq y \leqq +\infty$, la fonction $Z = \varphi[g(x)]$ est une fonction dérivée.

Démonstration. — Posons $\varphi(y) = \varphi_1(y) - \varphi_2(y)$, où φ_1 et φ_2 sont deux fonctions continues bornées et non-décroissantes.

Chacune des fonctions $\varphi_i[g(x)]$ $(i = 1, 2)$ est bornée et possède évidemment la propriété (2) du théorème 24, donc aussi la propriété (1). La somme de ces deux fonctions est donc encore une fonction dérivée.

Remarquons que ce résultat ne peut s'étendre à des fonctions dérivées non semi-continues, et c'est là une des raisons qui rendent difficile l'étude des fonctions dérivées non semi-continues. Ces fonctions s'avèrent très sensibles à toute transformation de la forme $Y = Y(y)$. On pourrait même montrer que si $C(y)$ est une fonction continue non décroissante, telle que pour toute fonction dérivée $g(x)$ bornée en module, la fonction $C[g(x)]$ soit encore une fonction dérivée, $C(y)$ *est forcément une fonction linéaire de y.*

34. Caractérisation topologique des fonctions dérivées semi-continues. — L'analogie entre les relations $E_1 \prec E_2$ et $E_1 \prec\!\!\prec E_2$ utilisées ci-dessus dans l'étude des fonctions semi-continues qui jouissent de la propriété de Darboux ou qui sont des fonctions dérivées, amène à rechercher si ces deux classes de fonctions sont équivalentes topologiquement.

Soit $y = g(x)$ une fonction semi-continue inférieurement définie sur $(0-1)$ et bornée supérieurement. Si $g(x)$ n'est pas une fonction dérivée, le corollaire du théorème 24 montre que si une transformation topologique de la forme $X = X(x)$, $Y = Y(y)$ peut la transformer en une fonction dérivée, il en sera de même de la transformation $X = X(x)$; $Y = y$. C'est donc des seules transformations topologiques de la forme $X = X(x)$, $Y = y$ que nous pouvons espérer une aide.

Théorème 25. — 1° *Toute fonction $g(x)$ définie sur $(0\text{-}1)$ qui est semi-continue inférieurement, possède la propriété de Darboux et est bornée en module, est topologiquement équivalente à une fonction dérivée. Plus précisément, il existe une transformation topologique $X = X(x)$ du segment $(0-1)$ en lui-même, telle que la fonction $g[X(x)]$ soit une fonction dérivée.*

2° *Cette caractérisation reste valable lorsque $g(x)$ n'est plus bornée en module et peut même prendre des valeurs infinies, mais satisfait à la condition suivante, évidemment nécessaire : L'ensemble des points en lesquels $g(x)$ est finie est partout dense sur $(0-1)$. La fonction $g(x)$ est alors, plus précisément, équivalente à une fonction dérivée sommable ayant une primitive absolument continue.*

Démonstration. — 1° *$g(x)$ est bornée en module.* — Désignons par e_λ l'ensemble fermé des points x tels que $g(x) \leqq \lambda$, et par E_λ le transformé de e_λ par la transformation topologique T de $(0-1)$ sur lui-même définie par la fonction continue croissante $X = X(x)$.

En vertu des théorèmes 23 et 24, le théorème 25 sera démontré si on montre l'existence d'une transformation T telle que

$$e_{\lambda_1} < e_{\lambda_2} \quad \text{entraîne} \quad E_{\lambda_1} \prec E_{\lambda_2}.$$

La marche de la démonstration sera la suivante : On va choisir une suite dénombrable $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ de valeurs de λ partout dense sur l'ensemble des valeurs de $g(x)$ et telle que les e_{λ_i} soient particulièrement simples.

A chaque λ_i on fera correspondre une opération consistant à déterminer T sur un ensemble fini contenant 2^n points. Grâce à un procédé alterné on fera en sorte que l'ensemble limite de cet ensemble fini soit, ainsi que son image par T, partout dense sur (0 — 1). T sera alors définie partout par continuité.

L'ensemble des valeurs prises par $g(x)$ est un ensemble linéaire connexe. Nous supposerons que les extrémités de cet ensemble sont les points 0 et 1. La valeur 0 est sûrement une valeur prise par $g(x)$; la valeur 1 peut être prise ou non.

Nous désignerons par $(a_0 a_1)$ le segment (0 — 1) de l'axe des x et par $(A_0 A_1)$ le segment (0 — 1) de l'axe des X.

Choix des λ_i. — Pour tout λ tel que $0 \leqq \lambda < 1$, e_λ est un sous-ensemble fermé de $(a_0 a_1)$; si e_λ admet un point isolé, en un tel point $g(x)$ admet un minimum local strict. Or il est bien connu qu'une fonction de x ne peut admettre au plus qu'une infinité dénombrable de minima locaux stricts. Donc, sauf au plus pour une infinité dénombrable de valeurs de λ, e_λ est toujours parfait.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ une suite de valeurs de λ, avec $0 < \lambda_i < 1$, telle que l'ensemble de ces λ_i soit partout dense sur le segment (0 — 1), et telle que pour tout λ_i, e_{λ_i} soit parfait.

Nous allons maintenant énoncer une suite de lemmes que nous ne démontrerons pas, soit parce que leur démonstration est simple et indépendante des autres lemmes, soit parce que leur démonstration résulte simplement des lemmes précédents.

DÉFINITION. — *Soit* P *un sous-ensemble parfait du segment* $A_0 A_1$. *Nous dirons qu'un point* M *de* $A_0 A_1$ *est valable pour* P *si : ou bien* M *n'appartient pas à* P *ou bien est un point intérieur à* $A_0 A_1$ *et de* 1^re^ *espèce pour* P, *ou bien appartient à* P *et est d'épaisseur* 1 *pour* P (*épaisseur unilatérale si* M *est en* A_0 et A_1).

LEMMES. — *a. Soient* (e_0, e_1) *et* (E_0, E_1) *deux couples de sous-ensembles parfaits non denses des segments respectifs* $(a_0 a_1)$ *et* $(A_0 A_1)$ *tels que* e_0 *et* e_1 (*resp.* E_0 *et* E_1) *contiennent tous deux les points* a_0 *et* a_1 (*resp.* A_0 *et* A_1) *et tels que* $e_0 \prec e_1$ *et* $E_0 \prec E_1$.

Il existe une homéomorphie H *de* $(a_0 a_1)$ *sur* $(A_0 A_1)$ *telle que*

$$H(e_0) = E_0 \quad \text{et} \quad H(e_1) = E_1.$$

b. Soient $\left(e_0, e_{\frac{1}{2}}, e_1\right)$ *et* $\left(E_0, E_{\frac{1}{2}}, E_1\right)$ *deux triples de sous-ensembles* *parfaits non denses des segments respectifs* $(a_0 a_1)$ *et* $(A_0 A_1)$ *tels que* e_0, $e_{\frac{1}{2}}$ *et* e_1 $\left(\textit{resp.}\ E_0,\ E_{\frac{1}{2}}\ \textit{et}\ E_1\right)$ *contiennent tous trois les points* a_0 *et* a_1 (*resp.* A_0 *et* A_1) *et tels que*

$$e_0 \prec e_{\frac{1}{2}} \prec e_1 \quad \text{et} \quad E_0 \prec E_{\frac{1}{2}} \prec E_1.$$

Il existe une homéomorphie H *de* $(a_0 a_1)$ *sur* $(A_0 A_1)$ *telle que*

$$H(e_i) = E_i \qquad \left(\text{pour } i = 0, \frac{1}{2}, 1\right).$$

c. Soit E_1 *un sous-ensemble parfait du segment* $A_0 A_1$, *de mesure linéaire* $\mu_1 > 0$. *Soit* μ_0 *un nombre tel que*

$$0 \leq \mu_0 < \mu_1.$$

Il existe un sous-ensemble parfait E_0 *de* E_1, *de mesure linéaire* μ_0, *ne contenant ni* A_0, *ni* A_1 *et tel que*

$$E_0 \prec\!\!\leqslant E_1.$$

Si de plus E_1 *admet les points* A_0 *et* A_1 *comme points d'épaisseur unilatérale* 1, *on peut imposer à* E_0 *de contenir* A_0 *et* A_1.

d. Soient E_0, E_1 *deux sous-ensembles parfaits du segment* $A_0 A_1$ *tels que*

$$E_0 \prec E_1.$$

Il existe un sous-ensemble parfait $E_{\frac{1}{2}}$ *du segment* $A_0 A_1$, *épais en soi, et tel que*

$$E_0 \prec E_{\frac{1}{2}} \prec\!\!\leqslant E_1.$$

La construction de $E_{\frac{1}{2}}$ peut se faire par exemple ainsi : Soit σ un intervalle contigu à E_0. L'ensemble $E_1 . \sigma$ n'est pas vide et admet les extrémités de σ pour points d'épaisseur unilatérale 1. On prend pour $E_{\frac{1}{2}} . \sigma$ un ensemble parfait, épais en soi, admettant les extrémités de σ pour points de densité unilatérale 1, et tel que

$$E_{\frac{1}{2}} . \sigma \prec E_1 . \sigma \quad \text{et} \quad \mu\left[E_{\frac{1}{2}} . \sigma\right] > [1 - l(\sigma)]\, \mu[E_1 . \sigma],$$

en désignant par $\mu(A)$ la mesure d'un ensemble A, et par $l(\sigma)$ la longueur de σ.

e. Soient e_0, e_1 deux sous-ensembles parfaits non denses *de* $(a_0 a_1)$ *tels que* $e_0 \prec e_1$, *et* H *une homéomorphie de* $(a_0 a_1)$ *sur* $(A_0 A_1)$ *telle que, si l'on pose* $E_0 = H(e_0)$, $E_1 = H(e_1)$, *on ait*

$$E_0 \prec E_1,$$

E_1 *étant de plus épais en soi.*

Soient d'autres part $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ *n points de* $a_0 a_1$ $(M_1, M_2, \ldots, M_n)$ *leurs transformés par* H. *On suppose que tout* M_i *soit valable pour* E_1.

Si alors $e_{\frac{1}{2}}$ *est un sous-ensemble parfait de* $a_0 a_1$ *tel que*

$$e_0 \prec e_{\frac{1}{2}} \prec e_1,$$

il existe une homéomorphie H′ *de* $a_0 a_1$ *sur* $A_0 A_1$ *telle que*

1° $H'(m_i) = M_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

2° $H'(e_i) = E_i$ $(i = 0, 1)$;

3° *si l'on pose* $E_{\frac{1}{2}} = H'\left(e_{\frac{1}{2}}\right)$, *l'ensemble* $E_{\frac{1}{2}}$ *soit épais en soi et tel que*

$$E_0 \prec E_{\frac{1}{2}} \prec E_1;$$

4° *tout point* M_i *soit valable pour* $E_{\frac{1}{2}}$.

Construction de l'homéomorphie T. *Cas où tous les* e_{λ_i} *sont totalement discontinus.* — Pour ne pas compliquer l'exposé, nous allons faire d'abord la démonstration dans le cas où chacun des e_{λ_i} est totalement discontinu. Nous indiquerons plus loin les modifications qu'il faut apporter au raisonnement pour passer au cas général.

Soit K une constante fixe > 0.

Première opération. — Soit H_1 une homéomorphie de $(a_0 a_1)$ sur $(A_0 A_1)$ telle que, en posant $E_{\lambda_1} = H_1(e_{\lambda_1})$

a. E_1 soit épais en soi;

b. chacun des points A_0, A_1 soit valable pour E_{λ_1}.

On désigne alors par $a_{\frac{1}{2}}$ un point de $a_0 a_1$ qui divise ce segment dans un rapport compris entre K et $\frac{1}{K}$ et tel que son homologue $A_{\frac{1}{2}} = H(a_{\frac{1}{2}})$ soit valable pour E_{λ_1}.

Deuxième opération. — Considérons e_{λ_2} : On a, soit $e_{\lambda_1} \prec e_{\lambda_2}$, soit $e_{\lambda_2} \prec e_{\lambda_1}$. Ces deux cas s'étudient de façon analogue; nous nous placerons dans le 1er cas.

En vertu du lemme (c) précédent, il existe une homéomorphie H_2 de $(a_0 a_1)$ sur $(A_0 A_1)$ telle que, en posant $E_{\lambda_2} = H_2(e_{\lambda_2})$:

a. $A_i = H_2(a_i)$ pour $i = 0, \frac{1}{2}, 1$;
b. $E_{\lambda_1} = H_2(e_{\lambda_1})$;
c. $E_{\lambda_1} \prec E_{\lambda_2}$;
d. E_{λ_2} soit épais en soi;
e. Chacun des points A_i $\left(i = 0, \frac{1}{2}, 1\right)$ soit valable pour E_{λ_2}.

On désigne alors par $A_{\frac{1}{4}}$ un point de $A_0 A_{\frac{1}{2}}$ qui divise ce segment dans un rapport compris entre K et $\frac{1}{K}$ et qui soit valable pour E_{λ_1} et E_{λ_2}. On définit de même $A_{\frac{3}{4}}$ sur le segment $A_{\frac{1}{2}} A_1$. Puis l'on désigne par $a_{\frac{1}{4}}$, $a_{\frac{3}{4}}$ les homologues de $A_{\frac{1}{4}}$, $A_{\frac{3}{4}}$ dans l'homéomorphie H_2.

Opération d'ordre quelconque. — Supposons terminées les n premières opérations : On a défini les points a_i, où

$$i = \frac{\alpha}{2^n} \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, 2^n),$$

rangés sur $(a_0 a_1)$ dans le même ordre que les indices i rangés par ordre de grandeur.

On suppose qu'il existe une homéomorphie H_n de $(a_0 a_1)$ sur $(A_0 A_1)$ telle que

a. Pour tout $j = 1, 2, \ldots, n$, $E_{\lambda_j} = H_n(e_{\lambda_j})$ soit épais en soi; et si $\lambda_j < \lambda_k$, on ait

$$E_{\lambda_j} \prec E_{\lambda_k}.$$

b. Chacun des points $A_i = H_n(a_i)$ soit valable pour chacun des ensembles E_{λ_j} $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Considérons alors $e_{\lambda_{n+1}}$. Le nombre λ_{n+1}, ou bien s'intercale entre deux termes de la suite des λ_i ($i=1, 2, \ldots, n$) rangés par ordre de grandeur, ou bien est supérieur ou inférieur à tous ces λ_i. Ces trois cas s'étudient de façon analogue. Supposons donc que nous soyons dans le 1er cas, et soient λ, λ' (avec $\lambda < \lambda'$) les deux termes de la suite qui encadrent λ_{n+1}.

On a donc

$$e_{\lambda} < e_{\lambda_{n+1}} < e_{\lambda'}.$$

En vertu du lemme (e), il existe une homéomorphie H_{n+1} de $a_0 a_1$ sur $A_0 A_1$ telle que, en posant $E_{\lambda_{n+1}} = H_{n+1}(e_{\lambda_{n+1}})$

a. $A_i = H_{n+1}(a_i)$ pour $i = \frac{\alpha}{2^n}$ ($\alpha = 0, 1, \ldots, 2^n$);

b. $E_{\lambda_j} = H_{n+1}(e_{\lambda_j})$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$;

c. $E_{\lambda_j} \prec E_{\lambda_k}$ pour $\lambda_j < \lambda_k$ et $j, k = 1, 2, \ldots, (n+1)$;

d. $E_{\lambda_{n+1}}$ soit épais en soi;

e. Chacun des points A_i soit valable pour $E_{\lambda_{n+1}}$.

Deux cas se présentent alors suivant que n est pair ou impair :

Si n est pair, on désigne par $a_{\frac{2\alpha+1}{2^{n+1}}}$ [pour $\alpha = 0, 1, \ldots, (2^n - 1)$] un point du segment $\left(a_{\frac{\alpha}{2^n}}\, a_{\frac{\alpha+1}{2^n}}\right)$ qui divise ce segment dans un rapport compris entre K et $\frac{1}{K}$ et tel que son homologue $A_{\left(\frac{2\alpha+1}{2^{n+1}}\right)}$ par H_{n+1} soit valable pour tout E_{λ_j} ($j = 1, 2, \ldots, n+1$);

Si n est impair, on désigne par $A_{\left(\frac{2\alpha+1}{2^{n+1}}\right)}$ (pour $\alpha = 0, 1, \ldots, (2^n - 1)$] un point du segment $\left(A_{\frac{\alpha}{2^n}}\, A_{\frac{\alpha+1}{2^n}}\right)$ qui divise ce segment dans un rapport compris entre K et $\frac{1}{K}$, et qui soit valable pour tout E_{λ_j} [$j = 1, 2, \ldots, (n+1)$].

On désigne alors par $a_{\left(\frac{2\alpha+1}{2^{n+1}}\right)}$ l'homologue de $A_{\left(\frac{2\alpha+1}{2^{n+1}}\right)}$ par H_{n+1}. Il est bon de remarquer ici que l'on convient toujours que deux points $a_{\left(\frac{p'}{q'}\right)}$ et $a_{\left(\frac{p}{q}\right)}$ sont identiques lorsque $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$.

Définition de T. — Les opérations précédentes définissent les points A_i et a_i pour tout indice i qui soit une fraction dyadique comprise entre o et 1.

Nous définirons ainsi T : On remarque que la correspondance $a_i \to A_i$ entre les points a_i et A_i des segments respectifs $(a_0 a_1)$ et $(A_0 A_1)$ conserve l'ordre relatif de ces points. D'autre part, le choix alterné des points a_i et A_i et l'emploi de la constante K assurent que les ensembles des points a_i et A_i soient partout denses respectivement sur $(a_0 a_1)$ et $A_0 A_1$.

La correspondance $a_i \to A_i$ se prolonge donc par continuité en une homéomorphie de $(a_0 a_1)$ sur $(A_0 A_1)$. Nous désignerons cette homéomorphie par T.

Propriétés de T. — Pour toute fraction dyadique i, on a $T(a_i) = A_i$. Nous voulons montrer que pour tout entier n on a $T(e_{\lambda_n}) = E_{\lambda_n}$: Soit m un point de e_{λ_n}. Il est sur un segment de longueur arbitrairement petite, ayant pour extrémités des points a_i; par construction le segment homologue ayant pour extrémités des points A_i contient des points de E_{λ_n}. Donc $T(m)$ est bien un point de E_{λ_n}.

De même, si M est un point quelconque de E_{λ_n}, on montrerait que $T^{-1}(M) \in e_{\lambda_n}$.

On a donc bien

$$T(e_{\lambda_n}) = E_{\lambda_n}.$$

Par construction on a

$$E_{\lambda_{n_1}} \prec E_{\lambda_{n_2}} \qquad \text{dès que } \lambda_{n_1} < \lambda_{n_2}.$$

Soit alors λ un nombre quelconque tel que $0 \leqq \lambda \leqq 1$. Nous poserons $E_\lambda = T(e_\lambda)$. Nous voulons montrer que si $0 \leqq \lambda < \lambda' \leqq 1$, on a

$$E_\lambda \prec E_{\lambda'}.$$

Soient λ_{n_1}, λ_{n_2} deux termes de la suite $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ tels que

$$\lambda < \lambda_{n_1} < \lambda_{n_2} < \lambda'.$$

Nous savons que $e_\lambda \subset e_{\lambda_{n_1}} \subset e_{\lambda_{n_2}} \subset e_{\lambda'}$.

Comme $E_{\lambda_{n_1}} \prec E_{\lambda_{n_2}}$, ceci entraîne bien que $E_\lambda \prec E_{\lambda'}$.

Ceci démontre le théorème dans le cas envisagé.

Cas où tous les e_{λ_i} ne sont pas totalement discontinus. — Les e_{λ_i} ne sont totalement discontinus que lorsque l'ensemble des x en lesquels $g(x) = 1$ est partout dense sur $(a_0 a_1)$.

Dans le cas général il n'en est pas ainsi et nous sommes alors arrêtés par le fait suivant : Soit p un sous-ensemble fermé du segment $(0\text{-}1)$, et H_1 une homéomorphie de $(a_0 a_1)$ sur $(A_0 A_1)$.

Si $P = H_1(p)$, il peut arriver que toute autre homéomorphie H_2 de $(a_0 a_1)$ sur $(A_0 A_1)$ telle que $H_2(p) = P$ soit forcément identique à H_1 sur un certain sous-ensemble parfait fixe I de p.

De tels ensembles p peuvent s'obtenir de la façon suivante : On part d'un ensemble parfait totalement discontinu p_0 ; soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ ses intervalles contigus ; l'ensemble p est la réunion de p_0 et de segments disjoints deux à deux et disjoints de p_0, tels que pour tout n l'intervalle σ_n contienne n de ces segments. C'est l'ensemble p_0 qui sera ici l'ensemble I en question ci-dessus.

Pour éviter cette difficulté, qui empêche les homéomorphies H_n utilisées dans la démonstration d'avoir une souplesse suffisante, nous allons associer de proche en proche à tout e_{λ_i} non totalement discontinu certains sous-ensembles parfaits totalement discontinus dont la réunion sera partout dense sur e_{λ_i}.

Pour tout e_{λ_i}, désignons par e'_{λ_i} un ensemble parfait déduit de λ_i en y remplaçant chaque composante connexe non réduite à un point par un ensemble parfait totalement discontinu contenant les deux extrémités de cette composante connexe.

Puis désignons par $\sigma^1_{\lambda_i}$, $\sigma^2_{\lambda_i}$, ... la suite, finie ou infinie, des composantes connexes de e_{λ_i} non réduites a un point.

Première opération. — On opérera comme dans le cas particulier envisagé, mais en utilisant e'_{λ_1} au lieu de e_{λ_1}. D'autre part on imposera à l'homéomorphie H_1 ainsi qu'à toutes les H_n $(n > 1)$ de transformer les deux extrémités de $\sigma^1_{\lambda_1}$ en deux points fixes de $A_0 A_1$, valables pour E'_{λ_1}. On continuera d'ailleurs à introduire les points $a_{\frac{1}{2}}$ et $A_{\frac{1}{2}}$.

Deuxième opération. — Si par exemple $e_{\lambda_2} \prec e_{\lambda_1}$, on introduira un ensemble e''_{λ_1} totalement discontinu contenant e'_{λ_1} et tel que $e'_{\lambda_2} \prec e''_{\lambda_1}$.

On déterminera E''_{λ_1} tel que $E'_{\lambda_2} \prec\!\!\prec E''_{\lambda_1}$.

Et l'on imposera à H_2 ainsi qu'à toute H_n $(n > 2)$ de transformer les extrémités de $\sigma_{\lambda_1}^2$ et $\sigma_{\lambda_2}^1$ en des points fixes respectivement valables pour E'_{λ_1} et E'_{λ_2}.

On continuera d'ailleurs à introduire les points $a_{\frac{1}{4}}$, $a_{\frac{3}{4}}$ et leurs homologues $A_{\frac{1}{4}}$, $A_{\frac{3}{4}}$.

De façon générale, à l'opération n, on sera amené à introduire de nouveaux ensembles $e_{\lambda_1}^{(n)}$, $e_{\lambda_2}^{(n-1)}$, ..., $e_{\lambda_{n-1}}^{(2)}$ et à imposer à l'homéomorphie H_n et à toutes les suivantes de transformer les extrémités de $\sigma_{\lambda_1}^{(n)}$, $\sigma_{\lambda_2}^{(n-1)}$, ..., $\sigma_{\lambda_n}^{(1)}$ en des points fixes de $A_0 A_1$ respectivement valables pour E'_{λ_1}, E'_{λ_2}, ..., E'_{λ_n}.

D'autre part, afin d'obtenir après un passage à la limite une homéomorphie T non dégénérée, on continuera à introduire les points $a_{\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$ et $A_{\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)}$.

On vérifie ensuite que cette homéomorphie T est bien du type cherché. Pour tout couple λ_{n_1}, λ_{n_2}, où $\lambda_1 < \lambda_2$, si l'on pose $E_{\lambda_i} = T(e_{\lambda_i})$, on doit avoir

$$E_{\lambda_{n_1}} \multimap E_{\lambda_{n_2}}.$$

Or si m est un point de $e_{\lambda_{n_1}}$ intérieur à $e_{\lambda_{n_2}}$, il est évident que M [où $M = T(m)$] est un point d'épaisseur 1 pour $E_{\lambda_{n_2}}$. Sinon m est un point de $e'_{\lambda_{n_1}}$; or, il existe un des ensembles $e_{\lambda_{n_2}}^{(n)}$ introduits au cours de la construction, tel que $E'_{\lambda_{n_1}} \multimap E_{\lambda_{n_2}}^{(n)}$; le point $T(m)$ est donc un point d'épaisseur 1 pour $E_{\lambda_{n_2}}^{(n)}$, et *a fortiori* pour $E_{\lambda_{n_2}}$. On a donc bien :

$$E_{\lambda_{n_1}} \multimap E_{\lambda_{n_2}}.$$

2° *$g(x)$ n'est pas bornée en module.* — Soient α, β $(\alpha < \beta)$ les extrémités, finies ou infinies de l'ensemble connexe des valeurs prises par $g(x)$.

Si l'on continue à désigner par λ_1, λ_2, ... une suite infinie de nombres partout denses sur l'intervalle (α, β) et tels que tout e_{λ_i} soit parfait, rien n'est changé à la construction précédente. Désignons par T l'homéomorphie obtenue par cette construetion, et soit $G(X)$ la transformée de $g(x)$ par T.

Si $G(x)$ est sommable, désignons par $F(X)$ son intégrale indéfinie.

a. Si $g(x)$ est bornée supérieurement, il en est de même de $G(X)$ et il résulte du théorème 24 que $F(X)$ est la primitive de $G(X)$.

Dans le cas où $g(x)$ est bornée supérieurement, le théorème sera donc démontré si nous pouvons construire T telle que $G(X)$ soit sommable. Pour celà, opérons ainsi :

Soit $\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, \ldots$ une sous-suite de la suite des λ_i, où $\lambda_{n_i} \to -\infty$ en décroissant lorsque $i \to \infty$. Désignons par μ_{n_i} la mesure de $E_{\lambda_{n_i}}$.

Il est évident que si la série $\sum\limits_i \mu_{n_i} |\lambda_{n_{i+1}}|$ est convergente, la fonction $G(X)$ sera sommable.

Or, la latitude laissée dans la construction de T au choix des E_{λ_i} rend ceci toujours réalisable puisque l'ensemble $E_{(-\infty)}$ est un ensemble fermé, qui est par hypothèse totalement discontinu. On pourra même se donner *a priori*, une fois la suite des λ_{n_i} choisie, la suite décroissante $\mu_{n_1}, \mu_{n_2}, \ldots$ assujettie à la seule condition que la série ci-dessus converge.

b. Si $g(x)$ n'est pas bornée supérieurement, une double difficulté se présente : d'une part rendre $G(X)$ sommable (cette restriction n'est pas nécessaire en principe, mais simplifie la démonstration), d'autre part, faire en sorte que la dérivée de $F(x)$ soit identique à $G(x)$.

Nous continuerons comme dans le cas (a) à choisir une suite λ_n tendant vers $-\infty$ et nous imposerons aux $E_{\lambda_{n_i}}$ la condition

$$\sum_i \mu_{n_i} |\lambda_{n_i}| < \infty.$$

Soit maintenant $\lambda'_{n_1}, \lambda'_{n_2}, \ldots$ une sous-suite de la suite des λ_i, telle que, pour tout i, on ait

$$i < \lambda'_{n_i} < i + 1.$$

Nous imposerons aux $E_{\lambda'_{n_i}}$ la condition suivante : Pour tout i, si σ désigne un intervalle quelconque contigu à $E_{\lambda'_{n_i}}$, de longueur $l(\sigma)$, l'épaisseur moyenne de $E_{\lambda'_{n+1}}$ sur σ est supérieure à $[1 - l(\sigma)]$. La possibilité d'un tel choix résulte de la latitude laissée dans la construction de T au choix des E_{λ_i} et au fait que par hypothèse $\bigcup_i e_{\lambda_{n_i}}$ est partout dense sur $(a_0 a_1)$.

La démonstration du fait que G(X) est alors sommable et identique à la dérivée de son intégrale indéfinie peut être calquée sur une démonstration que nous donnerons en détail pour le théorème 26. Nous renvoyons à cette démonstration.

35. Construction générale des fonctions dérivées semi-continues bornées en module. — Les méthodes utilisées dans la démonstration précédente permettent la construction générale des fonctions dérivées semi-continues et bornées en module.

Plus précisément, cherchons à construire les fonctions dérivées $g(x)$ semi-continues inférieurement, définies sur le segment (0-1) et dont l'ensemble des valeurs a pour extrémités 0 et 1.

Désignons par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ une suite infinie de nombres distincts partout dense sur (0-1) et différents de 0 et 1.

Désignons par E_{λ_1} un vrai sous-ensemble fermé de mesure positive du segment (0-1).

De façon générale, supposons définis les vrais sous-ensembles fermés $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_n}$ du segment (0-1), tous de mesure positive, et satisfaisant à la relation $E_{\lambda_i} \prec\!\!\prec E_{\lambda_j}$ dès que $\lambda_i < \lambda_j$.

Nous pouvons alors définir $E_{\lambda_{n+1}}$:

Lorsque λ_{n+1} est compris entre deux termes de la suite des λ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) rangés par ordre de grandeur, soient λ, λ' ces deux termes. On désigne alors par $E_{\lambda_{n+1}}$ un ensemble fermé quelconque tel que $E_\lambda \prec\!\!\prec E_{\lambda_{n+1}} \prec\!\!\prec E_{\lambda'}$.

Sinon, soit λ (resp. λ') le plus petit (resp. le plus grand) des λ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Si $\lambda_{n+1} < \lambda$, on désigne par $E_{\lambda_{n+1}}$ un ensemble fermé quelconque de mesure positive tel que $E_{\lambda_{n+1}} \prec\!\!\prec E_\lambda$. Si $\lambda_{n+1} > \lambda'$, on désigne par $E_{\lambda_{n+1}}$ un vrai sous-ensemble fermé de (0 — 1) tel que $E_{\lambda'} \prec\!\!\prec E_{\lambda_{n+1}}$.

La possibilité de trouver de tels ensembles $E_{\lambda_{n+1}}$ est assurée par le lemme (*d*).

Il résulte de cette construction que pour tout couple $(\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2})$ de termes de la suite $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ tel que $\lambda_{n_1} < \lambda_{n_2}$, on a $E_{\lambda_{n_1}} \prec\!\!\prec E_{\lambda_{n_2}}$.

Pour tout nombre λ tel que $0 \leqq \lambda < 1$, on pose $\mathcal{E}_\lambda = \bigcap\limits_{\lambda_n < \lambda} E_{\lambda_n}$ (¹) et pour $\lambda = 1$, on pose $\mathcal{E}_\lambda \equiv (0 - 1)$.

Pour tout couple (λ, λ') tel que $0 \leqq \lambda < \lambda'$, on a alors

$$\mathcal{E}_\lambda \prec \mathcal{E}_{\lambda'}.$$

Pour tout $x \in (0, 1)$, on désigne alors par $g(x)$ le plus petit des nombres λ tels que $x \in \mathcal{E}_\lambda$.

En vertu du théorème 24, la fonction $g(x)$ semi-continue inférieurement et bornée en module est alors une fonction dérivée.

Remarque. — On peut de la même façon construire toutes les fonctions dérivées semi-continues inférieurement et bornées supérieurement. Seulement, une fois définis les ensembles $\mathcal{E}_\lambda$, il faudra vérifier si la fonction $g(x)$ correspondante est sommable.

36. Interprétation géométrique de la semi-continuité d'une fonction dérivée. — Soit $y = F(x)$ une fonction continue sur $(0 - 1)$, et douée d'une dérivée $g(x)$. Posons, pour tout x

$$\overline{g(x)} = \limsup_{x' \to x} g(x') \qquad \text{et} \qquad \underline{g(x)} = \liminf_{x' \to x} g(x').$$

Soit γ la courbe représentative de la fonction $y = F(x)$. Le contingent de γ au point M d'abscisse x est la droite de pente $g(x)$.

Le paratingent de γ en M se compose de toutes les droites passant par M et de pente p telle que $\underline{g(x)} \leqq p \leqq \overline{g(x)}$.

En effet, il est immédiat que toute telle droite fait partie du paratingent en M, à cause de la semi-continuité supérieure d'inclusion du paratingent.

Et inversement, si Δ est une droite de pente p de ce paratingent, il existe pour tout ε des points M′, M″ de γ arbitrairement voisins de M et tels que l'angle $(\widehat{\Delta, M'M''})$ ne dépasse pas ε.

D'après le théorème des accroissements finis, il existe sur $\widehat{M'M''}$ un point M‴ en lequel la tangente à γ est parallèle à M′M″.

(¹) En général $\mathcal{E}_{\lambda_n} \neq E_{\lambda_n}$. On pourrait d'ailleurs choisir les E_{λ_n} de façon à réaliser l'égalité $\mathcal{E}_{\lambda_n} = E_{\lambda_n}$ pour tout n.

On a donc bien

$$\underline{g(x)} \leq p \leq \overline{g(x)}.$$

Comme $g(x)$ est ponctuellement discontinue, cette interprétation montre en particulier que les points de γ en lesquels le paratingent de γ est réduit à une seule droite forment tout un résiduel de γ (qui peut d'ailleurs être de mesure linéaire nulle, comme nous le montrera incidemment le théorème 26). Le théorème 21 est donc vérifié dans ce cas particulier.

Lorsque $g(x)$ est semi-continue inférieurement, on a $\underline{g(x)} = g(x)$; donc le paratingent de γ constitue en tout point M de γ un angle, de mesure éventuellement nulle, dont la droite de plus petite pente est la tangente à γ.

Cette propriété géométrique caractérise évidemment les fonctions $F(x)$ à dérivée semi-continue inférieurement.

37. Caractérisation de l'ensemble des points en lesquels une fonction dérivée est infinie. — **Théorème 26.** — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-ensemble* E *du segment* (0-1) *soit identique à l'ensemble des points en lesquels une fonction dérivée prend la valeur* $+\infty$, *est que* E *soit un* G_δ *de mesure linéaire nulle.*

Bien plus, pour tout sous-ensemble E *du segment* (0-1), *qui soit un* G_δ *de mesure linéaire nulle, il existe une fonction* $F(x)$ *absolument continue et croissante sur le segment* (0-1), *douée d'une dérivée* $g(x) > 0$, *semi-continue inférieurement et telle que :*

a. L'ensemble des points x *en lesquels* $g(x) = +\infty$ *soit identique à* E;

b. L'ensemble des points en lesquels $g(x)$ *est continue soit identique à* $E + C(\overline{E})$.

Démonstration. — *La condition est nécessaire.* — En effet, d'une part E est un G_δ puisque $g(x)$ est une fonction de 1re classe.

D'autre part E a une mesure linéaire nulle parce que E est contenu dans la projection sur $x'x$ de l'ensemble des points en lesquels la courbe représentative de $y = F(x)$ a une tangente perpendiculaire à $x'x$ [1].

[1] *Voir* Roger [I], théorème 3.

La condition est suffisante. — Soit E un G_δ de mesure nulle du segment (o-1).

Posons $F = (0-1) - E$. L'ensemble F est un F_σ qui a l'épaisseur 1 en tout point de (o-1).

Posons $F = \bigcup_i F_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, où les F_i sont des ensembles fermés.

a. Nous allons montrer que l'on a aussi $F = \bigcup_i F'_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, où :

1° Tout F'_i est un ensemble parfait de mesure positive;

2° Si $i_1 < i_2$, on a

$$F'_{i_1} \prec F'_{i_2};$$

3° Si σ est un intervalle quelconque contigu à F'_i, de longueur $l(\sigma)$, on a, en désignant par $\delta(\sigma)$ l'épaisseur moyenne de F'_{i+1} sur σ

$$\delta(\sigma) > 1 - l(\sigma).$$

La construction des F'_i est basée sur la remarque évidente suivante : Sur tout sous-intervalle σ de (o-1) il existe un sous-ensemble parfait de F, d'épaisseur moyenne $> 1 - l(\sigma)$, et admettant les extrémités de σ comme points d'épaisseur unilatérale 1. Un tel ensemble parfait sera désigné par $p(\sigma)$.

Désignons alors par F'_0 un sous-ensemble parfait obtenu en plaçant dans chaque intervalle σ contigu à F_0 un sous-ensemble $p(\sigma)$. L'ensemble F'_0 est la réunion de F_0 et de ces $p(\sigma)$.

De façon générale, si $F'_0, \ldots, F'_n$ sont déjà définis, on désigne par F'_{n+1} la réunion de l'ensemble $F_{n+1} + (F'_0 + \ldots + F'_n)$ et des $p(\sigma)$ construits sur chacun de ses intervalles contigus.

On a évidemment

$$F = \bigcup_i F'_i \qquad (i = 0, 1, \ldots)$$

et l'on vérifie aisément que les trois conditions imposées ci-dessus aux F'_i sont bien vérifiées.

b. A partir de la suite des F'_i on peut définir pour tout nombre $\lambda \geqq 0$ un sous-ensemble fermé Φ_λ de (o-1) tel que :

1° Pour tout $\lambda_0 > 0$, on ait

$$\Phi_{\lambda_0} = \bigcap_{\lambda > \lambda_0} \Phi_\lambda;$$

2° Si $0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2$, on ait $\Phi_{\lambda_1} \prec \Phi_{\lambda_2}$;

3° $\Phi_\lambda = F'_i$ lorsque λ est égal à un entier non négatif i. Ceci entraîne que

$$F = \bigcup_{\lambda \geqq 0} \Phi_\lambda.$$

La construction Φ_λ est immédiate en utilisant le lemme (d) du paragraphe **34**. Montrons par exemple comment on peut définir Φ_λ pour $0 \leqq \lambda < 1$.

L'ensemble $F'_{\frac{1}{2}}$ est défini à partir de F'_0 et F'_1 comme l'indique le lemme (d).

On définit ensuite $F'_{\frac{1}{4}}$ à partir de F'_0 et $F'_{\frac{1}{2}}$, et $F'_{\frac{3}{4}}$ à partir de $F'_{\frac{1}{2}}$ et F'_1. La même méthode permet, de proche en proche, de définir F'_α pour tout nombre rationnel dyadique α compris entre 0 et 1.

Pour tout λ tel que $0 \leqq \lambda < 1$, on pose alors $\Phi_\lambda = \bigcap_{\lambda < \alpha < 1} F'_\alpha$. On a toujours $F'_0 \subset \Phi_0$, mais si l'on ne prenait aucune précaution, il pourrait se faire que $F'_0 \neq \Phi_0$. Pour réaliser l'égalité $F'_0 = \Phi_0$, il suffit, dans la construction des $F'_{\left(\frac{1}{2^n}\right)}$ d'opérer ainsi :

Soit $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots)$ la suite des intervalles contigus à F'_0. On choisit, pour tout n, $F'_{\left(\frac{1}{2^n}\right)}$ tel que sur chacun des n intervalles $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $F'_{\left(\frac{1}{2^n}\right)}$ n'ait pas de points sur le sous-intervalle de σ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ concentrique à σ_i et déduit de σ_i par une homothétie de rapport $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

Pour tout λ tel que $i \leqq \lambda \leqq (i+1)$, où i est un entier $\geqq 0$, on définit de la même façon l'ensemble Φ_λ cherché.

c. On peut maintenant construire la fonction croissante $F(x)$:

Pour tout $x \in E$, posons $g(x) = +\infty$.

Pour tout $x \in F$, posons $g(x) =$ le plus petit λ tel que $x \in \Phi_\lambda$.

La fonction $g(x)$ est semi-continue inférieurement à cause de la propriété (1) des Φ_λ indiquée ci-dessus.

Nous allons voir que $g(x)$ est une fonction sommable et que son intégrale est une primitive de $g(x)$.

Soit m_i la mesure linéaire de $[(0-1)-\Phi_i]$ $(i=1, 2, \ldots)$. On a, à cause du choix des F'_i,

$$m_{i+1} < m_i^2.$$

Donc, si l'on pose $m_0 = 0$, on a

$$m_i \leqq \theta^{(2^i)} \qquad (i=1, 2, \ldots).$$

Si I désigne l'intégrale au sens large de $g(x)$ sur $(0-1)$, on a évidemment

$$I < (1-m_1) + 2(m_1 - m_2) + 3(m_2 - m_3) + \ldots + (p+1)[m_p - m_{p+1}] + \ldots$$

donc

$$I < 1 + 2\theta^2 + 3\theta^4 + \ldots + (p+1)\theta^{(2^p)} + \ldots.$$

Comme la suite du second nombre est convergente, $g(x)$ est bien sommable.

Soit $F(x)$ une intégrale indéfinie de $g(x)$; c'est une fonction absolument continue et non décroissante.

Montrons que, pour tout x_0, elle a une dérivée égale à $g(x_0)$.

Lorsque $x_0 \in E$, cela résulte de ce que $g(x)$ est continue en x_0.

Lorsque $x_0 \in F$, posons $g(x_0) = \lambda_0$. Ce nombre λ_0 est fini. A cause de la semi-continuité de $g(x)$, tout nombre dérivé de $F(x)$ en x_0 est $\geqq \lambda_0$.

Pour tout $\lambda > \lambda_0$, Φ_λ a l'épaisseur 1 en x_0.

Soit par exemple $x > x_0$. Posons $\sigma = (x - x_0)$ et $(1-\theta) =$ épaisseur moyenne de Φ_λ sur $(x_0 x)$; et soit n_0 le plus petit entier $> \lambda$.

On montre comme on l'a fait ci-dessus pour I que

$$F(x) - F(x_0) \leqq \sigma\lambda + n_0\sigma\theta + (n_0+1)(\sigma\theta)^2 + \ldots + (n_0+i)(\sigma\theta)^{2^i} + \ldots$$

d'où

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leqq \lambda + n_0\theta + \sigma S.$$

Or, S est la somme d'une série convergente qui tend vers une limite finie $(n_0+1)\theta^2$ lorsque $\sigma = (x - x_0) \to 0$.

Comme $\theta \to 0$ lorsque $\sigma \to 0$, on voit que tout nombre dérivé de $F(x)$ en x_0 est borné supérieurement par λ. Comme un tel nombre dérivé est borné inférieurement par λ_0 et que $(\lambda - \lambda_0)$ est arbitrairement petit, il est unique et égal à $\lambda_0 = g(x_0)$.

La fin du théorème se démontre aisément.

En tout point de E, $g(x)$ est évidemment continue.

En tout point x_0 de $(\overline{E} - E)$, $g(x)$ est discontinue puisque $g(x_0)$ est finie et que x_0 est point d'accumulation de points de E en lesquels $g(x) = +\infty$.

Si $g(x)$ n'est pas continue en tout point de $[(0 - 1) - \overline{E}]$, on remplace aisément $g(x)$ par une fonction dérivée $g_2(x)$ égale à $g(x)$ en tout point de $\overline{E}$ et qui est continue sur $[(0 - 1) - \overline{E}]$. Pour cela, désignons par σ un intervalle quelconque contigu à $\overline{E}$; soit $\widehat{AB}$ l'arc représentatif de la fonction $F(x)$ sur σ, et soit I le milieu de AB.

Pour tout nombre $\varepsilon > 0$, on construit aisément deux arcs $\widehat{AI}$, $\widehat{IB}$ tangents en I à AB, à tangente continue, admettant respectivement en A et B les mêmes tangentes que $\widehat{AB}$, tels que la tangente à l'arc $\widehat{AI} + \widehat{IB}$ en chacun de ses points intérieurs ait une pente finie, positive, et comprise, à ε près, entre les valeurs extrêmes prises par ces pentes en A, I, B. Nous imposerons par exemple $\varepsilon = l(\sigma)$.

Nous désignerons par $F_2(x)$ la fonction égale à $F(x)$ en tout point de $\overline{E}$, et déterminée sur $C(\overline{E})$ par ses arcs représentatifs de la forme $\widehat{AI} + \widehat{IB}$ construits ci-dessus.

Il est immédiat que la dérivée $g_2(x)$ de $F_2(x)$ est partout définie, qu'elle est semi-continue supérieurement et égale à $g(x)$ sur $\overline{E}$, et qu'elle est continue en tout point de $E + C(\overline{E})$ et en ces points seulement. Si elle n'est pas partout positive, on la rend telle par l'addition d'une constante (1 par exemple).

Le théorème est donc entièrement démontré.

58. Étude de l'ensemble des points en lesquels une fonction dérivée prend une valeur finie donnée. — On pourrait montrer, par la méthode utilisée pour le théorème précédent, que tout G_δ de mesure nulle peut être identifié à l'ensemble des points en lesquels une fonction dérivée prend une valeur finie donnée.

D'ailleurs ce résultat résulte plus simplement du théorème 26 ci-dessus et du corollaire du théorème 24. En effet, si $g(x)$ est une fonction dérivée semi-continue inférieurement, partout positive, et infinie aux points d'un ensemble E, la fonction $\left[K - \frac{1}{1+g(x)}\right]$ est aussi une fonction dérivée, et l'ensemble des points en lesquels elle prend la valeur K est identique à E.

Mais il est plus difficile de caractériser entièrement la famille des ensembles E de mesure non nulle en lesquels une fonction dérivée prend une valeur finie donnée.

Nous allons souligner la difficulté de cette caractérisation en énonçant une condition nécessaire que doivent vérifier ces ensembles E.

DÉFINITION. — *Soit* E *un sous-ensemble de l'axe* $x'x$. *Pour tout point* x_0 *de cet axe, et tout nombre* $\lambda > 0$, *désignons par* $\delta(x_0, x, \lambda)$ *l'épaisseur moyenne de* E *sur le segment d'extrémités* x, x' *tel que* $(x' - x) = \lambda(x - x_0)$.

Nous dirons alors que le point x_0 *est* point d'accumulation en mesure de E *si l'on a*

$$\limsup_{\lambda \to 0}\left[\limsup_{x \to x_0} \delta(x_0, x, \lambda)\right] = 1.$$

Par exemple tout point x_0 en lequel E, d'un côté au moins de x_0, a une épaisseur supérieure égale à 1, est un point d'accumulation en mesure de E.

Nous pouvons maintenant énoncer.

THÉORÈME 27. — *Une condition nécessaire pour qu'un ensemble linéaire* E *soit identique à l'ensemble des points en lesquels une fonction dérivée* bornée en module *prend une valeur finie donnée, est que* E *soit un* G_δ *contenant tous ses points d'accumulation en mesure.*

La question reste posée de savoir si cette condition nécessaire est aussi suffisante.

On peut montrer qu'elle est suffisante lorsque le noyau de masses (¹) de E est de la forme (F-D), où F est un ensemble fermé et D un ensemble au plus dénombrable.

39. Obtention de fonctions dérivées a partir de fonctions dérivées données. — Les résultats rassemblés ici seront donnés sans démonstration. Les fonctions dont il s'agira seront, sauf mention du contraire, définies sur le segment (o — 1).

1° Si $\{g_n(x)\}$ est une suite de fonctions dérivées convergeant uniformément vers une fonction $g(x)$, cette fonction $g(x)$ est aussi une fonction dérivée.

2° Il est immédiat que si $g_1(x)$ et $g_2(x)$ sont deux fonctions dérivées, et λ_1, λ_2 deux constantes, $[\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x)]$ est encore une fonction dérivée.

3° Si $g(x)$ est une fonction dérivée bornée en module et $c(x)$ une fonction continue, le produit $g(x).c(x)$ est une fonction dérivée.

Ceci n'est plus exact, en général, si $g(x)$ n'est pas bornée en module, sauf si l'on suppose de plus $g(x)$ semi-continue [le couple $g(x)$, $c(x)$ étant tel que le produit $g(x).c(x)$ ne soit indéterminé en aucun point].

4° Nous avons vu (corollaire du théorème 24) que si $g(x)$ est une fonction dérivée semi-continue, et si $c(x)$ désigne une fonction continue à variation bornée définie sur le segment $(-\infty, +\infty)$, la fonction $c[g(x)]$ est encore une fonction dérivée (²).

Par contre si $c(x)$ est une fonction continue définie sur $(-\infty, +\infty)$ et telle que pour toute fonction dérivée $g(x)$, la fonction $c[g(x)]$ soit encore une fonction dérivée, $c(x)$ est forcément une fonction linéaire

---

(¹) Nous appelons ici noyau de masse d'un ensemble mesurable E l'ensemble des points de E dont tout voisinage rencontre E suivant un ensemble de mesure non nulle.

(²) Il serait intéressant de chercher des propositions analogues pour les fonctions dérivées $g(x)$ *partiellement* semi-continues. [Nous disons qu'une fonction $f(x)$ est partiellement semi-continue si, pour tout sous-ensemble parfait P de (o-1), il existe une portion de P sur laquelle $g(x)$ soit semi-continue (sup. ou inf.). Il est immédiat qu'une telle fonction est de 1^re^ classe.

5° Soit $g(x)$ une fonction dérivée et $\alpha(x)$ une fonction continue strictement croissante définie sur $(0-1)$ et telle que $\alpha(0)=0$, $\alpha(1)=1$,

DÉFINITION. — *Nous disons que $\alpha(x)$ est de classe Δ_q (resp. Δ_b) lorsque quelle que soit $g(x)$ partout finie [resp. $g(x)$ bornée en module], la fonction $g[\alpha(x)]$ est encore une fonction dérivée.*

La question se pose de caractériser les fonctions de classe Δ_q ou Δ_b. Cette caractérisation ne fera pas tant intervenir le fait que $\alpha(x)$ soit elle-même dérivable, qu'une certaine régularité de croissance de $\alpha(x)$. En effet, une fonction $\alpha(x)$ peut posséder en tout point une dérivée positive et ne pas être de classe Δ_b; et par contre elle peut ne pas être partout dérivable tout en étant de classe Δ_b.

Exemple : La fonction

$$\alpha(x) = x \sin\left[\log_2\left|\frac{1}{x}\right|\right] + 2x$$

ne possède pas de dérivée en 0, ni à droite, ni à gauche et cependant elle est de classe Δ_b.

LEMME [1]. — *Pour qu'une fonction continue $F(x)$ définie sur $(0-1)$ ait pour $x=0$ une dérivée à droite* nulle, *il faut et il suffit que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :*

1° *En désignant par λ un nombre >0, et pour tous les couples x_1, $x_2>0$, où $(x_2-x_1)=\lambda x_1$, on doit avoir*

$$\lim_{\lambda \to 0}\left[\limsup_{x_1 \to 0}\left|\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1}\right|\right]=0;$$

2° *Il existe une constante $\lambda>0$ telle que, pour tous les couples x_1, $x_2>0$, où $(x_2-x_1)=\lambda x_1$, on ait*

$$\lim_{x_1 \to 0}\left[\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1}\right]=0.$$

THÉORÈME 28. — *Toute fonction $\alpha(x)$ ayant en tout point une dérivée*

---

(1) Ce lemme est à rapprocher de la définition du paragraphe **38**.

à droite $\alpha'(x)$ *à variation bornée et* $> K$ (*où* K *est une constante* > 0) *est une fonction de classe* Δ_q.

La démonstration est basée sur le 2e théorème de la moyenne.

La condition indiquée est suffisante, mais non nécessaire.

Par contre on peut trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\alpha(x)$ soit de classe Δ_b :

Lorsque $\alpha(x)$ a ses nombres dérivés partout finis et bornés inférieurement par une constante $K > 0$, cette condition peut s'énoncer en disant que $\alpha(x)$ doit avoir une croissance régulière au sens suivant :

Définition. — Nous dirons que $\alpha(x)$ a une croissance régulière lorsque pour tout x, pour tout $\lambda > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout couple de points x', x'' tels que $(x'' - x') = \lambda(x' - x)$, l'ensemble des points du segment $(x'x'')$ en lesquels $\left|\frac{\alpha'(x)}{\overline{\alpha'(x)}} - 1\right| > \varepsilon$ [1] ait une épaisseur moyenne qui tende vers zéro lorsque $x' \to x$.

Nous reviendrons plus en détail sur ces questions dans un autre travail.

BIBLIOGRAPHIE.

Banach. — *Über analytisch darstelbare Operation in abstrakten Raümen* (*Fund. Math.*, **17**, 1931, p. 283-296).

Bouligand. — *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*, Paris, 1932.

Bourbaki. — *Topologie générale*, Chapitres I et II (*Actu. Sci.*, Hermann, Paris, 1940).

Caccioppoli. — *Sur lemma fondamentale del calcolo integrale* (*Atti. Mem. Accad. Sci. Padova*, **50**, 1934, p. 93-98).

[1] $\overline{\alpha'(x)}$ désigne la valeur moyenne de $\alpha'(x)$ sur le segment $(x'x'')$.

CHOQUET. — I. *Mathematica*, 1944, p. 29-64.

II. *Primitive d'une fonction par rapport à une fonction à variation non bornée* (*C. R. Acad. Sc.*, **218**, 1944, p. 495).

III. *Résolution du problème de Fréchet sur la paramétrisation d'arcs doués de tangentes. Généralisation aux variétés à plusieurs dimensions. Paramétrages intrinsèques* (*C. R. Acad. Sc.*, **221**, 1945, p. 85).

IV. *Caractérisation de la sphère en géométrie infinitésimale directe* (*Revue Scient.*, Nov. 1943, p. 452, Paris).

DENJOY. — I. *Les nombres dérivés des fonctions continues* (*Journal de Math.*, 1915, fasc. **2**, p. 105-240).

II. *Les fonctions dérivées sommables* (*Bull. Soc. Math.*, **45**, 1915, p. 161-248).

III. *La totalisation des nombres dérivés non sommables* (*Ann. E. N. S.*, I, 3e série, **33**, 1916, p. 127-222; et II, 3e série, **34**, 1917, p. 181-236).

IV. *Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique*, IIe partie : *Métrique et topologie d'ensembles parfaits et de fonctions*, Paris, 1941.

FRÉCHET. — I. *Fund. Math.*, **26**, 1936, p. 334.

II. *Espaces abstraits*, Paris, 1938

HAUSDORFF. — *Mengenlehre*, Berlin, 1927.

KURATOWSKI. — I. *Sur la théorie des fonctions dans les espaces métriques* (*Fund. Math.*, **17**, 1931, p. 275-283).

Les fonctions semi-continues dans l'espace des ensembles fermés (*Fund. Math.*, **18**, 1932, p. 148-59).

II. *Topologie* I, in *Monografje Matematyczne*.

LEBESGUE. — *Leçons sur l'intégration*, Paris, 1928.

PAUC. — I. *De quelques propriétés locales des continus euclidiens* (*C. R. Acad. Sc.*, **203**, 1936, p. 153).

II. *Unification des processus générateurs des divers contingents et paratingents* (*C. R. Acad. Sc.*, **206**, 1938, p. 1154).

III. *Journal de Crelle*, 1939 et 1940.

IV. *Les méthodes directes en géométrie différentielle* (*Actu. Sci.*, Hermann, Paris, 1941).

PETROWSKY. — I. *C. R. Acad. Sc.*, **189**, 1929, p. 1242.

II. *Sur l'unicité de la fonction primitive par rapport à une fonction continue arbitraire.*

Ridder. — I. *Sur la totalisation par rapport à une fonction à variation bornée généralisée* (*C. R. Acad. Sc.*, **209**, 1939, p. 623).

II. *Nouvelles propriétés de la totalisation par rapport à une fonction à variation bornée généralisée* (*C. R. Acad. Sc.*, **209**, 1939, p. 670).

Roger. — *Thèse. Les propriétés tangentielles des ensembles euclidiens de points* (*Acta. Math.*, **69**, 1938, pp. 99-133).

Saks. — *Theory of the integral*, in *Monografje Matematyczne*, t. VII, 1937.

Ward. — *On Jordan curves possessing a tangent everywhere* (*Fund. Math.*, **28**, 1937, p. 280-288).

Zahorsky. — Travaux non publiés. Résumé communiqué à la *Société mathématique de France*, dans la Séance du 21 novembre 1945.