JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BERTRAND GAMBIER

Cercles focaux d'une conique

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 25 (1946), p. 241-255.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1946_9_25__241_0>

Cercles focaux d'une conique;

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1. INTRODUCTION. — Nous allons indiquer quelques propriétés des deux séries ∞^1 de cercles focaux d'une même conique, en particulier montrer comment on peut transformer ces deux séries en deux faisceaux de cercles orthogonaux. Nous en profiterons pour étudier les coniques assujéties à admettre deux cercles focaux donnés C. C', que ces cercles C et C' soient de la même espèce ou d'espèce différente; nous donnerons ainsi un nouvel exemple où le nombre de paramètres, dont une figure dépend, ne s'obtient pas en comparant le nombre d'inconnues mises en jeu et le nombre des équations qui les relient : ainsi les coniques à un paramètre, dont deux cercles donnés C, C' sont focaux et d'espèce différente, ont une excentricité parfaitement déterminée.

2. CERCLES FOCAUX D'UNE CONIQUE. — Commençons par préciser la notion d'*excentricité;* pour la conique d'équation réduite $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1$, j'appelle *excentricité relative à* Ox la quantité e définie par la relation $e^2 = \frac{A - B}{A}$, de sorte que l'*excentricité relative à* Oy est le nombre e' vérifiant la relation $e'^2 = \frac{B - A}{B}$; *les deux excentricités associées vérifient* $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$; nous n'étudierons que des coniques à coefficients réels de sorte que e^2, e'^2 sont des nombres réels, positifs ou négatifs : pour une ellipse, e^2, en supposant $A > B > 0$, est positif, e'^2 est négatif; pour une hyperbole, e^2 et e'^2 sont positifs; les foyers portés par Ox sont à la distance c de O telle que $c^2 = A - B$ et les foyers

portés par Oy à la distance ic de O. Au fond, dans notre étude, ce sont surtout les carrés des excentricités ou des axes qui interviennent, de sorte que les imaginaires (quand e'^2 par exemple est négatif) n'interviennent qu'en apparence. L'interprétation géométrique de la quantité réelle e^2 ou e'^2 est la suivante : *c'est le rapport de la puissance d'un point variable* M *de la conique relativement à un cercle focal centré sur l'axe en jeu au carré de la distance de* M *à la corde de contact.*

Considérons une conique Γ (le dessin est fait avec une ellipse, mais le raisonnement s'applique sans modification à une hyperbole); soient un point M de cette conique, m et μ ses projections sur Ox, Oy, n et ν les pieds de la normale en M sur Ox, Oy, t, θ les pieds de la tangente en M sur Ox, Oy (*fig.* 1), F, F′ les foyers portés par Ox,

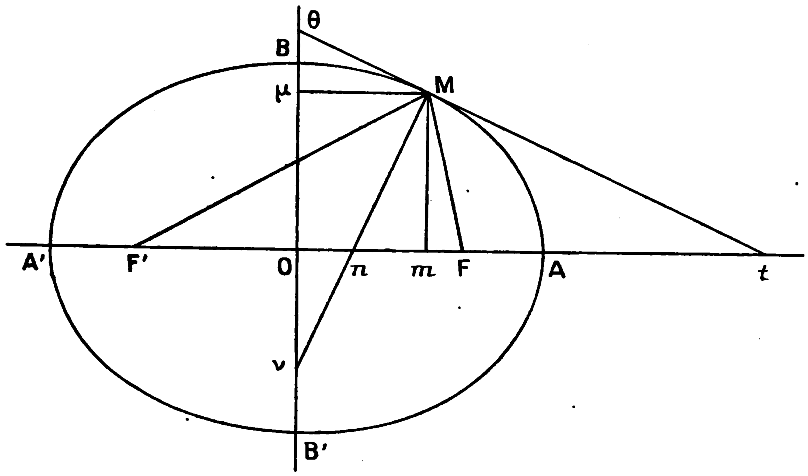

Fig. 1.

A, A′, B, B′ les sommets. On a

$$\overline{Om}.\overline{Ot} = a^2, \qquad \overline{On}.\overline{Ot} = c^2,$$

car m, t sont conjugués par rapport à A, A′ et n, t par rapport à F, F′. La comparaison donne

$$(1) \qquad \boxed{\overline{On} = e^2\overline{Om} = e^2 x.}$$

On a, de même,

$$\overline{O\mu}.\overline{O\theta} = b^2, \qquad \overline{O\nu}.\overline{O\theta} = -c^2,$$

car μ, θ sont conjugués par rapport à B et B'; d'autre part le cercle circonscrit au triangle MFF' passe en ν et θ (1). La comparaison donne

$$\boxed{\overline{O\nu} = e'^2\overline{O\mu} = e'^2 y.} \tag{2}$$

Appliquons la relation de Ptolémée au quadrilatère convexe MFνF'; on a

$$M\nu.FF' = MF.\nu F' + MF'.\nu F \quad \text{ou} \quad 2c.M\nu = 2a.\nu F,$$

où

$$\boxed{\nu F = eM\nu.} \tag{3}$$

Le cercle focal de centre ν est donc tel que si on le transforme par homothétie de centre ν et rapport e, il devient le cercle concentrique passant par F, F'. Nous pourrons appeler ce cercle, *le cercle associé au cercle focal* en jeu; donc *les cercles associés aux cercles focaux centrés sur* Oy *forment le faisceau des cercles passant aux foyers* F, F' *portés par* Ox (pour une hyperbole, la démonstration est exactement la même, mais c'est le quadrilatère MFF'ν qui est convexe, de sorte que c'est la différence (MF — MF') qui entre en jeu et le résultat est, finalement, le même).

Nous ne nous sommes pas servis de moyens analytiques : nous aurions pu dire $\overline{On}.\overline{Ot} = c^2$ entraîne $\overline{O\nu}.\overline{O\theta} = -c^2$, car il suffit d'échanger les rôles des axes Ox, Oy, des lettres a et b ou de dire que ν, θ sont conjugués par rapport aux foyers imaginaires portés par Oy, à la distance $\pm ic$ de O; la relation (3) que l'on peut mettre, par élévation au carré, sous la forme

$$\boxed{O\nu^2 + c^2 - e^2 M\nu^2 = 0} \tag{4}$$

(1) La symétrie de la relation entre ν et θ prouve que si ν est extérieur à la conique, les tangentes issues de ν à la conique sont telles que les normales en leurs points de contact concourent en θ; ces points de contact sont sur le cercle déjà indiqué passant par M, F, F'. Cette propriété est, projectivement parlant, bien connue.

donnerait par le même procédé analytique

$$\boxed{\mathrm{O}n^2 - c^2 - e'^2\,\mathrm{M}n^2 = 0,} \tag{5}$$

qui peut être interprétée ainsi : *le cercle associé au cercle focal* centré en n sur $\mathrm{O}x$ sera celui qui a même centre n et qui se déduit du premier par homothétie de centre n et rapport e' : il a pour rayon $e'\mathrm{M}n$, dont le carré est égal à $n\mathrm{O}^2 - c^2$, c'est-à-dire la puissance de n par rapport au cercle décrit sur FF′ comme diamètre, ou encore par rapport à un cercle quelconque du faisceau ayant FF′ comme points de base : *donc les cercles associés aux cercles focaux des deux familles forment deux faisceaux de cercles orthogonaux.* (Les points de base des cercles associés aux cercles focaux centrés sur $\mathrm{O}x$ sont les foyers imaginaires portés par $\mathrm{O}y$.)

Il y a lieu de démontrer directement la relation (5), ce qui est très simple, car

$$\overline{n\mathrm{F}}.\overline{n\mathrm{F}'} = \mathrm{O}n^2 - c^2 = \overline{n\mathrm{M}}.\overline{n\nu}.$$

Or on a

$$\frac{\overline{n\mathrm{M}}}{\overline{n\nu}} = \frac{\overline{nm}}{\overline{no}} = \frac{x(1-e^2)}{-e^2x} = 1 - \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e'^2} \qquad \text{ou} \qquad \overline{n\nu} = e'^2\,\overline{n\mathrm{M}}.$$

On a donc bien

$$e'^2\,\mathrm{M}n^2 = \mathrm{O}n^2 - c^2;$$

les relations (4), (5) ont été ainsi établies géométriquement, à la fois pour l'ellipse et l'hyperbole (pour l'hyperbole le nombre e' lui aussi est réel).

Donnons tout de suite un exemple simple mettant en défaut les résultats obtenus par comparaison entre le nombre des inconnues et le nombre d'équations. Si l'on se donne un cercle C, les coniques bitangentes à C dépendent de 3 paramètres; l'un de leurs axes passe au centre de C : supposons que l'on donne l'excentricité e' relative à cet axe (e'^2 est réel); les coniques ne dépendent plus que de 2 paramètres et *l'on pourrait croire que les foyers portés par l'axe autre que celui qui contient le centre de* C *dépendent aussi de 2 paramètres : il n'en est rien, car le cercle associé à* C *est connu et contient ces foyers;* au contraire les foyers portés par l'axe qui contient le centre de C dépendent effectivement de 2 paramètres (cela résultera d'ailleurs d'une discussion que nous ferons plus loin; pour pouvoir parler des foyers, réels, portés par l'un et l'autre axe, il faut supposer que l'excentricité donnée est réelle et supérieure à 1); pour le centre de la conique, on voit qu'il dépend effectivement de 2 paramètres, car on peut achever de déterminer la conique en choisissant arbitrairement les deux foyers F et F′ (réels ou imaginaires conjugués) portés par le cercle associé à C, de sorte que le centre, milieu du segment FF′, est un point quelconque du plan. Dans cet exemple, on peut remplacer F, cercle focal d'espèce opposée à C, de rayon nul, par un cercle focal C_1 de rayon donné et d'espèce opposée à C : le centre de C_1 décrit un cercle concentrique à C puisque le cercle associé à C_1 a un rayon connu et reste orthogonal au cercle associé à C.

Soient deux cercles focaux C, C′, d'espèces différentes, de la conique Γ; C est centré sur Ox et a pour centre n; C′ est centré sur Oy et a pour centre ν' : nous écrivons la relation (5) pour C, la relation (4) pour C′, ce qui donne

$$\mathrm{O}n^2 - c^2 - e'^2 \mathrm{M}n^2 = 0, \qquad \mathrm{O}\nu'^2 + c^2 - e^2 \mathrm{M}'\nu'^2 = 0,$$

en ajoutant

$$\mathrm{O}n^2 + \mathrm{O}\nu'^2 - e'^2 \mathrm{M}n^2 - e^2 \mathrm{M}'\nu'^2 = 0,$$

ou en appelant R, R′ les rayons de C, C′ et D la distance de leurs centres

$$\boxed{\mathrm{D}^2 = e'^2 \mathrm{R}^2 + e^2 \mathrm{R}'^2.} \tag{6}$$

Cette relation ne fait qu'exprimer le résultat géométrique : *les cercles* $\overline{\mathrm{C}}$, $\overline{\mathrm{C}'}$ *associés respectivement à* C, C′ *sont orthogonaux* [et la formule (6) si l'on y fait $\mathrm{R} = 0$, c'est-à-dire si C est le cercle de rayon nul F ne fait que reproduire la formule (4); de même si l'on fait $\mathrm{R}' = 0$].

Cela donne encore le résultat intéressant : *les coniques* Γ *assujetties à admettre deux cercles donnés* C, C′ *comme cercles focaux d'espèces opposées dépendent d'un paramètre, et, pourtant, le couple* (e, e') *d'excentricités relatives à ces coniques est déterminé : il a deux valeurs*, car à l'équation (6), où D, R, R′ sont donnés et e, e' inconnues, il faudra adjoindre la relation $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$, ce qui fournira e^2 ou e'^2 par une équation bicarrée. *Les cercles associés à* C *et* C', *soient* $\overline{C}$, $\overline{C'}$, *sont les lieux des foyers de ces coniques.*

Au contraire si C, C' doivent être cercles focaux de même espèce, le couple (e, e') peut prendre ∞^1 valeurs différentes, comme nous allons le voir.

Dans l'étude géométrique que nous avons faite nous avons considéré uniquement des éléments réels; mais il faut aussi tenir compte soit des cercles focaux réels qui ont des contacts imaginaires avec la conique, soit des cercles focaux de centre réel et rayon imaginaire pur dont la corde des contacts est réelle. Par exemple, pour l'ellipse et l'axe focal, quand le point n décrit le segment compris entre O et le centre de courbure α en A, le cercle focal est réel et a des contacts réels; de α en F, on a un cercle focal encore réel mais à contacts imaginaires; quand le point n décrit le segment illimité allant de F en A jusqu'à l'infini, le cercle focal a son rayon imaginaire pur, de sorte que les points n compris entre O et F donnent un cercle focal réel, un cercle associé de rayon imaginaire pur; ce sont au contraire les cercles focaux imaginaires qui donnent des cercles associés réels. Inutile d'insister plus longuement pour l'axe non focal et pour l'hyperbole.

3. Coniques bitangentes a deux coniques données. — On donne dans le plan deux coniques C, C' quelconques; *les coniques* Γ *bitangentes à* C *et à* C' *se séparent, comme on le sait, en trois séries à un paramètre, car les cordes de contact de* Γ *avec* C *et* C' *concourent en l'un des sommets du triangle conjugué* $\alpha\beta\gamma$ *commun à* C, C' *et divisent harmoniquement le couple de sécantes communes à* C, C' *issues de ce sommet.*

Cela résulte de ce que l'on peut mettre les équations de C, C', Γ sous la forme

$$\Gamma = 0, \qquad C \equiv \Gamma + \varepsilon P^2, \qquad C' \equiv \Gamma + \varepsilon' P'^2,$$

où P, P' sont des formes linéaires réelles, $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$ et l'on a

$$C - C' \equiv \varepsilon P^2 - \varepsilon' P'^2 \equiv (P\sqrt{\varepsilon} + P'\sqrt{\varepsilon'})(P\sqrt{\varepsilon} - P'\sqrt{\varepsilon'}).$$

Si C, C' sont deux cercles, les sommets du triangle conjugué sont Ω_1, Ω_2 points de Poncelet du faisceau C, C', c'est-à-dire centres des cercles de rayon nul du faisceau C, C', puis le point Ω_3 à l'infini dans la direction perpendiculaire à la ligne des centres OO'.

Les coniques Γ dont C, C' sont cercles focaux de même espèce donnent deux cordes de contact symétriques par rapport à l'axe radical de C, C' et leur excentricité est variable comme nous allons le voir.

Les coniques Γ dont C, C' sont cercles focaux d'espèces différentes se partagent en deux séries à un paramètre : pour l'une des séries, les cordes de contact sont issues de Ω_1 et sont rectangulaires ; pour l'autre série, même résultat à partir de Ω_2. Si nous remarquons que la valeur constante de l'excentricité signifie que l'angle des asymptotes, ou encore le birapport des points à l'infini de Γ et des points cycliques, est constant, nous avons le moyen simple de donner une interprétation géométrique projective du résultat que nous avons obtenu :

Nous considérons deux coniques C, C', *leur triangle conjugué commun* $\alpha\beta\gamma$ *et les* ∞^1 *coniques* Γ *bitangentes à* C, C', *telles que les cordes de contact soient issues de* α; *soient maintenant l'une des quatre cordes communes à* C *et* C' *qui ne passent pas en* α, *et* i, j *les points communs situés sur cette corde; les coniques* Γ *percent* ij *en deux points* p, q *tels que le birapport* $(ijpq)$ *reste constant quand* Γ *décrit la série à laquelle elle appartient.*

(Bien entendu on a aussi l'énoncé corrélatif, valable pour C, C' et les coniques Γ d'une même série en considérant les ombilics de C, C' et les tangentes issues d'un ombilic, convenablement choisi, à Γ). On remarquera aussi que les deux cordes communes issues de β s'échangent par l'homographie involutive de pôle α et directrice $\beta\gamma$, de sorte que ces deux cordes donnent le même birapport; de même les deux cordes communes issues de γ donnent le même birapport, non égal au précédent.

Si nous appliquons ces remarques au cas où C et C' sont deux cercles, le triangle conjugué commun a pour sommets, d'abord les deux points de Poncelet Ω_1, Ω_2 du faisceau C, C' (ce sont les cercles de rayon nul de ce faisceau), puis le point Ω à l'infini dans la direction perpendiculaire à la ligne des centres OO'. Pour les coniques Γ admettant C, C' comme cercles focaux de même nature, les cordes de contact sont parallèles à l'axe radical de C, C′ et symétriques par rapport à cet axe : il faudrait donc, pour appliquer le théorème sous forme ponctuelle, prendre les cordes communes isotropes, tandis que du point de vue tangentiel nous pourrons avoir des énoncés réels. L'excentricité des coniques Γ en jeu est variable d'une conique à l'autre.

Les coniques Γ dont C et C′ sont cercles focaux d'espèces différentes se partagent en deux séries : les cordes de contact de Γ avec C et C′ passent toutes deux soit par Ω_1, soit par Ω_2 et sont rectangulaires. En prenant alors la droite de l'infini (soit l'axe radical), on a le même birapport constant avec les coniques Γ de l'une de ces séries, c'est-à-dire la même excentricité et nous voyons maintenant pourquoi le couple (e, e') a deux déterminations. Nous allons montrer comment on peut calculer simplement en fonction de D, R, R′ les valeurs (e, e') relatives à chaque série de coniques et donner des formules calculables par logarithmes.

Nous écrirons de nouveau les relations

$$D^2 = e'^2 R^2 + e^2 R'^2, \qquad \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$$

et éliminons e', d'où

$$e^4 R'^2 + e^2(R^2 - R'^2 - D^2) + D^2 = 0. \tag{7}$$

Il y a deux cas à distinguer : 1° $D > R + R'$, C et C′ sont extérieurs; e^2 et e'^2 sont positifs tous deux et supérieurs à 1 ; pour chaque série ce sont des hyperboles que l'on trouve; 2° $D < |R - R'|$; si l'on choisit les notations de sorte que $R' > R$, le cercle C′ contient C à son intérieur; on a deux séries d'ellipses; e^2 est positif, e'^2 est négatif.

Nous commençons par le cas des hyperboles. Puisque le couple (e, e') a une valeur constante, nous pouvons l'obtenir avec une conique particulière, par exemple réduite à deux droites, dont l'une est tangente commune extérieure, l'autre tangente commune intérieure. Pour un système de deux droites (*fig.* 2), les axes sont les bissectrices, les foyers sont confondus, *tous les quatre*, avec le point double, et la directrice d'un foyer, quand on considère ce foyer comme appartenant à une bissectrice déterminée n'est autre que la seconde bissectrice, de sorte que si V est l'angle que fait une bissectrice avec chaque droite $\left(0 < V < \frac{\pi}{2}\right)$, l'excentricité relative à l'axe porté par cette bissectrice est $\frac{1}{\cos V}$; si l'on trace un cercle focal centré sur cette bissec-

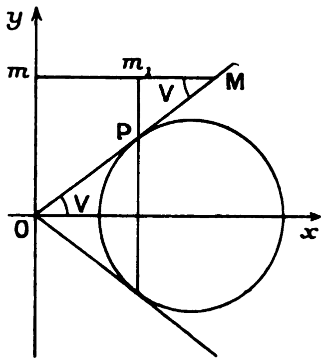

Fig. 2.

trice Ox, on retrouve encore l'excentricité comme valeur du rapport $\frac{MP}{Mm_1}$ ou $\frac{1}{\cos V}$, $2V$ étant l'angle compris entre 0 et π sous lequel le cercle est vu du point O; l'excentricité relative à l'autre axe est $\frac{1}{\sin V}$.

Nous supposons donc les deux cercles C, C′ extérieurs, $D > R + R'$;

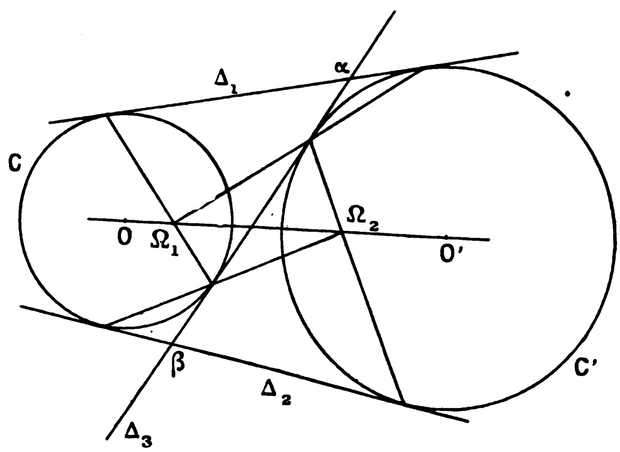

Fig. 3.

nous choisissons les notations de sorte que $R \leqq R'$; nous marquons (*fig.* 3) les points de Poncelet Ω_1, Ω_2, où Ω_1 est intérieur à C et Ω_2

à C'; nous traçons les tangentes communes extérieures Δ_1, Δ_2; la droite joignant à Ω_1 le point de contact de Δ_1 avec C recoupe C au point de contact d'une tangente commune intérieure Δ_3 et est perpendiculaire à la droite joignant Ω_1 aux points de contact de Δ_1 et Δ_3 avec C'; en échangeant Δ_1 avec Δ_2 et conservant Δ_3, nous avons deux droites rectangulaires analogues issues de Ω_2; nous appelons α, β les points où Δ_3 coupe Δ_1 ou Δ_2. Appelons ω, ω' les angles aigus (non orientés, donc positifs) que font avec la ligne des centres O, O′ les rayons joignant O′ aux points de contact de Δ_1 et Δ_3; du point α on voit le cercle O sous l'angle $(\omega - \omega')$, tandis que de β on le voit sous l'angle $\omega + \omega'$. Donc, en appelant e_1, e_2 les excentricités relatives à l'axe issu de O pour les coniques des deux séries dont (Δ_1, Δ_3) et (Δ_2, Δ_3) sont des échantillons particuliers, on a

$$\boxed{\begin{array}{llll} \cos\omega = \dfrac{R'-R}{D}, & \cos\omega' = \dfrac{R'+R}{D}, & 0 < \omega' < \omega < \dfrac{\pi}{2}, & R' > R, \quad D > R+R', \\[2ex] e_1 = \dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\omega-\omega'}{2}\right)}, & e'_1 = \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\omega-\omega'}{2}\right)}, & e_2 = \dfrac{1}{\cos\left(\dfrac{\omega+\omega'}{2}\right)}, & e'_2 = \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{\omega+\omega'}{2}\right)}. \end{array}} \tag{8}$$

Les cercles $\overline{C}$, $\overline{C'}$ associés à C et C′, quand il s'agit de la série relative à Ω_1, ont pour centres O, O′, pour rayons $O\alpha$, $O'\alpha$, car α est pour (Δ_1, Δ_3) réunion de quatre foyers; pour la série relative à Ω_2, les rayons sont $O\beta$, $O'\beta$.

Pour le cas des ellipses ($R < R'$, $D < R' - R$ en choisissant convenablement les notations), on peut conserver les formules (8) qui donneront alors pour ω, ω' des valeurs imaginaires pures; nous supprimons alors les imaginaires en écrivant $i\omega$, $i\omega'$ au lieu de ω et ω' et nous avons les formules

$$\boxed{\begin{array}{llll} \operatorname{ch}\omega = \dfrac{R'-R}{D}, & \operatorname{ch}\omega' = \dfrac{R'+R}{D}, & R < D + R < R', & 0 < \omega < \omega', \\[2ex] e_1 = \dfrac{1}{\operatorname{ch}\left(\dfrac{\omega'-\omega}{2}\right)}, & e'^2_1 = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2\left(\dfrac{\omega'-\omega}{2}\right)}, & e_2 = \dfrac{1}{\operatorname{ch}\left(\dfrac{\omega'+\omega}{2}\right)}, & e'^2_2 = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2\left(\dfrac{\omega'+\omega}{2}\right)}. \end{array}} \tag{8'}$$

Ici les points de Poncelet sont : l'un, Ω_1, intérieur à C et par suite aussi à C′, l'autre, Ω_2, extérieur à C′, donc aussi à C. La quantité e_2

est relative aux coniques Γ dont les cordes de contact avec C et C′ passent par Ω_1 : on le voit en supposant que l'on déplace C′ de façon que son centre se rapproche indéfiniment de O; ω et ω' augmentent indéfiniment, mais $\omega' - \omega$ tend vers une valeur limite 2α telle que

$$\operatorname{ch}\alpha = \frac{R'}{\sqrt{R'^2 - R^2}}$$

et e_2 tend vers zéro : en effet, les deux séries de coniques deviennent, d'une part les ellipses de centre O et d'axes égaux à R′ et R, et d'autre part les cercles concentriques aux deux cercles C, C′.

Les tables logarithmiques usuelles ne donnent pas les lignes trigonométriques hyperboliques, de sorte que les formules (8) seront avantageusement remplacées par les suivantes, déduites des premières en remplaçant $\operatorname{ch}\omega$, $\operatorname{sh}\omega$ par $\frac{1}{\cos\varphi}$, $\operatorname{tg}\varphi$.

$$(9)\quad \boxed{\begin{gathered}\cos\varphi = \frac{D}{R' - R}, \qquad \cos\varphi' = \frac{D}{R' + R}, \qquad 0 < \varphi < \varphi' < \frac{\pi}{2}, \\ e_1^2 = \frac{\cos\varphi\cos\varphi'}{\cos^2\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2}\right)}, \quad e_2^2 = \frac{\cos\varphi\cos\varphi'}{\cos^2\left(\frac{\varphi' - \varphi}{2}\right)}, \quad e_1'^2 = \frac{-\cos\varphi\cos\varphi'}{\sin^2\left(\frac{\varphi' - \varphi}{2}\right)}, \quad e_2'^2 = \frac{-\cos\varphi\cos\varphi'}{\sin^2\left(\frac{\varphi' + \varphi}{2}\right)}.\end{gathered}}$$

4. Quelques propriétés géométriques complémentaires. — Nous allons indiquer quelques résultats relatifs à la série de coniques Γ dont les cordes de contact avec C et C′ passent en Ω_1 : ces résultats pourront se traduire projectivement pour une famille de coniques Γ bitangentes à deux coniques C, C′ quelconques. Puisque tout point de la corde de contact de deux coniques bitangentes, telles que C et Γ, ou encore que C′ et Γ, a même polaire par rapport aux deux coniques, le point Ω_1 a même polaire, $\Omega_2\Omega$, par rapport à C, C′ et Γ; si donc nous cherchons une conique Γ passant en un point M donné, elle passera aussi par le point M′ correspondant à M dans l'homologie involutive de pôle Ω_1 et directrice $\Omega_2\Omega$. Pour déterminer une telle conique, prenons pour inconnue la direction de l'axe qui passe en O, axe pour lequel l'excentricité est e : la corde de contact avec C est la perpendiculaire à cet axe issue de Ω_1; de plus la puissance p de M par rapport à C est égale à $e^2.\mathrm{M}m^2$, où m est la projection de M sur cette corde

(*fig.* 4); la corde perpendiculaire (corde de contact de Γ avec C'), donne de même $p' = e'^2 \, \mathrm{M}m'^2$; on a donc, par division

$$\frac{\mathrm{M}m^2}{\mathrm{M}m'^2} = \frac{p}{p'}\frac{e'^2}{e^2} = \operatorname{tang}^2\alpha,$$

où α désigne l'angle aigu, non orienté, compris entre $\mathrm{M}\Omega_1$ et la direc-

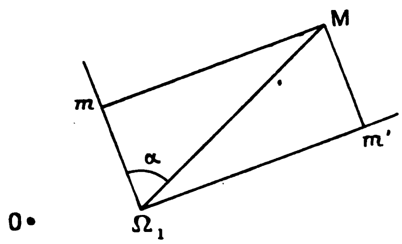

Fig. 4.

tion inconnue $\Omega_1 m$; cette équation donne pour la corde inconnue $\Omega_1 m$ deux positions, symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite donnée $\Omega_1\mathrm{M}$; *nous obtenons donc deux coniques* Γ, Γ' *répondant à la condition de passer en un point* M *donné;* comme C est bitangente à Γ et Γ' simultanément et que les deux cordes de contact passent en Ω_1, le point Ω_1 est un sommet du triangle conjugué commun à Γ et Γ', ce que nous savions déjà, et les deux cordes communes à Γ et Γ' issues de Ω_1 sont conjuguées par rapport aux deux cordes de contact; l'une des sécantes communes, $\Omega_1\mathrm{M}$, est l'une des bissectrices des cordes de contact; donc l'*autre corde commune est la perpendiculaire issue de* Ω_1 *à* $\Omega_1\mathrm{M}$ (1). Quand on a obtenu la direction de l'axe issu de O, on a l'autre axe issu de O', donc le centre ω de Γ; les foyers, au nombre de 4, sont les points où l'axe $\mathrm{O}\omega$ perce le cercle $\overline{C'}$ associé à C' et où l'axe $\mathrm{O}'\omega$ perce le cercle $\overline{C}$; comme $\overline{C}$ et $\overline{C'}$ sont orthogonaux et admettent $\mathrm{O}\omega$, $\mathrm{O}'\omega$ comme diamètres respectifs, on a aussi deux foyers réels et deux imaginaires, comme de juste (dans tous les cas,

(1) En employant un langage projectif, on peut considérer l'involution dont $\Omega_1\mathrm{I}$, $\Omega_1\mathrm{J}$, cordes communes à C et C' issues de Ω_1, sont un couple et dont $\Omega_1\mathrm{M}$ est un rayon double; la seconde corde commune à Γ et Γ', issue de Ω_1, est le second rayon double; enfin les deux cordes de contact de C avec Γ et Γ' sont un nouveau couple homologue de cette involution.

même si l'un des deux cercles C, $\overline{C'}$ est de rayon imaginaire pur), et par suite la conique Γ est parfaitement déterminée par ses foyers réels, le point M, et la valeur des excentricités.

Les résultats subsistent, sans presque de modification, si M est rejeté à l'infini : on connaît une direction asymptotique, on en déduit l'autre, puisque e, e' donnent l'angle des asymptotes ; ici, nous pouvons remarquer que *si l'on a* $e^2 = e'^2 = 2$, *les coniques* Γ *sont des hyperboles équilatères :* le point M étant alors donné à l'infini, les deux coniques Γ, Γ′ correspondantes ont mêmes directions d'asymptotes, de sorte que la droite de l'infini et l'axe radical de C, C′ sont deux cordes communes à Γ, Γ′ ; les cordes communes issues de Ω_1 sont parallèles aux asymptotes et rectangulaires, ce qui est une vérification d'un résultat trouvé plus haut ; nous remarquerons ici que le triangle Ω_1IJ est conjugué par rapport à toutes les hyperboles équilatères Γ ; ce cas est caractérisé par la relation $D^2 = 2(R^2 + R'^2)$, entre la distance des centres O, O′ et les rayons R, R′ des deux cercles.

5. Cercles focaux de même espèce. — Si C et C′ sont cercles focaux de même espèce, leur axe radical est équidistant des deux cordes de contact de C et C′ avec Γ, comme cela résulte du résultat donné plus haut sous forme projective ; on peut aussi obtenir ce résultat en appliquant la propriété qui définit le couple d'excentricité e, e' aux points où l'axe radical coupe Γ : les puissances par rapport à C et C′ sont égales, donc aussi les distances de ces points aux cordes de contact.

C et C′ étant donnés, il y a deux coniques Γ, Γ′ de cette espèce passant en un point M donné : d'après les résultats acquis au paragraphe précédent (avec indication de leur interprétation projective), les cordes communes à Γ et Γ′, perpendiculaires à OO′, sont la perpendiculaire Δ abaissée de M sur OO′ et la symétrique, Δ′, de Δ par rapport à l'axe radical de C, C′ ; les cordes de contact de C avec Γ et Γ′ sont conjuguées par rapport à Δ, Δ′ ; les deux cordes de contact de C′ avec Γ et Γ′ sont les symétriques des précédentes par rapport à l'axe radical de C et C′. Pour construire géométriquement la corde de contact de Γ avec C, supposons que l'axe des x soit la droite OO′, que l'axe radical de C et C′ soit Oy ; soit x_0 l'abscisse de M, h l'abscisse de la corde de contact de Γ avec C, on a, en appelant p, p' les puissances de M par rapport à C et C′, $\left(\frac{x_0-h}{x_0+h}\right)^2=\frac{p}{p'}$; cette équation du second degré en h donne les abscisses des cordes de contact de Γ et Γ' avec C; h et k étant ces abscisses on a

$$\frac{x_0-h}{x_0+h}=\sqrt{\frac{p}{p'}},\qquad \frac{x_0-k}{x_0+k}=-\sqrt{\frac{p}{p'}}.$$

D'autre part $\sqrt{\frac{p}{p'}}$ est, suivant le cas, représenté par le rapport des tangentes menées de M à C et C′ ou par celui des cordes de C et C′ menées par M perpendiculairement aux droites réunissant M aux centres de C et C′.

Nous pouvons remarquer que le problème : trouver la conique Γ passant par un point donné et bitangente à deux coniques données C, C′ se transforme par dualité en le problème : trouver la conique Γ tangente à une droite donnée et bitangente à deux coniques données. Il y a donc deux solutions encore pour le nouveau problème.

Terminons par quelques propriétés géométriques; cherchons le lieu des foyers des coniques Γ non situés sur OO′; si e est l'excentricité de Γ relative à l'axe OO′ et F un foyer non situé sur OO′, on sait que $OF=e'R$, $O'F=e'R'$, donc $OF:O'F=R:R'$; le lieu de F est donc le cercle dont les centres de similitude S et S′ sont les extrémités d'un diamètre; ce cercle est toujours réel et quand F décrit ce cercle, le rapport OF:R change, de sorte que, *cette fois l'excentricité des coniques Γ est variable;* le segment de OO′ compris entre S et S′ est celui où le centre ω de Γ doit se trouver pour que OO′ ne soit pas l'axe focal de Γ; il est clair que le pied de l'axe radical de C et C′ sépare les centres ω qui correspondent à une hyperbole ou à une ellipse; si ω vient en ce point, Γ se réduit à l'un des segments limités par les points communs à C et C′ (e est alors égal à l'unité, parce que la conique est infiniment aplatie, mais non parce qu'elle est une parabole; tangentiellement, elle est réduite à deux points). Avec ces remarques, on n'a plus aucune peine à indiquer le genre de la conique Γ correspondant à un centre ω donné sur OO′; il n'y a d'ailleurs qu'une conique Γ de centre ω donné : en effet, si ω est le centre de Γ, e l'excentricité relative à l'axe OO′, c le demi-écart des foyers portés par OO′, on a [formule (5)]

$$\omega O'^2 - c^2 - e'^2 R'^2 = 0, \qquad \omega O^2 - c^2 - e'^2 R^2 = 0,$$

où c^2 et e'^2 sont des quantités réelles, positives ou négatives suivant le cas, e et e' étant liés par $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$; donc la recherche de Γ revient à trouver les deux nombres λ et μ tels que

$$\omega O'^2 - \lambda R'^2 - \mu = 0, \qquad \omega O^2 - \lambda R^2 - \mu = 0,$$

En éliminant μ, on a

$$\omega O'^2 - \omega O^2 = \lambda (R'^2 - R^2);$$

on sait que, si M est le milieu du segment OO′, et p le pied de l'axe radical de C et C′, on a

$$\omega O'^2 - \omega O^2 = 2 \overline{\omega M}.\overline{OO'}, \qquad R'^2 - R^2 = 2 \overline{pM}.\overline{OO'},$$

et l'on peut écrire, pour déterminer $\lambda = e'^2$,

$$(10) \qquad e'^2 = \frac{\overline{\omega M}}{\overline{pM}}.$$

On a aussi

$$\omega O'^2 . R^2 - \omega O^2 . R'^2 = \mu (R^2 - R'^2).$$

Or les centres de similitude S, S′ donnent

$$\frac{\overline{SO}}{R} = \frac{\overline{SO'}}{R'} = \frac{OO'}{R' - R}, \qquad \frac{\overline{S'O}}{-R} = \frac{\overline{SO'}}{R'} = \frac{OO'}{R' + R},$$

$$\overline{\omega O'}.R - \overline{\omega O}.R' = (\overline{\omega S} + \overline{SO'})R - (\overline{\omega S} + \overline{SO})R' = \overline{\omega S}(R - R'),$$

$$\overline{\omega O'}.R + \overline{\omega O}.R' = (\overline{\omega S'} + \overline{S'O'})R + (\overline{\omega S'} + \overline{S'O})R' = \overline{\omega S'}(R + R').$$

On en déduit

$$(11) \qquad \mu = \overline{\omega S}.\overline{\omega S'} = c^2.$$

Les deux formules entièrement géométriques (10) et (11) donnent explicitement la nature de la conique Γ et la nature de l'axe OO′; pour achever complètement la discussion, il n'y aurait plus qu'à examiner les diverses positions relatives des deux cercles C, C′, ce qui ne présente plus aucune difficulté. Une dernière remarque : la formule (11) peut se démontrer en remarquant que $\overline{\omega S}.\overline{\omega S'}$, puissance de ω par rapport au cercle lieu de F, est aussi égale à $-\overline{\omega F}^2$, ou $\overline{F}$ est l'un des foyers de Γ non situés sur OO′, mais $\omega F^2 = -c^2$.