JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

OCTAVE GALVANI

La réalisation des connexions ponctuelles affines et la géométrie des groupes de Lie

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 25 (1946), p. 209-239.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1946_9_25__209_0>

La réalisation des connexions ponctuelles affines et la géométrie des groupes de Lie ;

PAR OCTAVE GALVANI.

Introduction.

J'ai indiqué dans ma Thèse [13] ([1]) comment on peut, en géométrie euclidienne, réaliser les espaces ponctuels à torsion au moyen de variétés plongées dans un espace euclidien à nombre suffisant de dimensions, l'élément générateur de ces variétés réalisantes étant non plus un point, mais un *élément-plan*, c'est-à-dire l'ensemble d'un point et d'un multiplan passant par ce point. De telles considérations, développées dans le cadre de la théorie des espaces non holonomes de M. Élie Cartan, sont susceptibles de s'appliquer à d'autres géométries que la géométrie euclidienne, par exemple, et c'est l'objet du présent Mémoire, à la géométrie affine.

L'examen du cas général (§§ I et II) nous montrera qu'on peut réaliser localement toute connexion ponctuelle affine à n dimensions par une variété d'*éléments bi-plans* ([2]) plongée dans l'espace affine à n^2 dimensions. Les cas particuliers d'une courbure ou d'une torsion nulle donnent lieu à des simplifications (§ III).

Le dernier paragraphe est consacré *aux connexions affines à parallélisme absolu attachées aux groupes de Lie* [4], et montre la possibilité

([1]) Les crochets renvoient à l'index bibliographique.

([2]) Un élément bi-plan est l'ensemble d'un point M et de *deux* multiplans d'intersection M.

de les réaliser, dans un espace affine à nombre suffisant N de dimensions au moyen d'une variété d'éléments bi-plans *invariante par un groupe linéaire à* N *variables*. L'existence de telles réalisations est *liée au problème de la représentation linéaire des groupes de Lie*, et sera établie comme conséquence du théorème d'Ado ([1]); mais une étude directe conduirait à un système algébrique, dont la compatibilité entraîne à la fois la réciproque du troisième théorème fondamental de Lie et le théorème d'Ado. La démonstration directe de cette compatibilité fournirait une nouvelle démonstration de ces deux importants théorèmes.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

[1] É. Cartan, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée* (*Ann. Éc. Norm.*, t. **40**, 1923, p. 325-412; t. **41**, 1924, p. 1-25; t. **42**, 1925, p. 17-88).

[2] É. Cartan, *a. Sur la connexion affine des surfaces* (*Comptes rendus*, t. **178**, 1924, p. 292); *b. Sur la connexion affine des surfaces développables* (*ibid.*, p. 449).

[3] É. Cartan, *Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien* (*Ann. Soc. Pol. Math.*, t. **6**, 1927, p. 1-7).

[4] E. Cartan, *La géométrie des groupes de transformation* (*J. Math. pures et appl.*, t. **6**, 1927, p. 1-119).

[5] Von Neumann, *Zur theorie der Darstellungen kontinuierlicher Gruppen* (*Sitzungsber. Akad. Berlin*, 1927, p. 76-90).

[6] É. Cartan, *Le troisième théorème fondamental de Lie* (*Comptes rendus*, t. **190**, 1930, p. 914 et 1005).

[7] É. Cartan, *La théorie des groupes finis et continus et l'*Analysis Situs (*Mém. des Sc. Math.*, XLII, 1930).

([1]) Ce théorème affirme l'existence, pour tout groupe de Lie, d'une représentation linéaire infinitésimalement fidèle. Il a été démontré pour la première fois par I. Ado en 1935 [**8**]. M. É. Cartan en a donné, en 1938, une démonstration plus simple [**11**].

[8] I. Ado, *Über die Darstellung der endlichen kontinuierlichen Gruppen durch lineare Substitutionen* (*Bull. Soc. Phys. Math. de Kazan*, t. 7, 1935, p. 1-41, en russe; résumé en allemand, p. 41-43).

[9] É. Cartan, *La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés* (*Exposés de Géométrie*, Paris, 1935).

[10] É. Cartan, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile* (*Cahiers Scientifiques*, t. 18, Paris, 1937).

[11] É. Cartan, *Les représentations linéaires des groupes de Lie* (*J. Math. pures et appl.*, t. 17, fasc. I, 1938).

[12] É. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques* (Paris, Hermann, 1945).

[13] O. Galvani, *Sur la réalisation des espaces ponctuels à torsion en géométrie euclidienne* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 62, 1945, pp. 1-92).

I. — Les variétés à n dimensions d'éléments bi-plans S_n^q de l'espace affine E_{n+q}.

1. M. Élie Cartan a défini la connexion intrinsèque d'une hypersurface plongée dans l'espace affine à n dimensions, par projection parallèle à la normale affine [2 *b*]. Une telle connexion est toujours sans torsion.

On serait de même amené à attacher une connexion *sans torsion* à toute variété ponctuelle, ou même, contrairement à ce qui se passait en géométrie euclidienne, à toute variété engendrée par un élément-plan, ainsi que nous le verrons au nº **8**.

Nous montrerons par la suite qu'on peut réaliser toutes les connexions ponctuelles affines à n dimensions, en prenant pour élément générateur la figure formée par un point M, un n-plan P et un q-plan Q d'intersection M. L'élément (M, P, Q) sera appelé *élément bi-plan*. Nous le représenterons par S_n^q ou S. L'hyperplan P, ou P(S) sera appelé sa *base*; Q, ou Q(S), son *support*. Nous réserverons le nom de *direction de l'élément* à la direction du support, et quand il s'agira de celle de P, nous parlerons de la *direction de base* de Ş.

Nous allons définir la *connexion ponctuelle* d'une variété V_n à n dimensions d'éléments bi-plans plongée dans E_{n+q}, la base ayant n dimensions et le support q. Nous montrerons ensuite (§ II) que toutes les connexions affines E'_n sont susceptibles d'être ainsi localement réalisées.

2. Repères affines. — Rappelons que, dans l'espace affine E_N à N dimensions, on peut prendre pour repère, et nous le ferons toujours par la suite, la figure formée par un point M et N vecteurs $\vec{e}_s (s \leqq N)$ issus de ce point : on l'appellera repère affine, soit $R = M\vec{e}_s$. Les composantes relatives ω_s, ω_{st} d'un tel repère R vérifient les relations ([1])

$$dM = \omega_s \vec{e}_s, \tag{1}$$

$$d\vec{e}_s = \omega_{st} \vec{e}_t, \qquad (s, t \leqq N). \tag{2}$$

Ce sont les mêmes relations qu'en géométrie euclidienne, mais on n'a plus ici des ω_{st} antisymétriques.

Les repères R dépendent des N(N+1) paramètres z de l'affinité qui amène en R un repère de base $R_0 = M^0 \vec{e}_s^{\,0}$ arbitrairement choisi. On définira ces paramètres par

$$M = M^0 + z_s \vec{e}_s^{\,0}, \tag{3}$$

$$\vec{e}_s = z_{st} \vec{e}_t^{\,0}. \tag{4}$$

Les ω sont des formes bien déterminées [9] des z, dz, et sont analytiques par rapport aux z.

Rappelons enfin les équations de structure de E_N :

$$\begin{array}{ll} [\omega_s] & \Omega_s \equiv \omega'_s - [\omega_t \, \omega_{ts}] = 0 \\ [\omega_{st}] & \Omega_{st} \equiv \omega'_{st} - [\omega_{sh} \, \omega_{ht}] = 0 \end{array} \qquad (s, t, h \leqq N).$$

([1]) Nous adoptons dans ce travail la convention, maintenant usuelle, qui consiste à supprimer le signe Σ de sommation devant une expression qui contient deux fois l'indice par rapport auquel se fait la sommation.

3. Les éléments S_n^q de E_{n+q} dépendent de

$$\nu_n^q = 2nq + n + q \text{ paramètres (soient } y^1, \ldots, y^\nu).$$

On peut attacher à tout élément S_n^q de E_{n+q} des repères affines $R(S)$ ayant pour origine le centre $M(S)$ de l'élément, et dont les n premiers vecteurs $\vec{e}_i (i \leq n)$ sont dans $P(S)$, les q derniers $(\vec{e}_\alpha, \alpha > n)$ dans $Q(S)$. Les $R(S)$ ainsi définis se déduisent les uns des autres (pour un élément S donné) par les affinités Θ qui conservent l'élément, c'est-à-dire par les « rotations affines autour de M » (affinités conservant M) définies par les équations

$$\vec{e}'_i = a_{ij}\vec{e}_j, \qquad \vec{e}'_\alpha = a_{\alpha\beta}\vec{e}_\beta.$$

Les rotations Θ_i pour lesquelles les $a_{\alpha\beta}$ sont tous nuls, sauf $a_{\alpha\alpha} = 1$, conservent point par point le support Q : ce sont les « rotations affines autour de Q ». De même les Θ_α pour lesquelles $a_{ii} = 1$, $a_{ij} = 0$ si $j \neq i$, sont les rotations affines autour de P.

Les Θ dépendent de $n^2 + q^2$ paramètres λ. La famille des $R(S)$ attachés à un élément fixe a pour composantes relatives

$$\omega_i = \omega_\alpha = \omega_{i\alpha} = \omega_{\alpha i} = 0; \qquad \omega_{ij}, \ \omega_{\alpha\beta} \text{ arbitraires.}$$

4. Si les y sont des fonctions de n variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$, les éléments S de paramètres y forment une variété V_n^q, ou V, à n dimensions. Nous nous bornerons à étudier des variétés V *analytiques*, c'est-à-dire telles qu'on puisse attacher à tout élément S de V un repère $R^0(S)$ dont les paramètres z soient fonctions analytiques des u (*cf.* [13], n° **80**).

La variété V sera dite *ordinaire* si $M(S)$ décrit une variété Σ (ponctuelle), à n dimensions, à laquelle aucune droite de Q n'est tangente. Nous ne considérerons que des variétés analytiques ordinaires.

Les repères $R(S)$ sont les repères d'ordre zéro de V. Les composantes ω_i, ω_α, $\omega_{i\alpha}$, $\omega_{\alpha i}$ sont les composantes principales d'ordre zéro. Elles sont nulles quand S est fixe, et ne dépendent pas des $d\lambda$. La variété étant à n dimensions, n d'entre elles sont indépendantes.

Les $R^0(S)$ constituent une famille analytique d'ordre zéro : ses composantes relatives sont des formes en u, du, analytiques par rapport aux u.

La condition nécessaire et suffisante pour que V soit ordinaire, est que l'on ait sur V (*cf.* [13], n° **80**)

$$[\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n] \neq 0. \tag{1}$$

5. L'effet des rotations affines Θ_i ou Θ_α sur les composantes relatives donne lieu aux mêmes remarques qu'en géométrie euclidienne ([13], n° **81**). Soit une famille analytique $\mathcal{F}$ d'ordre zéro, de composantes ω, et soit $\tilde{\mathcal{F}}$ la famille qui s'en déduit par une rotation $\Theta_i(u)$ donnée, de coefficients a_{ij} (n° **3**), $\tilde{\omega}$ ses composantes relatives.

1° On a

$$\tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha, \qquad \tilde{\omega}_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta}.$$

2° Les $\tilde{\omega}_i$ et $\tilde{\omega}_{ij}$ s'expriment linéairement en fonction de ω_i, ω_{ij}, da_{ij}. Ces expressions sont les mêmes que dans une rotation Θ_i de mêmes coefficients effectuée dans l'espace affine à n dimensions sur une famille de repères de cet espace ayant pour composantes relatives ω_i, ω_{ij}.

De même avec Θ_α. On a alors

$$\tilde{\omega}_i = \omega_i, \qquad \tilde{\omega}_{ij} = \omega_{ij}.$$

6. Connexion ponctuelle induite sur V. — Sa définition est analogue à celle qu'on a donnée en géométrie euclidienne [13]. La *carte intrinsèque de* V se définira de la manière suivante :

1° La *carte infinitésimale* $\gamma(S)$ représentera tout élément S′ voisin de S par la projection m' de son centre M(S′), parallèlement au support Q(S) de S, sur la base P de l'élément S. Cette correspondance est biunivoque si la variété est ordinaire.

2° Le *raccordement* se fera en amenant tout point de P(S′) en sa projection sur P(S) [parallèlement à Q(S)], opération qui est bien une transformation affine. Il n'y a évidemment ici aucune condition métrique à vérifier comme dans le cas euclidien.

On prendra dans toute base P(S) un repère affine à n dimensions $\rho(S)$. La projection de $\rho(S')$ sur P(S) parallèlement à Q(S) donne le repère $\rho_S(S')$. Le raccordement consiste à amener $\rho(S')$ en $\rho_S(S')$. Toutes ces opérations sont intrinsèques.

En assimilant tout élément S′ voisin de S à la projection de son centre dans P(S), et en définissant par la loi précédente le raccordement des voisinages de S′ et de S, on fait de V un espace ponctuel à connexion affine à n dimensions. Cet espace admet pour carte la carte intrinsèque de V.

7. Composantes de la connexion ponctuelle de V. — Reprenons la famille $\mathcal{F}$ de repères d'ordre zéro. Soit $M\vec{e}_i\vec{e}_\alpha$ le repère R(S) attaché à S. Prenons pour $\rho(S)$ le repère $(M\vec{e}_i)$. Soit $m'\vec{\varepsilon}_i$ le repère $\rho_S(S')$. Les composantes ϖ_i, ϖ_{ij} de la connexion induite vérifient

$$m' = M + \varpi_i \vec{e}_i, \tag{1}$$

$$\vec{\varepsilon}_i = \vec{e}_i + \varpi_{ij}\vec{e}_j. \tag{2}$$

On a d'autre part dans $\mathcal{F}$, en désignant par $M'\vec{e}'_i\vec{e}'_\alpha$ le repère R(S′)

$$M' = M + \omega_i \vec{e}_i + \omega_\alpha \vec{e}_\alpha, \tag{3}$$

$$\vec{e}'_i = \vec{e}_i + \omega_{ij}\vec{e}_j + \omega_{i\alpha}\vec{e}_\alpha. \tag{4}$$

En identifiant $m'\vec{\varepsilon}_i$ à la projection parallèlement à Q(S) dans P(S) de $M'\vec{e}'_i$, il vient

$$\boxed{\varpi_i = \omega_i \;\Big|\; \varpi_{ij} = \omega_{ij}.}$$

La remarque du n° 5 permet de vérifier que la connexion induite ne dépend pas de la famille de repères d'ordre zéro choisie. Nous énoncerons comme en géométrie euclidienne (moyennant une définition analogue de composantes latérales) :

Théorème. — *Les composantes relatives de la connexion ponctuelle de* V *sont les composantes latérales d'ordre zéro de* V.

La condition (4.1) qui exprime que V est ordinaire, entraîne celle qui exprime que les ϖ définissent une connexion ponctuelle à n dimensions, à savoir : $[\varpi_1\varpi_2\ldots\varpi_n] \neq 0$.

8. D'après les équations de structure rappelées au n° **2**, on trouve pour les tenseurs de courbure et de torsion

$$\overline{\Omega_i} = [\omega_\alpha \ \omega_{\alpha i}] = T_{ihk}[\omega_h \omega_k] \qquad \text{(torsion)}.$$

$$\overline{\Omega_{ij}} = [\omega_{i\alpha} \omega_{\alpha j}] = R_{ijhk}[\omega_h \omega_k] \qquad \text{(courbure)}.$$

Cas particuliers. — La connexion d'une hypersurface [2 *b*] est un cas particulier de la précédente : c'est celui où Q est la normale affine ($q = 1$) au lieu de M. Donc

$$\omega_{n+1} = 0$$

et la torsion est nulle.

Ce n'est pas le cas le plus général (même pour une V_n^1) où l'on ait une torsion nulle. Il suffit en effet pour cela que tous les ω_α soient nuls, donc que P(S) soit tangent en M(S) au lieu Σ de M. Nous dirons pour abréger qu'alors la variété est une *variété tangente*.

La connexion intrinsèque d'une variété $\overline{V}$ d'*éléments-plans* $\overline{S}$ se définirait comme celle de la variété V tangente d'éléments bi-plans *adjointe à* $\overline{V}$, l'élément générateur de V admettant pour centre et support ceux de $\overline{S}$, et pour base le n-plan tangent en M($\overline{S}$) au lieu de ce point. Une telle connexion est toujours dépourvue de torsion. Nous verrons au n° **18** qu'on réalise ainsi la connexion sans torsion la plus générale.

II. — La réalisation des connexions ponctuelles affines.

9. Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Tout espace ponctuel à connexion affine à n dimensions est localement réalisable par une variété à n dimensions d'éléments bi-plans $S_n^{n^2-n}$ plongée dans l'espace affine à n^2 dimensions.*

Comme en géométrie euclidienne, il peut se faire que, même dans le cas général, la réalisation soit possible dans un espace à moins de n^2 dimensions. Nous ne nous préoccuperons pas de cette question; nous nous bornerons d'autre part exclusivement au point de vue local.

La définition de la connexion induite nous donne immédiatement un système différentiel qui exprime qu'un espace E'_n donné est réalisable par une variété V de E_{n+q}. Nous montrerons qu'il suffit, pour que ce système soit en involution, de prendre $q = n(n-1)$. Nous emploierons la même méthode qu'en géométrie euclidienne [13]; certaines parties de la démonstration, qui ne donneraient lieu à aucune modification, ne seront pas répétées.

10. Se donner une connexion (E'_n) c'est se donner, en fonction de n variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$, et de leurs différentielles, les composantes relatives ϖ_i, $\varpi_{ij}(i, j \leqq n)$ de la connexion, c'est-à-dire $n(n+1)$ formes de Pfaff que l'on peut d'ailleurs prendre tout à fait arbitrairement pourvu que

$$|\varpi_1 \varpi_2 \ldots \varpi_n| \neq 0. \tag{1}$$

Nous les supposerons analytiques. On peut les considérer comme les composants d'un repère affine $\overline{R}$ à n dimensions idéalement attaché à tout point de (E'_n); une rotation arbitraire $\Theta_i(u)$ de ces repères les remplacerait par des repères $\overline{R}^*$ de composantes ϖ_i^*, ϖ_{ij}^*. Nous nous bornerons à des $\Theta_i(u)$ analytiques (en u).

Réaliser localement l'espace (E'_n), c'est associer à tout point u d'un certain voisinage E'_n de cet espace, un élément S''_n de l'espace affine à $n+q$ dimensions, tel qu'une famille de repères d'ordre zéro de la variété V engendrée par S''_n ait pour composantes latérales

$$\omega_i = \varpi_i, \qquad \omega_{ij} = \varpi_{ij}. \tag{2}$$

La condition (1) montre qu'on a alors une variété ordinaire.

Cette réalisation associe à tout point u un repère R de E_{n+q}; or, dans E_{n+q}, R est défini par $N = (n+q)(n+q+1)$ paramètres z et les ω_i sont des formes bien connues de ces paramètres (n° **2**). Les équations (2) constituent ainsi un système différentiel

$$\omega_i(z, dz) = \varpi_i(u, du), \qquad \omega_{ij}(z, dz) = \varpi_{ij}(u, du),$$

aux fonctions inconnues z des variables indépendantes u. Nous le désignerons par

$$\sigma(z, u) \equiv \sigma(\omega, \varpi).$$

Toute solution de σ fournit une variété réalisant E'_n.

Nous désignerons par $\Sigma(\omega, \varpi)$ le système fermé obtenu en

adjoignant à σ les équations qui s'en déduisent par dérivation extérieure.

11. Comme en géométrie euclidienne ([13], n° **90**), le système transformé de σ par une Θ_i est

$$\sigma^*(z^*, u) \equiv \sigma[\omega(z^*), \varpi^*],$$

en désignant par z^* les paramètres du repère qui se déduit de $R(z)$ par la « rotation affine » Θ_i portant sur les n vecteurs $\vec{e}_i$. Cela résulte de la remarque du n° **5**, et permet de vérifier en passant que les divers systèmes σ obtenus en partant des divers choix possibles de repères de E′ conduisent bien aux mêmes variétés V.

Le transformé de Σ par Θ_i est par suite le système

$$\Sigma^* \equiv \Sigma(\omega, \varpi^*),$$

correspondant aux repères $\overline{R}^*$ déduits de $\overline{R}$ par la rotation Θ_i.

Comme en géométrie euclidienne, nous prendrons pour paramètres directeurs d'un élément linéaire de l'espace des (u, z), les quantités $\varpi_i (i \leqq n)$ et les ω, et nous introduirons :

1° Les éléments linéaires intégraux ε_i dont les n premiers paramètres directeurs vérifient

$$(\varepsilon_i) \qquad \varpi_i \neq 0, \qquad \varpi_j = 0 \qquad (j \neq i, j \leqq n).$$

2° Les éléments intégraux à p dimensions I_p^0 contenant p éléments ε_i, *avec* $i \leqq p$.

Les considérations relatives à l'effet, en géométrie euclidienne (*cf.* [13], n° **93**), des rotations Θ_i sur les éléments intégraux I_p à p dimensions de Σ, sont valables sans changement en géométrie affine, et par suite conduisent encore aux conditions d'involution B ([13], n° **94**), dont nous reproduisons l'énoncé (1) :

Conditions B (suffisantes pour que Σ soit en involution). — *a. Par le*

(1) Ces conditions B se déduisent de la condition générale A (existence pour $p \leqq n$ d'éléments intégraux I_p passant par l'élément intégral I_{p-1} générique (*cf.* [12]), par le raisonnement donné dans [13], au n° 94. Ce raisonnement est basé sur l'effet des Θ_i sur les I_p et est valable ici sans aucune modification.

point intégral générique passe un élément linéaire intégral. b. Pour le repère générique de E'_n *et l'élément* I^0_p *générique, où* $p \leqq n-1$, *il existe un élément* ε_{p+1} *en involution avec* I^0_p.

12. Expression analytique de la condition B. — 1° Remarquons que, les u variant dans un domaine E'_n où $[\varpi_1 \varpi_2 \ldots \varpi_n] \neq 0$, en tout point (u, z) la condition (B, a) est vérifiée, car σ laisse arbitraire $\varpi_1 \ldots \varpi_n$, d'où l'existence d'éléments linéaires intégraux (introduisant exactement $n-1$ relations entre les du).

2° Les équations de fermeture de σ sont (*cf.* n° **8**) :

$$[\omega_\alpha \, \omega_{\alpha i}] = T_{ihk}[\omega_h \omega_k], \tag{1}$$

$$[\omega_{i\alpha} \omega_{\alpha j}] = R_{ijhk}[\omega_h \omega_k]. \tag{2}$$

3° Un élément linéaire ε_h a pour paramètres directeurs (à un facteur constant près)

$$(\varepsilon_h) \quad \begin{cases} \varpi_h = 1, \quad \varpi_j = 0 \quad (j \neq h, j \leqq n); \quad \omega_{ij} \text{ imposé par } \omega_{ij} = \varpi_{ij}, \\ \omega_\alpha = a_{\alpha h}, \quad \omega_{i\alpha} = a_{i\alpha h}, \quad \omega_{\alpha i} = b_{\alpha i h}, \quad \omega_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta h}. \end{cases}$$

Considérons un repère *euclidien* auxiliaire formé de q vecteurs $\vec{u}_\alpha$ rectangulaires entre eux (dans un espace euclidien à q dimensions) et posons (*cf.* [3])

$$a_{\alpha h} \vec{u}_\alpha = \vec{a}_h, \qquad a_{i\alpha h} \vec{u}_\alpha = \vec{a}_{ih}, \qquad b_{\alpha i h} \vec{u}_\alpha = \vec{b}_{ih}. \tag{3}$$

Un élément ε_h est bien défini par les vecteurs $\vec{a}_h$, $\vec{a}_{ih}$, $\vec{b}_{ih}$ et les $a_{\alpha\beta h}$ $(i \leqq n)$.

4° Un élément I^0_p est défini par p éléments $\varepsilon_h (h \leqq p)$, donc par les vecteurs et les nombres précédents, avec $h \leqq p$, $i \leqq n$.

Les équations (1), (2) qui expriment que ε_{p+1} est en involution avec I^0_p (c'est-à-dire avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$) s'écrivent $\left(\vec{a} . \vec{b} = \text{produit scalaire}\right)$:

$$(U_p) \quad \begin{cases} (4) \quad \vec{a}_h \, \overrightarrow{b_{i\,\overline{p+1}}} - \overrightarrow{a_{p+1}} \, \vec{b}_{ih} = T_{ih\,\overline{p+1}} \\ (5) \quad \vec{a}_{ih} \, \overrightarrow{b_{j\,\overline{p+1}}} - \overrightarrow{a_{i\,\overline{p+1}}} \, \vec{b}_{jh} = R_{ijh\,\overline{p+1}} \end{cases} \qquad (h \leqq p, \ i \leqq n).$$

La recherche des ε_{p+1} en involution avec I^0_p, se ramène à la résolution de U_p par rapport aux vecteurs inconnus $\overrightarrow{a_{p+1}}$, $\overrightarrow{a_{i\overline{p+1}}}$, $\overrightarrow{b_{i\overline{p+1}}}(i \leqq n)$. Les $a_{\alpha\beta\overline{p+1}}$ *restent tous arbitraires.*

13. Résolution du système U_p.

I. *Si les b_{ih} de I_p^0 sont indépendants, le système U_p est compatible* (condition suffisante). — On peut en effet prendre arbitrairement les $\overrightarrow{b_{i\overline{p+1}}}$. Les équations U_p définissent alors chacun des autres vecteurs inconnus $\overrightarrow{a_{p+1}}$, $\overrightarrow{a_{i\overline{p+1}}}$, par ses projections sur les $\overrightarrow{b_{ih}}$, et l'indépendance de ces derniers entraîne la compatibilité de U_p.

II. *Si les $\overrightarrow{b_{ih}}$* de I_p^0 *sont indépendants, et si*

$$q \geqq n(p+1),$$

on peut prendre les $\overrightarrow{b_{i\overline{p+1}}}$ indépendants entre eux et indépendants des $\overrightarrow{b_{ih}}$.

En effet, les $\overrightarrow{b_{i\overline{p+1}}}$ peuvent être pris arbitrairement, et le nombre total des vecteurs $\overrightarrow{b_{i\overline{p+1}}}$, $\overrightarrow{b_{ih}}$ n'excède pas le nombre q de dimensions de l'espace des $\overrightarrow{u_\alpha}$.

14. Application a la condition B. — Elle est vérifiée si tous les $U_p(p \leqq n-1)$ sont compatibles. Pour pouvoir appliquer la condition suffisante (13, I), il faut que le nombre $n(n-1)$ des $\overrightarrow{b_{ih}}$ de I_{n-1}^0 ne dépasse pas q.

1° Lemme. — *Si $q = n(n-1)$, l'élément I_p^0 générique a, pour $p \leqq n-1$, ses vecteurs $\overrightarrow{b_{ih}}$ indépendants.*

a. La propriété est vraie pour $p = 1$: par tout point (u, z) passent des ε_1 pour lesquels les vecteurs $\overrightarrow{b_{i1}}$ sont arbitraires ; et leur nombre ne dépasse pas q [1].

b. Si la propriété est vraie pour $p = p'$, elle l'est pour $p = p'+1$, à condition toutefois que $p'+1 \leqq n-1$. En effet, l'élément $I_{p'+1}^0$ générique contient un élément $I_{p'}^0$ qui est lui-même générique, donc qui a

[1] $n < q$ pour $n > 2$. Pour $n = 2$, $n = q$; et le paragraphe *a* suffit pour le lemme.

(hypothèse de récurrence) ses $\overrightarrow{b_{ih}}$ indépendants. Si $q \geqq n(p'+1)$, soit $p'+1 \leqq n-1$, toute relation entre les $\overrightarrow{b_{ih}}$, $\overrightarrow{b_{ip'+1}}$ est d'après (13, II), une égalité superflue : $I^0_{p'+1}$ a donc ses $\overrightarrow{b_{ih}}(h \leqq p'+1)$ indépendants.

c. Cette récurrence démontre le lemme pour $p'+1 \leqq n-1$.

C. Q. F. D.

2° *Conclusion*. — Il résulte du lemme et de (13, I) que U_p est compatible pour $p \leqq n-1$. La condition B est donc vérifiée, et Σ est en involution. D'où le théorème de réalisation du n° **9**.

Aucune restriction à l'existence d'un I_{p+1} passant par I_p n'est introduite par le choix du repère $\overline{R}$, ni par celui du point (u, z); *au voisinage de tout point de* E'_n *il existe une réalisation de* E'_n.

15. Degré d'arbitraire de la solution générale (*cf.* [12]). — Le nombre des I_n passant par l'élément I_{n-1} générique est égal à celui des ε_n en involution avec l'I^0_{n-1} générique; le nombre des $\overrightarrow{b_{ih}}$ de cet I^0_{n-1} est $n(n-1)=q$, et les $\overrightarrow{b_{in}}$ étant choisis arbitrairement, les vecteurs $\overrightarrow{a_n}$, $\overrightarrow{a_{in}}$ sont bien déterminés. Donc, pour ε_n, les

$$\nu = n^2(n-1) \tag{1}$$

paramètres des $\overrightarrow{b_{in}}$ sont arbitraires, ainsi que les ν_1 quantités $a_{\alpha\beta n}$.

Comme en géométrie euclidienne, les ν_i fonctions arbitraires provenant du choix des $a_{\alpha\beta n}$ correspondent à des rotations Θ_α des repères des variétés réalisantes; conséquence :

Les variétés réalisantes dépendent de $\nu = n^2(n-1)$ ***fonctions arbitraires des*** u.

Ce nombre correspond d'ailleurs à la différence $X - Y$ entre le nombre

$$X = n^2(n+1) - n^2 = n^3 \tag{2}$$

de fonctions des u dont dépend E'_n, et le nombre

$$Y = n + q + 2nq \tag{3}$$

de fonctions des u dont dépend une V_n^q. On a, en effet, pour $q = n(n-1)$

$$Y = n + n(n-1)(2n+1) = n^3 + n^2(n-1).$$

16. Classe des espaces a connexion affine. — Ce sera par définition (*cf.* [13], n° **100**) le plus petit entier r tel que l'espace E'_n donné soit localement réalisable dans l'espace affine E_{n+r} à $n+r$ dimensions (par une variété V_n^r). Elle ne saurait dépasser $n(n-1)$.

Rien ne prouve d'ailleurs que, même dans le cas général, elle atteigne cette valeur; X et Y étant les nombres définis au numéro précédent, il pourrait suffire, *a priori*, de prendre q vérifiant $Y \geqq X$, soit

$$q \geqq \frac{n(n^2-1)}{2n+1},$$

La classe ne saurait, du moins dans le cas général, être inférieure au quotient par excès de $n(n^2-1)$ par $2n+1$. Ce quotient est visiblement supérieur à $\frac{n(n-1)}{2}$, et *la valeur maxima de la classe des espaces de Riemann ne s'étend pas aux espaces à connexion affine.*

III. — Cas particuliers : espaces sans courbure et espaces sans torsion.

17. Les connexions affines a parallélisme absolu. — Ce sont les connexions pour lesquelles on a $\overline{\Omega_{ij}} = 0$. On a alors une forte réduction de la classe, *qui tombe, dans le cas général à $r = n - 1$ au plus,* ainsi que nous allons le voir.

1° On peut choisir les composantes de E′ de façon que tous les ϖ_{ij} soient nuls. Les changements de repères autorisés, c'est-à-dire conservant cette propriété, correspondent aux Θ_i constantes, c'est-à-dire indépendantes des u. Ces Θ_i nous permettent encore de transformer tout élément intégral I_p à p dimensions en un élément I_p^0 d'un système Σ^*, et l'on a encore la condition B d'involution.

Si l'on impose aux repères de la variété réalisante la condition

$$\omega_{i\alpha} = 0 \qquad (i \leqq n, \ \alpha > n),$$

on aura le système différentiel $\sigma_1(\omega, \varpi)$

$$(1) \qquad \omega_i = \varpi_i,$$

$$(2) \qquad \omega_{ij} = \omega_{i\alpha} = 0.$$

La remarque sur l'effet des Θ_i s'étend au système σ_1, et au système fermé Σ_1 correspondant, ainsi que la condition B.

2° Les équations dérivées de (2) sont alors

$$[\omega_{ih}\omega_{hj}] + [\omega_{i\beta}\omega_{\beta j}] = 0,$$
$$[\omega_{ih}\omega_{h\alpha}] + [\omega_{i\beta}\omega_{\beta\alpha}] = 0,$$

et sont conséquences de (2). Les seules équations de fermeture sont donc celles qui résultent de la dérivation de (1)

$$(4) \qquad [\omega_\alpha \omega_{\alpha i}] = T_{ihk}[\varpi_h \varpi_k].$$

L'élément ε_{p+1} en involution avec I_p^0, est assujetti seulement à vérifier

$$(5) \qquad \vec{a}_h \overrightarrow{b_{i\overline{p+1}}} - \overrightarrow{a_{p+1}}\, \vec{b}_{ih} = T_{ih\overline{p+1}} \qquad (h \leqq p, i \leqq n).$$

On prendra alors arbitrairement le vecteur $\overrightarrow{a_{p+1}}$; les $\overrightarrow{b_{i\overline{p+1}}}$ sont donnés par leurs projections sur les $\vec{a}_h$; on aura une solution si (condition suffisante) les $\vec{a}_h$ sont linéairement indépendants. Ils sont au nombre de p.

3° Pour que ceci soit possible pour $p = n - 1$, il faut que l'espace des $\vec{u}_\alpha$ ait au moins $n - 1$ dimensions. Si $q = n - 1$, le raisonnement fait dans le cas général montre que pour l'élément I_p^0 générique, avec $p \leqq n - 1$, les vecteurs $\vec{a}_h$ sont indépendants; (5) est alors compatible, *et Σ_1 est en involution.*

4° Le nombre d'éléments intégraux I_n passant par I_{n-1} est celui des ε_n qui vérifient (5) pour $p = n - 1$; or seul $\vec{a}_n$ est arbitraire, les $\vec{b}_{in}$ étant ensuite bien déterminés par leurs projections sur $n - 1$ vecteurs; d'où

$$\nu = n - 1$$

fonctions arbitraires. Comme précédemment, le fait que les $a_{\alpha\beta n}$ soient arbitraires correspond aux rotations Θ_α, et n'intervient pas dans le degré d'arbitraire de la solution générale, si l'on considère comme identiques deux solutions donnant la même variété V. D'où la conclusion :

THÉORÈME. — *Les espaces à parallélisme absolu à n dimensions sont localement réalisables, dans un espace affine à* $2n-1$ *dimensions, par des variétés d'éléments bi-plans à directions de base fixe* ([1]). *La solution générale (géométrique) dépend de* $n-1$ *fonctions arbitraires des u.*

5° *Classe des espaces à parallélisme absolu.* — Une variété V_n^q dont la base des éléments a une direction fixe peut être définie par une variété d'*éléments-plans*, soit W, et une direction de bases donnée. Les variétés W dépendent de

$$Y_1 = n + q + nq$$

fonctions des u, et il en est par suite de même des V_n^q considérées ([2]).

D'autre part un E'_n dépend, s'il est à parallélisme absolu, de n^2 fonctions des u

$$X_1 = n^2.$$

On sait que la classe ne peut dépasser $n-1$. Dans le cas général, une borne inférieure est donnée par $Y_1 \geqq X_1$, soit

$$q \geqq \frac{n^2-n}{n+1}.$$

Or,

$$(n-2)(n+1) = n^2 - n - 2 < n^2 - n,$$

et la classe est supérieure à $n-2$ (égalité exclue); conclusion :

La classe des espaces à parallélisme absolus à n dimensions, est, dans le cas général, égale à $n-1$, *du moins en ce qui concerne la réalisation par une variété à base de direction fixe.* Si l'on impose pas cette condition aux variétés réalisantes, la classe est donc *au plus* égale à $n-1$.

Remarquons enfin qu'on a bien, pour $q = n-1$, la relation $Y_1 - X_1 = \nu$.

([1]) Puisque $\omega_{ij} \equiv \omega_{i\alpha} \equiv 0$, $d\vec{e}_i \equiv 0$, les $\vec{e}_i$ restent équipollents à eux-mêmes, et leur n-plan a une direction fixe.

([2]) C'est aussi le nombre des composantes principales non nulles (ω_i, ω_α, $\omega_{\alpha i}$)

18. LES CONNEXIONS AFFINES SANS TORSION. — On a vu au n° **8**, que les variétés d'*éléments-plans*, ou, ce qui revient au même, les « variétés tangentes » ont une connexion sans torsion. Cherchons si, inversement, on peut réaliser par une variété tangente, un espace sans torsion donné; on aura alors à résoudre le système $\sigma(z, u)$

(1) $$\omega_i = \varpi_i,$$
(2) $$\omega_{ij} = \varpi_{ij},$$
(3) $$\omega_\alpha = 0,$$

auquel s'étendent les remarques concernant les rotations Θ_i et la condition B.

Les équations dérivées de (1) sont

$$[\omega_\alpha \omega_{\alpha i}] = 0 \qquad \text{(torsion nulle)}$$

et sont conséquences de (3). Restent, comme équations de fermeture

(4) $$[\omega_{i\alpha}\omega_{\alpha j}] = R_{ijhk}[\varpi_h \varpi_k],$$
(5) $$[\omega_i \omega_{i\alpha}] = 0.$$

Elles donnent pour l'élément ε_{p+1} en involution avec un I_p^0 donné, le système

$$(U'_p) \quad \begin{cases} (6) & \overrightarrow{a_{ih}}\,\overrightarrow{b_{jp+1}} - \overrightarrow{a_{ip+1}}\,\overrightarrow{b_{jh}} = R_{ijhp+1} \\ (7) & \overrightarrow{a_{hp+1}} = \overrightarrow{a_{p+1h}} \end{cases} \qquad (i, j \leqq n,\ h \leqq p).$$

1° Posons (*cf.* [3])

$$\{hjkl\} \equiv \overrightarrow{a_{hk}}\,\overrightarrow{b_{jl}} - \overrightarrow{a_{hl}}\,\overrightarrow{b_{jk}} - R_{hjkl}.$$

Les équations (6) s'écrivent alors

(6′) $$\{hjkl\} = 0.$$

On a dans l'espace E'_n donné les relations (dérivation de $\overline{\Omega_i} = 0$; *cf.* [1])

(8) $$R_{hjkl} + R_{kjlh} + R_{ljhk} = 0.$$

et les relations (7) et (8) ont pour conséquence

(9) $$\{hjkl\} + \{kjlh\} + \{ljhk\} \equiv 0.$$

2° Dans I_p^0 les relations $\{ijkl\} = 0$ pour $k, l \leqq p$ et $i, j \leqq n$ sont vérifiées, et l'on a en particulier

$$(10) \qquad \{\overline{p+1}jih\} = 0 \qquad \text{pour} \quad i \leqq p,\ h \leqq p.$$

L'équation $\{ijh\overline{p+1}\} = 0$ résulte donc de (9), (10) et de

$$(11) \qquad \{hji\overline{p+1}\} = 0 \qquad (= -\{hj\overline{p+1}i\}).$$

Il suffit donc que soient vérifiées *pour* $i \leqq p$ les équations $\{ijh\overline{p+1}\} = 0$ pour lesquelles $i \geqq h$. Pour $i > p$ toutes les équations $\{ijh\overline{p+1}\} = 0$ vérifient cette condition (puisque $h \leqq p$) et le système U'_p se réduit à

$$(U''_p) \begin{cases} (7) & \overrightarrow{a_{h\overline{p+1}}} = \overrightarrow{a_{\overline{p+1}h}} \\ (12) & \{ijh\overline{p+1}\} = 0 \end{cases} \qquad (i \geqq h,\ h \leqq p,\ i \leqq n).$$

3° *Résolution de* U''_p. — Les vecteurs $\overrightarrow{a_{h\overline{p+1}}}$ sont bien déterminés par (7). Les vecteurs $\overrightarrow{b_{j\overline{p+1}}}$ ont leurs projections sur les $\overrightarrow{a_{ih}}$, pour $i \geqq h$, données par (12), et ne sont assujettis qu'à ces relations; il suffit donc que ces $\overrightarrow{a_{ih}}$ soient indépendants pour que U''_p soit compatible. On prendra q égal au nombre maximum des $\overrightarrow{a_{ih}}$ (qui correspond à $p = n-1$), soit

$$q = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

Alors, quel que soit $p \leqq n-2$, on pourra prendre pour les $\overrightarrow{a_{i\overline{p+1}}}$, où $i \geqq p+1$, *laissés arbitraires par* U''_p, des vecteurs indépendants entre eux et indépendants des $\overrightarrow{a_{ih}}$ (où $i \geqq h$) de I^0_p. Le nombre total de ces vecteurs est en effet croissant avec p et vaut q pour $p = n-2$, donc il ne dépasse pas q. Il en résulte, comme au n° **14**, que pour l'I^0_p générique ($p \leqq n-1$), les $\overrightarrow{a_{ih}}$ où $i \geqq h$ sont indépendants : U''_p *est compatible pour* $p \leqq n-1$, *et le système différentiel est en involution.*

4° *Degré d'arbitraire.* — Pour l'élément ε_n en involution avec I^0_{n-1}, on a comme arbitraires, outre les $a_{\alpha\beta n}$, le seul vecteur $\overrightarrow{a_{nn}}$; donc $\nu = q$ fonctions arbitraires des u pour la solution générale géométrique. D'où l'énoncé :

THÉORÈME. — *Les espaces à connexion affine sans torsion à n dimensions sont réalisables par des variétés d'éléments-plans de l'espace affine à $n+q$ dimensions avec $q = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$. Les variétés réalisantes dépendent de q fonctions arbitraires des u.*

5° *Classe de ces espaces (dans le cas général).* — Elle ne peut dépasser

$$\rho_0 = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

Mais elle pourrait, *a priori*, être inférieure à cette valeur (même dans le cas général). Une variété d'éléments q-plans dépend en effet de

$$Y = n + q + nq \quad \text{fonctions des } u.$$

Un espace E'_n sans torsion dépend (1) de

$$X = \frac{n^2(n+1)}{2} \quad \text{fonctions des } u.$$

La condition $Y \geqq X$ donne pour valeur minima de la classe (dans le cas général)

$$\rho = \frac{n}{n+1} \frac{(n-1)(n+2)}{2},$$

qui peut être inférieure à $\rho_0 - 1$.

On peut encore vérifier que $q = \rho_0$ entraîne $Y - X = q = \nu$.

IV. — Les connexions affines à parallélisme absolu attachées aux groupes de Lie. Leur réalisation et la théorie de la représentation linéaire.

19. Soit un groupe de Lie Γ dont les transformations T_u dépendent de n paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_n$. M. Élie Cartan [4] attache à un tel

---

(1) D'après $\varpi'_h - [\varpi_l \varpi_{lh}] = 0$, les ϖ_{lh} dépendent de $\frac{n^2(n+1)}{2}$ fonctions des u. Les ϖ_l dépendent de n^2 fonctions des u, les « rotations affines » de $\overline{R}$ également. D'où X.

groupe deux connexions affines à parallélisme absolu, dont les composantes ϖ_{ij} sont nulles; les ϖ_i sont pour l'une les paramètres de la transformation $T_u^{-1}T_{u+du}$ (composantes relatives de Γ), pour l'autre ceux de $T_{u+du}T_u^{-1}$ (composantes absolues de Γ).

Nous considérerons seulement la première de ces deux connexions, soit $E'_n(\Gamma)$, et nous l'appellerons *la première connexion affine de* Γ. Rappelons que les composantes de la torsion de cette connexion sont les *constantes de structure* de Γ

$$\overline{\Omega}_i = \varpi'_i = c_{hki}[\varpi_h \varpi_k], \qquad \text{d'où} \quad T_{ihk} = c_{hki}, \tag{1}$$

et que la dérivation de $\overline{\Omega}_i$ (identités de Bianchi) donne les relations classiques du troisième théorème fondamental de Lie

$$c_{hki}c_{ilj} + c_{kli}c_{ihj} + c_{lhi}c_{ikj} = 0 \qquad (h, k, l, i, j \leq n). \tag{2}$$

20. D'après le paragraphe III, cette connexion est réalisable dans l'espace affine F_N à $N \geq 2n - 1$ dimensions, et l'on peut attacher à Γ, au voisinage de l'identité, une famille $\mathcal{F}$ de repères $R(u)$ de l'espace E_N, dont les n premiers vecteurs sont d'ailleurs *constants*, c'est-à-dire équipollents à des vecteurs fixes $\left[\text{les relations (17.2) donnent en effet } d\vec{e}_i = 0\right]$. A toute transformation T_u de Γ est alors attaché un repère $R(u)$ de E_N.

Soit u_0 les paramètres de la transformation identique de Γ : $T_{u_0} = I(\Gamma)$; et soit L_u la transformation linéaire qui amène $R(u_0)$ en $R(u)$ [1] : on a finalement attaché à Γ la famille des transformations linéaires L_u. Cette famille contient la transformation identique L_{u_0}, qui est l'homologue de $I(\Gamma)$, mais en général elle ne forme pas un groupe.

Réalisations homogènes-H_0. — Nous nous proposons de trouver des réalisations *telles que les* L_u *forment un groupe*. La variété réalisante

---

[1] Il existe une *affinité* bien déterminée qui amène $R(u_0)$ en $R(u)$. Cette affinité est une transformation *géométrique* de l'espace en lui-même. La transformation linéaire à laquelle nous faisons allusion ici est la transformation *analytique* (*cf.* [**9**], p. 29) obtenue en rapportant cette affinité à un repère de base ρ_0 choisi une fois pour toutes.

est alors *invariante par ce groupe*. Une telle réalisation sera qualifiée d'*homogène*. Pour abréger le langage, nous dirons qu'une réalisation homogène satisfaisant à (17,2) est *homogène*-H_0.

Une réalisation *homogène*-H_0 sera donc définie par une famille $\mathcal{F}$ de repères $R(u)$ jouissant des propriétés suivantes :

1° La réalisation locale de $E'_n(\Gamma)$ correspond à une partie de la famille $\mathcal{F}(\omega_i = \varpi_i)$; et les n premiers vecteurs $\vec{e}_i$ sont constants $(\omega_{ij} = \omega_{i\alpha} = 0)$.

2° Les L_u forment un groupe.

Nous verrons au n° **22** que les composantes relatives des $R(u)$ sont alors d'un certain type caractéristique F. Nous montrerons que, dans ces conditions, les L_u fournissent une *représentation linéaire* (infinitésimalement fidèle) de Γ.

L'existence de composantes relatives du type F équivaut à la compatibilité d'un système algébrique $H(\Gamma, N)$, et cette compatibilité se révélera non seulement suffisante, mais nécessaire pour que Γ admette une représentation linéaire infinitésimale : nous montrerons pour cela que la première connexion affine *d'un groupe linéaire* admet une réalisation homogène-H_0.

L'étude directe du système algébrique H pourrait donc donner une nouvelle démonstration du théorème d'Ado [1] sur l'existence d'une représentation linéaire des groupes de Lie. N'ayant pas résolu le système H, nous déduirons au contraire du théorème d'Ado la possibilité d'une réalisation homogène-H_0 de $E'_n(\Gamma)$, pour un groupe de Lie quelconque Γ.

21. Nous allons d'abord donner quelques définitions et notations qui nous seront utiles, et rappeler à cette occasion certaines propriétés classiques de la théorie des groupes.

1° Nous désignerons par G_m le groupe linéaire général à m variables. Les transformations T_a de G_m dépendent de $m(m+1)$ paramètres a. Ses composantes relatives sont les paramètres de la transformation

---

(1) *Cf.* [**8**] et [**11**].

$T_a^{-1} T_{a+da}$ ou des combinaisons linéaires *à coefficients constants* de ces paramètres.

Soient $R = M\vec{e}_s (s \leqq m)$ un repère affine à m dimensions, R′ un repère infiniment voisin, d'origine $M + dM$, de vecteurs de base $\vec{e}_s + d\vec{e}_s$; les composantes relatives ω_s, ω_{st} de R seront toujours définies par les relations

$$dM = \omega_s \vec{e}_s, \qquad d\vec{e}_s = \omega_{st} \vec{e}_t \qquad (s, t \leqq m).$$

Les composantes ω_s seront appelées *composantes de translation* de R.

Si T_a est la transformation qui amène en R un *repère-origine* R_0 [1], les composantes sont des formes de Pfaff des a et de leurs différentielles, et nous les désignerons suivant les besoins par ω, $\omega(a)$ ou $\omega(a, da)$. On peut les prendre pour composantes relatives de G_m. Elles vérifient les équations de structure de l'espace E_m données au n° **2**.

2° Soient γ un sous-groupe à n paramètres u de G_m, τ_u une transformation de γ. Soit R_0 un repère de E_m. On peut prendre le repère $R(u) = \tau_u R_0$ comme repère mobile de γ; les composantes $\omega(a)$ deviennent pour les $R(u)$ des formes $\omega(u)$ *qui sont de rang n*, c'est-à-dire que n d'entre elles sont indépendantes. Nous dirons aussi qu'*elles se réduisent à n d'entre elles*, soit $\varpi_i (i \leqq n)$. On peut prendre ces $\varpi_i(u)$ pour composantes relatives de γ.

3° Soit une famille Φ de repères $R(u)$ de E_m. Soit L_u la transformation qui amène en $R(u)$ un repère $R(u_0)$ arbitrairement choisi dans Φ. Si les L_u forment un groupe, nous dirons que Φ est l'image de ce groupe [le changement de repère $R(u_0)$ remplace ce groupe par une de ses automorphies]. Inversement, étant donné un groupe linéaire γ, les $R(u)$ définis au 2° en constituent une image.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille Φ de repères $R(u)$ soit l'image d'un groupe continu, est que ses composantes relatives soient liées par des relations linéaires à coefficients constants [2].

---

(1) Au sujet de cette transformation, *cf.* la note du n° **20**; le repère R_0 n'est pas forcément le repère de base ρ_0 de l'espace.

(2) *Cf.* [10], n^{os} **123** à **125**.

22. COMPOSANTES D'UNE RÉALISATION HOMOGÈNE-H_0. — Soit un groupe de Lie Γ, de composantes relatives $\varpi_i (i \leqq n)$, $E'_n(\Gamma)$ sa première connexion affine. *Pour qu'une famille $\mathcal{F}$ de repères* R(u) *de* E_N *définisse une réalisation homogène*-H_0 *de* $E'_n(\Gamma)$, *il faut et il suffit que ses composantes relatives soient du type* F(Γ) *défini par les relations suivantes, où les a désignent des constantes*

$$F(\Gamma) \text{ ou } F(\varpi) \begin{cases} (1) & \omega_i = \varpi_i \\ (2) & \omega_{ij} = \omega_{i\alpha} = 0 \\ (3) & \omega_\alpha = a_{\alpha i}\varpi_i \\ (4) & \omega_{\alpha i} = a_{\alpha ij}\varpi_j \\ (5) & \omega_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta i}\varpi_i \end{cases} \qquad (i, j \leqq n,\ n+1 \leqq \alpha,\ \beta \leqq N).$$

En effet une réalisation homogène-H_0 est définie (n° **20**) par une famille $\mathcal{F}$ de repères R(u) jouissant des deux propriétés suivantes :

1° Les composantes ω_i, ω_{ij}, $\omega_{i\alpha}$ de R(u) vérifient

$$(1) \qquad \omega_i = \varpi_i,$$

$$(2) \qquad \omega_{ij} = \omega_{i\alpha} = 0.$$

2° $\mathcal{F}$ est l'image d'un groupe.

Cette seconde propriété équivaut (n° **21**, 3°) à l'existence de relations linéaires *à coefficients constants* entre ω_s, $\omega_{st} (s, t \leqq N)$. Or, d'après (1), les ω_i sont indépendants. Les autres ω en sont donc des combinaisons linéaires à coefficients constants, d'où la proposition ci-dessus, dont on peut encore donner l'énoncé suivant :

LEMME I. — *Les composantes relatives d'une réalisation homogène*-H_0 *de* $E'_n(\Gamma)$ *sont caractérisées par la propriété d'être du type* F(Γ).

23. Pour que des formes de Pfaff $\omega(u, du)$ du type F(Γ) ou F(ϖ) soient les composantes d'un repère de E_N, il faut et suffit qu'elles vérifient les équations de structure [ω] de E_N. Les équations [ω_{ij}] et [$\omega_{i\alpha}$] sont conséquences de (F, 2). Les autres équations fournissent le système algébrique suivant :

$$\begin{matrix} H(\Gamma, N) \\ \text{ou } H(c, N) \end{matrix} \begin{cases} a_{\alpha h}\, a_{\alpha ik} - a_{\alpha k} a_{\alpha ih} = c_{hki} \\ a_{\beta h}\, a_{\beta\alpha k} - a_{\beta k} a_{\beta\alpha h} = a_{\alpha i} c_{hki} \\ a_{\alpha\beta h} a_{\beta ik} - a_{\alpha\beta k} a_{\beta ih} = a_{\alpha ij} c_{hkj} \\ a_{\alpha\gamma h} a_{\gamma\beta k} - a_{\alpha\gamma k} a_{\gamma\beta h} = a_{\alpha\beta i} c_{hki} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} h, k, i, j \leqq n, \\ n < \alpha,\ \beta,\ \gamma \leqq N \end{pmatrix}.$$

D'où la conclusion suivante :

Lemme II. — *Pour que des formes de Pfaff du type* $F(\Gamma)$ *soient les composantes d'un repère mobile de l'espace* E_N, *il faut et suffit que les constantes a qui les définissent vérifient le système algébrique* $H(\Gamma, N)$.

Le groupe Γ n'intervient dans H que par ses constantes de structure. Deux groupes infinitésimalement isomorphes ont donc mêmes systèmes H. On désignera aussi le système H par $H(c, N)$, c représentant un système de constantes c_{hki}.

24. Lemme III. — *Soit un système de formes* $\varpi_i(u, du)$ *vérifiant*

$$\varpi'_i = c_{hki}[\varpi_h \varpi_k]. \tag{1}$$

S'il existe dans E_N *une famille* $\mathcal{F}$ *de repères* $R(u)$ *dont les composantes relatives sont du type* $F(\varpi)$, *elle est l'image d'un groupe linéaire* g *dont les constantes de structure sont les* c_{hki}.

En effet, les ω étant liées par des relations linéaires à coefficients constants, $\mathcal{F}$ est bien l'image d'un groupe linéaire g; un système de composantes relatives de g est fourni par les composantes relatives de $R(u)$ (*cf.* n° **21**, 2°), qui se réduisent aux $\omega_i (i \leqq n)$; et par suite des relations $\omega_i = \varpi_i$, la relation (1) entraîne

$$\omega'_i = c_{hki}[\omega_h \omega_k]. \tag{2}$$

C. Q. F. D.

Corollaire I. — *Si les composantes de* $\mathcal{F}$ *sont du type* $F(\Gamma)$, $\mathcal{F}$ *est l'image d'une représentation linéaire* [1] *de* Γ.

En effet, g et Γ ont alors mêmes constantes de structure.

Corollaire II. — *Dans une réalisation homogène-*H_0, *les* L_u *forment une représentation linéaire de* Γ (d'après les lemmes I et III).

25. Théorème I. — *Si le système* $H(c, N)$ *est compatible, il existe un groupe linéaire continu à* N *variables qui admet les c comme constantes de structure.*

---

[1] Nous sous-entendons désormais presque toujours la restriction d'après laquelle la représentation n'est qu'infinitésimale.

On peut le déduire du lemme III, en construisant (1) les formes ϖ_i vérifiant (24.1) avec les c données. On peut l'établir plus directement, en remarquant que le système de Pfaff

$$(\sigma) \begin{cases} \omega_{ij} = \omega_{i\alpha} = 0 \\ \omega_\alpha = a_{\alpha i}\omega_i \\ \omega_{\alpha i} = a_{\alpha ij}\omega_j \\ \omega_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta i}\omega_i \end{cases} \qquad (i, j \leqq n, \; N \geqq \alpha, \; \beta > n),$$

établi entre les $N(N+1)$ paramètres z d'un repère de E_N, est *complètement intégrable*, si les a vérifient $H(c, N)$; car les équations de fermeture de σ sont des conséquences de σ et de H. [Ainsi

$$\omega'_\alpha = a_{\alpha i}\omega'_i \qquad \text{donne} \qquad [\omega_\beta \omega_{\beta\alpha}] = a_{\alpha i}[\omega_\beta \omega_{\beta i}],$$

soit

$$a_{\beta h}a_{\beta\alpha k} - a_{\beta k}a_{\beta\alpha h} = a_{\alpha i}(a_{\beta h}a_{\beta ik} - a_{\beta k}a_{\beta ih})$$

qui est conséquence des deux premières équations de H, etc.].

D'où l'existence, dans l'espace à $N(N+1)$ dimensions des variables z, d'une variété w à n dimensions vérifiant σ, c'est-à-dire d'une famille $\mathcal{F}$ de repères $R(u)$ image d'un groupe g. Exprimons les z d'un point courant de w en fonction de n variables u; les formes $\omega(z)$ deviennent des formes $\omega(u)$ qui se réduisent aux ω_i, et les ω_i vérifient

$$\omega'_i = [\omega_\alpha \omega_{\alpha i}] = (a_{\alpha h}a_{\alpha ik} - a_{\alpha k}a_{\alpha ih})[\omega_h \omega_k] = c_{hki}[\omega_h \omega_k].$$

C. Q. F. D,

Corollaire. — *Si* $H(\Gamma, N)$ *est compatible,* Γ *admet une représentation linéaire* à N *variables.*

C'est une conséquence immédiate, soit du théorème I, soit du lemme II et du corollaire I du lemme III.

Le théorème I et son corollaire suggèrent l'idée d'une nouvelle démonstration *du théorème d'Ado et de la réciproque du* 3e *théorème fondamental de Lie* [6], car tout groupe continu linéaire est un groupe de Lie (2). Mais une telle méthode ne peut être envisagée que si

(1) *Cf.* E. Cartan, [10], n° **205**. Cela exige les relations (19.2) entre les c; ces relations résultent de H.

(2) *Cf.* Von Neumann [5], et pour un théorème plus général E. Cartan [7].

l'existence d'un groupe linéaire de structure donnée entraîne la compatibilité du système H correspondant. C'est ce que nous allons maintenant établir.

26. Théorème II. — *La première connexion affine d'un groupe linéaire admet une réalisation homogène-*H^0.

Soit γ un groupe *linéaire* à n paramètres u et P variables. C'est un sous-groupe de G_P. Soient $\varpi_i(u, du)$ ses composantes relatives. D'après le lemme I, il s'agit de démontrer l'existence, dans un espace affine E_N, de repères $R(u)$ dont les composantes relatives soient du type $F(\varpi)$.

La démonstration se ramène aux trois points suivants :

1° On peut trouver pour γ une représentation linéaire g à $Q = P(P+1)$ variables, admettant pour image dans E_Q une famille de repères dont les *composantes de translation* [1] soient de rang n (n° **27**).

2° Opérant alors dans E_Q, nous y trouverons une image de g dont les repères $\widetilde{R}$ vérifieront $\tilde{\omega}_i = \varpi_i (i \leqq n)$ (n° **28**).

3° Enfin, à l'aide de ces formes $\tilde{\omega}_s$, $\tilde{\omega}_{st}$, nous construirons dans l'espace affine à $N = Q(Q+1)$ dimensions, un système de composantes relatives du type $F(\varpi)$ (n° **29**).

27. Soient

$$x'_s = a_{st} x_t + a_t \qquad (s, t \leqq P), \tag{1}$$

les équations de γ, les a étant fonctions de n variables indépendantes u.

Considérons le groupe g à $Q = P(P+1)$ variables x_{os}, $x_{rs} (r, s \leqq P)$ dont les transformations τ_u sont définies par les Q équations

$$(\tau_u) \begin{cases} x'_{os} = a_{st} x_{ot} + a_s \\ x'_{rs} = a_{st} x_{rt} + a_s \end{cases} \qquad (r, s, t \leqq P). \tag{2}$$

Ce groupe g est visiblement isomorphe holoédrique de γ. Considérons dans E_Q le point M_0 de coordonnées

$$M_0 \begin{cases} x_{os} = x_{rs} = 0 \qquad \text{pour} \quad r \neq s, \\ x_{ss} = 1. \end{cases}$$

---

[1] Et non plus seulement l'ensemble des composantes relatives.

Son transformé par τ_u est le point $M = \tau_u M_0$ de coordonnées

$$M \begin{cases} x_{os} = a_s, \\ x_{rs} = a_{sr} + a_s. \end{cases}$$

Soit $M + dM$ le transformé de M_0 par la transformation τ_{u+du} infiniment voisine de τ_u. Les composantes de dM sont :

$$dM \begin{cases} dx_{os} = da_s, \\ dx_{rs} = da_{sr} + du_s. \end{cases}$$

Elles sont de rang n, puisqu'il en est ainsi des da_s, da_{sr}. Donc les directions dM remplissent un n-plan. Par suite si l'on prend un repère-origine R_0 d'origine M_0, le repère $R(u) = \tau_u R_0$ a ses composantes de translations de rang n (¹). On a bien une image de g de la forme désirée.

28. Le résultat précédent n'impose rien aux vecteurs du repère R_0. Cela va nous permettre de trouver un repère $\tilde{R}_0$ d'origine M_0 tel que les composantes relatives $\tilde{\omega}_s$ $\tilde{\omega}_{st}(s, t \leqq Q)$ du repère $\tilde{R}(u) = \tau_u \tilde{R}_0$ vérifient les relations

$$\tilde{\omega}_i = \varpi_i \qquad (i \leqq n).$$

Soit $\Sigma = \tau_u^{-1}\tau_{u+du}$ une transformation infiniment petite de g, $\sigma = \theta_u^{-1}\theta_{u+du}$ son homologue dans γ, et soit $M_0 + dM_0 = \Sigma M_0$. Considérons, parmi les σ, les transformations σ_i définies par

$$(\sigma_i) \qquad \varpi_i(u, du) = \varpi, \qquad \varpi_j(u, du) = 0 \qquad (j \neq i).$$

Soit $(dM_0)_i$ la translation dM_0 correspondant à σ_i; définissons le vecteur $\vec{e}_i$ par la relation

$$(dM_0)_i = \varpi \vec{e}_i.$$

(¹) Il n'en serait pas ainsi si par exemple on prenait pour origine du repère-origine le point $x_{os} = x_{rs} = 0$. Remarquons d'autre part en passant que les points M définis à partir de M_0 peuvent servir de repère mobile à g. Ils forment une variété à n dimensions. Cela reste vrai quel que soit γ, en particulier si c'est le groupe G_p.

On a alors, si $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_n$ sont les paramètres de σ,

$$(1) \qquad d\mathrm{M}_0 = \varpi_i(u, du)\vec{e}_i \qquad (i \leqq n).$$

(d'après l'isomorphie de g et de γ).

Comme les $d\mathrm{M}_0$ remplissent un n-plan (en direction), il en est de même des $\vec{e}_i$, et on peut les prendre pour vecteurs de base de $\tilde{\mathrm{R}}_0$ en leur adjoignant $\mathrm{Q} - n$ vecteurs arbitraires, formant, avec les $\vec{e}_i$, Q vecteurs $\vec{e}_s$ indépendants. Si $\tilde{\omega}_s$, $\tilde{\omega}_{st}$ sont les composantes relatives de $\tilde{\mathrm{R}}(u) = \tau_u\tilde{\mathrm{R}}_0$, on a

$$(2) \qquad d\mathrm{M}_0 = \tilde{\omega}_s(u, du)\vec{e}_s \qquad (s \leqq \mathrm{Q}),$$

D'où, en comparant avec (1),

$$\tilde{\omega}_i = \varpi_i, \qquad \tilde{\omega}_\sigma = 0 \qquad (i \leqq n < \sigma \leqq \mathrm{Q}).$$

La famille des $\tilde{\mathrm{R}}(u)$ étant une image de g, les $\tilde{\omega}_{st}$ sont des combinaisons linéaires à coefficients constants des ϖ_i.

29. Nous avons ainsi obtenu une famille de repères $\tilde{\mathrm{R}}(u)$ de E_Q dont les composantes relatives $\tilde{\omega}_s$, $\tilde{\omega}_{st}$ sont des combinaisons linéaires à coefficients constants des ϖ_i, et vérifient $\tilde{\omega}_i = \varpi_i$ pour $i \leqq n$.

Nous allons en déduire, dans l'espace E_N à $\mathrm{N} = \mathrm{Q}(\mathrm{Q}+1)$ dimensions, une famille $\mathcal{F}$ de repères $\mathrm{R}(u)$ dont les composantes relatives sont du type $\mathrm{F}(\varpi)$. Nous désignerons par i, j les indices ne dépassant pas n, par r, s, t ceux qui ne dépassent pas Q; nous représenterons par les *arrangements* (st) *avec répétition* (ss) *possible* les Q^2 indices compris entre $\mathrm{Q}+1$ et N.

Cela posé, considérons les formes F_N :

$$(\mathrm{F}_\mathrm{N}) \qquad \left\{\begin{array}{lll} (1) & \omega_s & = \tilde{\omega}_s, \\ (2) & \omega_{(st)} & = \tilde{\omega}_{st}, \\ (3) & \omega_{st} & = \omega_{s(tt')} = 0, \\ (4) & \left\{\begin{array}{l} \omega_{(ss')t} \\ \omega_{(st)t} \end{array}\right. & \begin{array}{l} = 0 \qquad \text{pour} \quad s' \neq t, \\ = -\tilde{\omega}_s, \end{array} \\ (5) & \left\{\begin{array}{l} \omega_{(rs)(r't)} \\ \omega_{(rs)(r's)} \end{array}\right. & \begin{array}{l} = 0 \qquad \text{pour} \quad s \neq t, \\ = -\tilde{\omega}_{r'r}. \end{array} \end{array}\right.$$

1° Ces formes sont du type $F(\varpi)$. En effet, on a, en particulier [équations (1), (3) pour $s \leqq n$],

$$\omega_i = \tilde{\omega}_i = \varpi_i, \qquad \omega_{ij} = \omega_{i\alpha} = 0 \qquad (n < \alpha \leqq N).$$

D'autre part les $\tilde{\omega}$ sont des combinaisons linéaires à coefficients constants des ϖ_i, et il en est alors visiblement de même des ω.

2° Le calcul montre, en tenant compte des relations de structure de E_Q qui sont vérifiées par les $\tilde{\omega}$, que les formes F_N vérifient les relations de structure $[\omega]$ de E_N. Nous allons indiquer ce calcul pour les composantes $\omega_{(r_1 r_2)(r_3 r_4)}$ par exemple. L'équation de structure $[\omega_{(r_1 r_2)(r_3 r_4)}]$ s'écrit $\Omega = 0$ avec

$$\Omega = \omega'_{(r_1 r_2)(r_3 r_4)} - [\omega_{(r_1 r_2) s}\, \omega_{s (r_3 r_4)}] - [\omega_{(r_1 r_2)(s_1 s_2)}\, \omega_{(s_1 s_2)(r_3 r_4)}].$$

Comme $\omega_{s(r_3 r_4)} = 0$, le premier crochet est nul. Le deuxième ne diffère de zéro que si

$$s_2 = r_2 \qquad \text{et} \qquad s_3 = r_4, \qquad \text{d'où} \quad r_2 = r_4.$$

1° $r_2 \neq r_4$:

$$\omega_{(r_1 r_2))r_3 r_4)} = 0 \qquad \text{et} \qquad \omega'_{(r_1 r_2)(r_3 r_4)} = 0;$$

les deux crochets sont nuls, d'où

$$\Omega = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

2° $r_2 = r_4 = s$. Alors

$$\Omega = \omega'_{(r_1 s)(r_3 s)} - [\omega_{(r_1 s)(s_1 s)}\, \omega_{(s_1 s)(r_3 s)}]$$

qui devient d'après (5)

$$\Omega = -\tilde{\omega}'_{r_3 r_1} - [(-\tilde{\omega}_{s_1 r_1})(-\tilde{\omega}_{r_3 s_1})] = -\tilde{\omega}'_{r_3 r_1} + [\tilde{\omega}_{r_3 s_1}\tilde{\omega}_{s_1 r_1}],$$

et le dernier membre est nul d'après l'équation de structure $[\tilde{\omega}_{r_3 r_1}]$ de E_Q. D'où encore $\Omega = 0$.

Le même calcul s'applique aux autres formes ω.

Conclusion. — Les formes F_N sont les composantes d'un repère $R(u)$ de E_N. *La famille des* $R(u)$ *a des composantes du type* $F(\varpi)$, *et (d'après le lemme* I) *elle définit pour* $E'_n(\gamma)$ *une réalisation homogène-*H_0.

C. Q. F. D.

30. Corollaire I. — *La première connexion affine d'un groupe de Lie admet une réalisation homogène-*H_0.

Cela résulte du théorème d'Ado, d'après lequel tout groupe de Lie Γ admet une représentation linéaire infinitésimale γ; les groupes Γ et γ ont alors même première connexion affine [1], $E'_n(\Gamma) \equiv E'_n(\gamma)$, et la propriété vient d'être démontrée pour $E'_n(\gamma)$.

Conclusion. — *Étant donné un groupe de Lie* Γ, *dont les transformations* T_u *dépendent de n paramètres u, on peut lui attacher une famille* $\mathfrak{F}$ *de repères* $R(u)$ *d'un espace affine à* N *dimensions jouissant des propriétés suivantes :*

1° *Les n premiers vecteurs des* $R(u)$ *sont équipollents à des vecteurs fixes.*

2° *Les* $R(u)$ *se déduisent les uns des autres par des transformations linéaires formant un groupe* γ *infinitésimalement isomorphe à* Γ.

Si T_{u_0} *est la transformation identique, et si* L_u *est la transformation qui amène* $R(u_0)$ *en* $R(u)$, *les transformations* T_u *et* L_u (*suffisamment voisines de l'identité*) *sont homologues dans l'isomorphie.*

3° *L'élément bi-plan dont la base contient les n premiers vecteurs de* $R(u)$ *et le support les* $N - n$ *derniers engendre une variété qui réalise, au voisinage de* (u_0), *la première connexion affine de* Γ. *Cette variété est invariante par le groupe* γ.

31. Corollaire II. — *Le système algébrique* $H(\gamma, N)$ *d'un groupe linéaire* γ *est compatible pour* N *assez grand.*

C'est une conséquence immédiate du théorème II [existence pour γ de repères de E_N ayant des composantes du type $F(\gamma)$], et du lemme II.

Soit alors un groupe de Lie quelconque Γ; *l'existence d'une représentation linéaire* γ *de* Γ *entraîne la compatibilité pour* N *assez grand du système* $H(\Gamma, N)$, car les systèmes $H(\Gamma, N)$ et $H(\gamma, N)$ sont identiques (Γ et γ ayant mêmes constantes de structure) et γ est un groupe linéaire.

La réciproque de cette dernière propriété a été démontrée au n° **25**, et la compatibilité pour N assez grand de $H(\Gamma, N)$ est ainsi nécessaire

---

[1] Puisque mêmes constantes de structure (*cf.* n° **19**).

et suffisante pour qu'il existe une représentation linéaire de Γ. Sa démonstration *directe* serait donc susceptible de fournir une démonstration du théorème d'Ado.

La démonstration que nous envisageons ainsi porterait sur le système $H(c, N)$, avec l'hypothèse *que les c sont les constantes de structure d'un groupe*. Le troisième théorème fondamental de Lie affirme que cette hypothèse *équivaut* aux relations (R) suivantes entre les c :

$$(R) \begin{cases} (1) & c_{hkl} + c_{khl} = 0, \\ (2) & c_{hkl}c_{llj} + c_{kll}c_{lhj} + c_{lhl}c_{lkj} = 0. \end{cases}$$

Nous aurions donc à démontrer la proposition suivante : *si les constantes c vérifient les relations* (R), *le système algébrique* $H(c, N)$ *est compatible pour* N *assez grand.* Or, d'après le théorème I (n° **25**), cette compatibilité entraîne l'existence d'un groupe continu linéaire, donc d'un groupe de Lie, admettant les c comme constantes de structure : par suite, *si l'on établissait directement que les relations* (R) *entre les constantes c entraînent la compatibilité pour* N *assez grand du système algébrique* $H(c, N)$, *on démontrerait du même coup la réciproque du troisième théorème fondamental de Lie et le théorème d'Ado.*