

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

JULES HAAG

**Sur les vibrations de certaines machines reposant sur des ressorts**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 9<sup>e</sup> série*, tome 25 (1946), p. 257-288.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1946\\_9\\_25\\_257\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1946_9_25_257_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

---

---

*Sur les vibrations de certaines machines  
reposant sur des ressorts ;*

**PAR JULES HAAG.**

---

**1. ÉNONCÉ DU PROBLÈME.** — En étudiant, à la demande de M. Baillaud, les oscillations d'une table vibrante destinée à l'Observatoire de Besançon, j'ai été conduit à me poser le problème plus général suivant.

Soit un bâti B reposant sur le sol (ou sur des appuis fixes quelconques) par l'intermédiaire de ressorts  $R_1, R_2, \dots$ . Ce bâti sert de support à un certain nombre de pièces  $S_1, S_2, \dots$ , qui ont, par rapport à B, des mouvements de la nature suivante :

1° La pièce  $S_i$  peut avoir un mouvement de *translation*, au cours duquel chaque point est animé d'une *vibration elliptique*, pouvant se réduire à une rotation uniforme ou à une vibration rectiligne. L'amplitude de cette vibration sera supposée *très petite* par rapport aux dimensions du bâti. Nous appellerons  $O_i$  le *centre de la vibration effectuée par le centre de gravité  $G_i$  de  $S_i$* . La distance  $O_iG_i$  restera donc très petite.

2° La pièce  $S_i$  peut avoir un mouvement de *rotation uniforme* autour d'un axe  $\Delta_i$  fixe par rapport à B. Soit  $O_i$  la projection de  $G_i$  sur  $\Delta_i$ . Nous admettrons comme ci-dessus que la distance  $O_iG_i$  est très petite; autrement dit, la pièce est *très approximativement centrée sur son axe*. Nous admettrons en outre que *l'ellipsoïde d'inertie relatif à  $O_i$  est sensiblement de révolution autour de  $\Delta_i$* . Il existe donc un système d'axes rectangulaires  $O_iX_iY_iZ_i$  liés à  $S_i$  ( $O_iZ_i$  dirigé suivant  $\Delta_i$ ) tels que les moments et produits d'inertie relatifs à ces axes aient les valeurs  $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i$ , les rapports  $\frac{A_i - B_i}{C_i}, \frac{D_i}{C_i}, \frac{E_i}{C_i}, \frac{F_i}{C_i}$  étant non nuls, mais *très petits*.

Nous supposons que *les mouvements relatifs de toutes les  $S_i$  ont même période  $\frac{2\pi}{\omega}$* . Nous posons  $\theta = \omega t$ , de sorte que  $\theta$  désignera, suivant le cas, la *phase* du mouvement vibratoire ou l'*azimut* du mouvement de rotation.

Toutes les pièces seront supposées *actionnées par un même moteur*, dont *le stator sera fixé à B*. Ce moteur fera donc lui-même partie des  $S_i$  et rentrera dans la deuxième des catégories ci-dessus.

Le problème qu'il s'agit maintenant de résoudre est la *détermination des vibrations auxquelles est soumis le bâti B* sous l'influence conjuguée des mouvements imposés aux pièces  $S_i$  et des réactions des ressorts  $R_j$ . Il importe en particulier de pouvoir calculer les *fréquences* donnant lieu à la *résonance*.

**2. MÉTHODE.** — Il convient d'abord de préciser les paramètres dont dépend la position de B. Choisissons arbitrairement un trièdre trirectangle  $Oxyz$  lié à B et prenons pour trièdre de référence  $O_1x_1y_1z_1$  la position de  $Oxyz$  quand B est en équilibre, les pièces  $S_j$  étant calées. On peut passer de  $O_1x_1y_1z_1$  à  $Oxyz$  par la translation  $\vec{O_1O}$ , de composantes  $x, y, z$ , suivie d'une rotation de l'angle  $\lambda$  autour de la nouvelle position de  $O_1x_1$ , puis d'une rotation de l'angle  $\mu$  autour de la nouvelle position de  $O_1y_1$  et enfin une rotation de l'angle  $\nu$  autour de la nouvelle position de  $O_1z_1$ . Les six nombres  $x, y, z, \lambda, \mu, \nu$  seront les *coordonnées du bâti* (1).

Nous supposons, dans tout ce qui va suivre, que ces coordonnées restent *très petites* et nous les regarderons comme des infiniment petits du premier ordre. Dans ces conditions, les rotations et translations du trièdre  $Oxyz$  sont, *au second ordre près*

$$(1) \quad p = \lambda', \quad q = \mu', \quad r = \nu', \quad \zeta = x', \quad \eta = y', \quad \zeta = z',$$

les accents indiquant des dérivées par rapport au temps.

---

(1) Les angles  $\lambda, \mu, \nu$  sont nuls quand  $Oxyz$  est parallèle à  $O_1x_1y_1z_1$ ; ils sont infiniment petits quand les deux trièdres ont des orientations infiniment voisines. Signalons que les angles d'Euler ne possèdent pas cette propriété; car, lorsque les deux trièdres se confondent, les angles  $\psi$  et  $\varphi$  sont indéterminés; leur somme est seule connue. Si les deux trièdres sont infiniment voisins,  $\theta$  est infiniment petit; mais  $\varphi$  et  $\psi$  peuvent avoir des valeurs finies. *Les angles d'Euler sont donc impropres à l'étude des petits mouvements.*

Notre méthode consistera à appliquer les *équations de Lagrange* au système constitué par B et les  $S_i$ , en négligeant les résistances passives. Ces dernières jouent, dans la réalité, le rôle d'amortisseurs. Par conséquent, les conditions théoriques dans lesquelles nous allons nous placer sont plus défavorables, au point de vue de l'amplitude des vibrations entretenues, que les conditions réelles; de sorte que les garanties de sécurité données par le calcul qui va suivre seront plutôt renforcées par l'existence même des résistances passives dont nous n'aurons pas tenu compte.

**3. CALCUL DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE.** — Elle comprend d'abord celle du bâti, qui est une forme quadratique définie, positive et à coefficients constants de  $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$ .

Voyons maintenant sous quelle forme se présente l'énergie cinétique de  $S_i$ . On peut la calculer au moyen de la formule générale suivante :

Soit un système S mobile par rapport au repère R, lequel est mobile par rapport à  $R_1$ . Soient P un point quelconque fixe par rapport à R,  $\vec{W}$  son vecteur vitesse d'entraînement,  $\vec{\Omega}$  le vecteur instantané de rotation de R,  $\vec{Q}$  le vecteur quantité de mouvement du centre de gravité G de S par rapport à R,  $\vec{\sigma}$  le moment cinétique de S par rapport à P dans son mouvement par rapport à R. L'énergie cinétique absolue de S est

$$(2) \quad T_a = T_r + T_e + \vec{Q} \cdot \vec{W} + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma};$$

$T_r$  et  $T_e$  désignant les énergies cinétiques relative et d'entraînement. Appliquons cette formule à  $S_i$ , le repère R étant le bâti B. Prenons P en  $O_i$ . Nous obtenons

$$(3) \quad T_a = T_r + T_e + \vec{Q}_i \cdot \vec{V}_i + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_i,$$

où  $\vec{Q}_i$  désigne le vecteur quantité de mouvement relative du centre de gravité  $G_i$ ;  $\vec{V}_i$  est le vecteur vitesse de  $O_i$ ;  $\vec{\sigma}_i$  est le moment cinétique relatif de  $S_i$  par rapport à  $O_i$ ; enfin,  $\vec{\Omega}$  est le vecteur instantané de rotation de B.

L'énergie cinétique relative se calcule par le théorème de Koenig. Elle est évidemment de la forme  $\theta'^2 f_i(\theta)$ .

L'énergie cinétique d'entraînement se calcule aussi par le théorème de Kœnig. L'énergie cinétique de  $G_i$  peut être remplacée par celle de  $O_i$  (très voisin de  $G_i$ ), laquelle ne dépend pas de  $\theta$ . Quant à l'énergie cinétique dans le mouvement autour de  $G_i$ , elle est nulle si  $S_i$  est animé d'une translation. Si  $S_i$  tourne, le mouvement autour de  $G_i$  peut être confondu avec le mouvement autour de  $O_i$ . Si l'on appelle  $p_i, q_i, r_i$  les composantes de  $\vec{\Omega}$  suivant les axes  $O_i X_i Y_i Z_i$  (n° 4), la force vive dans ce mouvement est approximativement

$$A_i(p_i^2 + q_i^2) + C_i r_i^2 = A_i(p_i^2 + q_i^2 + r_i^2) + (C_i - A_i)r_i^2,$$

expression indépendante de  $\theta$ .

En définitive, nous calculerons l'énergie cinétique d'entraînement de chaque pièce  $S_i$  en plaçant  $G_i$  en  $O_i$  et admettant que l'ellipsoïde d'inertie relatif à  $O_i$  est exactement de révolution autour de  $\Delta_i$ . Moyennant ces approximations, l'énergie cinétique d'entraînement de tout le système est une forme quadratique  $F(x', y', z'; \lambda', \mu', \nu')$  à coefficients constants.

#### 4. Passons aux deux autres termes de la formule (3).

Les composantes de  $\vec{Q}_i$  sont le produit de  $\theta'$  par des fonctions linéaires de  $\cos\theta$  et  $\sin\theta$ , à coefficients constants. Ces coefficients sont de l'ordre de grandeur de  $O_i G_i$ , donc très petits. Malgré cette petitesse, les composantes ci-dessus ne sont pas négligeables, parce qu'elles comportent le facteur  $\theta'$  qui pourra être très grand.

Quand aux composantes de  $\vec{V}_i$ , ce sont des formes linéaires en  $x', y', \dots, \nu'$ , à coefficients constants.

Si  $S_i$  ne tourne pas, le quatrième terme de (3) est négligeable, car  $\vec{\sigma}_i$  se réduit au moment cinétique de  $G_i$ , lequel est du second ordre par rapport à  $O_i G_i$ . Si  $S_i$  tourne, on a

$$\vec{\sigma}_i = \theta' (-E_i \vec{u}_i - D_i \vec{v}_i + C_i \vec{w}_i),$$

en appelant  $\vec{u}_i, \vec{v}_i, \vec{w}_i$  les vecteurs unitaires de  $O_i X_i, O_i Y_i, O_i Z_i$ . Le troisième de ces vecteurs est indépendant de  $\theta$ ; les deux premiers sont de la forme  $\vec{u} \cos\theta + \vec{v} \sin\theta$  et  $-\vec{u} \sin\theta + \vec{v} \cos\theta$ ,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  étant indépen-

dants de  $\theta$ . Il résulte de tout ceci que l'on peut écrire

$$(4) \quad \Sigma(\vec{Q}_i \cdot \vec{V}_i + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_i) = \theta'(P \cos \theta + Q \sin \theta + R),$$

P, Q, R désignant des formes linéaires en  $x', y', \dots, v'$ , à coefficients constants.

On a finalement

$$(5) \quad T = F(x', y', \dots, v') + \theta'(P \cos \theta + Q \sin \theta + R) + \theta'^2 f(\theta).$$

**5. CALCUL DU TRAVAIL VIRTUEL.** — Ce travail comprend le travail du moteur, le travail de la pesanteur et le travail des ressorts.

Le travail virtuel du moteur est de la forme  $C \delta \theta$ .

Le travail virtuel du poids de  $S_i$  comprend d'abord un terme en  $\delta \theta$ , que nous faisons rentrer dans  $C \delta \theta$ . Nous avons ensuite le travail correspondant à un déplacement virtuel de B. En principe, ses coefficients dépendent de  $\theta$ ; mais, comme la distance  $O_i G_i$  est très petite, nous pouvons confondre  $G_i$  avec  $O_i$ . Autrement dit, nous pouvons calculer le travail virtuel de la pesanteur en supposant que toutes les pièces  $S_i$  sont exactement centrées.

Considérons maintenant les réactions de  $R_j$  sur B. Appelons  $(\rho_{j0})$  ces réactions quand le système est en équilibre, c'est-à-dire quand les six coordonnées  $x, y, \dots, v$  sont nulles. Appelons  $(\rho_j)$  les petits accroissements subis par lesdites réactions quand  $x, y, \dots, v$  prennent des valeurs très petites. Les forces  $(\rho_{j0})$  correspondant aux différents ressorts et le poids P constituent un système équivalent à zéro appliqué au corps solide B; leur travail virtuel total est donc nul. Quand au travail virtuel total des  $(\rho_j)$ , il est égal à  $-\delta V$ , en appelant V la somme des énergies de déformation de tous les ressorts, calculées en prenant pour état naturel de chacun d'eux son état quand le bâti B est en équilibre.

Cette fonction V est une forme quadratique des variables  $x, y, \dots, v$ , que l'on calcule de la manière suivante :

Soit R l'un des ressorts et X, Y, ..., N les six coordonnées du système des réactions exercées par B sur R. Supposons d'abord que R ait un seul encastrement fixe. On calcule son énergie de déformation V en

fonction de  $X, Y, \dots, N$ , par la formule bien connue. Puis <sup>(1)</sup>, on prend la *forme adjointe* de  ${}_2V$ , les variables adjointes étant  $x, y, \dots, v$  <sup>(2)</sup>.

Si  $R$  présente *deux encastements fixes*, situés de part et d'autre de l'encastrement dans  $B$ , on partage le ressort en deux parties et l'on calcule séparément, comme ci-dessus, l'énergie de chaque partie. Il suffit ensuite d'additionner ces deux énergies partielles <sup>(3)</sup>.

*Remarque.* — La forme quadratique  $V$  est une forme quadratique *définie positive* des variables qui y figurent. Il peut arriver d'ailleurs que certaines des variables  $x, y, \dots, v$  en soient absentes, auquel cas elles sont également absentes de  $G(x, y, \dots, v)$ ; le bâti possédant alors moins de six degrés de liberté (cf. n° 11).

**6. ÉQUATIONS DE LAGRANGE.** — L'équation relative à  $\theta$  donne le coefficient  $C$  et par suite le couple moteur nécessaire pour actionner les  $S_i$ ; elle est sans intérêt pour le but poursuivi.

L'équation relative à  $x$  s'écrit

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial F}{\partial x'} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} = \omega^2 \left( \frac{\partial P}{\partial x'} \sin \theta - \frac{\partial Q}{\partial x'} \cos \theta \right),$$

en se rappelant que  $\frac{\partial P}{\partial x'}, \frac{\partial Q}{\partial x'}, \frac{\partial R}{\partial x'}$  sont des constantes et que  $\theta = \omega t$ . Les équations relatives à  $y, \dots, v$  ont une forme analogue.

On obtient ainsi un *système de six équations différentielles linéaires à coefficients constants, avec seconds membres sinusoïdaux*.

*Le mouvement entretenu est un mouvement sinusoïdal* obtenu en résolvant par rapport à  $x, y, \dots, v$ , le système linéaire constitué par l'équation

$$(7) \quad \frac{\partial V}{\partial x} - \omega^2 \frac{\partial F}{\partial x} = \omega^2 \left( \frac{\partial X}{\partial x'} \sin \theta - \frac{\partial Q}{\partial x'} \cos \theta \right)$$

<sup>(1)</sup> Cf. *Bull. Soc. Math.*, t. 56, p. 240.

<sup>(2)</sup> Rappelons que la forme adjointe de la forme quadratique  $\Sigma \Sigma G_{ik} X_i X_k$  est  $\Sigma \Sigma g_{ik} x_i x_k$ , avec  $\Delta g_{ik} = \Delta_{ik}$ ,  $\Delta$  désignant le discriminant de la forme quadratique proposée et  $\Delta_{ik}$  le mineur de  $\Delta$  correspondant à l'élément  $G_{ik}$ .

<sup>(3)</sup> Nous négligeons, bien entendu, l'inertie des ressorts.

et les cinq équations analogues. Dans ces équations,  $\frac{\partial F}{\partial x}$  par exemple représente la dérivée par rapport à  $x$  de la forme quadratique  $F(x, y, \dots, v)$ .

On voit que  $R$  ne figure pas dans ces équations. Or, ce terme provient des termes  $\theta' C_i \vec{v}_i$  des  $\vec{\sigma}_i$  (n° 4). On en conclut que l'on peut, dans l'évaluation de  $T$ , remplacer  $\vec{\sigma}_i$  par sa projection  $\vec{\sigma}'_i$  sur un plan perpendiculaire à  $\Delta_i$ .

De même, le terme  $\theta'^2 f(\theta)$  peut être négligé.

Convenons d'appeler  $K$  ce que devient la somme  $\Sigma(\vec{Q}_i \cdot \vec{V}_i + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}'_i)$  quand on y remplace  $x', y', \dots, v'$  par  $x, y, \dots, v$ . Puis, posons

$$(8) \quad H = 2V - 2\omega^2 F, \quad J = -\omega \frac{\partial K}{\partial \theta}.$$

L'équation (7) et les équations analogues prennent la forme

$$(9) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial J}{\partial x}, \quad \dots, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial v} = \frac{\partial J}{\partial v}.$$

On en déduit que  $x, y, \dots, v$  sont les variables adjointes des variables  $\frac{\partial J}{\partial x}, \dots, \frac{\partial J}{\partial v}$  par rapport à la forme quadratique  $H$ . Il suffit donc de calculer la forme adjointe de  $H$  pour obtenir immédiatement les valeurs de  $x, y, \dots, v$  (1).

Les coefficients de  $J$  étant très petits, le mouvement entretenu a une très faible amplitude, sauf si le déterminant  $\Delta(\omega)$  du système est nul ou très voisin de zéro, auquel cas il y a résonance (2).

Les pulsations de résonance sont donc les racines de  $\Delta(\omega)$ . Le déterminant  $\Delta(\omega)$  n'est autre que le discriminant de la forme quadratique  $H$ . Comme  $V$  et  $F$  sont des formes quadratiques définies positives, on peut affirmer que toutes les racines en  $\omega^2$  sont réelles et positives; donc, toutes les racines en  $\omega$  sont réelles.

(1) Cf. *Journ. de Math.*, 1940, p. 107.

(2) Si  $\Delta(\omega)$  est nul, les valeurs de  $x, y, \dots, v$  sont infinies. Mais, en réalité, si l'on tenait compte des résistances passives, on obtiendrait seulement des valeurs très grandes, conformément à la théorie classique de la résonance.

Si l'on veut éviter le calcul de ces racines, mais *se garantir néanmoins contre la résonance*, il suffit d'imposer à  $\omega^2$  la condition d'être nettement supérieur à la somme des racines en  $\omega^2$ .

*Remarque.* — Si l'on calculait exactement l'énergie cinétique d'entraînement (n° 5), la forme quadratique F comprendrait des termes correctifs contenant  $\theta$ , mais très petits. Cela introduirait au premier membre de (6) des termes de la forme  $\frac{d}{dt}(\varepsilon Ax')$  par exemple,  $\varepsilon$  désignant une longueur constante et très petite et A une fonction de  $\theta$ . Un tel terme s'écrit  $\varepsilon \left( Ax'' + \omega x' \frac{dA}{d\theta} \right)$ . Comme  $x'$  et  $x''$  sont respectivement de l'ordre de  $\varepsilon\omega$  et  $\varepsilon\omega^2$ , le terme correctif serait de l'ordre de  $\varepsilon^2\omega^2$ , tandis que le second membre de (6) est de l'ordre de  $\varepsilon\omega^2$ . Ceci prouve qu'on a bien le droit, comme on l'a dit au n° 5, de négliger tous ces termes correctifs dans le calcul de F.

Le raisonnement ci-dessus est toutefois en défaut quand il y a résonance, car  $x'$  et  $x''$  ne sont plus infiniment petits et le terme correctif de (6) est du même ordre de grandeur que le second membre. Les pulsations de résonance sont toujours données par la règle ci-dessus; mais, si  $\omega$  est voisine de l'une d'elles, le calcul de  $x, y, \dots, v$  par la méthode indiquée précédemment cesse d'être pratiquement correct.

**7. EXEMPLE I : MOTEUR EN PORTE-A-FAUX SUR UNE POUTRE.** — Nous allons maintenant appliquer la théorie générale précédente à quelques exemples concrets.

Considérons d'abord un moteur fixé en porte-à-faux sur une poutre encastree à l'une de ses extrémités. Soit O la projection du centre de gravité G du moteur sur la fibre neutre de la poutre. Nous appellerons  $l$  la distance de ce point à l'encastrement A et nous supposerons que cette distance est très grande vis-à-vis des dimensions du moteur.

Nous choisirons le trièdre mobile  $Oxyz$  de la manière suivante : Oz tangent à la fibre neutre et orienté dans le sens AO; Ox et Oy axes principaux d'inertie de la section droite de la poutre.

Soient E et G le module de Young et le module de torsion; I et I' les moments d'inertie de la section droite par rapport à Ox et Oy; I'' le pseudo-moment d'inertie polaire. L'énergie de déformation de la

poutre est <sup>(1)</sup>

$$V = \frac{1}{2EI} \int_{-l}^0 (L + uY)^2 du + \frac{1}{2EI'} \int_{-l}^0 (M - uX)^2 du + \frac{N^2 l}{2GI^2},$$

soit

$$V = \frac{l}{2EI} \left( L^2 - lLY + \frac{l^2}{3} Y^2 \right) + \frac{l}{2EI'} \left( M^2 + lMX + \frac{l^2}{3} X^2 \right) + \frac{lN^2}{2GI^2}.$$

En prenant la forme adjointe de 2V, on obtient

$$(10) \quad 2V = \alpha y^2 + 2\beta \lambda y + \gamma \lambda^2 + \alpha' x^2 - 2\beta' \mu x + \gamma' \mu^2 + k \nu^2,$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$(11) \quad \alpha = \frac{12EI}{l^3}, \quad \beta = \frac{l\alpha}{2}, \quad \gamma = \frac{2l\beta}{3}; \quad k = \frac{GI^2}{l};$$

$\alpha', \beta', \gamma'$  se déduisent de  $\alpha, \beta, \gamma$  en remplaçant  $l$  par  $l'$ .

8. Nous admettrons que le moteur possède approximativement deux plans de symétrie; l'un, parallèle à l'axe  $\Delta$  du rotor et perpendiculaire au plan de base du stator, est le plan de symétrie longitudinal; l'autre, perpendiculaire à  $\Delta$ , est le plan de symétrie transversal.

Supposons d'abord que le plan de symétrie transversal coïncide avec  $zOy$  (fig. 1). L'axe  $\Delta$  est alors parallèle à  $Ox$  et rencontre  $Oy$  au

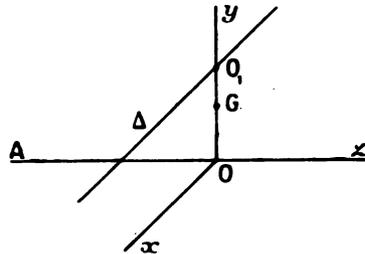


Fig. 1.

point  $O_1$ . Le centre de gravité  $G$  du moteur se trouve sur  $Oy$ . Nous poserons  $OO_1 = h$ ,  $OG = a$ .

---

(1)  $X, Y, \dots, N$  désignent les coordonnées du système des réactions exercées par le moteur sur la poutre. Le moment résultant de ce système par rapport au point  $(0, 0, u)$  a pour composantes  $L + uY, M - uX, N$ .

Les axes  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  sont approximativement axes principaux d'inertie du moteur pour le point  $O$ ; nous appellerons  $A$ ,  $B$ ,  $C$  les moments d'inertie correspondant et  $m$  la masse du moteur. La force vive d'entraînement est <sup>(1)</sup>

$$(12) \quad 2F(x', \dots, v') = m(x'^2 + y'^2) + A\lambda'^2 + B\mu'^2 + Cv'^2 - 2ma x'v'.$$

Soient maintenant  $m_1$  la masse du rotor et  $G_1$  son centre de gravité.

Posons  $O_1G_1 = R$  et  $\widehat{O_1y, O_1G_1} = \theta$ . On a

$$\vec{Q}_1 \cdot \vec{V}_1 = m_1 \omega R (h\lambda' \cos \theta - y' \sin \theta).$$

Considérons maintenant les axes  $O_1Z$  dirigés suivant  $\Delta$ ,  $O_1X$  suivant  $O_1G_1$  et  $O_1Y$  perpendiculaire aux deux précédents. Appelons  $D$ ,  $E$ ,  $F$  les produits d'inertie du rotor relativement à ces axes. Les composantes de  $\vec{\sigma}_1$  sont  $-E\omega$ ,  $-D\omega$ ,  $0$  suivant  $O_1XYZ$  et  $0$ ,  $\omega(-E \cos \theta + D \sin \theta)$ ,  $-\omega(E \sin \theta + D \cos \theta)$  suivant  $Oxyz$ . On a donc

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_1 = \omega(-\mu'P - \nu'Q),$$

en posant

$$P = -D \sin \theta + E \cos \theta, \quad Q = D \cos \theta + E \sin \theta.$$

D'où (n° 6)

$$K = \omega [m_1 R (h\lambda \cos \theta - y \sin \theta) - \mu P - \nu Q],$$

puis,

$$(13) \quad J = \omega^2 [m_1 R (h\lambda \sin \theta + y \cos \theta) - \mu Q + \nu P].$$

9. Des formules (10), (12) et (8), on déduit

$$H = y^2(x - m\omega^2) + 2\beta\lambda y + (\gamma - A\omega^2)\lambda^2 + x^2(\alpha' - m\omega^2) - 2\beta'\mu x \\ + (\gamma' - B\omega^2)\mu^2 + (k - C\omega^2)v^2 + 2ma\omega^2 xv.$$

La forme adjointe est, en affectant de l'indice 1 les nouvelles variables

$$H_1 = \alpha_1 y_1^2 - 2\beta_1 y_1 \lambda_1 + \gamma_1 \lambda_1^2 + \alpha'_1 x_1^2 + 2\beta'_1 x_1 \mu_1 + \gamma'_1 \mu_1^2 + k_1 v_1^2 - 2\delta x_1 v_1 - 2\varepsilon \mu_1 v_1,$$

---

<sup>(1)</sup> Remarquer que  $z = 0$ , parce que la fibre neutre garde une longueur invariable.

où l'on a posé

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} \Delta \alpha_1 = \gamma - A \omega^2, \quad \Delta \beta_1 = \beta, \quad \Delta \gamma_1 = \alpha - m \omega^2, \\ \Delta = (\alpha - m \omega^2)(\gamma - A \omega^2) - \beta^2; \\ \Delta_1 \alpha'_1 = (\gamma' - B \omega^2)(k - C \omega^2), \quad \Delta_1 \beta'_1 = \beta'(k - C \omega^2), \\ \Delta_1 \gamma'_1 = (\alpha' - m \omega^2)(k - C \omega^2) - m^2 a^2 \omega^4; \\ \Delta_1 k_1 = (\alpha' - m \omega^2)(\gamma' - B \omega^2) - \beta'^2, \quad \Delta_1 \delta = m a \omega^2 (\gamma' - B \omega^2), \\ \Delta_1 \varepsilon = m a \beta' \omega^2; \\ \Delta_1 = (\alpha' - m \omega^2)(\gamma' - B \omega^2)(k - C \omega^2) - m^2 a^2 \omega^4 (\gamma' - B \omega^2) - \beta'^2 (k - C \omega^2). \end{array} \right.$$

On en déduit, d'après (13),

$$(15) \quad y = \omega^2 m_1 R(x_1 \cos \theta - \beta_1 h \sin \theta), \quad \lambda = \omega^2 m_1 R(-\beta_1 \cos \theta + \gamma_1 h \sin \theta);$$

$$(16) \quad x = -\omega^2 (\beta'_1 Q + \delta P), \quad \mu = -\omega^2 (\gamma'_1 Q + \varepsilon P), \quad \nu = \omega^2 (\varepsilon Q + k_1 P).$$

Les formules (15) montrent que *la flexion de la poutre dans le plan yOz* est uniquement provoquée par le *balourd du rotor*. Au contraire, les formules (16) montrent que *la flexion dans le plan zOx et la torsion* sont dues à son *défaut d'équilibrage dynamique*.

Le premier phénomène possède deux pulsations de résonance, qui sont les racines de  $\Delta$ ; le second en possède trois, qui sont les racines de  $\Delta_1$  (1).

10. Supposons maintenant que *le plan de symétrie transversal coïncide avec xOy (fig. 2)*.

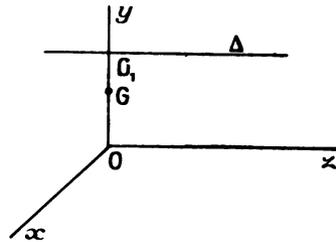


Fig. 2.

*cide avec xOy (fig. 2)*. Cette nouvelle position se déduit de la première

(1) Les racines de  $\Delta$ , en  $\omega^2$ , sont extérieures à l'intervalle  $(\frac{\alpha}{m}, \frac{\gamma}{A})$ . Celles de  $\Delta_1$  sont séparées par  $\frac{\gamma'}{B}$  et  $\frac{k}{C}$ .

par une rotation de  $\frac{\pi}{2}$  autour de  $Oy$ . La fonction  $F$  se déduit de (12) en échangeant  $A$  et  $C$ .

Posons  $\widehat{Ox, O_1G_1} = \theta$ . On a

$$\vec{Q}_1 \cdot \vec{V}_1 = m_1 \omega R [(-x' + y'h) \sin \theta + y' \cos \theta]$$

et

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}_1 = -\omega(\lambda'P + \mu'Q).$$

D'où

$$(17) \quad J = \omega^2 [m_1 R(x - hy) \cos \theta + m_1 R y \sin \theta - \lambda Q + \mu P].$$

Les formes quadratiques  $H$  et  $H_1$  se déduisent de celles du n° 9 en échangeant  $A$  et  $C$ . En tenant compte de (17), on obtient immédiatement

$$(18) \quad y = \omega^2 (\alpha_1 m_1 R \sin \theta + \beta_1 Q), \quad \lambda = -\omega^2 (\beta_1 m_1 R \sin \theta + \gamma_1 Q);$$

$$(19) \quad \begin{cases} x = \omega^2 [m_1 R(\alpha'_1 + h\delta) \cos \theta + \beta'_1 P], & \mu = \omega^2 [m_1 R(\beta'_1 + h\varepsilon) \cos \theta + \gamma'_1 P] \\ y = -\omega^2 [m_1 R(hk_1 + \delta) \cos \theta + \varepsilon P]. \end{cases}$$

*Cette fois, toutes les vibrations dépendent à la fois du balourd et du défaut d'équilibrage dynamique.*

**11. EXEMPLE II : MOTEUR FIXÉ A UNE POUTRE ENCASTRÉE A SES DEUX EXTRÉMITÉS.** — Gardons les mêmes axes et les mêmes notations que dans l'exemple I. Le seul changement consiste dans l'expression de l'énergie de déformation.

Appelons  $l_1$  et  $l_2$  les distances de  $O$  aux deux encastresments  $O_1$  et  $O_2$  et supposons  $O_1$  sur la partie positive de  $Oz$ . Par rapport à  $O_2$ , le trièdre  $Oxyz$  a la même position qu'au n° 7. L'énergie de déformation de  $O_2O$  se déduit donc de (10) et (11) en remplaçant simplement  $l$  par  $l_2$ .

Pour celle de  $O_1O$ , il faut changer le sens de  $Oz$ , ce qui change le signe de  $\lambda$  et  $\mu$ . Dès lors, nous pouvons encore appliquer les formules (10) et (11), en remplaçant  $l$  par  $l_1$  et changeant le signe de  $\beta$  et  $\beta'$ . En additionnant les deux énergies, nous obtenons la formule (10),

avec

$$(20) \quad \begin{cases} \alpha = 12EI \left( \frac{1}{l_1^3} + \frac{1}{l_2^3} \right), & \beta = 6EI \left( \frac{1}{l_2^2} - \frac{1}{l_1^2} \right), & \gamma = 4EI \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right); \\ \alpha', \beta', \gamma' \text{ en changeant } l \text{ en } l'; & k = GI' \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right). \end{cases}$$

Sous réserve d'utiliser ces formules au lieu des formules (11), les conclusions obtenues précédemment subsistent intégralement.

Signalons le *cas particulier* où  $O$  est au milieu de  $O_1O_2$ ; on a alors

$$\beta = \beta' = 0; \quad \text{d'où } \beta_1 = \beta'_1 = \varepsilon = 0.$$

**12. SIMPLIFICATION DES FORMULES PRÉCÉDENTES.** — Supposons que *les dimensions du moteur soient petites par rapport à la longueur de la poutre.*

Dans ces conditions, les formules précédemment obtenues peuvent être considérablement simplifiées, moyennant quelques *approximations*.

Cherchons d'abord une valeur approchée des racines de  $\Delta$ . Posons  $\omega^2 = \frac{\gamma}{A} u$ . Nous avons l'équation

$$u(1-u) = \left( \frac{1}{4} - u \right) \frac{3A}{ml^2}.$$

Le rapport  $\frac{3A}{ml^2}$  est très petit. Il en est donc de même du produit  $u(1-u)$ .

D'où les valeurs approchées  $u = 1$  et  $u = \frac{3A}{4ml^2}$ , soit

$$(21) \quad \omega_1^2 = \frac{\gamma}{A}, \quad \omega_2^2 = \frac{\alpha}{4m}.$$

Posons maintenant  $\omega^2 = \frac{\gamma'}{B} u$ . Les racines de  $\Delta_1$  sont données par l'équation

$$u(1-u) \left( 1 - \frac{\gamma' C'}{k B} \right) = \frac{3B}{4ml^2} \left( 1 - u \frac{C \gamma'}{B k} \right) (1 - 4u),$$

où l'on a posé (1)

$$C' = C - ma^2.$$

(1)  $C'$  est le moment d'inertie du moteur par rapport à l'axe parallèle à  $\Delta$  et passant par  $G$ .

Le rapport  $\frac{3B}{4mI^2}$  est très petit;  $\frac{C'\gamma'}{Bk} = \frac{C'}{B} \cdot \frac{4EI'}{GI'}$  n'est pas très grand, sauf si la poutre est très plate, ce que nous excluons. On a dès lors les racines approchées

$$u = 1, \quad u = \frac{kB}{\gamma' C'}, \quad u = \frac{3B}{4mI^2},$$

soit

$$(22) \quad \omega_1^2 = \frac{\gamma'}{B}, \quad \omega_2^2 = \frac{k}{C'}, \quad \omega_3^2 = \frac{\alpha'}{4m}.$$

13. Pour simplifier l'écriture, posons  $\omega^2 = \varphi$ . On a

$$\Delta = m A (\varphi - \varphi_1) (\varphi - \varphi_2), \quad \Delta_1 = -m B C' (\varphi - \varphi_2) (\varphi - \varphi_3) (\varphi - \varphi_4).$$

Supposons maintenant qu'aucun des rapports  $\rho_i = \frac{\varphi}{\varphi_i}$  ne soit très voisin de l'unité. Les rapports

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{3A}{4mI^2}, \quad \frac{\varphi_3}{\varphi_2} = \frac{3B}{4mI^2}, \quad \frac{\varphi_4}{\varphi_3} = \frac{3C'}{mI^2} \frac{EI'}{GE'}$$

sont tous très petits. Si l'on suppose que  $\varphi$  est supérieur au plus petit des trois nombres  $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_4$ , on en conclut que l'on peut écrire approximativement

$$\Delta = m A \varphi (\varphi - \varphi_1), \quad \Delta_1 = -m B C' \varphi (\varphi - \varphi_3) (\varphi - \varphi_4).$$

Reportons-nous aux formules (14). Elles nous donnent approximativement

$$(23) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = -\frac{1}{m\varphi}, \quad \beta_1 = \frac{3}{2lm\varphi(\rho_1-1)}, \quad \gamma_1 = \frac{\rho_1}{A\varphi(1-\rho_1)}, \\ \alpha'_1 = \frac{C' - C\rho_1}{C'm\varphi(\rho_1-1)}, \quad \beta'_1 = \frac{3(C\rho_1 - C')}{2lC'm\varphi(\rho_3-1)(\rho_1-1)}, \quad \gamma'_1 = \frac{\rho_3}{B\varphi(1-\rho_3)}, \\ k_1 = \frac{\rho_4}{C'\varphi(1-\rho_4)}, \quad \delta = \frac{\alpha\rho_4}{C'\varphi(\rho_4-1)}, \quad \varepsilon = \frac{3\alpha\rho_4}{2lC'\varphi(\rho_3-1)(1-\rho_4)}. \end{array} \right.$$

Ces formules montrent que les rapports  $\frac{\beta_1 h}{\alpha_1}, \frac{\beta_1}{\gamma_1 h}, \frac{\beta'_1}{\gamma'_1 h}, \frac{\beta'_1}{\delta}, \frac{\varepsilon}{\gamma'_1}, \frac{\varepsilon}{k_1}$  sont tous très petits.

Les formules (15) et (16) se réduisent alors approximativement aux

suivantes :

$$(24) \quad y = -\frac{m_1}{m} R \cos \theta, \quad \lambda = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} \frac{m_1 h R}{\Lambda} \sin \theta;$$

$$(25) \quad x = a \frac{\rho_1}{1-\rho_1} \frac{P}{C'}, \quad \mu = \frac{\rho_2}{\rho_2-1} \frac{Q}{B}, \quad \nu = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} \frac{P}{C'}.$$

De même, les formules (18) et (19) deviennent (1)

$$(26) \quad y = -\frac{m_1}{m} R \sin \theta, \quad \lambda = \frac{\rho_1}{\rho_1-1} \frac{Q}{C};$$

$$(27) \quad \begin{cases} x = \frac{m_1}{m} \frac{A'(1-\rho_1) + ma(h-a)\rho_1}{A'(\rho_1-1)} R \cos \theta, & \mu = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} \frac{P}{B}, \\ \nu = \frac{\rho_1}{\rho_1-1} \frac{m_1 R(h-a)}{A'} \cos \theta. \end{cases}$$

Toutes ces formules subsistent dans le cas où la poutre est doublement encastree, à condition que le moteur ne soit pas très près d'un des encastremets.

#### 14. APPLICATION NUMÉRIQUE. — Adoptons les données suivantes :

*Poutre* en chêne : longueur 3<sup>m</sup>; largeur, 16<sup>cm</sup>; épaisseur, 4<sup>cm</sup>;

$$E = 1200, \quad G = 80.$$

*Moteur*; poids, 10<sup>kg</sup>; distance de la base du stator à G, 6<sup>cm</sup>;

distance de la base du stator à Δ, 8<sup>cm</sup>;

rayon de giration par rapport à l'axe parallèle à Δ et passant par G, 5<sup>cm</sup>;

rayon de giration par rapport à l'axe perpendiculaire à la base du stator et passant par G, 4<sup>cm</sup>;

rayon de giration par rapport à l'axe perpendiculaire aux deux précédents et passant par G, 6<sup>cm</sup>;

D = E = le centième du moment d'inertie par rapport au premier des trois axes ci-dessus; R = 6<sup>mm</sup>; poids du rotor, 4<sup>kg</sup>.

Employons les unités habituelles : kilogramme, millimètre. On a,

(1) Ceci suppose toutefois que les quantités  $m, R, h, D, E$  sont du même ordre de grandeur. Rappelons (n° 10) que l'on doit intervertir A et C; de sorte que C' est remplacé par  $A' = A - ma^2$ .

en prenant  $Ox$  suivant le grand axe de la section droite de la poutre

$$I = \frac{256}{3} \cdot 10^4, \quad I' = 16 I, \quad I'' = 2,88 \cdot 10^6.$$

Supposons l'*encastrement unique* et le moteur fixé à l'extrémité de la poutre, de sorte que  $l = 3000$ . Les formules (11) donnent

$$\alpha = 0,455; \quad \beta = 683; \quad \gamma = 1,366 \cdot 10^6; \quad \alpha' = 7,28; \quad \beta' = 1,09 \cdot 10^4; \\ \gamma' = 2,18 \cdot 10^7; \quad k = 76800.$$

On a maintenant, dans la *première position*,

$$h = 100, \quad a = 80, \quad m = 1,02 \cdot 10^{-3}; \quad ma = 0,0815; \quad ma^2 = 6,53; \\ A' = 2,55; \quad C' = 3,67; \quad A = 9,08; \quad B = 1,63; \quad C = 10,2; \\ D = E = 0,0255;$$

maximum de  $|P|$  et  $|Q|$  :  $D\sqrt{2} = 0,036$ ,  $m = 4,08 \cdot 10^{-4}$ .

Les formules (21) et (22) donnent

$$\omega_1 = 388, \quad \omega_2 = 10,5, \quad \omega_3 = 3660, \quad \omega_4 = 145, \quad \omega_5 = 42.$$

En *tours par minute*, on obtient

$$N_1 = 3700, \quad N_2 = 100, \quad N_3 = 35000, \quad N_4 = 1390, \quad N_5 = 400.$$

Telles sont, approximativement, les *vitesse*s provoquant la *résonance*.

Dans la *deuxième position*, on a, en intervertissant A et C,

$$N_1 = 3400, \quad N_2 = 100, \quad N_3 = 35000, \quad N_4 = 1660, \quad N_5 = 400.$$

Voici quelques valeurs numériques des amplitudes des diverses oscillations. Pour  $y$ , on a toujours  $2^{mm}$ , 4 dans les deux positions. Dans le tableau ci-dessous, les amplitudes sont données en millimètres pour  $x$ , en minutes pour  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ .

*Première position.*

N....	1500.	2000.	2500.	3000.	3500.	4000.	5000.	7000.	10000.
$x$ .....	5,2	1,5	1,1	1	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8
$\lambda$ .....	18	38	78	179	807	636	205	128	107
$\mu$ .....	8	15	24	34	46	61	96	191	408
$\nu$ .....	222	65	49	43	40	38	37	35	35

*Deuxième position.*

N....	1500.	2000.	2500.	3000.	3500.	4000.	5000.	7000.	10000.
$x$ .....	-	2,4	0,3	0,2	0,4	0,5	0,7	0,8	0,8
$\lambda$ .....	-	6	13	37	570	48	23	16	14
$\mu$ .....	-	15	24	34	46	61	96	191	408
$\nu$ .....	-	206	117	95	85	80	74	70	68

Pour  $N = 3500$ , la valeur de  $\lambda$  est incertaine, parce qu'on est près de la résonance (remarque du n° 6).

**15. EXEMPLE III : TABLE VIBRANTE.** — La table vibrante, construite d'après les indications de M. Baillaud, par l'École Nationale d'Horlogerie de Besançon, a les caractéristiques suivantes (1), que nous allons définir par rapport au trièdre  $Oxyz$ , l'axe  $Oz$  étant supposé vertical ascendant.

Le support (fig. 3) est constitué par deux fourches identiques, dont

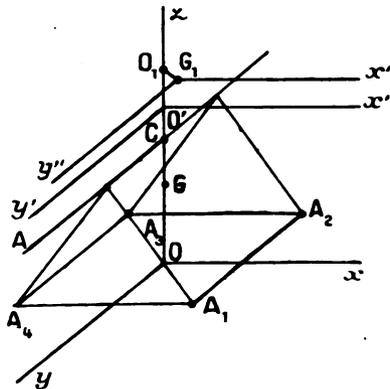


Fig. 3.

les pieds  $A_1, A_2, A_3, A_4$  ont pour coordonnées  $(a, b, 0), (a, -b, 0), (-a, -b, 0), (-a, b, 0)$ . Ces deux fourches sont reliées par un arbre, dont l'axe A a pour équations  $x = 0, z = c$ .

Autour de cet arbre peut tourner une table rectangulaire  $T'$ . En position horizontale, son plan a pour équation  $z = c'$ . Ses axes  $O'x'$ ,

(1) Elles m'ont été communiquées par M. Braille, chargé de la construction.

$O'y'$  sont parallèles à  $Ox$ ,  $Oy$ . Nous appellerons  $2a'$  et  $2b'$  les dimensions respectivement parallèles à ces deux axes.

Un *moteur*  $M$  est solidaire de  $T'$ . Lorsque  $T'$  est horizontale, l'axe  $\Delta$  du moteur est dirigé suivant  $Oz$ , le moteur étant au-dessous de  $T'$ .

La *table vibrante*  $T$ , également rectangulaire, est parallèle à  $T'$ ; ses axes  $G_1x''$ ,  $G_1y''$  sont assujettis à rester parallèles à  $O'x'$ ,  $O'y'$ . Par l'intermédiaire d'un excentrique porté par  $\Delta$ , le centre  $G_1$  est assujetti à décrire un cercle de centre  $O_1$ , situé sur  $\Delta$ , et de rayon  $R$ . Nous appellerons  $c'' > c'$  la cote de  $O_1$ , quand les tables sont horizontales.

Les dimensions de  $T$  parallèles à  $G_1x''$  et  $G_1y''$  seront désignées par  $2a''$  et  $2b''$ . Nous appellerons  $\theta$  l'angle de  $G_1x''$  avec  $O_1G_1$  et  $\omega$  la vitesse angulaire du moteur; de sorte que  $\theta = \omega t$ .

Quand les tables sont *en position verticale*, les vecteurs  $\overrightarrow{CO'}$  et  $\overrightarrow{CO_1}$  sont parallèles à  $Ox$  et de même sens; les axes  $O'x'$  et  $G_1x''$  sont donc parallèles à  $Oz$  et de sens contraire.

**16. CALCUL DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE.** — Calculons d'abord  $T_e$ , en appliquant la formule (2), le repère  $R$  étant constitué par un trièdre ayant pour origine  $O$  et une orientation fixe. Si  $m$  désigne la *masse totale* de tout le système, le premier terme de  $2T_e$  vaut

$$m(x'^2 + y'^2 + z'^2).$$

Le deuxième terme est la force vive dans le mouvement autour de  $O$ . En position horizontale (*fig. 3*), les plans  $zOx$  et  $zOy$  sont plans de symétrie; donc,  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  sont axes principaux d'inertie pour le point  $O$ . En position verticale (*fig. 4*), le plan  $zOx$  est toujours plan de symétrie. Le plan  $ACO_1$  est plan de symétrie pour les tables et le moteur.

Donc,  $CO_1$ ,  $CA$  et  $Cz$  sont axes principaux d'inertie de ce système pour le point  $C$ . D'autre part, le centre de gravité dudit système est approximativement sur  $A$ , donc en  $C$ . Il s'ensuit que  $Oz$  est axe principal d'inertie pour tous ses points, en particulier pour le point  $O$ . Comme  $Oy$  est aussi axe principal d'inertie, grâce à la symétrie par rapport à  $zOx$ , on en conclut que  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  sont axes principaux d'inertie relativement au point  $O$ . Il en est de même pour le support

et son arbre, donc pour tout le système. Il s'ensuit que le deuxième terme de  $2T_c$  est

$$A\lambda'^2 + B\mu'^2 + C\nu'^2,$$

A, B, C désignant les moments d'inertie du système total par rapport à  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ .

Le centre de gravité G dudit système se trouve sur  $Oz$ , quelle que

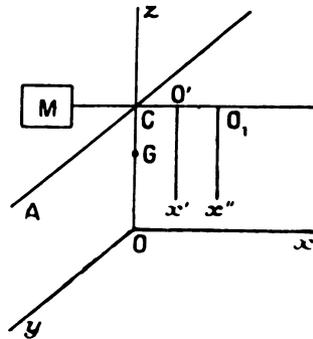


Fig. 4,

soit l'orientation des tables. Appelons  $c_1$  sa cote. Le vecteur  $\vec{Q}$ , quantité de mouvement de G dans le mouvement autour de O, a pour composantes suivant  $Oxyz$  :  $m\mu'c_1$ ,  $-m\lambda'c_1$ , 0. Le vecteur  $\vec{V}$ , vitesse d'entraînement de G, est le vecteur vitesse de O, puisque le mouvement d'entraînement est une translation. Ses composantes sont donc  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  et l'on a

$$\vec{Q} \cdot \vec{V} = mc_1(x'\mu' - y'\lambda').$$

Enfin, le vecteur  $\vec{\Omega}$  est nul. On a donc finalement (1)

$$(28) \quad 2F(x, y, \dots, \nu) = m[x^2 + y^2 + z^2 + 2c_1(x\mu - y\lambda)] + A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2.$$

**17. Calculons maintenant la fonction J (n° 6). Si  $m'$  est la masse**

(1) On peut aussi établir cette formule en appliquant le théorème de Kœnig au système  $M + T' + T$ .

de T, le vecteur  $\vec{Q}_1$  a pour composantes

$$\begin{aligned} -m'R\theta' \sin \theta, \quad m'R\theta' \cos \theta, \quad 0 & \quad (\text{en position horizontale}); \\ 0, \quad m'R\theta' \cos \theta, \quad m'R\theta' \sin \theta, & \quad (\text{en position verticale}). \end{aligned}$$

Le vecteur  $\vec{V}_1$ , vitesse d'entraînement de  $O_1$ , a pour composantes

$$\begin{aligned} x' + \mu'c'', \quad y' - \lambda'c'', \quad z' & \quad (\text{en position horizontale}); \\ x' + \mu'c, \quad y' + \nu'(c'' - c) - \lambda'c, \quad z' - \mu'(c'' - c) & \quad (\text{en position verticale}). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \vec{Q}_1 \cdot \vec{V}_1 &= m'R\theta'[-(x' + \mu'c'') \sin \theta + (y' - \lambda'c'') \cos \theta] & (\text{position horizontale}); \\ \vec{Q}_1 \cdot \vec{V}_1 &= m'R\theta'\{[y' + \nu'(c'' - c) - \lambda'c] \cos \theta + [z' - \mu'(c'' - c)] \sin \theta\} \\ & \quad (\text{position verticale}). \end{aligned}$$

Le moteur étant supposé équilibré dynamiquement et la table T ayant un mouvement de translation, le vecteur  $\vec{\sigma}_1$  est nul.

On en déduit la fonction K, puis la fonction J :

$$\begin{aligned} (29) \quad J &= m'R\omega^2[(x + \mu c'') \cos \theta + (y - \lambda c'') \sin \theta] & (\text{position horizontale}); \\ (30) \quad J &= m'R\omega^2\{[y + \nu(c'' - c) - \lambda c] \sin \theta - [z - \mu(c'' - c)] \cos \theta\} \\ & \quad (\text{position verticale}). \end{aligned}$$

**18. CALCUL DU TRAVAIL VIRTUEL.** — Calculons l'énergie de déformation  $V_i$  du ressort  $R_i$ , que nous supposons à *spires très aplaties* et sensiblement circulaires (tout au moins sous l'action du poids de la table). Soit  $\varphi$  l'angle polaire du rayon aboutissant au point courant P d'une spire de rayon  $\rho$ . Appelons  $(a_i, b_i, 0)$  les coordonnées du point  $A_i$  et  $u$  la cote de P. Soit enfin X, Y, ..., N les six coordonnées, par rapport à  $Oxyz$ , du système des réactions exercées par la fourche sur  $R_i$ . Le moment résultant par rapport à P a pour composantes

$$\begin{aligned} L + uY - Z(b_i + \rho \sin \varphi), \quad M + Z(a_i + \rho \cos \varphi) - uX, \\ N + X(b_i + \rho \sin \varphi) - Y(a_i + \rho \cos \varphi). \end{aligned}$$

Soient  $Px'$  et  $Py'$  les axes parallèles au plan  $xOy$  et ayant pour angles polaires respectifs  $\varphi$  et  $\varphi + \frac{\pi}{2}$ ; soit  $Pz'$  parallèle à  $Oz$ . Les

composantes du moment précédent suivant ces trois axes sont

$$\begin{aligned} L' &= (L + uY - b_l Z) \cos \varphi + (M + a_l Z - uX) \sin \varphi, \\ M' &= -(L + uY - b_l Z) \sin \varphi + (M + a_l Z - uX) \cos \varphi + \rho Z, \\ N' &= N + X b_l - Y a_l + \rho (X \sin \varphi - Y \cos \varphi). \end{aligned}$$

Nous supposons que  $Px'$  et  $Pz'$  sont axes principaux d'inertie de la section droite du fil constituant le ressort et nous appelons  $I$  et  $I'$  les moments d'inertie correspondants. Nous appelons  $I''$  le pseudo-moment d'inertie polaire,  $E$  le module de Young,  $G$  le module de torsion. L'énergie de déformation de la spire considérée est

$$\frac{1}{2EI} \int_0^{2\pi} L'^2 \rho \, d\varphi + \frac{1}{2EI'} \int_0^{2\pi} N'^2 \rho \, d\varphi + \frac{1}{2GI''} \int_0^{2\pi} M'^2 \rho \, d\varphi$$

ou

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{2EI} [(L + uY - b_l Z)^2 + (M + a_l Z - uX)^2] \\ &+ \frac{\pi}{2EI'} [2(N + X b_l - Y a_l)^2 + \rho^2 (X^2 + Y^2)] \\ &+ \frac{\pi\rho}{2GI''} [(L + uY - b_l Z)^2 + (M + a_l Z - uX)^2 + 2\rho^2 Z^2]. \end{aligned}$$

L'énergie de déformation du ressort s'obtient en additionnant les énergies de déformation de ses différentes spires. Elle est de la forme

$$(31) \quad V_t = \alpha_0 [(L - b_l Z)^2 + (M + a_l Z)^2] + \alpha_1 [Y(L - b_l Z) - X(M + a_l Z)] \\ + \alpha_2 (N + X b_l - Y a_l)^2 + \alpha_3 (X^2 + Y^2) + \alpha_4 Z^2,$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{EI} + \frac{1}{GI''} \right) (\Sigma \rho), & \alpha_1 &= \pi \left( \frac{1}{EI} + \frac{1}{GI''} \right) (\Sigma \rho u), & \alpha_2 &= \frac{\pi}{EI} (\Sigma \rho), \\ \alpha_3 &= \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{EI} + \frac{1}{GI''} \right) (\Sigma \rho u^2) + \frac{\pi}{2EI'} (\Sigma \rho^2), & \alpha_4 &= \frac{\pi}{GI''} (\Sigma \rho^2). \end{aligned}$$

Si le ressort est *cylindrique*, le rayon  $\rho$  est constant et  $u = p \frac{h}{n}$ ,  $p$  variant de 1 à  $n$ , en appelant  $n$  le nombre des spires et  $h$  la hauteur du ressort.

Si le ressort est *conique*, la spire inférieure ayant pour rayon  $\rho_0$  et la spire supérieure un rayon nul, on a, pour la  $p^{\text{ème}}$  spire à partir du bas

$$\rho = \rho_0 \left( 1 - \frac{p}{n} \right), \quad u = p \frac{h}{n}.$$

D'autre part, si  $n$  est assez grand, on a approximativement (1)

$$\sum_{p=1}^n p^m = \frac{n^{m+1}}{m+1}, \quad \sum u^m = \frac{n h^m}{m+1}.$$

Les formules ci-dessus nous donnent dès lors, en supprimant l'indice de  $\rho_0$

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 = k_0 n \rho, \quad x_1 = k_1 h \alpha_0, \quad x_2 = k_2 \alpha_0, \quad \alpha_3 = \alpha_0 (k_3 h^2 + k'_3 \rho^2), \\ \alpha_4 = k_4 \rho^2 \alpha_0, \end{array} \right.$$

les coefficients  $k_i$  ayant les valeurs suivantes :

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_0 = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{EI} + \frac{1}{GI'} \right), \quad k_1 = 1, \quad k_2 = \frac{2}{I' + \frac{EI'}{GI}}, \quad k_3 = \frac{1}{3}, \quad k'_3 = \frac{k_3}{2}, \\ k_4 = \frac{2}{1 + \frac{GI'}{EI}} \quad (\text{ressort cylindrique}); \\ k_0 = \frac{\pi}{4} \left( \frac{1}{EI} + \frac{1}{GI'} \right), \quad k_1 = \frac{2}{3}, \quad k_2 = \frac{2}{I' + \frac{EI'}{GI}}, \quad k_3 = \frac{1}{6}, \quad k'_3 = \frac{k_3}{4}, \\ k_4 = \frac{1}{1 + \frac{GI'}{EI}} \quad (\text{ressort conique}) \end{array} \right.$$

Pour calculer la forme adjointe, faisons le changement de variables

$$\begin{aligned} X = X', \quad Y = Y', \quad Z = Z', \quad L - b_i Z = L', \quad M + a_i Z = M', \\ N + X b_i - Y a_i = N'. \end{aligned}$$

Les variables adjointes  $x', y', \dots, n'$  se calculent en fonction de  $x, y, \dots, v$  en utilisant l'identité

$$X'x' + Y'y' + \dots + N'n' = Xx + Yy + \dots + Nv,$$

qui résulte de l'invariance de la forme polaire. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} x' = x - b_i v, \quad y' = y + a_i v, \quad z' = z + b_i \lambda - a_i \mu, \quad l' = \lambda, \\ m' = \mu, \quad n' = v. \end{aligned}$$

---

(1) Cette formule peut se déduire de la formule exacte. On peut aussi l'établir directement, en écrivant approximativement

$$\sum p^m = n^{m+1} \int_0^1 x^m dx.$$

Avec ces nouvelles variables, on a

$${}_2 V_i = 2\alpha_3(X'^2 + Y'^2) + 2\alpha_4 Z'^2 + 2\alpha_0(L'^2 + M'^2) + 2\alpha_2 N'^2 + 2\alpha_1(Y'L' - X'M').$$

Or, la forme quadratique

$$a(x^2 + y^2) + bz^2 + ct^2 + dm^2 + en^2 + 2f(xm - yt)$$

a pour adjointe

$$(34) \quad \frac{dx_1^2 + cy_1^2}{\Delta'} + \frac{z_1^2}{b} + a\left(\frac{l_1^2}{\Delta} + \frac{m_1^2}{\Delta'}\right) + 2f\left(\frac{y_1 l_1}{\Delta} - \frac{x_1 m_1}{\Delta'}\right),$$

avec

$$\Delta = ac - f^2, \quad \Delta' = ad - f^2.$$

En appliquant cette formule à  ${}_2 V_i$ , on obtient

$${}_2 V_i = \frac{2\alpha_0}{D}(x'^2 + y'^2) + \frac{z'^2}{2\alpha_4} + \frac{2\alpha_3}{D}(l'^2 + m'^2) + \frac{n'^2}{2\alpha_2} + \frac{2\alpha_1}{D}(x'm' - y'l'),$$

avec

$$(35) \quad D = 4\alpha_0\alpha_3 - \alpha_1^2.$$

En remplaçant les  $x'$ ,  $y'$ , ...,  $n'$  par les valeurs ci-dessus, puis additionnant les quatre formes quadratiques obtenues et remarquant que l'on a

$$\Sigma a_i = \Sigma b_i = \Sigma a_i b_i = 0, \quad \Sigma a_i^2 = 4a^2, \quad \Sigma b_i^2 = 4b^2,$$

il vient

$$(36) \quad {}_2 V = \beta_0(x^2 + y^2) + \beta_1 z^2 + \beta_2 \lambda^2 + \beta_3 \mu^2 + \beta_4 \nu^2 + 2\beta_5(x\mu - y\lambda),$$

en posant

$$\beta_0 = \frac{8\alpha_0}{D}, \quad \beta_1 = \frac{2}{\alpha_4}, \quad \beta_2 = \frac{8\alpha_3}{D} + \frac{2b^2}{\alpha_4}, \quad \beta_3 = \frac{8\alpha_2}{D} + \frac{2a^2}{\alpha_4},$$

$$\beta_4 = \frac{8\alpha_0}{D}(a^2 + b^2) + \frac{2}{\alpha_2}, \quad \beta_5 = \frac{4\alpha_1}{D}$$

ou, en tenant compte de (32),

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = \frac{8}{\alpha_0 U}, \quad \beta_1 = \frac{2}{\alpha_0 k_4 \rho^2}, \quad \beta_2 = \frac{2b^2}{\alpha_0 k_4 \rho^2} + 8 \frac{k_3 h^2 + k_3' \rho^2}{\alpha_0 U}, \\ \beta_3 = \frac{2a^2}{\alpha_0 k_4 \rho^2} + 8 \frac{k_3 h^2 + k_3' \rho^2}{\alpha_0 U}, \quad \beta_4 = \frac{2}{\alpha_0 k_2} + 8 \frac{a^2 + b^2}{\alpha_0 U}, \quad \beta_5 = \frac{4k_1 h}{\alpha_0 U}, \\ U = h^2(4k_3 - k_1^2) + 4\rho^2 k_3'. \end{array} \right.$$

D'après (33), on voit que  $H > 0$ ; donc, tous les  $\beta_i$  sont positifs.

**20. CALCUL DES VIBRATIONS.** — En portant (28) et (36) dans (8), on a

$$H = (\beta_0 - m\omega^2)(x^2 + y^2) + (\beta_1 - m\omega^2)z^2 + (\beta_2 - A\omega^2)\lambda^2 + (\beta_3 - B\omega^2)\mu^2 + (\beta_4 - C\omega^2)\nu^2 + 2(\beta_5 - c_1 m\omega^2)(x\mu - y\lambda).$$

D'après la formule (34), la forme adjointe est, en affectant de l'indice , les nouvelles variables :

$$(38) \quad H_1 = \gamma_0 x_1^2 + \gamma_1 y_1^2 + \gamma_2 z_1^2 + \gamma_3 \lambda_1^2 + \gamma_4 \mu_1^2 + \gamma_5 \nu_1^2 + 2\gamma_6 y_1 \lambda_1 - 2\gamma_7 x_1 \mu_1,$$

avec

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 = \frac{\beta_3 - B\omega^2}{\Delta}, \quad \gamma_1 = \frac{\beta_2 - A\omega^2}{\Delta'}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\beta_1 - m\omega^2}, \\ \gamma_3 = \frac{\beta_0 - m\omega^2}{\Delta'}, \quad \gamma_4 = \frac{\beta_0 - m\omega^2}{\Delta}, \quad \gamma_5 = \frac{1}{\beta_4 - C\omega^2}, \\ \gamma_6 = \frac{\beta_5 - c_1 m\omega^2}{\Delta'}, \quad \gamma_7 = \frac{\beta_5 - c_1 m\omega^2}{\Delta}; \\ \Delta = (\beta_0 - m\omega^2)(\beta_3 - B\omega^2) - (\beta_5 - c_1 m\omega^2)^2, \\ \Delta' = (\beta_0 - m\omega^2)(\beta_2 - A\omega^2) - (\beta_5 - c_1 m\omega^2)^2. \end{array} \right.$$

En se reportant aux formules (29) et (30), on en déduit les formules suivantes :

*Position horizontale.* —  $z = 0, \nu = 0,$

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = m' R \omega^2 (\gamma_0 - \gamma_7 c'') \cos \theta, \quad \mu = m' R \omega^2 (\gamma_4 c'' - \gamma_7) \cos \theta; \\ y = m' R \omega^2 (\gamma_1 - \gamma_6 c'') \sin \theta, \quad \lambda = m' R \omega^2 (-\gamma_3 c'' + \gamma_6) \sin \theta. \end{array} \right.$$

*Position verticale.*

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = m' R \omega^2 (\gamma_1 - \gamma_6 c) \sin \theta, \quad \lambda = m' R \omega^2 (\gamma_6 - \gamma_3 c) \sin \theta, \\ \nu = m' R \omega^2 \gamma_5 (c'' - c) \sin \theta; \\ x = m' R \omega^2 \gamma_7 (c - c'') \cos \theta, \quad z = -m' R \omega^2 \gamma_2 \cos \theta, \\ \mu = m' R \omega^2 \gamma_4 (c'' - c) \cos \theta. \end{array} \right.$$

Dans le premier cas, le point O est animé d'une vibration elliptique, dont les axes sont Ox et Oy. En même temps, le trièdre est animé de deux oscillation sinusoïdales en quadrature, s'effectuant autour de ces axes. Les *pulsations de résonance* sont données par les équations

bicarrées  $\Delta = 0$  et  $\Delta' = 0$ . Les racines de la première équation provoquent la résonance parallèlement à  $Ox$  et autour de  $Oy$ , c'est-à-dire dans le plan  $zOx$ ; celles de la seconde provoquent la résonance parallèlement à  $Oy$  et autour de  $Ox$ , c'est-à-dire dans le plan  $zOy$ .

Pour être sûr d'éviter ces résonances, il suffit que  $\omega$  soit supérieur aux pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , définies par les formules

$$\omega_1^2 = \frac{m\beta_3 + B\beta_0 - 2mc_1\beta_3}{m(B - mc_1^2)}, \quad \omega_2^2 = \frac{m\beta_2 + A\beta_0 - 2mc_1\beta_2}{m(A - mc_1^2)}.$$

D'après les formules (37), le numérateur de  $\omega_1^2$  s'écrit, en posant  $B = m\rho_v^2$ :

$$\frac{2m\alpha^2}{\alpha_0 k_4 \rho^2} + 8m \frac{k_3 h^2 + k'_3 \rho^2}{\alpha_0 U} + \frac{8m\rho_v^2}{\alpha_0 U} - \frac{8mc_1 h k_1}{\alpha_0 U}.$$

Le rapport du deuxième terme au troisième est  $\frac{k_3 h^2 + k'_3 \rho^2}{\rho_v^2}$ ; il est très petit. Le rapport du quatrième terme au troisième est  $-\frac{k_1 c_1 h^2}{\rho_v^2}$ ; il est également très petit. On peut donc négliger les deuxième et quatrième termes. Il en est de même au numérateur de  $\omega_2^2$  et l'on peut écrire approximativement

$$(42) \quad \omega_1^2 = \frac{2}{\alpha_0(B - mc_1^2)} \left( \frac{\alpha^2}{k_4 \rho^2} + 4 \frac{\rho_v^2}{U} \right), \quad \omega_2^2 = \frac{2}{\alpha_0(A - mc_1^2)} \left( \frac{b^2}{k_4 \rho^2} + 4 \frac{\rho_v^2}{U} \right).$$

Dans le deuxième cas, le point  $O$  est animé d'une vibration elliptique, dont un axe est  $Oy$  et l'autre se trouve dans  $zOx$ . En même temps, le trièdre est animé d'oscillations sinusoïdales autour de  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ ; l'oscillation autour de  $Oy$  étant en quadrature avec les deux autres.

Les pulsations de résonance comprennent d'abord celles du cas précédent; puis  $\sqrt{\frac{\beta_1}{m}}$ , qui provoque la résonance pour la vibration verticale du point  $O$ , et  $\sqrt{\frac{\beta_4}{C}}$ , qui provoque la résonance pour l'oscillation autour de  $Oz$ .

Pour être sûr d'éviter ces résonances, il suffit que  $\omega$  soit supérieur à ces deux dernières pulsations et, en même temps, à  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

**21. CALCULS NUMÉRIQUES POUR LA TABLE VIBRANTE DE L'OBSERVATOIRE DE BESANÇON.** — Les données numériques, qui m'ont été fournies par

M. Braille, sont approximativement les suivantes. L'unité de force étant le kilogramme et l'unité de longueur le millimètre, on a :

Poids du support, 280; poids du moteur, 80; poids de T', 130; poids de T, 15;

$$a = 340; \quad b = 450; \quad c = 650; \quad c' = 695; \quad c'' = 740; \quad a' = 405; \quad b' = 280; \\ a'' = 300; \quad b'' = 250.$$

Si l'on assimile les branches des deux fourches à des segments rectilignes, la cote du centre de gravité du support est 325. Pour tenir compte de l'arbre, prenons 330. On en déduit

$$c_1 = \frac{280 \times 330 + 225 \times 650}{280 + 225} = 475.$$

On a ensuite

$$m = \frac{505}{9810} = 0,0515.$$

Pour calculer approximativement les moments d'inertie  $A_1, B_1, C_1$  du support, assimilons encore les branches des fourches à des segments rectilignes. Les rayons de giration d'un de ces segments par rapport aux plans  $\gamma Oz, zOx, xOy$  ont pour carrés  $\frac{a^2}{3}, b^2, \frac{c^2}{3}$ ; soit 38500, 203000 et 140000. Pour tenir compte de l'arbre, il faut un peu diminuer les deux premiers et augmenter le troisième; adoptons 36000, 180000 et 160000. Les carrés des rayons de giration par rapport à  $Ox, Oy, Oz$  sont alors 340000, 196000, 216000. Les moments d'inertie s'en déduisent en multipliant par  $\frac{280}{9810}$ , ce qui donne

$$A_1 = 9700, \quad B_1 = 5600, \quad C_1 = 6200.$$

Le moteur a pour longueur 450 et pour diamètre 250. Comme il est creux, on peut l'assimiler à une surface cylindrique. Ses rayons de giration par rapport à son axe et à un diamètre équatorial ont approximativement pour carrés

$$(125)^2 = 15600 \quad \text{et} \quad \frac{(450)^2}{12} + \frac{(125)^2}{2} = 25000.$$

En position horizontale, le carré du rayon de giration par rapport à  $Ox$  et  $Cy$  est approximativement  $(420)^2 + 25000 = 200000$ , car le

centre du moteur est approximativement à 230<sup>mm</sup> de l'arbre. Par rapport à  $Oz$ , il est 15600. Les moments d'inertie sont approximativement

$$A' = B' = 1630, \quad C' = 130.$$

En position verticale, les carrés des rayons de giration sont

$$(650)^2 + 15600 = 440000, \quad (650)^2 + (230)^2 + 25000 = 500000, \\ (230)^2 + 25000 = 78000.$$

Les moments d'inertie sont

$$A' = 3600, \quad B' = 4100, \quad C' = 640.$$

Les carrés des rayons de giration de  $T'$  par rapport à  $O'x'$ ,  $O'y'$ ,  $O'z'$  sont, en tenant compte de l'épaisseur, qui est 40,

$$\frac{(560)^2 + (40)^2}{12} = 26500, \quad \frac{(810)^2 + (40)^2}{12} = 55000, \quad \frac{(810)^2 + (560)^2}{12} = 81000.$$

Par rapport à  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , ils sont, en position horizontale

$$26500 + (695)^2 = 510000, \quad 55000 + (695)^2 = 540000, \quad 81000;$$

d'où les moments d'inertie

$$A'' = 6800, \quad B'' = 7200, \quad C'' = 1080.$$

En position verticale, les carrés des rayons de giration sont

$$81000 + (650)^2 = 504000, \quad 55000 + (650)^2 + (45)^2 = 480000, \\ 26500 + (45)^2 = 28500.$$

D'où les moments d'inertie

$$A'' = 6680, \quad B'' = 6350, \quad C'' = 380.$$

Pour la table  $T$ , on peut négliger l'épaisseur, qui est 20. Les carrés des rayons de giration par rapport à  $G_1x''$ ,  $G_1y''$ ,  $G_1z''$  sont 20800, 30000, 51000. Par rapport à  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , ils sont, en position horizontale,

$$208000 + (740)^2 = 568000, \quad 30000 + (740)^2 = 580000, \quad 51000$$

et, en position verticale,

$$51000 + (650)^2 = 474000, \quad 30000 + (650)^2 + (90)^2 = 461000, \\ 20800 + (90)^2 = 29000;$$

d'où les moments d'inertie

$$\begin{aligned} A'' = 870, & \quad B'' = 890, & \quad C'' = 78, & \quad \text{en position horizontale;} \\ A''' = 730, & \quad B''' = 710, & \quad C''' = 44, & \quad \text{en position verticale.} \end{aligned}$$

On a enfin  $A = A_1 + A' + A'' + A'''$  et les formules analogues; ce qui donne

$$\begin{aligned} A = 19000, & \quad B = 15300, & \quad C = 7500 & \quad (\text{position horizontale}); \\ A = 20700, & \quad B = 16800, & \quad C = 7300 & \quad (\text{position verticale}). \end{aligned}$$

**22. CALCUL DES RESSORTS.** — La fréquence minimum utilisée est de 800 t. m., soit  $\omega^2 = 7000$ . Afin d'être assez loin de la résonance, imposons-nous la condition que cette limite inférieure de  $\omega^2$  soit supérieure à 10 fois le carré de chaque pulsation de résonance.

Écrivons ceci pour  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . En tenant compte des données numériques, on a, pour la position horizontale,

$$\omega_1^2 = \frac{1}{\alpha_0} \left( \frac{62}{k_4 \rho^2} + \frac{640}{U} \right), \quad \omega_2^2 = \frac{1}{\alpha_0} \left( \frac{55}{k_4 \rho^2} + \frac{400}{U} \right)$$

et, pour la position verticale,

$$\omega_1^2 = \frac{1}{\alpha_0} \left( \frac{44}{k_4 \rho^2} + \frac{500}{U} \right), \quad \omega_2^2 = \frac{1}{\alpha_0} \left( \frac{44}{k_4 \rho^2} + \frac{354}{U} \right).$$

On voit que le plus grand de ces quatre nombres est le premier. Nous avons donc l'unique condition

$$(43) \quad \frac{62}{k_4 \rho^2} + \frac{640}{U} < 700 \alpha_0.$$

Supposons d'abord les *ressorts cylindriques* et fabriqués avec du *fil rond*, en acier, de rayon  $r$ . Prenons  $E = 28000$ ,  $G = 11000$ . On a

$$I = I' = \frac{\pi r^4}{4}, \quad I'' = 2I, \quad \text{d'où } k_4 = \frac{2}{1,79} = 1,12.$$

Puis,

$$k_3 = \frac{1}{2,28}; \quad \text{d'où } U = \frac{h^2}{3} + 1,75 \rho^2.$$

Enfin,

$$k_0 = \frac{0,000162}{r^4}; \quad \text{d'où } \alpha_0 = 0,000162 \frac{n\rho}{r^4}.$$

Notre inégalité devient

$$(44) \quad \frac{n\rho}{r^4} > \frac{488}{\rho^2} + \frac{16900}{h^2 + 5,25\rho^2}.$$

Pour la position verticale, nous avons en outre les deux conditions  $\beta_1 < 700m$ ,  $\beta_1 < 700C$  ou, d'après (37),

$$\frac{n\rho}{r^4} > \frac{300}{\rho^2}, \quad \frac{n\rho}{r^4} > 0,00274 + \frac{9200}{h^2 + 5,25\rho^2}.$$

Ces deux dernières inégalités sont entraînées par (44), si  $\rho < 840$ .

Mais, il faut encore tenir compte de la *fatigue des ressorts* sous l'action du poids de la table. Cette fatigue, qui est une fatigue au cisaillement, a pour expression  $F = \frac{250\rho}{\pi r^3}$ . Imposons-lui la condition d'être inférieure à 40. Cela nous donne

$$(45) \quad \frac{\rho}{r^3} < 0,5.$$

En définitive, nous avons seulement à satisfaire aux inégalités (44) et (45). Il y a évidemment une infinité de solutions. En voici une qui nous paraît raisonnable

$$r = 5, \quad \rho = 50, \quad h = 110, \quad n = 11.$$

L'inégalité (44) devient  $0,88 > 0,20 + 0,67 = 0,87$ . Elle est vérifiée. La fatigue est  $F = 32$ ; elle n'est pas excessive.

Les spires sont presque jointives, car la distance de deux spires consécutives est  $11^{mm}$ . L'affaissement de chaque ressort sous l'action du poids de la table est

$$\frac{4nP\rho^3}{Gr^4} = 100.$$

La hauteur naturelle du ressort est donc  $210^{mm}$  environ et le pas du ressort à l'état naturel est de  $19^{mm}$ .

**23.** Supposons maintenant le *ressort conique*. On a

$$k_1 = 0,56; \quad k_3 = \frac{1}{4,56}; \quad U = \frac{2}{9}h^2 + 0,88\rho^2; \quad \alpha_0 = 0,000081 \frac{n\rho}{r^4}.$$

L'inégalité (43) devient

$$\frac{n\rho}{r^4} > \frac{1960}{\rho^2} + \frac{51000}{h^2 + 3,96\rho^2}.$$

Un avantage du ressort conique est que, sous l'action du poids de la table, les spires rentrent l'une dans l'autre, de telle sorte que la hauteur  $h$  devient très petite vis-à-vis de  $\rho$ . Dès lors, nous pouvons négliger le premier terme du dénominateur de la seconde fraction du second membre, ce qui nous donne

$$(46) \quad \frac{n\rho^3}{r^4} > 12800.$$

Dans la position verticale, nous avons en outre les deux conditions

$$\frac{n\rho^3}{r^4} > 1200, \quad \frac{n\rho}{r^4} > 0,00548 + \frac{7000}{\rho^2}.$$

Ces deux inégalités sont entraînées par la précédente si  $\rho < 1000$ .

La compatibilité de (45) et (46) exige

$$(47) \quad nr^2 > 10^5.$$

D'autre part, pour que les spires puissent rentrer l'une dans l'autre, il faut  $\rho > 2nr$ ; d'où, d'après (45),  $n < \frac{r^2}{4}$ , ce qui exige, d'après (47),  $r^2 > 400000$ ; d'où  $r > 6,3$  environ. Si l'on prend  $r = 6,5$ , il faut  $n < 10,6$ . On peut prendre  $n = 10$ ; d'où  $\rho > 130$ . En prenant  $\rho = 130$ , l'inégalité (46) est approximativement vérifiée. La fatigue est 38. L'affaissement est 140. On pourrait prendre 150 pour hauteur naturelle.

L'encombrement horizontal serait 2,6 fois plus grand que celui du ressort cylindrique et la fatigue serait 38 au lieu de 32. Le seul avantage serait de diminuer la hauteur du ressort. Malgré cela, *le ressort cylindrique paraît préférable* (1).

#### 24. VARIATIONS D'AMPLITUDE DES OSCILLATIONS DE LA TABLE. — Adoptons

---

(1) On s'en rend compte intuitivement en remarquant que *le ressort conique a une plus grande rigidité transversale* que le ressort cylindrique. Ceci augmente les pulsations de résonance, ce qui va à l'encontre du but poursuivi.

le ressort cylindrique précédent et étudions les variations d'amplitude des oscillations de  $x, y, \dots, \nu$  en fonction du nombre  $N$  de centaines de tours par minute. Dans les formules qui vont suivre, convenons de représenter l'amplitude de l'oscillation d'une fonction par la même lettre que cette fonction. En tenant compte des résultats numériques précédents, on obtient les formules ci-dessous :

*Position horizontale.*

$$\begin{aligned} 100 \frac{x}{R} &= \frac{N^2(2,55 + 2,38 N^2)}{N^4 - 5,67 N^2 + 1,76}, & 10^4 \frac{\mu}{R} &= \frac{N^2(3,42 - 1,16 N^2)}{N^4 - 5,67 N^2 + 1,76}, \\ 100 \frac{y}{R} &= \frac{N^2(2,85 - 0,33 N^2)}{N^4 - 3,92 N^2 + 1,50}, & 10^4 \frac{\lambda}{R} &= \frac{N^2(1,69 + 0,55 N^2)}{N^4 - 3,92 N^2 + 1,50}. \end{aligned}$$

*Position verticale.*

$$\begin{aligned} 100 \frac{x}{R} &= \frac{N^2(0,174 - 1,28 N^2)}{N^4 - 4,32 N^2 + 1,24}, & 10^4 \frac{\mu}{R} &= \frac{N^2(0,316 - 0,268 N^2)}{N^4 - 4,32 N^2 + 1,24}, \\ 100 \frac{y}{R} &= \frac{N^2(2,41 - 1,56 N^2)}{N^4 - 3,41 N^2 + 1,22}, & 10^4 \frac{\lambda}{R} &= \frac{N^2(1,19 - 0,294 N^2)}{N^4 - 3,41 N^2 + 1,22}, \\ 100 \frac{z}{R} &= \frac{2,96 N^2}{0,882 - N^2}, & 10^4 \frac{\nu}{R} &= \frac{0,188 N^2}{2,66 - N^2}. \end{aligned}$$

Les angles  $\lambda, \mu, \nu$  sont évalués en radians.

Les fréquences de résonance sont :

Position horizontale, 0,57 et 2,31 pour  $x$  et  $\mu$ ; 0,66 et 1,87 pour  $y$  et  $\lambda$ ;

Position verticale, 0,56 et 2 pour  $x$  et  $\mu$ ; 0,41 et 3 pour  $y$  et  $\lambda$ ; 0,94 pour  $z$ ; 1,63 pour  $\nu$ .

Pour  $N = 8$  (minimum adopté par M. Baillaud), on a les valeurs suivantes, au-dessous desquelles sont écrites les valeurs pour  $N$  infini :

*Position horizontale.*

$$\begin{array}{cccc} 100 \frac{x}{R} = 2,66; & 100 \frac{y}{R} = 0,30; & 10^4 \lambda = 0,61; & 10^4 \mu = 1,21. \\ & 2,38 & 0,33 & 0,55 & 1,16 \end{array}$$

*Position verticale.*

$$\begin{array}{cccc}
 100 \frac{x}{R} = 1,37; & 100 \frac{y}{R} = 1,61; & 100 \frac{z}{R} = 3; & 10^4 \lambda = 0,29; \\
 1,28 & 1,56 & 2,96 & 0,29 \\
 10^4 \mu = 0,28; & 10^4 \nu = 0,20. & & \\
 0,27 & 0,19 & & 
 \end{array}$$

Comme on le voit, *les diverses amplitudes restent sensiblement constantes pour  $N > 8$ .*

*Remarque.* — Nous n'avons tenu compte, dans tout ce qui précède, que de *l'influence des vibrations de la table*, puisque nous avons admis que le moteur est parfaitement équilibré. S'il n'en est pas ainsi, on peut avoir des amplitudes totalement différentes. Mais, *les fréquences de résonance restent les mêmes.*

