JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GÉRARD PETIAU

Sur les relations tensorielles entre densités de valeurs moyennes en théorie de l'électron de Dirac (I)

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 25 (1946), p. 335-346.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1946_9_25__335_0>

Sur les relations tensorielles entre densités de valeurs moyennes en théorie de l'électron de Dirac (I);

Par Gérard PETIAU.

(Institut Henri-Poincaré.)

1. L'étude des relations entre grandeurs tensorielles de la théorie de l'électron de Dirac a été faite pour la première fois systématiquement par W. Pauli (1) et reprise ensuite par Kofink (2) dans une série de mémoires. J'ai exposé ces résultats en les simplifiant et les complétant dans le Cours que j'ai professé au Collège de France comme boursier de la Fondation Peccot en 1942. Depuis M. Costa de Beauregard (3) les a rappelés dans sa thèse. Je me propose ici de retrouver ces résultats par une méthode beaucoup plus simple et d'examiner l'indépendance des relations obtenues.

2. Construction et représentation des densités de valeurs moyennes dans la théorie de l'électron de Dirac. — Considérons l'équation de Dirac

$$\left[\left(\frac{h}{2\pi i}\right)\frac{1}{c}\,\partial_t\alpha_0+\sum_{p=1}^{3}\left(-\frac{h}{2\pi i}\right)\partial_p\alpha_p+m_0c\alpha_4\right]\psi=0,$$

α_0, $\alpha_p(p=1, 2, 3)$, α_4 représentant les matrices du quatrième rang

$$\alpha_0=1,\qquad (\alpha_p)_{ik,mp}=(\sigma_p)_{im}(\rho_1)_{kp},\qquad (\alpha_4)_{ik,mp}=(\sigma_0)_{im}(\rho_3)_{kp}$$
$$(i, k, m, p=1, 2),$$

(1) *Ann. Inst. H. Poincaré*, 6, 1936, p. 109.
(2) *Ann. der Phys.*, 30, 1937, p. 91; 38, 1940, p. 421, 436, 565, 583.
(3) *Thèse*, Paris, 1943, p. 56.

les matrices σ_p, ρ_p s'écrivant

$$\sigma_1 \text{ ou } \rho_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \sigma_2 \text{ ou } \rho_2 = \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix},$$

$$\sigma_3 \text{ ou } \rho_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

avec

$$\sigma_p \sigma_q = -i\sigma_r, \qquad \rho_p \rho_q = -i\rho_r.$$

Les matrices α_p, α_4 permettent par leurs produits de définir les 16 grandeurs tensorielles covariantes :

$$\begin{aligned} j_0 &= \psi^* \alpha_0 \psi, & j_p &= \psi^* \alpha_p \psi, \\ s_0 &= \psi^* i \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \psi, & s_p &= \psi^* i \alpha_q \alpha_r \psi, \\ \pi_p &= \psi^* i \alpha_p \alpha_4 \psi, & \mu_p &= \psi^* i \alpha_q \alpha_r \alpha_4 \psi, \\ \omega_1 &= \psi^* \alpha_4 \psi, & \omega_2 &= \psi^* \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \psi \end{aligned}$$

$$(p, q, r = 1, 2, 3).$$

Les matrices, produits des α intervenant dans ces expressions se représentent également par des produits de matrices σ et ρ. Nous avons ainsi

$$\alpha_0 = \sigma_0 \rho_0 = 1, \qquad \alpha_p = \sigma_p \rho_1, \qquad i\alpha_p \alpha_4 = -\sigma_p \rho_2;$$

$$i\alpha_p \alpha_q = \sigma_r, \qquad i\alpha_p \alpha_q \alpha_4 = \sigma_r \rho_3, \qquad i\alpha_p \alpha_q \alpha_r = \rho_1, \qquad \alpha_p \alpha_q \alpha_r \alpha_4 = \rho_2.$$

Ces résultats se rassemblent dans le tableau I.

Les densités correspondantes s'écrivant

$$\psi^*_{ik} (\sigma_A)_{l,m} (\rho_B)_{k,p} \psi_{m,p},$$

les matrices σ et ρ permettent de construire les densités données par le tableau II.

Tableau I.

	σ_0.	σ_p.
ρ_0	1	$i\alpha_q \alpha_r$
ρ_1	$i\alpha_p \alpha_q \alpha_r$	α_p
ρ_2	$\alpha_p \alpha_q \alpha_r \alpha_4$	$-i\alpha_p \alpha_4$
ρ_3	α_4	$i\alpha_q \alpha_r \alpha_4$

Tableau II.

	σ_0.	σ_p.
ρ_0	j_0	s_p
ρ_1	s_0	j_p
ρ_2	ω_2	$-\pi_p$
ρ_3	ω_1	$-\mu_p$

3. Relations fondamentales. — Considérons deux systèmes de matrices $\sigma_A (A = 0, 1, 2, 3)$, soient $(\sigma_A)_{l,m_1}$, $(\sigma_A)_{l,m_2}$ et proposons-nous de calculer la somme

$$S_A = \sum_A (\sigma_A)_{i_1 m_1} (\sigma_A)_{i_2 m_2}.$$

Nous pouvons écrire

$$(\sigma_0)_{i,m} = \delta_{i,m}, \qquad (\sigma_3)_{i,m} = -(-1)^i \delta_{i,m},$$
$$(\sigma_1)_{i,m} = \delta_{i,m-1}, \qquad (\sigma_2)_{i,m} = -(-1)^i i\, \delta_{i,m+1} \qquad (\mathrm{mod}\ 2).$$

On obtient alors

$$S_A = [\delta_{i_1 m_1} \delta_{i_2 m_2} + (-1)^{i_1+i_2} \delta_{i_2 m_1} \delta_{i_1 m_2}]$$
$$+ [\delta_{i_1, m_1+1} \delta_{i_2, m_2+1} - (-1)^{i_1+i_2} \delta_{i_2, m_1+1} \delta_{i_1, m_2+1}].$$

Si $i_1 + i_2 = 1 \,(\mathrm{mod}\ 2)$, il reste

$$S_A = 2\, \delta_{i_1, m_1+1} \delta_{i_2, m_2+1}$$

et la somme est nulle à moins que

$$m_1 + 1 = i_1, \qquad m_2 + 1 = i_2 \quad \text{ou} \quad m_1 + i_1 + i_2 = i_1,$$
$$m_2 + i_1 + i_2 = i_2, \qquad \text{c'est-à-dire} \quad m_1 = i_2, \qquad m_2 = i_1.$$

On en déduit

$$m_1 + 1 = m_2, \qquad m_2 + 1 = m_1$$

et la somme s'écrit

$$S_A = 2\, \delta_{i_1 m_2} \delta_{i_2 m_1}.$$

Si $i_1 + i_2 = 0 \,(\mathrm{mod}\ 2)$, la somme s'écrit

$$S_A = 2\, \delta_{i_1 m_1} \delta_{i_2 m_2}$$

et est nulle à moins que

$$m_1 = i_1 \quad \text{et} \quad m_2 = i_2$$

ou

$$m_1 = i_2 = m_2, \qquad m_2 = i_1 = m_1.$$

On obtient donc encore

$$S_A = 2\, \delta_{i_1 m_2} \delta_{i_2 m_1},$$

et par suite nous avons, dans tous les cas,

$$(1) \qquad \boxed{\sum_A (\sigma_A)_{i_1 m_1} (\sigma_A)_{i_2 m_2} = 2\, \delta_{i_1 m_2} \delta_{i_2 m_1}.}$$

Cette relation peut également s'écrire entre deux systèmes de matrices ρ, d'où

$$(2) \qquad \sum_{\mathrm{A}} (\rho_{\mathrm{A}})_{k_1 p_1} (\rho_{\mathrm{A}})_{k_2 p_2} = 2\, \delta_{k_1 p_2}\, \delta_{k_2 p_1}.$$

Par multiplication directe de (1) et de (2) nous obtenons

$$(3) \qquad \sum_{\mathrm{A},\mathrm{B}} [(\sigma_{\mathrm{A}})_{i_1 m_1} (\rho_{\mathrm{B}})_{k_1 p_1}] [(\sigma_{\mathrm{A}})_{i_2 m_2} (\rho_{\mathrm{B}})_{k_2 p_2}] = 4\, \delta_{i_1 m_2}\, \delta_{i_2 m_1}\, \delta_{k_1 p_2}\, \delta_{k_2 p_1}.$$

A, B prenant les valeurs 0, 1, 2, 3, les produits $\sigma_{\mathrm{A}}\rho_{\mathrm{B}}$ prennent successivement les valeurs des 16 matrices α et produits des α, soient α_{C}, de telle sorte que (3) s'écrit encore

$$(4) \qquad \sum_{\mathrm{C}=1}^{16} (\alpha_{\mathrm{C}})_{r_1 s_1} (\alpha_{\mathrm{C}})_{r_2 s_2} = 4\, \delta_{r_1 s_2}\, \delta_{r_2 s_1} \qquad (r, s = 1, 2, 3, 4).$$

Cette relation est la relation fondamentale de Pauli, et c'est elle qui est généralement prise comme base pour obtenir les relations entre grandeurs tensorielles. Mais cette relation n'est pas la plus simple que l'on puisse obtenir entre les 16 matrices α_{C}.

Nous écrirons par extension les relations (1) et (2) sous la forme

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{\mathrm{A}} (\sigma_{\mathrm{A}})_{i_1 m_1} (\rho_0)_{k_1 p_1} (\sigma_{\mathrm{A}})_{i_2 m_2} (\rho_0)_{k_2 p_2} = 2\, \delta_{i_1 m_2}\, \delta_{i_2 m_1}\, \delta_{k_1 p_1}\, \delta_{k_2 p_2}, \\ &\sum_{\mathrm{A}} (\rho_{\mathrm{A}})_{k_1 p_2} (\sigma_0)_{i_1 m_2} (\rho_{\mathrm{A}})_{k_2 p_1} (\sigma_0)_{i_2 m_1} = 2\, \delta_{k_1 p_1}\, \delta_{k_2 p_2}\, \delta_{i_1 m_2}\, \delta_{i_2 m_1}. \end{aligned} \right.$$

En égalant ces deux relations, nous obtenons

$$(6) \qquad \boxed{\sum_{\mathrm{A}} (\sigma_{\mathrm{A}})_{i_1 m_1} (\rho_0)_{k_1 p_1} (\sigma_{\mathrm{A}})_{i_2 m_2} (\rho_0)_{k_2 p_2} = \sum_{\mathrm{A}} (\sigma_0)_{i_1 m_2} (\rho_{\mathrm{A}})_{k_1 p_2} (\sigma_0)_{i_2 m_1} (\rho_{\mathrm{A}})_{k_2 p_1}.}$$

C'est cette relation qui va nous servir de base pour obtenir des relations entre densités de valeurs moyennes.

Alors que la relation (4) comprenait 17 termes, la relation (6) n'en comprend que 8.

Nous obtiendrons des relations entre grandeurs $\psi^* \sigma_{\mathrm{A}} \rho_{\mathrm{B}} \psi$ en multipliant la relation (6) par une matrice

$$(\sigma_C\rho_D)(\sigma_{C'}\rho_{D'}),$$

et la relation entre matrices obtenue par $\psi^*_{i_1k_1}\psi^*_{i_2k_2}$ à gauche, et par $\psi_{m_1p_1}\psi_{m_2p_2}$ à droite.

Si l'on remarque que

$$\psi^*_{i_1k_1}(\sigma_A)_{i_1m_1}(\rho_B)_{k_1p_1}\psi_{m_1p_1} = \psi^*_{i_1k_1}(\sigma_A)_{i_1m_2}(\rho_B)_{k_1p_2}\psi_{m_2p_2},$$

on voit que les termes provenant de

$$\delta_{i_1m_1}\delta_{k_1p_1}\delta_{i_2m_2}\delta_{k_2p_2}$$

et de

$$\delta_{i_1m_2}\delta_{k_1p_2}\delta_{i_2m_1}\delta_{k_2p_1}$$

se détruiront et que la relation (6) *considérée du point de vue des formes quadratiques donnera par combinaisons linéaires les mêmes relations que*

$$(7) \quad \boxed{\sum_{p=1,2,3}[(\sigma_p)_{i_1m_1}(\rho_0)_{k_1p_1}][(\sigma_p)_{i_2m_2}(\rho_0)_{k_2p_2}] = \sum_p[(\sigma_0)_{i_1m_2}(\sigma_p)_{k_1p_2}][(\sigma_0)_{i_2m_1}(\rho_p)_{k_2p_1}],}$$

par suite :

Toutes les relations entre formes quadratiques auront au plus six termes et si deux termes se détruisent par compensation, ces relations se réduiront à quatre termes.

4. Relations entre densités de valeurs moyennes. — Nous allons étudier systématiquement toutes les relations que l'on peut déduire de (7).

Nous aurons à effectuer sur la relation (7) toutes les combinaisons linéaires possibles en multipliant celle-ci par les 256 matrices

$$(\sigma_C\rho_D)_{(1)}(\sigma_{C'}\rho_{D'})_{(2)};$$

mais la relation (7) étant symétrique, les matrices

$$(\sigma_C\rho_D)_{(1)}(\sigma_{C'}\rho_{D'})_{(2)} \quad \text{et} \quad (\sigma_{C'}\rho_{D'})_{(1)}(\sigma_C\rho_D)_{(2)}$$

donnent les mêmes relations et, par suite, le nombre de combinaisons à effectuer est ramené à 136.

Si nous classons ces matrices suivant la présence des matrices σ_0

et ρ_0, nous obtenons les groupes suivants :

(1) $(\sigma_0\rho_0)\,(\sigma_0\rho_0)$,

(2) $(\sigma_0\rho_0)\,(\sigma_0\rho_p)$, $(\sigma_p\rho_0)\,(\sigma_0\rho_0)$,

(3) $\begin{cases} (\sigma_0\rho_p)\,(\sigma_0\rho_p), & (\sigma_0\rho_p)\,(\sigma_0\rho_q), \quad (\sigma_p\rho_0)\,(\sigma_0\rho_{p'}), \quad (\sigma_p\rho_0)\,(\sigma_p\rho_0), \\ & (\sigma_p\rho_0)\,(\sigma_q\rho_0), \quad (\sigma_0\rho_0)\,(\sigma_p\rho_{p'}), \end{cases}$

(4) $(\sigma_p\rho_{p'})\,(\sigma_0\rho_{p'})$, $(\sigma_p\rho_{p'})\,(\sigma_0\rho_{q'})$, $(\sigma_p\rho_0)\,(\sigma_p\rho_{p'})$, $(\sigma_p\rho_0)\,(\sigma_q\rho_{p'})$,

(5) $(\sigma_p\rho_{p'})\,(\sigma_p\rho_{p'})$, $(\sigma_p\rho_{p'})\,(\sigma_p\rho_{q'})$, $(\sigma_p\rho_{p'})\,(\sigma_q\rho_{p'})$, $(\sigma_p\rho_{p'})\,(\sigma_q\rho_{q'})$.

Toutes ces matrices ne donnent pas des relations distinctes et l'on constate que toutes les relations s'obtiennent au moyen des seules matrices

$(\sigma_0\rho_0)\,(\sigma_0\rho_0)$, $(\sigma_0\rho_0)\,(\sigma_0\rho_p)$, $(\sigma_p\rho_0)\,(\sigma_0\rho_0)$, $(\sigma_0\rho_p)\,(\sigma_0\rho_p)$, $(\sigma_0\rho_p)\,(\sigma_0\rho_q)$, $(\sigma_p\rho_0)\,(\sigma_0\rho_{p'})$, $(\sigma_p\rho_0)\,(\sigma_p\rho_0)$, $(\sigma_p\rho_0)\,(\sigma_q\rho_0)$, $(\sigma_p\rho_{p'})\,(\sigma_0\rho_{q'})$.

Nous obtenons ainsi les relations suivantes :

1° La relation (7), multipliée par $\psi^*_{i_1m_1}\psi^*_{i_2m_2}$, $\psi_{k_1p_1}\psi_{k_2p_2}$, donne

$$\sum_p [\psi^*(\sigma_p\rho_0)\psi]^2 = [\psi^*(\sigma_0\rho_1)\psi]^2 + [\psi^*(\sigma_0\rho_2)\psi]^2 + [\psi^*(\sigma_0\rho_3)\psi]^2,$$

ce qui s'écrit encore

$$\sum_p s_p^2 = s_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2. \tag{8}$$

2° La relation (7), multipliée par $(\sigma_0\rho_{p'})(\sigma_0\rho_0)$, donne

$$\sum_p (\sigma_p\rho_{p'})\,(\sigma_p\rho_0) = (\sigma_0\rho_0)\,(\sigma_0\rho_p) - i(\sigma_0\rho_r)\,(\sigma_0\rho_q) + i(\sigma_0\rho_q)\,(\sigma_0\rho_r),$$

et après multiplication par $\psi^*_{(1)}\psi^*_{(2)}$ et $\psi_{(1)}\psi_{(2)}$,

$$\sum_p [\psi^*(\sigma_p\rho_{p'})\psi]\,[\psi^*(\sigma_p\rho_0)\psi] = [\psi^*(\sigma_0\rho_p)\psi]\,[\psi^*\psi].$$

p' prenant les valeurs 1, 2, 3, nous obtenons

$$\sum_p j_p s_p = \quad j_0 s_0; \tag{9a}$$

$$\sum_p \pi_p s_p = -\,\omega_2 j_0; \tag{9b}$$

$$\sum_p \mu_p s_p = \quad \omega_1 j_0. \tag{9c}$$

3° Multipliant (7) par $(\sigma_0\rho_{p'})(\sigma_0\rho_{p'})$, on obtient

$$\sum_p(\sigma_p\rho_{p'})(\sigma_p\rho_{p'}) = (\sigma_0\rho_0)(\sigma_0\rho_0) - (\sigma_0\rho_{q'})(\sigma_0\rho_{q'}) - (\sigma_0\rho_{r'})(\sigma_0\rho_{r'}),$$

qui donne

$$\sum_p[\psi^*(\sigma_p\rho_{p'})\psi]^2 = [\psi^*(\sigma_0\rho_0)\psi]^2 - [\psi^*(\sigma_0\rho_{q'})\psi]^2 - [\psi^*(\sigma_0\rho_{r'})\psi]^2.$$

d'où p' prenant les valeurs 1, 2, 3,

(10a) $$\sum_p j_p^2 = j_0^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2;$$

(10b) $$\sum_p \pi_p^2 = j_0^2 - s_0^2 - \omega_1^2;$$

(10c) $$\sum_p \mu_p^2 = j_0^2 - s_0^2 - \omega_2^2.$$

4° La multiplication par $(\sigma_0\rho_{p'})(\sigma_0\rho_{q'})$ donne

$$\sum_p[\psi^*(\sigma_p\rho_{p'})\psi][\psi^*(\sigma_p\rho_{q'})\psi] = [\psi^*(\sigma_0\rho_p)\psi][\psi^*(\sigma_0\rho_q)\psi],$$

soit

(11a) $$\sum_p j_p\pi_p = -s_0\omega_2;$$

(11b) $$\sum_p \pi_p\mu_p = -\omega_1\omega_2;$$

(11c) $$\sum_p \mu_p j_p = \omega_1 s_0.$$

5° La multiplication par $(\sigma_p\rho_{p'})(\sigma_0\rho_{q'})$ nous donne

$$\begin{aligned}&[\psi^*(\sigma_p\rho_{p'})\psi][\psi^*(\sigma_r\rho_{q'})\psi] - [\psi^*(\sigma_r\rho_{p'})\psi][\psi^*(\sigma_q\rho_{r'})\psi]\\ &= [\psi^*(\sigma_p\rho_0)\psi][\psi^*(\sigma_0\rho_{r'})\psi] - [\psi^*(\sigma_p\rho_{r'})\psi][\psi^*(\sigma_0\rho_0)\psi],\end{aligned}$$

d'où l'on tire

(12a) $$j_r\pi_q - j_q\pi_r = s_p\omega_1 - \mu_p j_0;$$

(12b) $$\pi_r\mu_q - \pi_q\mu_r = s_p s_0 - j_p j_0;$$

(12c) $$\mu_q j_r - \mu_r j_q = s_p\omega_2 + \pi_p j_0.$$

6° La multiplication par $(\sigma_p\rho_0)(\sigma_0\rho_{p'})$ donne

$$[\psi^*(\sigma_q\rho_0)\psi][\psi^*(\sigma_r\rho_{p'})\psi]-[\psi^*(\sigma_r\rho_0)\psi][\psi^*(\sigma_q\rho_{p'})\psi]$$
$$=[\psi^*(\sigma_p\rho_{r'})\psi][\psi^*(\sigma_0\rho_{q'})\psi]-[\psi^*(\sigma_p\rho_{q'})\psi][\psi^*(\sigma_0\rho_{r'})\psi],$$

d'où nous tirons les relations

(13a) $$s_q j_r - s_r j_q = \mu_p\omega_2 + \pi_p\omega_1;$$

(13b) $$s_r\pi_q - s_q\pi_r = j_p\omega_1 - \mu_p s_0;$$

(13c) $$s_q\mu_r - s_r\mu_q = -\pi_p s_0 - j_p\omega_2.$$

7° La multiplication par $(\sigma_0\rho_0)(\sigma_p\rho_0)$ donne

$$[\psi^*(\sigma_p\rho_0)\psi][\psi^*\sigma_0\rho_0\psi]=\sum_r[\psi^*(\sigma_0\rho_r)\psi][\psi^*(\sigma_p\rho_r)\psi],$$

d'où

(14) $$s_p j_0 - s_0 j_p = \omega_1\mu_p - \omega_2\pi_p.$$

8° La multiplication par $(\sigma_p\rho_0)(\sigma_p\rho_0)$ donne

$$[\psi^*\psi]^2-[\psi^*(\sigma_r\rho_0)\psi]^2-[\psi^*(\sigma_q\rho_0)\psi]^2=\sum_{r'}[\psi^*(\sigma_p\rho_{r'})\psi]^2,$$

d'où

(15) $$j_0^2 - s_r^2 - s_q^2 = j_p^2 + \pi_p^2 + \mu_p^2.$$

9° La multiplication par $(\sigma_0\rho_0)(\sigma_q\rho_0)$ donne

$$[\psi^*(\sigma_q\rho_0)\psi][\psi^*(\sigma_p\rho_0)\psi]=\sum_{r'}[\psi^*(\sigma_p\rho_{r'})\psi][\psi^*(\sigma_q\rho_{r'})\psi],$$

d'où

(16) $$s_p s_q - j_p j_q = \pi_p\pi_q + \mu_p\mu_q.$$

5. Formes tensorielles des relations entre densités de valeurs moyennes. — Les relations précédentes établies dans un système de référence particulier mettent en évidence les composantes tensorielles et spatiales de grandeurs tensorielles.

Afin de rétablir la symétrie relativiste et de simplifier la représentation de ces relations nous poserons

$$g_{00}=1, \qquad g_{pp}=-1, \qquad g_{pq}=g_{p0}=0.$$

Nous pourrons alors introduire des composantes contravariantes et nous aurons successivement

$$j^0 = j_0, \qquad j^p = -j_p;$$
$$s_0 = s_{pqr} = -s^{pqr} = \varepsilon_{pqr0} s^0 = -\varepsilon_{0pqr} s^0 = -s^0;$$
$$s_p = s_{0qr} = s^{0qr} = \varepsilon_{0qrp} s^p = \varepsilon_{0pqr} s^p = s^p.$$

$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ étant l'indicatif de dualité antisymétrique en μ, ν, ρ, σ et égal à ± 1 suivant que la permutation $\mu\nu\rho\sigma$ se déduit de $0pqr$ par un nombre pair ou impair d'inversion,

$$\pi_p = f_{0p} = -f^{0p}, \qquad \mu_p = f_{qr} = f^{qr};$$
$$\omega_1 = \omega_1, \qquad \omega_2 = \omega_{0pqr} = -\omega^{0pqr} = |\omega_2|\,\varepsilon_{0pqr}.$$

Nous définissons le dual de $f^{\mu\nu}$ par les relations

$$f^*_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} f^{\rho\sigma}, \qquad f^{\mu\nu *} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\rho\sigma},$$

d'où

$$f^*_{pq} = \frac{1}{2}\varepsilon_{pq0r} f^{0r} = f^{0r} = -f_{0r};$$

$$f^*_{0p} = \frac{1}{2}\varepsilon_{0pqr} f^{qr} = f^{qr} = f_{qr};$$

$$f^{pq*} = \frac{1}{2}\varepsilon^{pq0r} f_{0r} = \frac{1}{2}\varepsilon^{0pqr} f_{0r} = -f_{0r};$$

$$f^{0p*} = \frac{1}{2}\varepsilon^{0pqr} f_{qr} = -f_{qr}.$$

Les relations de (8) à (16) s'écrivent alors

$$s_\mu s^\mu = \omega_1^2 + |\omega_2|^2; \tag{17}$$
$$j_\mu s^\mu = 0; \tag{18}$$
$$f_{\mu\nu} s^\nu = -\omega_2 j_\mu \quad \text{ou} \quad f^{\mu\nu} s_\nu = \omega_2 j^\mu; \tag{19}$$
$$f_{\mu\nu} j^\nu = \omega_2 s_\mu \quad \text{ou} \quad f^{\mu\nu} j_\nu = -\omega_2 s^\mu; \tag{20}$$
$$f^*_{\mu\nu} s^\nu = \omega_1 j_\mu \quad \text{ou} \quad f^{\mu\nu *} s_\nu = -\omega_1 j^\mu; \tag{21}$$
$$f^*_{\mu\nu} j^\nu = -\omega_1 s_\mu \quad \text{ou} \quad f^{\mu\nu *} j_\nu = \omega_1 s^\mu; \tag{22}$$
$$j_\mu j^\mu = \omega_1^2 + |\omega_2|^2; \tag{23}$$
$$f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} = 2[\omega_1^2 - |\omega_2|^2]; \tag{24}$$
$$f^*_{\mu\nu} f^{\nu\mu} = -4\omega_1\omega_2 \quad \text{ou} \quad f^*_{\mu\rho} f^{\rho\nu} = -\omega_1\omega_2 g_\mu{}^\nu; \tag{25}$$
$$s_\mu j_\nu - s_\nu j_\mu = f_{\mu\nu}\omega_2 - f^*_{\mu\nu}\omega_1; \tag{26}$$
$$s_\mu s^\nu + j_\mu j^\nu = f_{\mu\rho} f^{\rho\nu} + \omega_1^2 g_\mu{}^\nu. \tag{27}$$

Écrivant la relation (26) sous la forme

$$s_{\mu\nu\rho}j^{\rho} = \omega_1 f_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu\rho\sigma}f^{\rho\sigma},$$

nous en tirons

$$\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu\rho\sigma}s^{\rho\sigma\alpha}j_{\alpha} = \frac{1}{2}\omega_1\omega_{\mu\nu\rho\sigma}f^{\rho\sigma} + \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu\rho\sigma}\omega^{\rho\sigma\alpha\beta}f_{\alpha\beta};$$

$$\omega_1 s_{\mu\nu\rho}j^{\rho} = \frac{1}{2}\omega_1\omega_{\mu\nu\rho\sigma}f^{\rho\sigma} + (\omega_1)^2 f_{\mu\nu},$$

et par différence

$$\omega_1^2 f_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\omega_{\mu\nu\rho\sigma}\omega^{\rho\sigma\alpha\beta}f_{\alpha\beta} = \omega_1 s_{\mu\nu\rho}j^{\rho} - \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu\rho\sigma}s^{\rho\sigma\alpha}j_{\alpha};$$

or

$$\frac{1}{4}\omega_{\mu\nu\rho\sigma}\omega^{\rho\sigma\alpha\beta}f_{\alpha\beta} = -f_{\mu\nu}(\omega_2)^2;$$

d'où

$$f_{\mu\nu} = \frac{\omega_1 s_{\mu\nu\rho}j^{\rho} - \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu\rho\sigma}s^{\rho\sigma\alpha}j_{\alpha}}{\omega_1^2 + \omega_2^2}, \tag{28}$$

et réciproquement, cette relation permet de retrouver (26).

6. Indépendance des relations. — Nous allons montrer maintenant que les onze relations de (17) à (28) ne sont pas indépendantes et se déduisent des quatre relations fondamentales

$$s_{\mu}s^{\mu} = \omega_1^2 + \omega_2^2; \tag{I}$$

$$j_{\mu}j^{\mu} = \omega_1^2 + \omega_2^2; \tag{II}$$

$$s_{\mu}j^{\mu} = 0; \tag{III}$$

$$f_{\mu\nu} = \frac{\omega_1 s_{\mu\nu\rho}j^{\rho} - \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu\rho\sigma}s^{\rho\sigma\lambda}j_{\lambda}}{\omega_1^2 + \omega_2^2}. \tag{IV}$$

En effet, la relation (IV) nous donne

$$(\omega_1^2 + \omega_2^2)f_{\mu\nu}j^{\nu} = \omega_1 s_{\mu\nu\rho}j^{\rho}j^{\nu} - \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu\rho\sigma}s^{\rho\sigma\lambda}j_{\lambda}j^{\nu};$$

or $s_{\nu\rho\sigma}j^{\rho}j^{\nu} = 0$ par antisymétrie et

$$-\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu\rho\alpha}s^{\rho\sigma\lambda}j_{\lambda}j^{\nu} = -\frac{1}{2}\omega_2\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon^{\rho\sigma\lambda\tau}s_{\tau}j_{\lambda}j^{\nu}$$
$$= \omega_2 s_{\mu}j_{\nu}j^{\nu} = \omega_2 s_{\mu}(\omega_1^2 + \omega_2^2),$$

d'où

(20) $$f_{\mu\nu} j^\nu = \omega_2 s_\mu.$$

De même

$$(\omega_1^2 + \omega_2^2) f_{\mu\nu} s^\nu = \omega_1 s_{\mu\nu\rho} j^\rho s^\nu - \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu\rho\sigma} s^{\rho\sigma\lambda} s^\nu j_\lambda.$$

Or

$$\omega_1 s_{\mu\nu\rho} j^\rho s^\nu = \omega_1 \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} s^\sigma s^\nu j^\rho = 0,$$

par antisymétrie,

$$\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu\rho\sigma} s^{\rho\sigma\lambda} s^\nu j_\lambda = \frac{1}{2} \omega_2 \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{\rho\sigma\lambda\tau} s_\tau s^\nu j_\lambda = \omega_2 s^\mu s_\mu j_\nu,$$

d'où

(19) $$f_{\mu\nu} s^\nu = -\omega_2 j_\mu.$$

A partir de (IV), sous la forme

$$s_\mu j_\nu - s_\nu j_\mu = \omega_2 f_{\mu\nu} - \omega_1 \overset{*}{f}_{\mu\nu},$$

nous obtenons

$$s_\mu j_\nu s^\nu - s_\nu s^\nu j_\mu = \omega_2 f_{\mu\nu} s^\nu - \omega_1 \overset{*}{f}_{\mu\nu} s^\nu,$$

d'où

$$(\omega_1^2 + \omega_2^2) j_\mu - \omega_2^2 j_\mu = \omega_1 \overset{*}{f}_{\mu\nu} s^\nu$$

ou

(21) $$\overset{*}{f}_{\mu\nu} s^\nu = \omega_1 j_\mu,$$

et de même

(22) $$\overset{*}{f}_{\mu\nu} j^\nu = -\omega_1 s^\mu.$$

La relation (IV) nous donne encore

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2) \overset{*}{f}_{\mu\nu} f^{\mu\nu} = \omega_1 \overset{*}{f}_{\mu\nu} s^{\mu\nu\rho} j_\rho - \frac{1}{2} \overset{*}{f}_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu\rho\sigma} s_{\rho\sigma\alpha} j^\alpha$$

$$= \omega_1 \overset{*}{f}_{\mu\nu} \varepsilon^{\mu\nu\rho\lambda} s_\lambda j_\rho - \frac{1}{2} \overset{*}{f}_{\mu\nu} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} s^\beta j^\alpha$$

$$= 2\omega_1 f^{\rho\lambda} s_\lambda j_\rho - \omega_2 f^{\rho\sigma} \varepsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} s^\beta j^\alpha$$

$$= 2\omega_1 \omega_2 j^\rho j_\rho + 2\omega_2 \overset{*}{f}_{\alpha\beta} s^\beta j^\alpha = 4\omega_1\omega_2(\omega_1^2 + \omega_2^2),$$

d'où

(24) $$\overset{*}{}_{\mu\rho} f^{\rho\nu} = -\omega_1 \omega_2 g_\mu{}^\nu.$$

La relation (4) sous la forme (26) nous donne également

$$f^{\rho\mu} s_\mu j_\nu - f^{\rho\mu} s_\nu j_\mu = f^{\rho\mu} f_{\mu\nu} \omega_2 - f^{\rho\mu} \overset{*}{f}_{\mu\nu} \omega_1$$

ou

$$\omega_2(j^\rho j_\nu + s^\rho s_\nu) = \omega_2 f^{\rho\mu} f_{\mu\nu} + \omega_1^2 \omega_2 g^\rho{}_\nu,$$

et nous retrouvons ainsi la relation

$$(27) \qquad j^\mu j_\nu + s^\mu s_\nu = f^{\mu\rho} f_{\rho\nu} + \omega_1^2 g^\mu{}_\nu,$$

et par contraction

$$2(\omega_1^2 + \omega_2^2) = f^{\mu\rho} f_{\rho\mu} + 4\omega_1^2,$$

ou encore

$$(24) \qquad f^{\mu\rho} f_{\rho\mu} = 2(\omega_1^2 - \omega_2^2).$$

Toutes les relations entre densités de valeurs moyennes se déduisent donc des quatre relations fondamentales (I), (II), (III) *et* (IV).