JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JULES HAAG

Théorie des fils élastiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 25 (1946), p. 1-92.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1946_9_25__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Théorie des fils élastiques ;

PAR JULES **HAAG**.

Introduction.

1. Dans un travail déjà ancien ([1]), j'ai établi, en partant des équations générales de l'Élasticité, une théorie des fils élastiques, dans laquelle je supposais la section droite du fil infiniment petite. Je me propose ici de reprendre la même question, en m'affranchissant de cette restriction.

Il convient d'abord de poser clairement le problème.

Dans la pratique, on le pose succinctement de la manière suivante : *Le fil étant donné à l'état naturel,* on lui applique des forces extérieures *déterminées* et l'on cherche la nouvelle forme du fil, en supposant bien entendu qu'il se déforme élastiquement, c'est-à-dire que la limite élas-

([1]) *Ann. Éc. Norm.*, (3), XLVI, 1929, p. 105 à 129. **Le présent travail a été élaboré en grande partie en 1938 et 1939 ; mais je n'ai rien publié à son sujet, sauf une Note récente aux** ***Comptes rendus.***

tique n'est atteinte en aucun point (1). Mais, une difficulté surgit dès qu'on veut préciser la manière dont on se donne les forces.

En ce qui concerne les *forces de volume*, on peut évidemment supposer que le fil est plongé dans un champ de forces déterminé. La force appliquée à chaque élément dépend uniquement de sa position *actuelle* par rapport à un trièdre de référence fixe.

En ce qui concerne les *forces de surface*, on peut imaginer que la force appliquée à chaque élément dépende à la fois de sa position sur le fil et de sa position dans l'espace.

De toute manière, les forces extérieures ne sont exactement connues que lorsqu'on connaît la position *actuelle* du fil, donc lorsqu'on a résolu le problème de la déformation. On pourrait presque dire que le problème ne peut être posé que lorsqu'il est résolu.

Bien entendu, la loi à laquelle obéissent les forces extérieures étant donnée, il est toujours possible de mettre le problème en équations. Mais, l'intégration de ces équations (qui sont aux dérivées partielles) est en général extrêmement difficile, comme on s'en rend compte sur des cas particuliers simples, tel que le spiral (2).

Dans la théorie classique de l'Élasticité, cette difficulté n'existe pas, parce qu'on admet que le *déplacement* de chaque point pendant la déformation est *infiniment petit* et il est alors pratiquement indifférent de se donner les forces extérieures dans l'état naturel du corps élastique ou dans son état actuel. Pour un fil au contraire, le déplacement peut être très grand, bien que la déformation locale soit petite.

Une difficulté analogue pourrait théoriquement se présenter en *Hydrodynamique*, quand on utilise les *variables de Lagrange*. On pourrait imaginer en effet que la force appliquée à chaque particule fluide dépende à la fois du choix de cette particule et de sa position dans l'espace. Mais pratiquement, toutes les particules se ressemblent (elles ont d'ailleurs une existence très éphémère) et occupent toute

---

(1) Ceci se traduit par la condition que les coefficients N_i, T_i de Lamé doivent être inférieurs en chaque point à des limites données, dépendant uniquement de la nature du fil.

(2) *Cf. Bull. Soc. Math.*, t. LVIII, 1930. *Voir* aussi le n° 75 du présent travail.

une région de l'espace, de sorte qu'un tel point de vue n'a pas d'intérêt et c'est pourquoi on utilise de préférence les *variables d'Euler* (1).

Dans le problème des fils au contraire, il n'est pas indifférent de savoir que tel ou tel point du fil viendra occuper, après déformation, telle ou telle position dans l'espace. En outre, les forces de surface sont toujours appliquées en des points déterminés de la surface du fil. Il ne semble donc pas possible d'adopter un point de vue analogue à celui d'Euler. C'est cependant ce que nous allons faire.

2. Nous nous donnons le fil dans sa position *actuelle*. Nous le supposons soumis à des forces extérieures déterminées et nous nous proposons de *remonter à la forme naturelle* ou, ce qui revient au même, de *calculer la déformation* et conséquemment les *forces élastiques intérieures*.

Une telle manière de poser le problème est évidemment artificielle, tout au moins en ce qui concerne la déformation. Elle l'est moins si l'on recherche uniquement les forces intérieures. En outre, il existe certaines formes de fils élastiques (ressorts) pour lesquelles le problème pratique se ramène approximativement à celui que nous allons résoudre, si les forces extérieures sont convenablement choisies, comme c'est le cas dans les conditions habituelles d'emploi des ressorts.

3. En vue de l'intégration ultérieure, je ferai une seconde hypothèse, déjà admise dans mon premier Mémoire. C'est que *les sections droites du fil peuvent se déformer homothétiquement* dans le rapport t (2). Mais, alors que j'ai supposé antérieurement que t était infiniment petit, je supposerai cette fois que t a une valeur finie.

Nous admettrons en même temps que *les forces extérieures sont fonctions de t.* Ce point sera précisé ultérieurement (n° **20**).

Notre méthode d'intégration consistera à calculer la déformation et les forces élastiques au moyen de *développements en série procédant*

---

(1) *Cf.*, Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. III, p. 607.

(2) *Cf.*, Appell, *loc. cit.*, p. 647.

suivant les puissances de t. Ce calcul sera d'ailleurs purement formel, car je n'ai pu réussir à démontrer la convergence.

Observons encore que pour obtenir nos développements, nous aurons seulement besoin d'utiliser *la somme géométrique et le moment résultant* des forces extérieures appliquées à l'extrémité du fil. Il en résultera que les forces théoriques correspondant à la déformation ainsi obtenue formeront seulement un système équivalent aux forces effectivement données, mais n'auront pas en général la même répartition. C'est ce qui arrive, comme on sait, dans le *problème de Saint-Venant.* La théorie exposée dans le présent travail apparaîtra ainsi comme une *extension de ce problème* à un fil de forme quelconque, le problème classique de Saint-Venant concernant seulement le cas du fil rectiligne.

Il est bien évident que cette méthode du développement en série ne résout pas la question quand les forces appliquées sur les bases ont une distribution donnée à l'avance, autre que celle à laquelle aboutit précisément la dite méthode. Dans ce cas, les développements ne sont plus légitimes, ainsi que l'on montré E. et F. Cosserat, parce que la valeur zéro du paramètre suivant lequel on développe est un point singulier essentiel des fonctions cherchées (1).

L'expérience montre cependant que les résultats déduits de la théorie de Saint-Venant sont pratiquement exacts dès qu'on s'éloigne suffisamment des bases et ils sont utilisés sans aucun scrupule en Résistance des Matériaux. Il serait intéressant de justifier mathématiquement ce *principe d'équivalence.* Mais, c'est un problème qui paraît fort difficile et au sujet duquel je donnerai, au dernier chapitre, quelques indications faisant pressentir la manière dont pourrait se produire l'amortissement des erreurs quand on s'éloigne des bases.

Quoi qu'il en soit, puisque les résultats de la théorie de Saint-Venant sont utilisés avec succès dans la pratique, il semble probable qu'il puisse en être de même pour les résultats de la théorie plus générale faisant l'objet du présent Mémoire.

---

(1) *Cf.,* Appell, *loc. cit.,* p. 646.

4. Notations et identités. — En vue de simplifier l'écriture, nous poserons, en désignant par λ, μ les constantes élastiques habituelles :

$$(1)\qquad \begin{cases} k=\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} & \text{(coefficient de Poisson)},\\[2mm] k'=\dfrac{\lambda+2\mu)}{2(\lambda+\mu)}, & k+k'=1\,; \end{cases}$$

$$(2)\qquad E=\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}=2\mu(1+k)\qquad \text{(module de Young)}.$$

Nous utiliserons les symboles opératoires ci-dessous, pour toute fonction de x, y :

$$(3)\qquad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},\qquad D=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$(4)\qquad \delta=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y},\qquad \delta'=x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Si la fonction F admet des dérivées premières continues dans l'aire (A), limitée par le contour (Γ), on a

$$(5)\qquad \iint_{(A)}\delta F\,dx\,dy=\int_{\Gamma}(\alpha y-\beta x)F\,d\sigma,$$

σ désignant l'arc de (Γ) et α, β les cosinus directeurs de la normale extérieure. En particulier, si (Γ) est un cercle centré à l'origine, l'intégrale double est nulle.

Quelle que soit la fonction F, on a

$$(6)\qquad \delta(xF)=x\,\delta F+yF,\qquad \delta(yF)=y\,\delta F-xF;$$

$$(7)\qquad \delta\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\frac{\partial(\delta F)}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y},\qquad \delta\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\frac{\partial(\delta F)}{\partial y}-\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Si U et V sont deux polynomes harmoniques conjugués, homogènes et de degré m, on a

$$(8)\qquad \delta U=mV,\qquad \delta V=-mU.$$

Quelles que soient les fonctions U et F, on a

$$(9)\qquad \iint_{(A)}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial y}+U\,\Delta F\right)dx\,dy=\int_{\Gamma}U\frac{dF}{dn}\,d\sigma,$$

la dérivée normale étant prise suivant la normale *extérieure*.

Si F est une fonction harmonique dont la dérivée normale prend, sur Γ, la valeur $\alpha P + \beta Q$, P et Q désignant deux fonctions données de x et y, on a

$$(10) \qquad \iint_A \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx\, dy = \iint_A \left[\frac{\partial (UP)}{\partial x} + \frac{\partial (UQ)}{\partial y} \right] dx\, dy.$$

5. Résumé du présent travail. — Dans le Chapitre I, nous donnerons la *définition* précise *du fil et de sa déformation.*

Le Chapitre II sera consacré à l'établissement des *équations d'équilibre.*

Dans le Chapitre III sera développée la méthode générale d'*intégration formelle* de ces équations.

Dans le Chapitre IV, nous ferons le *calcul explicite complet des deux premiers termes* des développements en série et le *calcul partiel du troisième terme.*

Le Chapitre V sera consacré au cas particulier du *fil rond,* pour lequel les coefficients des divers développements se calculent facilement.

Dans le Chapitre VI, nous étudierons le cas particulier du *fil rectiligne.* Dans le cas du *cylindre,* nous calculerons la déformation dans l'hypothèse où *les forces de volume et les forces latérales sont des polynomes en z,* avec application au problème de Saint-Venant, à la *poutre pesante et uniformément chargée* et au *cylindre trouvant* autour d'un axe quelconque. Enfin, nous étudierons la *déformation de la torsade.*

L'objet du Chapitre VII sera le *calcul de la déformation de la fibre neutre* pour un fil élastique quelconque, avec application au *ressort à boudin.*

Enfin, dans le Chapitre VIII, nous indiquerons quelques essais de justification du *principe de l'équivalence.*

CHAPITRE I.

Définition du fil et de sa déformation.

6. Définition du fil. — Soit une aire plane quelconque (A), limitée par la courbe fermée (Γ). Associons-lui un trièdre trirectangle $Oxyz$, dont l'origine sera le centre de gravité de cette aire supposée homogène et dont les axes Ox et Oy seront les axes principaux d'inertie correspondant à O. Nous appellerons S l'aire de (A) et A, B ses moments d'inertie par rapport à Ox et Oy.

Considérons [1] maintenant l'aire (A_t) et la courbe (Γ_t) homothétiques de (A) et (Γ) par rapport à O et dans le rapport t. Puis, imprimons au trièdre $Oxyz$ un mouvement quelconque assujetti à l'unique condition que la trajectoire de O soit tangente à Oz. Le fil sera engendré par l'aire (A_t) dans ce mouvement. La courbe (F) décrite par O sera appelée la *fibre neutre*. La surface (Σ_t) engendrée par (Γ_t) sera la *surface latérale*. Les positions extrêmes de (A_t) seront les *bases* B_0 et B. Une position intermédiaire quelconque de (A_t) sera une *section droite* [2].

Nous appellerons s l'abscisse curviligne de O sur (F), comptée à partir de la base B_0. Si elle joue le rôle du temps, nous appellerons p, q, r les rotations du trièdre $Oxyz$; ses translations sont 0, 0, 1. On voit facilement que la courbure et la torsion de (F) en O sont [3]

$$\frac{1}{R}=\sqrt{p^2+q^2}, \qquad \frac{1}{T}=\frac{q\dfrac{dp}{ds}-p\dfrac{dq}{ds}}{p^2+q^2}-r.$$

---

(1) La rédaction serait un peu simplifiée en n'introduisant cette homothétie qu'après le n° **16**. Il suffirait de changer x et y en tx et ty dans toutes les formules obtenues. Mais cela nous obligerait à les écrire de nouveau et allongerait notablement le texte.

(2) Ceci ne signifie pas nécessairement que le plan de (A_t) coupe orthogonalement (Σ_t). Il n'en est ainsi que si le mouvement du trièdre est tangent à une rotation ayant son axe instantané dans xOy. C'est l'hypothèse que j'ai faite dans deux mémoires antérieurs [*loc. cit.* et *Sur l'hypothèse des fibres dans la théorie des fils élastiques* (*Ann. Éc. Norm.*, (3), LII, 1935, p. 318)].

(3) Si l'on appelle φ et $\varphi+\frac{\pi}{2}$ les angles polaires respectifs de la normale principale et de la binormale, on a

$$p=-\lambda\sin\varphi, \qquad q=\lambda\cos\varphi, \qquad \lambda^2=p^2+q^2, \qquad R=\frac{1}{\lambda}.$$

La vitesse du point de l'indicatrice des binormales a pour valeur algébrique sur la normale principale $-r-\dfrac{d\varphi}{ds}$.

Un point M *quelconque du fil* sera défini par l'abscisse curviligne s de sa projection orthogonale O sur (F) et par les coordonnées cartésiennes x, y du point homologue de (A) par rapport aux axes Ox, Oy. Les coordonnées cartésiennes de M par rapport aux mêmes axes sont donc tx et ty.

Si le point M *est sur* (Σ_t), donc sur Γ_t, les cosinus directeurs de la *normale extérieure* en M à (Σ_t) sont

$$\alpha' = \rho\alpha, \quad \beta' = \rho\beta, \quad \gamma' = \frac{\rho r t}{h}(\alpha y - \beta x), \tag{11}$$

en appelant α, β les cosinus directeurs de la normale extérieure à (Γ_t) par rapport aux axes Ox, Oy et en posant

$$h = 1 + tg, \quad g = py - qx. \tag{12}$$

Quant à la valeur de ρ, elle est donnée par

$$\frac{h^2}{\rho^2} = h^2 + r^2 t^2 (\alpha y - \beta x)^2. \tag{13}$$

Nous supposerons que, quel que soit M dans le fil, on a $|g| < 1$, donc $h > 0$ [1].

L'angle du plan xOy avec le plan tangent à (Σ_t) a pour cotangente $\frac{rt}{h}(\alpha y - \beta x)$. *Pour que le plan xOy coupe orthogonalement* (Σ_t), il faut et il suffit que l'on ait $r = 0$ ou bien que (Γ) soit un cercle de centre O. Toutefois, si t est très petit, c'est-à-dire *si les dimensions transversales du fil sont petites* vis-à-vis de $\frac{1}{r}$ [2], γ' sera très petit et *l'orthogonalité sera presque réalisée* [3].

Dans ce qui va suivre, nous appellerons x, y, s les coordonnées de M; mais, il sera bien entendu que les coordonnées cartésiennes de M par rapport à Ox, Oy seront en réalité tx et ty.

---

(1) Le fil est tout entier extérieur à la développable enveloppée par xOy.

(2) Ceci peut s'interpréter en disant que l'angle dont tourne le trièdre autour de Oz, pour un déplacement longitudinal de l'ordre des dimensions transversales du fil, est très petit.

(3) C'est ce qui a lieu par exemple pour un ressort à boudin.

7. Déformation de la fibre neutre. — Supposons maintenant que le fil *revienne à l'état naturel.* Le point qui se trouvait primitivement en M vient occuper une certaine position M_0. Ceci établit une correspondance ponctuelle entre les deux états du fil; les points M et M_0 seront dits *homologues* dans cette correspondance.

La fibre neutre devient une certaine courbe (F_0). Le point O vient en O_0. Si s_0 est l'abscisse curviligne de O_0, on a une relation déterminée entre s et s_0, soit $s_0 = f(s)$. La *dilatation linéaire* ε de (F) en O est définie par

$$\frac{ds}{ds_0} = 1 + \varepsilon \qquad \text{ou} \qquad f'(s) = 1 - \varepsilon, \tag{14}$$

en tenant compte du fait que ε est nécessairement *très petit* (déformation élastique) et *négligeant systématiquement*, comme nous le ferons toujours par la suite, *les quantités du second ordre par rapport aux déformations* [1].

Au trièdre $Oxyz$, nous faisons correspondre le trièdre trirectangle $O_0x_0y_0z_0$ dont l'axe O_0z_0 est la tangente positive à (F_0). Quant aux deux autres axes, leur orientation sera précisée au n° **8**. Pour le moment, nous convenons seulement que le demi-plan $z_0O_0x_0$ fait un angle très petit avec la demi-tangente en O_0 à la courbe homologue de la demi-droite Ox.

Si s_0 joue le rôle du temps, le trièdre $O_0x_0y_0z_0$ a pour rotations et translations $(p_0, q_0, r_0, 0, 0, 1)$. Nous poserons

$$p - p_0 = p', \qquad q - q_0 = q', \qquad r - r_0 = r'. \tag{15}$$

Ces trois quantités sont *très petites*.

Si l'on connaît p', q', r', ε en fonction de s, on peut en déduire p_0, q_0, r_0 en fonction de s_0; d'où résulte le mouvement du trièdre $O_0x_0y_0z_0$ quand O_0 décrit la courbe (F_0). Celle-ci est donc déterminée et l'on peut dire que *la déformation de la fibre neutre est déterminée par les quatre fonctions* ε, p', q', r'.

8. Déformation des sections droites. — Prenons un point M quelconque à l'intérieur de (A_t) et soient tx, ty ses coordonnées par

(1) Et non aux déplacements.

rapport à Ox, Oy. Soient M_0 le point homologue et O'_0 sa projection orthogonale sur (F_0). Ce point, d'abscisse curviligne s'_0, est en général distinct du point O_0 homologue de O, dont l'abscisse curviligne est $s_0 = f(s)$. Soient enfin tx_0, ty_0 les coordonnées de M_0 par rapport aux axes $O'_0 x'_0 y'_0 z'_0$ attachés à O'_0. Nous poserons

$$(16) \qquad u = x - x_0, \qquad v = y - y_0, \qquad tw = \widehat{O'_0 O_0} = f(s) - s'_0.$$

Si l'on amène $O_0 x_0 y_0 z_0$ en coïncidence avec le trièdre homologue $Oxyz$, les composantes du vecteur $\overrightarrow{M_0 M}$ suivant ces axes sont tu, tv, tw, au second ordre près. Les trois fonctions u, v, w définissent la *déformation de la section droite* (A) et seront considérées, de même que ε, p', q', r', comme des infiniment petits du premier ordre. Ce sont des fonctions de x, y, s. Elles *s'annulent* toutes trois *pour* $x = y = 0$.

Les fonctions u, v déterminent la *déformation transversale* de la section droite. Nous convenons maintenant de *choisir l'orientation des axes* $O_0 x_0$, $O_0 y_0$ *de telle manière que cette déformation soit une déformation pure* dans le voisinage de O. Autrement dit, on devra avoir

$$(17) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{pour } x = y = 0.$$

On sait que, dans ce cas, les déviations angulaires sont infiniment petites [1], de sorte que le trièdre $O_0 x_0 y_0 z_0$ satisfait bien à la condition admise au n° **7**.

Moyennant la convention ci-dessus, r' mesure la *torsion physique* du fil. En effet, amenons $O_0 x_0 y_0 z_0$ en coïncidence avec $Oxyz$, pour une position déterminée de O. Soit O' infiniment voisin de O et O'_0 le

---

[1] On pourrait évidemment choisir l'orientation de $O_0 x_0$ de telle manière, par exemple, que le demi-plan $z_0 O_0 x_0$ contienne la demi-tangente en O_0 à la courbe homologue de la demi-droite Ox, dont la déviation angulaire serait alors nulle. Ceci se traduirait par la condition $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ pour $x = y = 0$. Mais, la déformation transversale ne serait pas en général une déformation pure. De plus, les deux axes Ox et Oy joueraient des rôles dissymétriques, car la déviation angulaire de Oy ne serait généralement pas nulle.

point homologue. On passe de $O'_0x'_0y'_0z'_0$ à $O'x'y'z'$ par la translation $\varepsilon\, ds$ suivant Oz et les rotations $p'\,ds$, $q'\,ds$, $r'\,ds$ autour de Ox, Oy, Oz. La troisième rotation, qui s'effectue autour de la tangente à la fibre neutre, est uniquement due à la torsion, puisque, pendant la déformation, la partie centrale de la section droite est solidaire du trièdre $Oxyz$. Son quotient par ds mesure bien la torsion physique.

CHAPITRE II.

Les équations d'équilibre.

9. Les forces extérieures. — Les forces extérieures appliquées au fil comprennent des *forces de volume* F_V, des *forces de surface* F_Σ s'exerçant sur la surface latérale et enfin des *forces sur les bases*; nous appellerons F_B celles qui s'exercent sur la base (B).

Parmi toutes ces forces, considérons seulement celles qui sont *appliquées à la portion de fil postérieure à la section droite* (A). Elles forment un système (S_A), dont les six coordonnées par rapport au trièdre $Oxyz$ seront désignées par X, Y, Z, L, M, N. Ces coordonnées sont des *fonctions connues* de s et t.

Considérons la tranche (ds) comprise entre deux sections droites (A) et (A′) infiniment voisines, définies par les abscisses curvilignes s et $s+ds$. Appelons $X_V\,ds$, $Y_V\,ds$, ..., $N_V\,ds$ les six coordonnées du système des F_V appliquées à cette tranche et $X_\Sigma\,ds$, $Y_\Sigma\,ds$, ..., $N_\Sigma\,ds$ les six coordonnées du système des F_Σ appliquées sur sa surface latérale. Le système (S_A) est équivalent au système $(S_{A'})$ augmenté des forces ci-dessus. Or, les coordonnées de $(S_{A'})$ par rapport à $Oxyz$ sont, au second ordre près en ds :

$$X + dX + (qZ - rY)\,ds, \qquad Y + dY + (rX - pZ)\,ds,$$
$$Z + dZ + (pY - qX)\,ds,$$
$$L + dL + (qN - rM)\,ds - Y\,ds, \qquad M + dM + (rL - pN)\,ds + X\,ds,$$
$$N + dN + (pM - qL)\,ds.$$

On a donc les équations différentielles suivantes :

$$(18)\quad \begin{cases} S_1 \equiv \dfrac{dX}{ds} + qZ - rY + \quad X_V \quad + X_\Sigma = 0, \\ S_2 \equiv \dfrac{dY}{ds} + rX - pZ + \quad Y_V \quad + Y_\Sigma = 0, \\ S_3 \equiv \dfrac{dZ}{ds} + pY - qX + \quad Z_V \quad + Z_\Sigma = 0, \\ S_4 \equiv \dfrac{dL}{ds} + qN - rM - Y + L_V + L_\Sigma = 0, \\ S_5 \equiv \dfrac{dM}{ds} + rL - pN + X + M_V + M_\Sigma = 0, \\ S_6 \equiv \dfrac{dN}{ds} + pM - qL + \quad N_V \quad + N_\Sigma = 0. \end{cases}$$

Nous appellerons X', Y', Z' les composantes de la force appliquée à l'unité de volume au point $M(x, y, s)$. Ce sont des fonctions données de tx, ty, s. Il est facile d'en déduire $X_V, \ldots, N_V$. A l'élément d'aire $dx\,dy$ intérieur à (A), correspond, dans (ds), l'élément de volume $t^2 h\,ds\,dx\,dy$. On a donc [1]

$$(19)\quad \begin{cases} X_V = t^2 \displaystyle\iint_A hX'\,dx\,dy, \qquad Y_V = t^2 \iint_A hY'\,dx\,dy; \qquad Z_V = t^2 \iint_A hZ'\,dx\,dy, \\ L_V = t^3 \displaystyle\iint_A hyZ'\,dx\,dy, \qquad M_V = -t^3 \iint_A hxZ'\,dx\,dy, \\ N_V = t^3 \displaystyle\iint_A h(xY' - yX')\,dx\,dy. \end{cases}$$

De même, appelons X'', Y'', Z'' les composantes de la force appliquée à l'unité de surface (Σ_t). L'arc élémentaire $t\,d\sigma$ de (Γ_t) engendre, pour un déplacement ds de O, une aire égale à $\dfrac{ht}{\rho}\,d\sigma\,ds$ [2]. On en déduit

$$(20)\quad \begin{cases} X_\Sigma = t \displaystyle\int_\Gamma X'' \frac{h}{\rho}\,d\sigma, \qquad Y_\Sigma = t \int_\Gamma Y'' \frac{h}{\rho}\,d\sigma, \qquad Z_\Sigma = t \int_\Gamma Z'' \frac{h}{\rho}\,d\sigma, \\ L_\Sigma = t^2 \displaystyle\int_\Gamma yZ'' \frac{h}{\rho}\,d\sigma, \qquad M_\Sigma = -t^2 \int_\Gamma xZ'' \frac{h}{\rho}\,d\sigma, \\ N_\Sigma = t^2 \displaystyle\int_\Gamma (xY'' - yX'') \frac{h}{\rho}\,d\sigma. \end{cases}$$

---

(1) On intègre dans (A) et non dans (A_t).

(2) Cette aire mesure la longueur du produit vectoriel du vecteur $\overrightarrow{t\,d\sigma}$, de

Les six coordoonnées X, Y, ..., N ne sont pas entièrement déterminées par les équations différentielles (18), car elles dépendent des forces F_B. Si ces forces sont données, ainsi que les forces F_V et F_Σ, on peut évidemment calculer *a priori* X, Y, ..., N en fonction de s, sans passer par l'intermédiaire des équations (18). On obtient ainsi six fonctions *déterminées* [1] de s, qui doivent vérifier identiquement les équations (18).

10. Les efforts sur une section droite. — L'effort $\vec{T}$ s'exerçant en un point M quelconque intérieur au fil, sur un élément dont la normale a pour cosinus directeurs α', β', γ', a pour composantes cartésiennes suivant $Oxyz$:

$$(21) \qquad \begin{cases} T_x = N_1\alpha' + T_3\beta' + T_2\gamma', \qquad T_y = T_3\alpha' + N_2\beta' + T_1\gamma', \\ T_z = T_2\alpha' + T_1\beta' + N_3\gamma'. \end{cases}$$

Si l'élément considéré appartient à la section droite passant par M, on obtient les composantes de l'effort T_A exercé sur sa face positive, en faisant $\alpha' = \beta' = 0$, $\gamma' = 1$. Les six coordonnées du système des forces T_A sont

$$(22) \qquad \begin{cases} X_A = t^2 \iint_A T_2\, dx\, dy, \qquad Y_A = t^2 \iint_A T_1\, dx\, dy, \qquad Z_A = t^2 \iint_A N_3\, dx\, dy, \\ L_A = t^3 \iint_A y N_3\, dx\, dy, \qquad M_A = -t^3 \iint_A x N_3\, dx\, dy, \\ N_A = t^3 \iint_A (x T_1 - y T_2)\, dx\, dy. \end{cases}$$

11. Conditions aux limites sur la surface latérale. — S'il y a équilibre, les composantes X'', Y'', Z'' de F_Σ doivent être égales aux composantes T_x, T_y, T_z données par les formules (21), en remplaçant α', β', γ' par les cosinus directeurs de la normale extérieure à (Σ),

---

composantes $(-\beta t\, d\sigma,\ \alpha t\, d\sigma,\ 0)$, par le déplacement élémentaire du point M, qui a pour composantes $(-rty\, ds,\ rtx\, ds,\ h\, ds)$.

(1) Bien entendu, ces fonctions dépendent aussi de t.

c'est-à-dire par les formules (11). On doit donc avoir

$$
(23)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{h}{\rho} X'' &= h(\alpha N_1 + \beta T_3) + trT_2(\alpha y - \beta x),\\
\frac{h}{\rho} Y'' &= h(\alpha T_3 + \beta N_2) + trT_1(\alpha y - \beta x),\\
\frac{h}{\rho} Z'' &= h(\alpha T_2 + \beta T_1) + trN_3(\alpha y - \beta x).
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on porte ces expressions dans (20), on obtient des intégrales curvilignes qui se transforment en intégrales doubles :

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\overline{X}_\Sigma = t \iint_A U_\Sigma \, dx dy, \qquad \overline{Y}_\Sigma = t \iint_A V_\Sigma \, dx\, dy, \qquad \overline{Z}_\Sigma = t \iint_A W_\Sigma \, dx\, dy,\\
&\overline{L}_\Sigma = \ \ t^2 \iint_A (y W_\Sigma + hT_1 - trxN_3)\, dx\, dy,\\
&\overline{M}_\Sigma = - t^2 \iint_A (x W_\Sigma + hT_2 + tryN_3)\, dx\, dy,\\
&\overline{N}_\Sigma = \ \ t^2 \iint_A (x V_\Sigma - y U_\Sigma + trxT_2 + tryT_1)\, dx\, dy,
\end{aligned}
\right.
$$

en posant [1]

$$
(25)\quad \left\{
\begin{aligned}
U_\Sigma &= \frac{\partial(hN_1)}{\partial x} + \frac{\partial(hT_3)}{\partial y} + tr\,\delta T_2,\\
V_\Sigma &= \frac{\partial(hT_3)}{\partial x} + \frac{\partial(hN_2)}{\partial y} + tr\,\delta T_1,\\
W_\Sigma &= \frac{\partial(hT_2)}{\partial x} + \frac{\partial(hT_1)}{\partial y} + tr\,\delta N_3.
\end{aligned}
\right.
$$

12. Équations d'équivalence. — S'il y a équilibre, les forces T_A doivent former un système équivalent au système (S_A). On doit donc avoir

$$
(26)\qquad X'_A \equiv X - X_A = 0, \qquad Y'_A \equiv Y - Y_A = 0, \qquad \ldots, \qquad N'_A \equiv N - N_A = 0.
$$

Il s'ensuit que les équations (18) doivent être vérifiées quand on y

(1) S'appuyer sur les identités (5) et (6).

remplace X, Y, ..., N par X_A, Y_A, ..., N_A et X_Σ, Y_Σ, ..., N_Σ par $\overline{X}_\Sigma$, $\overline{Y}_\Sigma$, ..., $\overline{N}_\Sigma$. Les S_i deviennent alors

$$(27) \quad \begin{cases} \overline{S}_1 = t\iint_A U\,dx\,dy, & \overline{S}_2 = t\iint_A V\,dx\,dy, \\ \overline{S}_3 = t\iint_A W\,dx\,dy, & \overline{S}_4 = t^2\iint_A yW\,dx\,dy, \\ \overline{S}_5 = -t^2\iint_A xW\,dx\,dy, & \overline{S}_6 = t^2\iint_A (xV - yU)\,dx\,dy, \end{cases}$$

en posant

$$(28) \quad \begin{cases} U = \dfrac{\partial(hN_1)}{\partial x} + \dfrac{\partial(hT_3)}{\partial y} + t\left(\dfrac{\partial T_2}{\partial s} + qN_3 - rT_1 + hX' + r\delta T_2\right), \\ V = \dfrac{\partial(hT_3)}{\partial x} + \dfrac{\partial(hN_2)}{dy} + t\left(\dfrac{\partial T_1}{\partial s} + rT_2 - pN_3 + hY' + r\delta T_1\right), \\ W = \dfrac{\partial(hT_2)}{\partial x} + \dfrac{\partial(hT_1)}{\partial y} + t\left(\dfrac{\partial N_3}{\partial s} + pT_1 - qT_2 + hZ' + r\delta N_3\right). \end{cases}$$

Ces six intégrales doubles doivent être nulles quel que soit s.

13. Équations indéfinies d'équilibre. — Imaginons qu'on remplace (A) par une aire quelconque (a) *intérieure* à (A). Le fil est remplacé par un fil fictif (ou *fibre*) intérieur au fil réel. Les forces extérieures appliquées à la partie de ce fil qui est postérieure à (a) sont les forces de volume F_V, les forces de surface T_σ exercées sur sa surface latérale (σ_t) et les forces exercées sur la base (b). D'après ce qui précède, les intégrales $\bar{s}_i$ déduites des $\overline{S}_i$ en remplaçant (A) par (a) doivent être nulles. Comme ceci doit avoir lieu quel que soit (a), on en conclut que les fonctions U, V, W doivent être identiquement nulles. On obtient ainsi les *équations indéfinies* d'équilibre ([1]).

$$(29) \qquad U = 0, \qquad V = 0, \qquad W = 0.$$

([1]) On obtient seulement trois équations et non six, parce qu'on a admis les les formules (21). Si l'on était seulement parti des formules résultant de l'équilibre du tétraèdre élémentaire, les trois dernières équations (27) nous auraient conduits, en tenant compte des trois premières, à la symétrie du tenseur des efforts, c'est-à-dire aux formules (21).

14. Calcul de la déformation pure. — La distance des deux points $M(x, y, s)$ et $M'(x+dx, y+dy, s+ds)$ a pour carré

$$d\sigma^2 = t^2(dx - ry\,ds)^2 + t^2(dy + rx\,ds)^2 + h^2\,ds^2.$$

La distance $d\sigma_0$ des deux points homologues M_0 et M'_0 est donnée par une formule analogue, dont toutes les lettres doivent simplement être affectées de l'indice zéro. On doit ensuite remplacer x_0 par $x-u$, y_0 par $y-v$ et s_0 par $s'_0 = f(s) - tw$, en vertu des formules (16). D'après (15), on doit remplacer p_0, q_0, r_0 par $p-p'$, $q-q'$, $r-r'$, les fonctions p, q, r étant calculées pour la valeur s' correspondant à s'_0, donc définie par

$$f(s') = s'_0 = f(s) - tw \qquad \text{ou} \qquad (s'-s)(1-\varepsilon) + \ldots = -tw,$$

soit $s' = s - tw$, au second ordre près en ε, w. Les fonctions p, q, r doivent être remplacées par $p - tw\dfrac{dp}{ds}$, $q - tw\dfrac{dq}{ds}$, $r - tw\dfrac{dr}{ds}$. Dans ces conditions, on a

$$h_0 = 1 + t\left(p - tw\frac{dp}{ds} - p'\right)(y-v) - t\left(q - tw\frac{dq}{ds} - q'\right)(x-u),$$

ou, au second ordre près,

$$h_0 = h + t\left(qu - pv + twx\frac{dq}{ds} - twy\frac{dp}{ds} + q'x - p'y\right).$$

Enfin, ds_0 doit être remplacé par $f'(s)\,ds - tw = ds - \varepsilon\,ds - tw$. On obtient ainsi, au second ordre près,

$$dx_0 - r_0 y_0\,ds_0 = dx - ry\,ds + a, \qquad dy_0 + r_0 x_0\,ds_0 = dy + rx\,ds + b,$$
$$h_0\,ds_0 = h\,ds + c,$$

en posant provisoirement :

$$\begin{aligned}
a &= -du + ry(\varepsilon\,ds + t\,dw) + tyw\,dr + r'y\,ds + rv\,ds,\\
b &= -dv - rx(\varepsilon\,ds + t\,dw) - txw\,dr - r'x\,ds - ru\,ds,\\
c &= -h(\varepsilon\,ds + t\,dw) + t(qu - pv + q'x - p'y)\,ds + t^2 w(x\,dq - y\,dp).
\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{d\sigma^2 - d\sigma_0^2}{2} = -at^2(dx - ry\,ds) - bt^2(dy + rx\,ds) - ch\,ds.$$

En divisant par $d\sigma^2$, on obtient la dilatation linéaire correspondant à l'élément (dx, dy, ds). Les cosinus directeurs de cet élément sont proportionnels à $(dx - ry\,ds)$, $(dy + rx\,ds)$, $\frac{h}{t}ds$; d'où l'on déduit que dx, dy, ds sont proportionnels à $\alpha + t\frac{ry}{h}\gamma$, $\beta - t\frac{rx}{h}\gamma$, $t\frac{\gamma}{h}$. La dilatation linéaire dans la direction (α, β, γ) est donc $-a\alpha - b\beta - \frac{c\gamma}{t}$, avec

$$\begin{aligned}
-a = {} & \left(\frac{\partial u}{\partial x} - try\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\alpha + t\frac{ry}{h}\gamma\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} - try\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\beta - t\frac{rx}{h}\gamma\right) \\
& + \left(\frac{\partial u}{\partial s} - try\frac{\partial w}{\partial s} - ry\varepsilon - twy\frac{dr}{ds} - r'y - rv\right)\frac{\gamma t}{h}, \\
-b = {} & \left(\frac{\partial v}{\partial x} + trx\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\alpha + t\frac{ry}{h}\gamma\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + trx\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\beta - t\frac{rx}{h}\gamma\right) \\
& + \left(\frac{\partial v}{\partial s} + trx\frac{\partial w}{\partial s} + rx\varepsilon + twx\frac{dr}{ds} + r'x + ru\right)\frac{\gamma t}{h}, \\
-\frac{c}{t} = {} & h\frac{\partial w}{\partial x}\left(\alpha + t\frac{ry}{h}\gamma\right) + h\frac{\partial w}{\partial y}\left(\beta - t\frac{rx}{h}\gamma\right) \\
& + \left(ht\frac{\partial w}{\partial s} + h\varepsilon - tqu + tpv - tq'x + tp'y - t^2wx\frac{dq}{ds} + t^2wy\frac{dp}{ds}\right)\frac{\gamma}{h}.
\end{aligned}$$

En prenant les coefficients de α^2, β^2, ..., on obtient, avec les notations habituelles ([1]),

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned}
& e_1 = \frac{\partial u}{\partial x} - try\frac{\partial w}{\partial x}, \quad e_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + trx\frac{\partial w}{\partial y}, \quad g_3 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + tr\,\delta' w; \\
& g_1 = h\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{t}{h}\left[\frac{\partial v}{\partial s} + r'x + r\left(\delta v + trx\,\delta w + u + \varepsilon x + tx\frac{\partial w}{\partial s}\right)\right. \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + twx\frac{dr}{ds}\right], \\
& g_2 = h\frac{dw}{dx} + \frac{t}{h}\left[\frac{du}{ds} - r'y + r\left(\delta u - try\,\delta w - v - \varepsilon y - ty\frac{\partial w}{\partial s}\right)\right. \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. - twy\frac{dr}{ds}\right], \\
& e_3 = \varepsilon + t\left(p'y - q'x + \frac{\partial w}{\partial s} + r\,\delta w + \Theta\right),
\end{aligned}\right.$$

([1]) Les expressions e_3, g_1, g_2 nous montrent que p', q', r' doivent être très petits, comme on l'a admis au n° **7**; car, s'il n'en était pas ainsi, e_3, g_1, g_2 auraient des valeurs finies et, d'après (32) et (33), les N_t, T_1, T_2, dépasseraient la limite élastique.

en posant, pour simplifier l'écriture

$$h\Theta = pv - qu + tw\frac{\partial g}{\partial s} - tg(p'y - q'x). \tag{31}$$

15. Rappelons maintenant les formules classiques

$$N_i = \lambda\theta + 2\mu e_i, \qquad T_i = \mu g_i, \qquad \theta = e_1 + e_2 + e_3. \tag{32}$$

On en déduit la suivante

$$N_3 = k(N_1 + N_2) + E e_3. \tag{33}$$

16. Formules pour le calcul de ε, p', q', r'. — Supposons vérifiées les équations indéfinies, les équations d'équivalence et les conditions sur (Σ). Soient P et Q deux polynomes *harmoniques conjugués*, homogènes et de degré m. Considérons l'intégrale $I = \int_\Gamma \frac{PX'' + QY''}{\rho}\,d\sigma$. D'après (23), on peut écrire

$$I = \iint_A \left[(N_1 + N_2)\frac{\partial P}{\partial x} + P\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y}\right) \right.$$
$$\left. + Q\left(\frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y}\right) + tr\,\delta\left(\frac{PT_2 + QT_1}{h}\right)\right] dx\,dy.$$

En tirant les deuxième et troisième parenthèses des deux premières équations (29), le crochet s'écrit

$$t\frac{P}{h}\left[q(N_1 - N_3) - pT_3 - \frac{\partial T_2}{\partial s} - hX' + r(T_1 - \delta T_2)\right]$$
$$+ t\frac{Q}{h}\left[p(N_3 - N_2) + qT_3 - \frac{\partial T_1}{\partial s} - hY' - r(T_2 + \delta T_1)\right]$$
$$+ tr\,\delta\left(\frac{PT_2 + QT_1}{h}\right) + (N_1 + N_2)\frac{\partial P}{\partial x},$$

ou, en tenant compte des identités (6) et (8),

$$-t\frac{PF + QG + (m-1)r(PT_1 - QT_2)}{h} + (N_1 + N_2)\frac{\partial P}{\partial x},$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} F &= \frac{\partial T_2}{\partial s} + q(N_3 - N_1) + pT_3 - trT_2\frac{px + qy}{h} + hX', \\ G &= \frac{\partial T_1}{\partial s} + p(N_2 - N_3) - qT_3 - trT_1\frac{px + qy}{h} + hY'. \end{aligned}\right. \tag{34}$$

On a donc

$$\iint_A (N_1+N_2)\frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy = I + t\iint_A \frac{PF+QG+(m-1)r(PT_1-QT_2)}{h}\,dx\,dy.$$

On en déduit, d'après (34) et (31),

$$\begin{aligned}\iint \frac{\partial P}{\partial x} N_3\,dx\,dy = kI &+ kt\iint_A \frac{PF+QG+(m-1)r(PT_1-QT_2)}{h}\,dx\,dy\\ &+ E\varepsilon\iint_A \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\\ &+ tE\iint_A \left(p'y - q'x + \frac{\partial w}{\partial s} + r\,\delta w + \Theta\right)\frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy.\end{aligned}$$

En prenant successivement $P=x$, $Q=y$; $P=xy$, $Q=\frac{y^2-x^2}{2}$; $P=\frac{y^2-x^2}{2}$, $Q=-xy$; on obtient les trois formules suivantes :

$$(35)\qquad \begin{aligned}Z = t^2ES\varepsilon &+ t^3E\iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial s} + r\,\delta w + \Theta\right)dx\,dy\\ &+ t^3k\iint_A \frac{xF+yG}{h}\,dx\,dy + t^2k\int_\Gamma \frac{xX''+yY''}{\rho}\,d\sigma,\end{aligned}$$

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned}L = t^4EAp' &+ t^4E\iint_A y\left(\frac{\partial w}{\partial s} + r\,\delta w + \Theta\right)dx\,dy\\ &+ t^4k\iint_A \frac{2xy(F+rT_1)+(y^2-x^2)(G-rT_2)}{2h}\,dx\,dy\\ &+ t^3k\int_\Gamma \frac{2xyX''+(y^2-x^2)Y''}{2\rho}\,d\sigma,\\ M = t^4EBq' &- t^4E\iint_A x\left(\frac{\partial w}{\partial s} + r\,\delta w + \Theta\right)dx\,dy\\ &- t^4k\iint_A \frac{(x^2-y^2)(F+rT_1)+2xy(G-rT_2)}{2h}\,dx\,dy\\ &- t^3k\int_\Gamma \frac{(x^2-y^2)X''+2xyY''}{2\rho}\,d\sigma.\end{aligned}\right.$$

On a enfin, d'après (32) et (30),

$$(37)\qquad \begin{aligned}N = -\mu t^3\iint_A h\,\delta w\,dx\,dy + \mu t^4\iint_A &\times\left[\frac{\partial}{\partial s}(vx-uy) + r(x\,\delta v - y\,\delta u + ux + vy)\right.\\ &\left.+(x^2+y^2)\left(r'+r\varepsilon+tr^2\,\delta w + t\frac{\partial(rw)}{\partial s}\right)\right]\frac{dx\,dy}{h}.\end{aligned}$$

CHAPITRE III.

Intégration formelle.

17. Introduction des fonctions φ et ψ. — Posons

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}. \tag{38}$$

Observons tout de suite que l'on peut, sans changer u et v, augmenter ψ de $f(x, s) + g(y, s)$, à condition d'augmenter en même temps φ de $-f+g$; ceci quelles que soient les fonctions f et g.

Observons aussi que la condition (17) devient

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = 0, \qquad \text{pour } x = y = 0.$$

Nous avons maintenant

$$N_1 = P - 2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \qquad N_2 = Q - 2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \qquad T_3 = 2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \mu t r \delta' w, \tag{39}$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} P &= (\lambda+2\mu)\Delta\varphi + \lambda R + (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \lambda\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - 2\mu t r y\frac{\partial w}{\partial x}, \\ Q &= (\lambda+2\mu)\Delta\varphi + \lambda R + \lambda\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + 2\mu t r x\frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned}\right. \tag{40}$$

$$R = \varepsilon + t\left(\frac{\partial w}{\partial s} + p'y - q'x + \Theta\right). \tag{41}$$

Observons que l'addition éventuelle signalée plus haut, dont φ et ψ pourraient être l'objet, augmente P de $2\mu\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ et Q de $-2\mu\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Des formules (40), on tire

$$\left\{\begin{aligned} 2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= k'P - kQ - 2\mu k'\Delta\varphi - 2\mu k R + 2\mu t r\left(k' y\frac{\partial w}{\partial x} + k x\frac{\partial w}{\partial y}\right), \\ 2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} &= kP - k'Q + 2\mu k'\Delta\varphi + 2\mu k R + 2\mu t r\left(k' x\frac{\partial w}{\partial y} + k y\frac{\partial w}{\partial x}\right). \end{aligned}\right. \tag{42}$$

En éliminant ψ entre ces deux formules, on obtient l'équation

$$(43)\qquad 2\mu k' \Delta\Delta\varphi = k'\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right) - k\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right) - 2\mu k \Delta R - 2\mu t r\left[\delta'\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right) + k\delta(\Delta w)\right].$$

Les deux premières formules (28) s'écrivent maintenant :

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned} U &\equiv \frac{\partial P}{\partial x} + t\left[g\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial s} + pT_3 + q(N_3 - N_1) + r\left(\delta T_2 - T_1 + \mu h\frac{\partial \delta' w}{\partial y}\right) + hX'\right], \\ V &\equiv \frac{\partial Q}{\partial y} + t\left[g\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial s} - qT_3 + p(N_2 - N_3) + r\left(\delta T_1 + T_2 + \mu h\frac{\partial \delta' w}{\partial x}\right) + hY'\right]. \end{aligned}\right.$$

Les deux premières équations (23) nous donnent ensuite, la courbe (Γ) étant orientée dans le sens positif défini par les axes,

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\mu d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) &= Q\,dx + \frac{Y''}{\rho}d\sigma - tr\left[\quad \mu\delta' w\,dy + \frac{T_1}{h}(x\,dx + y\,dy)\right] = \xi\,d\sigma, \\ 2\mu d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) &= P\,dy - \frac{X''}{\rho}d\sigma + tr\left[-\mu\delta' w\,dx + \frac{T_2}{h}(x\,dx + y\,dy)\right] = \eta\,d\sigma. \end{aligned}\right.$$

Signalons les identités suivantes, qui nous serviront plus loin,

$$(46)\qquad \left\{\begin{aligned} \overline{X_\Sigma} - X_\Sigma &= t\int_\Gamma h\left[\quad \eta\,d\sigma - 2\mu d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right], \\ \overline{Y_\Sigma} - Y_\Sigma &= t\int_\Gamma h\left[-\xi\,d\sigma + 2\mu d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right], \\ \overline{N_\Sigma} - N_\Sigma &= t^2\int_\Gamma h\left[-(x\xi + y\eta)\,d\sigma + 2\mu d\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \varphi\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

18. Introduction de la fonction H. — Appelons H la *fonction harmonique dont la dérivée normale prend, sur* (Γ), *la valeur* $\alpha y - \beta x$ et qui s'annule pour $x = y = 0$. Signalons-en tout de suite quelques propriétés, qui nous seront utiles par la suite.

L'identité (10) nous donne

$$(47)\qquad \iint_A \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial y}\right)dx\,dy = \iint_A \delta U\,dx\,dy.$$

En prenant successivement $U = x,\ y,\ x^2,\ y^2,\ xy$, on obtient les formules

$$(48)\qquad \iint_A \frac{\partial H}{\partial x}\,dx\,dy = \iint_A \frac{\partial H}{\partial y}\,dx\,dy = \iint_A x\frac{\partial H}{\partial x}\,dx\,dy = \iint_A y\frac{\partial H}{\partial y}\,dx\,dy = 0,$$

$$(49)\qquad \iint_A \left(x\frac{\partial H}{\partial y} + y\frac{\partial H}{\partial x}\right)dx\,dy = A - B.$$

Considérons maintenant l'intégrale

$$(50)\qquad J = \iint_A \delta H\,dx\,dy = \int_\Gamma H(\alpha y - \beta x)\,d\sigma$$
$$= \int_\Gamma H\frac{dH}{dn}\,d\sigma = \iint_A \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy.$$

Cette formule nous prouve que $J > 0$.

On a aussi, en remarquant que la fonction conjuguée $\overline{H}$ prend, sur (Γ), la valeur $\frac{x^2+y^2}{2}$ et utilisant une propriété bien connue des fonctions harmoniques ([1]) :

$$J = \iint_A \left[\left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy < \iint_A (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

soit

$$(51)\qquad I = A + B - J > 0.$$

En combinant (49) et (50), on a

$$(52)\qquad \iint_A y\frac{\partial H}{\partial x}\,dx\,dy = A - \frac{I}{2},\qquad \iint_A x\frac{\partial H}{\partial y}\,dx\,dy = -B + \frac{I}{2}.$$

En prenant $U = x^3,\ x^2y,\ xy^2,\ y^3$ dans (47), on obtient

$$(53)\qquad \left\{\begin{aligned} &\iint_A x^2\frac{\partial H}{\partial x}\,dx\,dy = B_1,\\ &\iint_A x^2\frac{\partial H}{\partial y}\,dx\,dy = 2C_1 - A_1 - 2\iint_A xy\frac{\partial H}{\partial x}\,dx\,dy,\\ &\iint_A y^2\frac{\partial H}{\partial x}\,dx\,dy = D_1 - 2B_1 - 2\iint_A xy\frac{\partial H}{\partial y}\,dx\,dy,\\ &\iint_A y^2\frac{\partial H}{\partial y}\,dx\,dy = -C_1, \end{aligned}\right.$$

([1]) *Cf.* Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, **2**, p. 630.

où l'on a posé

$$(54)\quad \begin{cases} A_1 = \iint_A x^3\,dx\,dy, & B_1 = \iint_A x^2 y\,dx\,dy, \\ C_1 = \iint_A xy^2\,dx\,dy, & D_1 = \iint_A y^3\,dx\,dy. \end{cases}$$

19. Posons maintenant

$$(55)\quad w = tr'H + \omega.$$

On a, d'après (30),

$$(56)\quad \begin{cases} \dfrac{T_1}{\mu} = \dfrac{\partial\omega}{\partial y} + tr'\left(\dfrac{\partial H}{\partial y} + x\right) + tg\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{t}{h}\left(\dfrac{\partial v}{\partial s} - tr'gx\right) \\ \qquad + \dfrac{tr}{h}(\delta v + u + \varepsilon x) + \dfrac{t^2 x}{h}\left[r^2\delta w + \dfrac{\partial(rw)}{\partial s}\right], \\ \dfrac{T_2}{\mu} = \dfrac{\partial\omega}{\partial x} + tr'\left(\dfrac{\partial H}{\partial x} - y\right) + tg\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{t}{h}\left(\dfrac{\partial u}{\partial s} + tr'gy\right) \\ \qquad + \dfrac{tr}{h}(\delta u - v - \varepsilon y) - \dfrac{t^2 y}{h}\left[r^2\delta w + \dfrac{\partial(rw)}{\partial s}\right]. \end{cases}$$

La troisième formule (28) devient

$$(57)\quad \begin{aligned} W = \mu h^2\Delta\omega + t\Big[& 2\mu h\left(p\frac{\partial w}{\partial y} - q\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial s}(\Delta\varphi + D\psi) \\ & + \mu r\delta(\Delta\varphi + D\psi) - \mu tr^2\delta\delta w \\ & - \mu t\frac{\partial(r\delta w)}{\partial s} + \frac{\partial N_3}{\partial s} + r\,\delta N_3 + pT_1 - qT_2 + hZ'\Big]. \end{aligned}$$

La troisième équation (23) nous donne ensuite

$$(58)\quad \begin{aligned} h^2\frac{d\omega}{dn} = & -t\frac{\partial}{\partial s}(\alpha u + \beta v) \\ & + t^2 r' g(1+h)(\beta x - \alpha y) + tr(\alpha v - \beta u - \alpha\,\delta u - \beta\,\delta v) \\ & + t(\alpha y - \beta x)\left[r\varepsilon + tr^2\delta w + t\frac{\partial(rw)}{\partial s} - \frac{r}{\mu}N_3\right] + \frac{hZ''}{\mu\rho} = K. \end{aligned}$$

Signalons l'identité suivante, qui nous servira plus tard,

$$(59)\quad \overline{Z_\Sigma} - Z_\Sigma = \mu t\int_\Gamma\left(-K + h^2\frac{d\omega}{dn}\right)d\sigma.$$

La formule (37) s'écrit enfin

$$
(60)\quad \begin{aligned} N = {} & \mu t^4 r' I + \mu t^4 r \varepsilon (A + B) - \mu t^3 \iint_A h \,\delta\omega \,dx\,dy \\ & + \mu t^4 \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial s}(vx - uy) + r(x\,\delta v - y\,\delta u + ux + vy) \right] \frac{dx\,dy}{h} \\ & - \mu t^5 r' \iint_A g\,\delta H \,dx\,dy \\ & + \mu t^5 \iint_A \left[r^2 \,\delta w + \frac{\partial (rw)}{\partial s} - (r' + r\varepsilon) g \right] \frac{x^2 + y^2}{h} \,dx\,dy. \end{aligned}
$$

20. Développements en série. — Nous admettrons, dans tout ce qui va suivre, que *les composantes des forces extérieures peuvent être développées suivant les puissances croissantes de t*. Il importe toutefois de bien préciser ce que nous entendons par là. Nous envisagerons deux points de vue.

Premier point de vue. — Nous supposons que le fil est plongé dans un champ de forces déterminé, dont les composantes sont des fonctions analytiques des coordonnées du point d'application, ces fonctions ne présentant aucune singularité dans le voisinage de la fibre neutre. Il s'ensuit que X', Y', Z' peuvent être développés, pour chaque valeur de s, suivant les puissances de tx et ty. En ordonnant chaque série par groupes homogènes, on obtient une *série entière en t, où le coefficient de t^m est un polynome homogène et de degré m en x, y.*

Les forces F_Σ ne peuvent être définies, comme les F_V, indépendamment du fil. On pourrait supposer que X'', Y'', Z'' sont des fonctions arbitraires de t, s et σ. Mais, nous conviendrons que chacune de ces trois composantes se présente sous la forme du *produit d'une certaine puissance de t par une fonction déterminée de s et σ*. L'exposant de cette puissance de t sera toujours *positif ou nul,* car nous devons évidemment exclure le cas où les forces F_Σ pourraient devenir infinies, puisqu'elles ne doivent pas dépasser la limite élastique.

Nous ferons une hypothèse analogue pour les F_B. Chaque composante de la force appliquée en un point quelconque (x, y, s_1) de la base (B) sera le *produit d'une certaine puissance de t par une fonction déterminée de x, y.* Les trois premières des coordonnées du système des F_B par rapport à $O_1 x_1 y_1 z_1$ contiendront donc nécessairement t^2 en facteur et les trois dernières admettront le facteur t^3.

En tenant compte de toutes ces hypothèses, les formules (19) et (20) nous montrent que, suivant une notation expliquée plus loin :

$$(60^{bis})\quad \begin{cases} X_V^i = Y_V^i = Z_V^i = L_\Sigma^i = M_\Sigma^i = N_\Sigma^i = 0, & \text{pour } i = 0 \text{ et } 1; \\ X_\Sigma^0 = Y_\Sigma^0 = Z_\Sigma^0 = 0; \quad L_V^i = M_V^i = N_V^i = 0, & \text{pour } i = 0, 1, 2. \end{cases}$$

Les coordonnées X, Y, ..., N du système (S_A) par rapport à $Oxyz$ se calculent en évaluant les coordonnées du système constitué par les F_V et F_Σ appliquées à la tranche comprise entre les sections droites (s') et $(s' + ds')$, puis intégrant par rapport à s' entre s et s_1 et ajoutant enfin les coordonnées X_B, Y_B, ..., N_B du système des F_B.

Appelons *ordre d'une fonction de t* l'exposant de la plus haute puissance de t se trouvant en facteur dans cette fonction (¹). Si les douze fonctions $X_V + X_\Sigma$, $Y_V + Y_\Sigma$, ..., $N_V + N_\Sigma$, X_B, Y_B, ..., N_B sont d'ordre n, il en est de même de X, Y, ..., N, dans le cas où *le fil n'est pas rectiligne*. D'après (60 *bis*), X, Y, ..., N *sont d'ordre* > 0.

Supposons maintenant le *fil rectiligne*. Si $X_V + X_\Sigma$, $Y_V + Y_\Sigma$, $L_V + L_\Sigma$, $M_V + M_\Sigma$, X_B, Y_B, L_B, M_B sont d'ordre n, il en est de même de X, Y, L, M. Si $Z_V + Z_\Sigma$ et Z_B sont d'ordre n, il en est de même de Z. Si $N_V + N_\Sigma$ et N_B sont d'ordre n, il en est de même de N.

Le cas du fil rectiligne sera examiné à part au Chapitre VI; nous l'excluons donc du présent Chapitre.

Bien entendu, il peut arriver accidentellement que certaines des fonctions X, Y, ..., N soient d'un ordre plus élevé que l'ordre prévu ci-dessus. Ajoutons que ces propriétés peuvent aussi se démontrer à partir des équations (18).

Ce premier point de vue sera adopté quand nous voudrons faire varier t, de manière à envisager le *cas du fil mince* (nº **34**).

Second point de vue. — Supposons un *fil déterminé*, dont nous ne voulons pas faire varier la section droite. La variable t doit alors recevoir une valeur numérique déterminée, que nous pouvons évidemment supposer égale à l'unité. Dans ce cas, ladite variable n'a

(¹) C'est son ordre infinitésimal, si t est infiniment petit principal.

plus aucune signification concrète et son introduction se présente comme un simple *artifice de calcul.*

Les forces extérieures étant supposées données pour le fil considéré, leurs composantes ne dépendent pas de t. Mais, rien ne nous empêche de les écrire sous la forme de *séries entières en t,* assujetties à la seule condition d'être convergentes pour $t = 1$ et d'avoir alors pour sommes les composantes données. Une telle présentation est évidemment artificielle et arbitraire. Elle doit être, elle aussi, considérée comme un *artifice de calcul,* permettant dans certains cas (*cf.* n° **53**) d'obtenir la solution du problème de la déformation sous une forme simple, grâce à un choix convenable des séries. Mais, il est bien évident, en vertu de la distributivité des opérations linéaires conduisant à ladite solution, que le résultat final est indépendant de ce choix. Seule une raison de commodité peut prévaloir pour faire adopter l'un plutôt que l'autre.

Dans ce second point de vue, les coefficients de nos séries seront des fonctions de x, y, s pour X′, Y′, Z′; de σ, s pour X″, Y″, Z″; de s pour X, Y, ..., N. Les propriétés signalées plus haut concernant l'ordre de X, Y, ..., N continuent évidemment à être exactes.

En ce qui concerne les *fonctions inconnues* ε, p', q', r', u, v, w, nous ne pouvons rien préjuger de leur nature comme fonctions de t. Nous ferons cependant l'hypothèse que, pour chacune d'elles, *la valeur* $t = 0$ *ne peut être qu'un point ordinaire ou un pôle.* Autrement dit, nous admettrons qu'*on peut les développer suivant les puissances croissantes de t,* les exposants d'un nombre fini de termes pouvant être négatifs.

Nous désignerons le coefficient de t^m dans le développement d'une fonction quelconque par la lettre représentant cette fonction, affectée de l'indice m; cet indice étant placé en haut et à droite dans le cas où un autre indice existerait déjà en bas.

Cela posé, supposons connus les coefficients u_n, v_n, w_n, ε_n, p'_{n-1}, q'_{n-1}, r'_{n-1}, φ_n, ψ_n pour $n < m$ et proposons-nous de les calculer pour $n = m$.

21. Calcul de ε_m, p'_{m-1}, q'_{m-1}. — D'après (31), on connaît Θ_{m-1}. On obtient donc ε_m en égalant les coefficients de t^{m+2} dans (35) et p'_{m-1}, q'_{m-1} en égalant les coefficients de t^{m+3} dans (36).

22. Calcul de φ_m. — D'après les formules (40), nous connaissons P_{m-1} et Q_{m-1}. D'après (30) et (32), nous connaissons aussi les N_i^{m-1} et T_i^{m-1}. Dès lors, en annulant le coefficient de t^m dans (44), nous obtenons $\frac{\partial P_m}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q_m}{\partial y}$; d'où P_m et Q_m par deux quadratures ([1]). L'équation (43) nous donne ensuite

$$\Delta\Delta\varphi_m = f_m(x, y, s), \tag{61}$$

f_m désignant une fonction connue.

Des formules (45), nous tirons ensuite

$$2\mu d\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\right) = \xi_m\, d\sigma, \qquad 2\mu d\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial y}\right) = \eta_m\, d\sigma. \tag{62}$$

D'où nous déduisons les valeurs de $\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}$ et $\frac{\partial \varphi_m}{\partial y}$ sur (Γ). Il faut toutefois nous assurer que les conditions de périodicité sont bien satisfaites, c'est-à-dire que l'on a d'abord

$$\int_\Gamma \xi_m\, d\sigma = 0, \qquad \int_\Gamma \eta_m\, d\sigma = 0; \tag{63}$$

puis,

$$\int_\Gamma \frac{\partial \varphi_m}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \varphi_m}{\partial y}\, dy = 0$$

ou, en intégrant par parties,

$$\int_\Gamma (x\xi_m + y\eta_m)\, d\sigma = 0. \tag{64}$$

Or, supposons que l'on choisisse arbitrairement φ_m. D'après la manière dont on a calculé P_m et Q_m, nous pouvons affirmer que les fonctions U et V sont d'ordre $m+1$. D'après les formules (27), $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ sont donc d'ordre $m+2$ et $\overline{S}_6$ d'ordre $m+3$. Comme les S_i sont identiquement nuls, on en conclut que les différences $S_1 - \overline{S}_1$ et $S_2 - \overline{S}_2$ sont d'ordre $m+2$ et que $S_6 - \overline{S}_6$ est d'ordre $m+3$. D'autre

---

([1]) D'après une remarque du n° **17**, nous pouvons choisir arbitrairement les fonctions de y, s ou de x, s constituant les constantes d'intégration. Ces fonctions étant choisies, nous pouvons encore augmenter φ d'une fonction bilinéaire en x, y.

part (¹), X'_A, Y'_A, Z'_A sont d'ordre $m+2$ et L'_A, M'_A, N'_A sont d'ordre $m+3$. En se reportant aux formules (18), on en déduit que les différences $\overline{X}_\Sigma - X_\Sigma$, $\overline{Y}_\Sigma - Y_\Sigma$ sont d'ordre $m+2$ et que $\overline{N}_\Sigma - N_\Sigma$ est d'ordre $m+3$. Reportons-nous maintenant aux identités (46). En annulant le coefficient de t^{m+1} dans $\overline{X}_\Sigma - X_\Sigma$ et $\overline{Y}_\Sigma - Y_\Sigma$, on obtient (63). En annulant le coefficient de t^{m+2} dans $\overline{N}_\Sigma - N_\Sigma$, on obtient (64).

Dès lors, *le calcul de la fonction φ_m se ramène au problème biharmonique*. Il suffit en effet de calculer une solution quelconque φ'_m de l'équation (61). En posant $\varphi_m - \varphi'_m = \Phi_m$, on est ramené à chercher une fonction biharmonique Φ_m connaissant sa valeur et celles de ses dérivées premières en chaque point de (Γ). De nombreuses solutions de ce problème ont été données par divers auteurs.

Le calcul des dérivées premières sur (Γ) introduit, pour chacune d'elles, une constante additive arbitraire. Cela revient à ajouter une fonction linéaire arbitraire à φ_m. Mais, cette fonction peut être négligée (*cf.* note de la page 27). Nous pouvons donc considérer la *fonction φ_m* comme *entièrement connue*.

23. Calcul de ψ_m. — En égalant les coefficients de t^m dans les équations (40), nous obtenons $\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial y^2}$. La condition d'intégrabilité étant vérifiée en vertu de (61), nous pouvons calculer $\frac{\partial \psi_m}{\partial x}$ et $\frac{\partial \psi_m}{\partial y}$ par des quadratures. Les constantes d'intégration sont entièrement déterminées par les conditions $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial y} = 0$, $u = 0$, $v = 0$ pour $x = y = 0$. En définitive, *nous connaissons maintenant les fonctions φ_m, ψ_m, u_m et v_m.*

24. Calcul de ω_m. — Annulons le coefficient de t^m dans (57) et égalons les coefficients de t^m dans (58); nous obtenons

$$\Delta\omega_m = g_m \tag{65}$$

(¹) Remarquer que le coefficient de t^{n+2} dans X'_A par exemple dépend seulement de T^n. Donc, il est nul pour $n \leq m-1$.

et, sur (Γ),

$$\frac{\partial \omega_m}{\partial n} = \mathrm{K}_m, \tag{66}$$

g_m et K_m désignant des fonctions connues. Le calcul de ω_m se ramène à un *problème de Neumann* ([1]), à condition toutefois de vérifier que l'on a

$$\int_\Gamma \mathrm{K}_m \, d\sigma = \iint_\mathrm{A} g_m \, dx \, dy.$$

Or, remplaçons ω_m par une solution quelconque de (65). Nous pouvons affirmer que la fonction W est d'ordre $m+1$. Donc, $\overline{\mathrm{S}}_3$ est d'ordre $m+2$, d'après (29). Comme S_3 est identiquement nul, on en conclut que $\mathrm{S}_3 - \overline{\mathrm{S}}_3$ est d'ordre $m+2$. Comme X'_A, Y'_A, Z'_A sont d'ordre $m+2$, la troisième formule (18) nous montre que $\mathrm{Z}_\Sigma - \overline{\mathrm{Z}}_\Sigma$ est aussi d'ordre $m+2$. En se reportant à (59), on en déduit que l'intégrale du second membre est d'ordre $m+1$. Donc

$$\int_\Gamma \mathrm{K}_m \, d\sigma = \int_\Gamma \frac{d\omega_m}{dn} \, d\sigma = \iint_\mathrm{A} \Delta\omega_m \, dx \, dy = \iint_\mathrm{A} g_m \, dx \, dy.$$

25. Calcul de r'_{m-1}. — On a, d'après (60),

$$\mathrm{N}_{m+3} = \mu \mathrm{I} r'_{m-1} + \text{quantité connue}.$$

Comme $\mathrm{I} > 0$, on en déduit r'_{m-1}.

Il est à remarquer que ce calcul ne peut généralement être effectué qu'après celui de ω_m, tandis que nous avons pu calculer ε_m, p'_{m-1}, q'_{m-1} sans connaître u_m et v_m. Il y a toutefois exception dans le cas où (Γ) est un cercle, car l'intégrale $\iint_\mathrm{A} \delta\omega_m \, dx \, dy$ est alors identiquement nulle (n° **4**).

26. En définitive, nous savons, en principe, calculer les coefficients de toutes nos séries. Il resterait maintenant à *démontrer la convergence*, pour t suffisamment petit. Mais cela paraît très difficile, du fait que

---

[1] La constante additive arbitraire que comporte la solution sera déterminée par la condition $w_0 = 0$ pour $x = y = 0$.

la détermination des coefficients successifs est subordonnée à la résolution d'une suite de problèmes biharmoniques et de problèmes de Neumann. Il faudrait pouvoir trouver une limite supérieure du module de la solution de chacun de ces problèmes, ce qui n'est pas simple. La convergence me paraît cependant probable.

Remarque. — Les opérations précédentes ne comportent aucune dérivation ou intégration par rapport à t. Elles demeurent donc inchangées si l'on multiplie toutes les séries par t^m, quel que soit l'exposant m. Le coefficient de t^i dans l'une quelconque des nouvelles séries est égal au coefficient de t^{i-m} dans l'ancienne série.

Si m est l'ordre maximum du pôle $t = 0$ pour les diverses fonctions inconnues, l'opération précédente transforme ce pôle en un point ordinaire pour toutes les fonctions.

CHAPITRE IV.

Calcul des premiers termes.

27. Cas où $t = 0$ n'est pas un pôle. — En appliquant la remarque du n° **26** et en vertu de l'hypothèse faite au n° **20**, nous pouvons ramener le cas général au *cas où $t = 0$ n'est un pôle pour aucune des fonctions inconnues*. Nous allons d'abord effectuer le calcul des premiers termes des différentes séries dans ce cas particulier.

Remarquons au préalable que les fonctions T_1, T_2, N_3 étant régulières pour $t = 0$, on a *nécessairement*, d'après (22) et (26),

$$X_i = Y_i = Z_i = 0 \quad \text{pour } i < 2; \qquad L_i = M_i = N_i = 0 \quad \text{pour } i < 3. \tag{67}$$

De même, les fonctions X', Y', Z' étant régulières, on a, d'après (19), des égalités analogues pour X_V^i, ..., N_V^i.

D'après (18), on a ensuite les conditions *nécessaires*

$$X_\Sigma^i = Y_\Sigma^i = Z_\Sigma^i = 0 \quad \text{pour } i < 2; \qquad N_\Sigma^i = 0 \quad \text{pour } i < 3 \tag{68}$$

et

$$X_2 = -M_\Sigma^2, \qquad Y_2 = L_\Sigma^2. \tag{69}$$

Enfin, les fonctions X″, Y″, Z″ étant régulières, on a, d'après (20),

$$L_\Sigma^i = M_\Sigma^i = N_\Sigma^i = 0 \qquad \text{pour } i < 2. \tag{70}$$

Si l'on veut *que la répartition des* F_Σ *puisse demeurer arbitraire* (¹), les conditions (68), pour $i = 1$, exigent, d'après (20), que l'on ait

$$X_0'' = Y_0'' = Z_0'' = 0. \tag{71}$$

Dès lors, les égalités (70) sont aussi vérifiées pour $i = 2$ et l'on a, d'après (69),

$$X_2 = Y_2 = 0. \tag{72}$$

Les trois premières équations (18) nous donnent alors

$$qZ_2 + X_V^2 + X_\Sigma^2 = 0, \qquad -pZ_2 + Y_V^2 + Y_\Sigma^2 = 0, \qquad \frac{dZ_2}{ds} + Z_V^2 + Z_\Sigma^2 = 0. \tag{73}$$

C'est en partant de ces hypothèses que nous allons faire notre calcul.

28. Première approximation. — D'après (35) et (36), on a

$$Z_2 = ES\varepsilon_0 \tag{74}$$

et

$$L_3 = M_3 = 0. \tag{75}$$

De (44) et (41), on déduit

$$P_0 = Q_0 = 0, \qquad R_0 = \varepsilon_0.$$

Puis, de (43) et (45) : $\varphi_0 = 0$. Les formules (42) nous donnent immédiatement les dérivées premières de ψ_0 : d'où l'on déduit u_0 et v_0 par (38). On a enfin $\omega_0 = 0$, d'après (57) et (58); d'où $w_0 = 0$, d'après (55). On obtient ainsi les formules suivantes :

$$u_0 = -k\varepsilon_0 x, \qquad v_0 = -k\varepsilon_0 y, \qquad w_0 = 0. \tag{76}$$

En se reportant aux formules (39), (56), (33) et (30), on en déduit

$$N_1^0 = N_2^0 = T_i^0 = 0, \qquad N_3^0 = E\varepsilon_0. \tag{77}$$

(¹) On pourrait évidemment s'affranchir de cette restriction. Les conditions (68) exigeraient alors que les F_Σ appliquées à la tranche (ds) forment un couple de moment perpendiculaire à Oz.

Moyennant quoi, les formules (22) et les équations (26) nous redonnent (72), (74) et (75), ainsi que

$$(78) \qquad N_3 = 0.$$

29. Deuxième approximation. — D'après (31) et (34), on a

$$\Theta_0 = k\varepsilon_0(qx - py), \qquad F_0 = E\varepsilon_0 q + X'_0, \qquad G_0 = -E\varepsilon_0 p + Y'_0.$$

Moyennant quoi, les formules (35) et (36) nous donnent

$$(79) \qquad Z_3 = ES\varepsilon_1 + k\iint_A (xX'_0 + yY'_0)\,dx\,dy + k\int_\Gamma (xX''_1 + yY''_1)\,d\sigma,$$

$$(80) \quad \left\{ \begin{aligned} L_4 &= EAp'_0 + Ek\varepsilon_0 p\frac{B-3A}{2} + k\iint_A \left(X'_0 xy + Y'_0\frac{y^2-x^2}{2}\right) dx\,dy \\ &\qquad + k\int_\Gamma \left(X''_1 xy + Y''_1\frac{y^2-x^2}{2}\right) d\sigma, \\ M_4 &= EBq'_0 + Ek\varepsilon_0 q\frac{A-3B}{2} + k\iint_A \left(X'_0\frac{y^2-x^2}{2} - Y'_0 xy\right) dx\,dy \\ &\qquad + k\int_\Gamma \left(X''_1\frac{y^2-x^2}{2} - Y''_1 xy\right) d\sigma. \end{aligned} \right.$$

De ces formules, on déduit ε_1, p'_0 et q'_0.

On a maintenant, d'après (44).

$$(81) \qquad \frac{\partial P_1}{\partial x} = -E\varepsilon_0 q - X'_0, \qquad \frac{\partial Q_1}{\partial y} = E\varepsilon_0 p - Y'_0.$$

Mais, nous ne pouvons pas calculer P_1, Q_1 sans connaître explicitement les fonctions X'_0, Y'_0. Nous ne pouvons donc pas poursuivre davantage le calcul de u_1, v_1.

De (57) et (58), on déduit

$$(82) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta\omega_1 &= -2\frac{d\varepsilon_0}{ds} - \frac{Z'_0}{\mu}, \\ \frac{d\omega_1}{dn} &= k\frac{d\varepsilon_0}{ds}(\alpha x + \beta y) + (1+2k)r\varepsilon_0(\beta x - \alpha y) + \frac{Z''_1}{\mu}. \end{aligned} \right.$$

On ne peut pas davantage résoudre ce problème de Neumann [1] sans connaître explicitement Z'_0 et Z''_1.

[1] On vérifie aisément que la condition de compatibilité n'est autre que la troisième équation (73).

30. Les calculs se simplifient et peuvent être menés jusqu'au bout si *l'on suppose*

(83) $$X'_0 = Y'_0 = Z'_0 = X''_1 = Y''_1 = Z''_1 = 0.$$

On a, en effet,

$$X^2_V = Y^2_V = Z^2_V = X^2_\Sigma = Y^2_\Sigma = Z^2_\Sigma = 0.$$

D'où $Z_2 = 0$, d'après (73) et *en excluant* le cas où $p = q = 0$, c'est-à-dire *le cas du fil rectiligne*. Les formules (74), (76) et (77) deviennent alors

(84) $$\varepsilon_0 = u_0 = v_0 = w_0 = N^0_i = T^0_i = 0.$$

Puis, les formules (79) et (80) se réduisent à

(85) $$Z_3 = ES\varepsilon_1, \qquad L_4 = EAp'_0, \qquad M_4 = EBq'_0.$$

D'après (81), on a $P_1 = Q_1 = 0$. Puis, d'après (41),

(86) $$R_1 = \varepsilon_1 + p'_0 y - q'_0 x.$$

D'où, par (43) et (45), $\varphi_1 = 0$. De (42) et (86), on tire les dérivées premières de ψ_1; d'où u_1 et v_1. D'autre part, (82) nous donne $\omega_1 = 0$; d'où w_1 par (55). On obtient ainsi les formules suivantes :

(87) $$\begin{cases} u_1 = k\left(-\varepsilon_1 x + q'_0 \dfrac{x^2 - y^2}{2} - p'_0 xy\right), \\ v_1 = k\left(-\varepsilon_1 y + p'_0 \dfrac{x^2 - y^2}{2} + q'_0 xy\right), \\ w_1 = r'_0 H. \end{cases}$$

Enfin, on a, d'après (60),

(88) $$N_4 = I r'_0$$

et, d'après (39), (56), (33) et (30),

(89) $$\begin{cases} N^1_1 = N^1_2 = T^1_3 = 0, & T^1_1 = \mu r'_0 \left(\dfrac{\partial H}{\partial y} + x\right), \\ N^1_3 = E(\varepsilon_1 + p'_0 y - q'_0 x), & T^1_2 = \mu r'_0 \left(\dfrac{\partial H}{\partial x} - y\right). \end{cases}$$

31. Troisième approximation. — Dans un but de simplification, bornons-nous à envisager l'*hypothèse du* n° **30**, *en supposant de plus*

(90) $$X'_1 = Y'_1 = Z'_1 = X''_2 = Y''_2 = Z''_2 = 0.$$

Cette hypothèse supplémentaire entraîne la nullité de X_V^3, Y_V^3, Z_V^3, X_Σ^3, Y_Σ^3, Z_Σ^3. Les quatrième et cinquième équations (18) nous donnent ensuite $X_3 = Y_3 = 0$, en tenant compte de (75), (78) et (83). Les deux premières équations (18) nous donnent ensuite $Z_3 = 0$, en excluant le cas du fil rectiligne. D'où $\varepsilon_1 = 0$, d'après (85).

Cela posé, on a, d'après (31) et (34),

$$(91)\quad \left\{\begin{aligned} \Theta_1 = {} & \frac{x^2}{2}[kpp'_0 - (k+2)qq'_0] \\ & + \frac{y^2}{2}[kqq'_0 - (k+2)pp'_0] + xy(k+1)(pq'_0 + qp'_0). \\ F_1 = {} & \mu \frac{dr'_0}{ds}\left(\frac{\partial H}{\partial x} - y\right) + Eq(p'_0 y - q'_0 x), \\ G_1 = {} & \mu \frac{dr'_0}{ds}\left(\frac{\partial H}{\partial y} + x\right) + Ep(q'_0 x - p'_0 y). \end{aligned}\right.$$

Portant dans (35) et (36) et tenant compte de (48) et (53), on obtient les formules suivantes :

$$(92)\quad \left\{\begin{aligned} Z_4 = {} & ES\varepsilon_2 + E\frac{dr'_0}{ds}\iint_A H\,dx\,dy + EJrr'_0 \\ & + \frac{E}{2}pp'_0[k(B-3A) - 2A] + \frac{E}{2}qq'_0[k(A-3B) - 2B], \\ L_5 = {} & EAp'_1 + E\frac{dr'_0}{ds}\iint_A yH\,dx\,dy - 2\mu(3+2k)rr'_0\iint_A xy\frac{\partial H}{\partial y}dx\,dy \\ & + 2\mu k\frac{dr'_0}{ds}\iint_A xy\frac{\partial H}{\partial x}dx\,dy - 2\mu kC_1\frac{dr'_0}{ds} \\ & - 2\mu rr'_0[(k+2)B_1 - (k+1)D_1] - Epp'_0[(k+1)D_1 - kB_1] \\ & - \frac{E}{2}qq'_0[B_1(3k+2) - kD_1] \\ & - \frac{E}{2}pq'_0[kA_1 - (3k+2)C_1] + Eqp'_0(2k+1)C_1, \\ M_5 = {} & EBq'_1 - E\frac{dr'_0}{ds}\iint_A xH\,dx\,dy \\ & - 2\mu(3+2k)rr'_0\iint_A xy\frac{\partial H}{\partial x}dx\,dy - 2\mu k\frac{dr'_0}{ds}\iint_A xy\frac{\partial H}{\partial y}dx\,dy \\ & - 2\mu kB_1\frac{dr'_0}{ds} - 2\mu rr'_0[(k+1)A_1 - (k+2)C_1] \\ & - \frac{E}{2}pp'_0[kA_1 - (3k+2)C_1] - Eqq'_0[kC_1 - (k+1)A_1] \\ & - Epq'_0(2k+1)B_1 - \frac{E}{2}qp'_0[(3k+2)B_1 - kD_1]. \end{aligned}\right.$$

32. Annulons le coefficient de t^2 dans (44); il vient, en tenant compte de (89), du n° **4** et de ce que H et $\overline{\mathrm{H}}$ sont deux fonctions harmoniques conjuguées :

$$\frac{\partial P_2}{\partial x} = \mu \frac{dr'_0}{ds}\left(y - \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \mathrm{E}q(q'_0 x - p'_0 y) - 2\mu r r'_0 \frac{\partial^2(y\overline{H})}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial y} = -\mu \frac{dr'_0}{ds}\left(x + \frac{\partial H}{\partial y}\right) + \mathrm{E}p(p'_0 y - q'_0 x) - 2\mu r r'_0 \frac{\partial^2(x\overline{H})}{\partial x \partial y}.$$

D'où

$$P_2 = \mu \frac{dr'_0}{ds}(xy - H) + \mathrm{E}q\left(q'_0 \frac{x^2 - y^2}{2} - p'_0 xy\right) - 2\mu r r'_0 \frac{\partial(y\overline{H})}{\partial y},$$

$$Q_2 = -\mu \frac{dr'_0}{ds}(xy + H) - \mathrm{E}p\left(p'_0 \frac{x^2 - y^2}{2} + q'_0 xy\right) - 2\mu r r'_0 \frac{\partial(x\overline{H})}{\partial x}.$$

On trouve ensuite, en tenant compte de ce que $\overline{H} = \frac{x^2 + y^2}{2}$ sur Γ,

$$\Delta\Delta\varphi_2 = -(pp'_0 + qq'_0),$$

$$2\mu d\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right) = -\mathrm{E}p\left(p'_0 \frac{x^2 - y^2}{2} + q'_0 xy\right)dx - \mu \frac{dr'_0}{ds}(xy + H)dx - \mu r r'_0 d[x(x^2 + y^2)],$$

$$2\mu d\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right) = \mathrm{E}q\left(q'_0 \frac{x^2 - y^2}{2} - p'_0 xy\right)dy + \mu \frac{dr'_0}{ds}(xy - H)dy - \mu r r'_0 d[y(x^2 + y^2)].$$

Introduisons les *fonctions biharmoniques* K, K′, K_1, K_2, K_3, K_4 telles que l'on ait (¹), sur (Γ),

$$\frac{\partial K}{\partial x} = x(x^2 + y^2), \qquad \frac{\partial K}{\partial y} = y(x^2 + y^2);$$

$$d\left(\frac{\partial K'}{\partial x}\right) = x(x\,dx + y\,dy), \qquad d\left(\frac{\partial K'}{\partial y}\right) = y(x\,dx + y\,dy);$$

$$d\left(\frac{\partial K_1}{\partial x}\right) = y^2\,dx, \quad \frac{\partial K_1}{\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial K_2}{\partial x} = 0, \quad d\left(\frac{\partial K_2}{\partial y}\right) = x^2\,dy;$$

$$d\left(\frac{\partial K_3}{\partial x}\right) = \left(H + \frac{J}{A + B}xy\right)dx; \qquad d\left(\frac{\partial K_3}{\partial y}\right) = \left(H - \frac{J}{A + B}xy\right)dy;$$

$$d\left(\frac{\partial K_4}{\partial x}\right) = A xy\,dx, \qquad d\left(\frac{\partial K_4}{\partial y}\right) = B xy\,dy.$$

(¹) On vérifie facilement les conditions de périodicité (*cf.* n° **22**), en tenant compte de (48) et (50).

On a [1]

$$(93)\qquad \varphi_2 = -\frac{(pp'_0+qq'_0)}{16}\left[\frac{(x^2+y^2)^2}{4}+\frac{1+k}{9}(x^4+y^4-6x^2y^2)\right]$$
$$+\frac{1+k}{48}(qq'_0-pp'_0)(x^4-y^4)+\frac{K}{16}(pp'_0+qq'_0-8rr'_0)$$
$$-\frac{K'}{6}(1+k)(pp'_0+qq'_0)$$
$$+\frac{1+k}{12}[(5pp'_0-qq'_0)K_1+(5qq'_0-pp'_0)K_2]$$
$$-\frac{K_3}{2}\frac{dr'_0}{ds}-\frac{1+k}{A+B}(pq'_0+qp'_0)K_4.$$

Le calcul de u_2 et v_2 s'achève ensuite par des quadratures.

33. Annulons le coefficient de t^2 dans (57) et (58); il vient [2]

$$(94)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta\omega_2 = {} & 3r'_0\left(q\frac{\partial H}{\partial x}-p\frac{\partial H}{\partial y}\right)-r'_0(px+qy) \\ & +2x\left(\frac{dq'_0}{ds}+rp'_0\right)-2y\left(\frac{dp'_0}{ds}-rq'_0\right), \\ \frac{d\omega_2}{dn} = {} & -\alpha\left(\frac{\partial u_1}{\partial s}+rv_1\right)-\beta\left(\frac{\partial v_1}{\partial s}-ru_1\right) \\ & +2(\beta x-\alpha y)[r'_0 g+(1+k)r(p'_0 y-q'_0 x)]. \end{aligned}\right.$$

On ne peut pas calculer explicitement ω_2, ni par suite r'_1, si l'on ne connaît pas (Γ).

Remarque. — D'après (85), (88) et (18), on peut éliminer p'_0, q'_0, r'_0 et leurs dérivées par rapport à s de toutes les équations précédentes, qui ne contiennent plus alors que Z, L, M, N et ceci linéairement.

34. Le fil mince. — Supposons t infiniment petit et plaçons-nous au premier point de vue du n° **20**. Les conditions (68) ne sont pas vérifiées en général. Donc, la valeur $t=0$ est nécessairement un pôle pour certaines des fonctions inconnues. Soit *m l'ordre maximum de ce pôle*. En utilisant la remarque du n° **26**, nous rentrons dans le cas particulier étudié aux n°s **27** à **33**. Mais il s'agit de savoir *quelle est la valeur de m.*

---

(1) Tenir compte de (88) et de la sixième équation (18).

(2) Utiliser les identités (8) pour u_1 et v_1.

Faisons la convention de surligner les nouvelles fonctions, ainsi que leurs coefficients. La correspondance entre les anciens coefficients C_i et les nouveaux $\overline{C}_i$ est donnée par la formule évidente

$$\overline{C}_i = C_{i-m}. \tag{95}$$

Supposons $m > 1$. D'après (95), on a $\overline{C}_i = 0$ si $i \leqq 1$ et si la fonction C est holomorphe pour $t = 0$. Ceci s'applique en particulier aux fonctions X', Y', Z', X'', Y'', Z''. On en conclut que les conditions (71) et (83) sont vérifiées pour les fonctions $\overline{X}'$, ..., $\overline{Z}''$. On peut donc appliquer les formules (74), (85) et (88).

Si $m > 3$, $\overline{Z}_2$, $\overline{L}_4$, $\overline{M}_4$, $\overline{N}_4$ sont nuls (nº **20**), car $2 - m$ et $4 - m$ sont < 1. Dès lors, les coefficients $\bar{\varepsilon}_0$, $\bar{p}'_0$, $\bar{q}'_0$, $\bar{r}'_0$, $\bar{u}_0$, $\bar{v}_0$ $\bar{w}_0$ sont tous nuls et le pôle est d'ordre $< m$ pour toutes les fonctions inconnues. *On en conclut que* $m \leqq 3$.

35. Cas $m = 3$. — Dans ce cas, les fonctions $\overline{X}'$, $\overline{Y}'$, $\overline{Z}'$, $\overline{X}''$, $\overline{Y}''$, $\overline{Z}''$ vérifient les conditions (71), (83) et (90). On peut donc appliquer aux fonctions surlignées les résultats des nºˢ **28**, **30** et **31**. En particulier, les formules (74) et (85) nous donnent $\bar{\varepsilon}_0 = \bar{\varepsilon}_1 = 0$. Mais, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{p}'_0$, ..., $\bar{r}'_2$ ne sont pas nuls en général et l'on a les formules suivantes [1] :

$$(96)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_2}{t} + \dots, & p' = \dfrac{p'_0}{t^3} + \dfrac{p'_1}{t^2} + \dfrac{p'_2}{t} + \dots, & q' = \dfrac{q'_0}{t^3} + \dfrac{q'_1}{t^2} + \dfrac{q'_1}{t} + \dots; \\
r' = \dfrac{r'_0}{t^3} + \dfrac{r'_1}{t^2} + \dfrac{r'_2}{t} + \dots; & & \\
u = \dfrac{u_1}{t^2} + \dfrac{u_2}{t} + \dots, & v = \dfrac{v_1}{t^2} + \dfrac{v_2}{t} + \dots, & w = \dfrac{w_1}{t^2} + \dfrac{w_2}{t} + \dots; \\
N_1 = \dfrac{N_1^2}{t} + \dots, & N_2 = \dfrac{N_2^2}{t} + \dots, & N_3 = \dfrac{N_3^1}{t^2} + \dfrac{N_3^2}{t} + \dots; \\
T_1 = \dfrac{T_1^1}{t^2} + \dfrac{T_1^2}{t} + \dots, & T_2 = \dfrac{T_2^1}{t^2} + \dfrac{T_2^1}{t} + \dots, & T_3 = \dfrac{T_3^2}{t} + \dots,
\end{array}\right.$$

dont les coefficients se calculent par les formules des nºˢ **28**, **30** et **31**, où les indices de Z, L, M, N doivent être diminués de trois unités.

---

[1] Pour simplifier l'écriture, nous supprimons les traits supérieurs de

On voit que, dans ce cas, $t=0$ est un *pôle du troisième ordre pour* p', q', r'*; du second ordre pour* u, v, w, N_3, T_1, T_2; *du premier ordre pour* ε, N_1, N_2, T_3.

36. Cas $m=2$. — On a $m=2$, si p'_0, q'_0, r'_0 sont nuls, c'est-à-dire, d'après (85) et (88), si $L_1=M_1=N_1=0$. Ceci arrive (n° **20**) si $X^1_\Sigma=Y^1_\Sigma=Z^1_\Sigma=0$, c'est-à-dire *si les* F_Σ *sont infiniment petites ou bien* sont finies, mais *forment un couple.*

On a toujours (71) et (83) pour les fonctions surlignées; mais, les trois dernières conditions (90) ne sont pas nécessairement vérifiées. On peut toujours appliquer les formules des n^os **28** et **30**, en diminuant de deux unités les indices de Z, L, M, N. Mais les formules du n° **31** doivent être complétées et deviennent plus compliquées. Fort heureusement, si l'on recherche seulement la partie infiniment grande de chacune des fonctions inconnues, on n'a pas besoin de la troisième approximation.

Grâce à la nullité de Z_0 et Z_1 (n° **20**), on a $\bar{\varepsilon}_0=\bar{\varepsilon}_1=0$. La valeur $t=0$ *n'est plus un pôle pour* ε, N_1, N_2, T_3. C'est un *pôle du second ordre pour* p', q', r' *et du premier ordre pour* u, v, w, N_3, T_1, T_2.

On peut écrire des formules analogues à (96), en diminuant d'une unité les exposants des dénominateurs et supprimant les termes finis.

37. Cas $m=1$. — On doit avoir $L_2=M_2=0$. D'après le n° **20**, les douze quantités $X^2_V+X^2_\Sigma, \ldots, N^2_B$ doivent être nulles ([1]).

On a $X^2_V=SX'_0$, $Y^2_V=SY'_0$, $Z^2_V=SZ'_0$. Si les F_Σ sont finies et forment un couple, les X^i_Σ, Y^i_Σ, Z^i_Σ sont nuls quel que soit i, en particulier pour $i=2$. Dans ce cas, on doit avoir $X'_0=Y'_0=Z'_0=0$. Si les F_Σ sont infiniment petites du premier ordre, elles doivent former un couple avec les F_V.

On identiquement $L^2_V=M^2_V=N^2_V=0$. Donc, L^2_Σ, M^2_Σ, N^2_Σ doivent être nuls. Si les F_Σ sont finies, elles doivent former un système équivalent à zéro. Si elles sont infiniment petites du premier ordre, L^2_Σ, M^2_Σ, N^2_Σ sont identiquement nuls.

([1]) Si l'on veut que L_2, M_2, N_2 soient identiquement nuls. Mais on pourrait imaginer des distributions de forces telles que L_2, M_2, N_2 soient nuls, sans que les douze quantités ci-dessus le soient. De telles distributions seraient artificielles.

Enfin, les F_B doivent être infiniment petites ou bien être finies et former un couple.

En résumé, le cas $m = 1$ se présente si les conditions suivantes sont remplies :

1° *Les* F_Σ *sont finies et forment un système équivalent à zéro; les* F_V *sont nulles sur la fibre neutre. Ou bien : les* F_Σ *sont infiniment petites et forment un couple avec les* F_V.

2° *Les* F_B *sont finies et forment un couple, ou bien sont infiniment petites.*

On a toujours (71) pour les fonctions surlignées; mais les trois dernières conditions (83) ne sont plus vérifiées, sauf dans le cas où les F_Σ sont infiniment petites. On peut appliquer néanmoins les formules des n^{os} **28** et **29**.

Comme $\overline{Z}_2 = Z_1 = 0$, on a encore $\bar{\varepsilon}_0 = 0$. D'où $\bar{u}_0 = \bar{v}_0 = \bar{w}_0 = 0$. Les formules (80) deviennent, en appliquant (95),

$$(97)\qquad \begin{cases} L_3 = EA\overline{p}'_0 + k\displaystyle\int_\Gamma \left(X''_0 xy + Y''_0 \frac{y^2 - x^2}{2}\right) d\sigma, \\ M_3 = EB\overline{q}'_0 + k\displaystyle\int_\Gamma \left(X''_0 \frac{y^2 - x^2}{2} - Y''_0 xy\right) d\sigma. \end{cases}$$

Les équations (82) se réduisent à

$$\Delta\omega_1 = 0, \qquad \frac{d\omega_1}{dn} = \frac{Z''_0}{\mu}.$$

Mais nous allons montrer que $Z''_0 = 0$.

Si le fil est *libre* (sauf aux extrémités), cela est évident, car les F_Σ n'existent pas.

Supposons-le maintenant *appuyé contre une surface* (S). Les F_Σ sont les réactions de (S) sur le fil. S'il n'y a *pas frottement*, Z''_0 est encore nul. S'il y a *frottement*, le signe de Z''_0 en chaque point de contact est opposé à celui de la *vitesse naissante* de ce point [1]. Or, l'arc de contact étant infiniment petit, ses différents points ont des

---

[1] *Cf.* 65^e Congrès des Sociétés Savantes, 1932, p. 459.

vitesses naissantes de même signe [1]. Donc, Z''_0 a un signe constant. Comme l'intégrale $\int_\Gamma Z''_0\, d\sigma$ est nulle par hypothèse, il en est de même de Z''_0 [2].

Dès lors, on a $\overline{\omega}_1 = 0$ et la formule (60) nous montre qu'on peut appliquer (88), en remplaçant, bien entendu, N_4 par N_3.

Dans ce cas, $t = 0$ est un *pôle du premier ordre pour* p', q', r'; ce n'est *plus un pôle pour* ε, u, v, w, N_i, T_i.

38. Le fil parfait. — Pour que le fil puisse devenir infiniment mince, *il faut et il suffit que les* N_i, T_i *n'aient pas de pôle*. D'après la discussion précédente, ceci arrive seulement dans le cas $m = 1$. Les forces extérieures doivent donc satisfaire aux conditions énoncées au n° **37**, si l'on veut que l'équilibre puisse être réalisé pour une *forme quelconque du fil*.

Mais on peut envisager la question d'un autre point de vue et *chercher la forme que doit avoir le fil pour être en équilibre sous l'action de forces extérieures données*.

Nous savons que L_1, M_1, N_1, L_2, M_2, N_2 doivent être nuls. D'autre part, nous avons vu, au n° **37**, que Z''_0 est toujours nul. Il s'ensuit, d'après (20), que $L^2_\Sigma = M^2_\Sigma = 0$. Comme L^1_Σ, M^1_Σ, L^1_V, M^1_V, L^2_V, M^2_V sont identiquement nuls, les quatrième et cinquième équations (18) nous donnent $X_1 = Y_1 = X_2 = Y_2 = 0$. De plus, la nullité de Z''_0 entraîne celle de Z^1_Σ, donc [3] celle de Z_1. Les six coordonnées du système (S_A) sont donc asymptotiques à 0,0, $t^2 Z_2$, 0, 0, 0. Par conséquent, *les forces intérieures* T_A *s'exerçant sur une section droite quelconque doivent*

---

[1] En excluant le cas exceptionnel où le mouvement naissant admettrait un axe instantané de rotation rencontrant l'arc de contact.

[2] *La composante longitudinale de la réaction est donc nécessairement infiniment petite.* Cela tient à ce que ces composantes s'additionnent au fur et à mesure qu'on progresse sur le fil dans le sens des vitesses naissantes et parviendraient à donner une tension finie amenant la rupture du fil, si elles n'étaient pas infiniment petites du premier ordre au moins par rapport à t.

[3] D'après la troisième équation (18), on a $\frac{dZ_1}{ds} = 0$. Or, pour $s = s_1$, $Z_1 = Z^1_B = 0$. Donc, Z_1 est identiquement nul.

asymptotiquement admettre une résultante tangente au fil. C'est la propriété qui sert de définition au *fil parfait* de la Mécanique rationnelle. La *tension* du fil est $T = t^2 Z_2$.

Les deux premières équations (18) nous donnent maintenant (¹) $X^1_\Sigma = Y^1_\Sigma = 0$. Comme Z^1_Σ est également nul, les composantes de la *force extérieure appliquée au fil par unité de longueur* sont asymptotiquement

$$X = t^2(X^2_V + X^2_\Sigma), \qquad Y = t^2(Y^2_V + Y^2_\Sigma), \qquad Z = t^2(Z^2_V + Z^2_\Sigma).$$

Les trois premières équations (18) nous donnent alors

$$qT + X = 0, \qquad -pT + Y - 0, \qquad \frac{dT}{ds} + Z = 0.$$

Ces équations ne sont autres que les *équations classiques d'équilibre des fils parfaits* (²).

39. Le fil élastique. — Si le fil est mince, mais pas assez pour nécessiter les conditions précédentes, c'est un *fil élastique*. On peut lui appliquer les formules du n° **35**. Voyons en particulier ce que deviennent les formules (96) *si l'on s'en tient aux parties principales*, c'est-à-dire si l'on réduit chaque second membre à son premier terme.

On a d'abord, d'après (85) : $p' = \frac{L_1}{EAt^3}\cdot$ Or, $L = L_1 t + \ldots$. Donc, $p' = \frac{L}{EAt^4}\cdot$ Mais, At^4 est le moment d'inertie de la *section droite véritable* (A_t) par rapport à Ox. Pour ne pas compliquer les notations continuons à l'appeler A. Opérons de même sur q' et r'. Nous obtenons les formules asymptotiques suivantes :

$$L = EAp', \qquad M = EBq', \qquad N = \mu I r', \tag{98}$$

(¹) On a aussi, d'après la sixième, $N^2_\Sigma = 0$. Ces trois conditions expriment que les *composantes transversales des* F_Σ appliquées à la tranche (ds) *sont infiniment petites ou bien* sont finies, mais *forment un système équivalent à zéro*. Dans le second cas, la condition énoncée s'oppose au glissement transversal et au roulement du fil sur la surface (S) contre laquelle il est appuyé.

(²) La troisième est la première équation intrinsèque. Les deux autres équivalent aux deux autres équations intrinsèques, comme on le voit en se reportant à la Note (²) de la page 7.

qui sont les *formules fondamentales concernant la déformation de la fibre neutre et la torsion*.

Pour ε, la formule est beaucoup plus compliquée, car elle fait intervenir ε_2 donné par la première formule (92). Mais il convient d'observer que ε est infiniment petit par rapport à p', q', r', u, v, w. Donc, pour un fil élastique, *la dilatation linéaire de la fibre neutre est négligeable* (¹).

On peut écrire maintenant, d'après (87) et (85),

$$u = \frac{u_1}{t^2} = \frac{k}{\mathrm{E}t^3}\left[\frac{\mathrm{M}}{2\mathrm{B}}(x^2-y^2) - \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{A}}xy\right].$$

Or, les composantes de la déformation de la section droite sont (nº **8**) ut, vt, wt et les coordonnées cartésiennes véritables du point M sont tx, ty. Si l'on convient de les désigner par u, v, w, x, y et si l'on répète le calcul ci-dessus pour v et w, on obtient

$$(99)\quad \begin{cases} u = \dfrac{k}{\mathrm{E}}\left[\dfrac{\mathrm{M}}{2\mathrm{B}}(x^2-y^2) - \dfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{A}}xy\right], \qquad v = \dfrac{k}{\mathrm{E}}\left[\dfrac{\mathrm{L}}{2\mathrm{A}}(x^2-y^2) + \dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{B}}xy\right], \\ w = \dfrac{\mathrm{N}}{\mu\mathrm{I}}\mathrm{H}; \end{cases}$$

formules donnant la *déformation des sections droites*.

Les fonctions N_1, N_2, T_3 sont infiniment petites par rapport à N_3, T_1, T_2. Nous pouvons donc les remplacer par zéro. Nous avons ensuite, d'après (89),

$$\mathrm{N}_3 = \frac{1}{t^3}\left(\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{A}}y - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{B}}x\right).$$

Remplaçant encore tx, ty, $t^4\mathrm{A}$, $t^4\mathrm{B}$ par x, y, A, B et opérant de même pour T_1, T_2, nous obtenons

$$(100)\quad \mathrm{N}_3 = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{A}}y - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{B}}x, \qquad \mathrm{T}_1 = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{I}}\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} + x\right), \qquad \mathrm{T}_2 = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{I}}\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} - y\right);$$

formules fondamentales de la Résistance des Matériaux.

40. On peut vérifier facilement que les formules ci-dessus sont en complet accord avec celles de mon premier Mémoire. Mais elles sont

(¹) Ceci peut ne pas être exact dans le cas du fil rectiligne.

plus simples et plus symétriques. On peut les interpréter de la manière suivante. Prenons, sur la fibre neutre, deux points infiniment voisins O et O′, tels que $OO' = ds$. Le trièdre $Oxyz$ étant supposé fixe, le trièdre $O'x'y'z'$, subit, pendant la déformation, les trois rotations $\frac{L\,ds}{EA}$ autour de Ox, $\frac{M\,ds}{EB}$ autour de Oy, $\frac{N\,ds}{\mu I}$ autour de Oz. Chacune de ces rotations est donc proportionnelle au moment résultant du système (S_A) par rapport à l'axe correspondant : elle est donnée par la *même formule que dans le problème de la flexion plane ou de la torsion d'un cylindre* (problème de Saint-Venant).

Remarque. — Aucune des formules précédentes ne contient r. Donc, *jusqu'à la deuxième approximation inclusivement, la déformation et les forces élastiques sont les mêmes que dans le cas particulier où la surface latérale est orthogonale aux plans des sections droites* [1].

41. Énergie de déformation. — Calculons l'énergie de déformation de la tranche (ds). A cet effet, évaluons le travail élémentaire $\delta\mathfrak{T}$ des forces extérieures appliquées à cette tranche pour une déformation infiniment petite. Ces forces formant un système équivalent à zéro, nous pouvons choisir arbitrairement le trièdre de référence. Adoptons le trièdre $Oxyz$ lié à la section droite d'abscisse curviligne s.

Les forces F_V et F_Σ appliquées à la tranche considérée sont infiniment petites de l'ordre de ds; il en est de même des déplacements; donc, le travail desdites forces est du second ordre en ds et doit être négligé.

Les efforts exercés sur la section droite (s) ne travaillent pas, parce que cette section est fixe par rapport à notre trièdre de référence.

Il ne nous reste donc qu'à évaluer le travail des forces exercées sur la section droite ($s + ds$). Le déplacement du centre de cette section est du second ordre en ds [2]; le travail de la somme géométrique des forces, appliquée en ce point, est donc encore négligeable et nous devons seulement calculer le travail des couples L, M, N. Or (n° **40**),

---

[1] Ceci suppose toutefois que *le fil n'est pas rectiligne*. Pour le cas du fil rectiligne, voir n° **73**.

[2] Nous négligeons la dilatation de la fibre neutre (n° **39**).

la section droite considérée subit les rotations $p'ds$, $q'ds$, $r'ds$ autour des axes $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ attachés à cette section. Ces axes ayant des directions infiniment voisines de Ox, Oy, Oz, on a

$$\delta\mathfrak{T} = ds(\mathrm{L}\,\delta p' + \mathrm{M}\,\delta q' + \mathrm{N}\,\delta r') = ds\left(\frac{\mathrm{L}\,\delta\mathrm{L}}{\mathrm{EA}} + \frac{\mathrm{M}\,\delta\mathrm{M}}{\mathrm{EB}} + \frac{\mathrm{N}\,\delta\mathrm{N}}{\mu\mathrm{I}}\right).$$

La parenthèse étant une différentielle exacte, on en déduit que l'énergie de déformation de la tranche (ds) est

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{L}^2}{\mathrm{EA}} + \frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{EB}} + \frac{\mathrm{N}^2}{\mu\mathrm{I}}\right)ds.$$

En intégrant le long du fil, on obtient la formule classique

$$\mathrm{V} = \frac{1}{2}\int_0^{s_1}\left(\frac{\mathrm{L}^2}{\mathrm{EA}} + \frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{EB}} + \frac{\mathrm{N}^2}{\mu\mathrm{I}}\right)ds.$$

Autre méthode. — D'après la *formule de Clapeyron*, l'énergie de déformation par unité de volume est

$$\frac{\lambda}{2}\theta^2 + \mu\left(\sum e_i^2 + \frac{1}{2}\sum g_i^2\right).$$

Or, d'après les formules (30), (96) et (87), e_1 et e_2 ont pour partie principale $\frac{k}{t^2}(q'_0 x - p'_0 y)$; la partie principale de e_3 est $\frac{1}{t^2}(p'_0 y - q'_0 x)$; celles de g_1 et g_2 sont $\frac{r'_0}{t^2}\left(\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial y} + x\right)$, $\frac{r'_0}{t^2}\left(\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x} - y\right)$; g_3 est de l'ordre de $\frac{1}{t}$.

Dès lors, la partie principale de la densité d'énergie est, au facteur $\frac{1}{t^4}$ près,

$$(p'_0 y - q'_0 x)^2\left[\frac{\lambda}{2}(1-2k)^2 + \mu(2k^2+1)\right] + \mu\frac{r'^2_0}{2}\left[\left(\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial y} + x\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x} - y\right)^2\right]$$
$$= \frac{\mathrm{E}}{2}(p'_0 y - q'_0 x)^2 + \frac{\mu}{2}r'^2_0\left[\left(\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial y}\right)^2 + x^2 + y^2 - 2\,\delta\mathrm{H}\right].$$

L'énergie de déformation de la tranche (ds) s'obtient en multipliant par $t^2 h\,dx\,dy\,ds$ et intégrant dans (A); ce qui donne [1], en rem-

[1] Utiliser les identités du n° **18**.

plaçant h par *un* et laissant de côté le facteur $t^2\,ds$,

$$\frac{E}{2}(Ap_0'^2 + Bq_0'^2) + \frac{\mu}{2}r_0'^2 = \frac{1}{2t^2}\left(\frac{L^2}{EA} + \frac{M^2}{EB} + \frac{N^2}{\mu I}\right).$$

En rétablissant les facteurs $\frac{1}{t^4}$ et $t^2\,ds$, puis remplaçant, comme au n° **30**, t^4A, t^4B, t^4I par A, B, I, on retrouve exactement la formule obtenue par la première méthode.

CHAPITRE V.

Le fil rond.

42. Simplifications diverses. — Supposons *que* (Γ) *soit un cercle de centre* O et de rayon *un*. Il en résulte de grandes simplifications dans tout ce qui précède.

D'abord, $\alpha y - \beta x = 0$; donc, *la fonction* H *est nulle*. En outre, $A = B = \frac{S}{4}$, $I = 2A$, $S = \pi$.

Les axes principaux d'inertie de (A) étant indéterminés, on peut choisir arbitrairement les axes Ox, Oy. En particulier, on peut toujours les faire tourner autour de Oz de telle manière que r soit une fonction quelconque de s, par exemple $r = 0$. Cette dernière hypothèse fait disparaître un grand nombre de termes des équations générales. Nous l'adopterons dans tout ce chapitre.

Enfin, la résolution du problème biharmonique et du problème de Neumann est simple.

43. Problème de Neumann. — Soit à calculer la fonction w s'annulant à l'origine et vérifiant les deux équations

$$\Delta w = f(x, y), \qquad \frac{dw}{dn} = \alpha P + \beta Q, \tag{101}$$

où $f(x, y)$ désigne un polynome de degré m en x, y et P, Q des polynomes de degré $m + 1$. Nous supposons bien entendu que la condition de compatibilité est vérifiée.

Supposons d'abord le polynome f homogène. Cherchons un polynome homogène w, de degré $m+2$, dont le laplacien soit f. Ce polynome contient $m+3$ coefficients inconnus. En faisant l'identification de son laplacien avec f, on obtient $m+1$ équations linéaires entre ces $m+3$ coefficients. Le déterminant principal de ce système est d'ordre $m+1$. En effet, le système homogène est obtenu en supposant $f=0$, donc w harmonique. Or, on sait qu'il existe une double infinité de polynomes harmoniques, homogènes et de degré donné. Dès lors, si l'on revient au cas où f n'est pas nul, on obtient encore une double infinité de solutions.

Si le polynome f n'est pas homogène, il suffit de le décomposer en groupes homogènes et l'on obtient encore une infinité de polynomes admettant f pour laplacien.

Par un changement de variable évident, le problème posé par les équations (101) se ramène au cas particulier où f est nul, c'est-à-dire au problème de Neumann proprement dit. On sait qu'il admet une solution unique, quelles que soient les fonctions P et Q vérifiant la condition de compatibilité. Dans le cas particulier où ces fonctions sont des polynomes de degré $m+1$, cette solution est un polynome de degré $m+2$. En effet, si l'on passe en coordonnées polaires (r, θ),

$$\alpha P + \beta Q = P\cos\theta + Q\sin\theta$$

devient un polynome de degré $m+2$ en $\cos\theta$, $\sin\theta$. Ce polynome peut être mis sous la forme

$$\sum_{p=1}^{m+2} (a_p \cos p\theta + b_p \sin p\theta),$$

et l'on a

$$w = \sum_{p=1}^{m+2} \frac{r^p}{p} (a_p \cos p\theta + b_p \sin p\theta),$$

ce qui donne bien un polynome de degré $m+2$, en revenant aux coordonnées cartésiennes. Pour le calculer pratiquement, le plus simple est d'appliquer la méthode des coefficients indéterminés, tout au moins si le degré est peu élevé.

44. Problème biharmonique. — Soit à trouver une fonction Z satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(102)\qquad \Delta\Delta Z = F(x, y);$$

$$(103)\qquad d\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right) = P\,dx + Q\,dy, \qquad d\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right) = P_1\,dx + Q_1\,dy, \qquad \text{sur } (\Gamma).$$

Nous supposons que F est un polynome de degré $m-2$ et P, Q, P_1, Q_1 des polynomes de degré m. Nous admettons bien entendu que les conditions de périodicité sont vérifiées. De plus, $m \geqq 2$.

Soient $p(\theta)$, $q(\theta)$, $p_1(\theta)$, $q_1(\theta)$ les polynomes obtenus en remplaçant x par $\cos\theta$ et y par $\sin\theta$ dans P, Q, P_1, Q_1. Les valeurs de $\frac{\partial Z}{\partial x}$ et $\frac{\partial Z}{\partial y}$ sur (Γ) sont

$$(104)\qquad \begin{cases} a(\theta) = \int [-p\ (\theta)\sin\theta + q\ (\theta)\cos\theta]\,d\theta, \\ b(\theta) = \int [-p_1(\theta)\sin\theta + q_1(\theta)\cos\theta]\,d\theta. \end{cases}$$

Ce sont des polynomes de degré $m+1$ en $\cos\theta$, $\sin\theta$.

Les valeurs de Z sur (Γ) et de $\frac{dZ}{dn}$ sont

$$(105)\qquad z(\theta) = \int(-a\sin\theta + b\cos\theta)\,d\theta, \qquad z_n(\theta) = a\cos\theta + b\sin\theta;$$

ce sont des polynomes de degré $m+2$ en $\cos\theta$, $\sin\theta$.

En appliquant deux fois de suite la méthode du numéro **43**, nous pouvons calculer un polynome $G(x, y)$, de degré $m+2$, vérifiant (102). Soit $g(\theta)$ et $g_n(\theta)$ sa valeur sur (Γ) et celle de sa dérivée normale; ce sont des polynomes de degré $m+2$ en $\cos\theta$, $\sin\theta$.

Posons $Z = G + H$. La fonction H doit être biharmonique; les valeurs $h(\theta)$ et $h_n(\theta)$ de H et $\frac{dH}{dn}$ sur (Γ) doivent être

$$(106)\qquad h(\theta) = z(\theta) - g(\theta), \qquad h_n(\theta) = z_n(\theta) - g_n(\theta).$$

Posons $H = r^2 U + V$, U et V désignant deux fonctions harmoniques inconnues. On a

$$u(\theta) + v(\theta) = h(\theta), \qquad u_n(\theta) + v_n(\theta) + 2u(\theta) = h_n(\theta).$$

Soit W la fonction harmonique qui prend la valeur $w(\theta) = h(\theta)$ sur (Γ). On a nécessairement $U + V = W$. Puis,

$$u_n(\theta) + v_n(\theta) = w_n(\theta);$$

d'où

$$u(\theta) = \frac{h_n(\theta) - w_n(\theta)}{2}. \tag{107}$$

On en déduit U; puis $V = W - U$.

45. Examinons maintenant la nature des fonctions U et V ainsi calculées. D'après (106), les fonctions $h(\theta)$ et $h_n(\theta)$ sont des polynomes de degré $m + 2$ en $\cos\theta$, $\sin\theta$. Il s'ensuit que W est un polynome de degré $m + 2$ en x, y; donc, $w_n(\theta)$ est un polynome de degré $m + 2$ en $\cos\theta$, $\sin\theta$. D'après (107), $u(\theta)$ est donc aussi un polynome en $\cos\theta$, $\sin\theta$ et son degré est au plus $m + 2$. Nous allons montrer qu'en réalité, *ce degré est m.*

Les opérations aboutissant au calcul de $u(\theta)$ étant distributives par rapport aux trois fonctions $a(\theta)$, $b(\theta)$ et $G(x, y)$, il nous suffit de faire la démonstration successivement pour tous les termes de ces trois fonctions.

Supposons le polynome $a(\theta)$ développé en polynome de Fourier et réduisons-le à l'un de ses harmoniques, les fonctions $b(\theta)$ et $G(x, y)$ étant supposées nulles. Si l'harmonique choisi est de rang $< m$, z et z_n sont de degré $< m + 1$. Comme g et g_n sont nuls, h et h_n sont de degré $\leqq m$; il en est de même de $w_n(\theta)$, puisque W est alors un polynome de degré $\leqq m$ en x, y. Donc, $u(\theta)$ est de degré $\leqq m$.

Choisissons maintenant, dans $a(\theta)$, un terme en $\cos m\theta$, dont nous pouvons évidemment négliger le coefficient. Nous avons dans ce cas

$$z\ (\theta) = -\int \cos m\theta \sin\theta\, d\theta = \frac{\cos(m+1)\theta}{2(m+1)} - \frac{\cos(m-1)\theta}{2(m-1)},$$

$$z_n(\theta) = \cos m\theta \ \cos\theta = \frac{\cos(m+1)\theta}{2} + \frac{\cos(m-1)\theta}{2}.$$

D'autre part,

$$W = \frac{r^{m+1}\cos(m+1)\theta}{2(m+1)} - \frac{r^{m-1}\cos(m-1)\theta}{2(m-1)}.$$

Donc,

$$w_n = \frac{\cos(m+1)\theta}{2} - \frac{\cos(m-1)\theta}{2}.$$

D'où

$$2u(\theta) = \cos(m-1)\theta = \text{polynome de degré } m-1.$$

On aurait une démonstration analogue en prenant les termes en $\sin m\theta$, $\cos(m+1)\theta$, $\sin(m+1)\theta$; les deux derniers donnant un polynome de degré m pour $u(\theta)$.

46. Supposons maintenant $a(\theta) = b(\theta) = 0$. — Développons G en polynome de Fourier. L'harmonique de rang p est de la forme $A_p \cos p\theta + B_p \sin p\theta$, A_p et B_p désignant des polynomes en r, de degré $\leqq m+2$. Si G est réduit à cet harmonique, $g(\theta)$ et $g_n(\theta)$ sont des fonctions linéaires de $\cos p\theta$ et $\sin p\theta$; W est un polynome de degré p en x, y; $w_n(\theta)$ est un polynome de degré p en $\cos\theta$, $\sin\theta$; donc aussi $u(\theta)$, d'après (106) et (107). Dès lors, il nous suffit d'envisager les cas $p = m+1$ et $p = m+2$.

Pour $p = m+2$, l'harmonique provient uniquement des termes de degré $m+2$ en x, y de G. Chacun des coefficients A_p et B_p est le produit de r^p par une constante. Donc, si l'on réduit G à cet harmonique, on obtient un polynome harmonique. Dès lors,

$$W(x, y) = -G(x, y), \qquad \text{d'où } w_n(\theta) = -g_n(\theta) = h_n(\theta);$$

donc $u(\theta) = 0$.

Pour $p = m+1$, l'harmonique provient uniquement des termes de degré $m+1$ en x, y de G; car les termes de degré $m+2$ ne peuvent donner que des harmoniques ([1]) dont le rang a la parité de $m+2$. Le raisonnement précédent subsiste et notre démonstration est terminée.

Nous savons donc maintenant que U est un polynome harmonique de degré m. Comme W est de degré $m+2$, il en est de même de V. On voit finalement que Z *est un polynome de degré* $m+2$.

47. Les fonctions u_m, v_m, w_m sont des polynomes. — Supposons que les F_V et F_Σ soient nulles et que les six coordonnées X, Y, ..., N ne

([1]) Un polynome homogène et de degré n en $\cos\theta$, $\sin\theta$ est multiplié par $(-1)^n$ quand on change θ en $\theta+\pi$; il en est donc de même de chacun de ses harmoniques. Comme $p\theta$ se change en $p\theta + p\pi$, p a nécessairement la parité de n.

contiennent t que par le facteur t^4, de sorte qu'on se trouve dans le cas du numéro **31**. Nous allons démontrer les propriétés suivantes :

1° *Les fonctions* φ_i, ψ_i, u_i, v_i, w_i *sont des polynomes pairs ou impairs, de degré* (¹) $i+2$ *pour* φ_i *et* ψ_i, $i+1$ *pour* u_i, v_i, w_i;
2° *Les* ε_i, p'_i, q'_i, r'_i *d'indice impair sont nuls* (²).

D'après les numéros **28** et **30**, nous savons déjà que ceci est exact pour $i=0$ et 1. Admettons qu'il en soit de même pour $i \leq m-1$.

On a, d'après (31) et en développant $\frac{1}{h}$ suivant les puissances de tg,

$$\Theta_{m-1}=\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i g^i\left[pv_j-qu_j+w_{j-1}\frac{\partial g}{\partial s}+g(q'_{j-1}x-p'_{j-1}y)\right], \quad (i+j=m-1).$$

Le crochet est un polynome de degré $j+1$. Les trois premiers termes ont la parité de $j+1$. D'autre part, si j est pair, $p'_{j-1}=q'_{j-1}=0$; donc, le quatrième terme n'existe que si j est impair et il est homogène et du second degré; il a donc la parité de $j+1$. Dès lors, Θ_{m-1} *est un polynome de degré* m, *ayant la parité de* m.

On a maintenant, d'après (56) et en se rappelant que $w=\omega$,

$$(108)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{T_1^{m-1}}{\mu}=\frac{\partial w_{m-1}}{\partial y}+r'_{m-2}x+g\frac{\partial w_{m-2}}{\partial y}+\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i g^i\left(\frac{\partial v_j}{\partial s}-r'_{j-1}gx\right)\\ +r\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i g^i\Big[\delta v_j+u_j+\varepsilon_j x\\ +x\left(r^2\,\delta w_{j-1}+r\frac{\partial w_{j-1}}{\partial s}+\frac{dr}{ds}w_{j-1}\right)\Big]\\ (i+j=m-2).\end{aligned}\right.$$

Les trois premiers termes constituent un polynome de degré $m-1$; le second n'existe que si m est pair et a la parité de $m-1$. Donc, le polynome en question a la parité de $m-1$.

(¹) Ce degré est un maximum et peut éventuellement s'abaisser, mais en gardant sa parité.

(²) Si l'on ne fait, sur les forces extérieures, aucune hypothèse autre que celle admise pour le premier point de vue du numéro **20** en ce qui concerne les formes de volume, la seconde propriété n'existe pas; la première subsiste, sauf celle relative à la parité des polynomes.

La parenthèse de la première somme est de même un polynome de degré $j+1$ et ayant la parité de $j+1$. Donc, cette somme est un polynome de degré $m-1$, ayant la parité de $m-1$.

Le crochet est de degré $j+1$ et a la parité de $j+1$. Donc, la deuxième somme est un polynome de degré $m-1$, ayant la parité de $m-1$ et il en est de même finalement de T_1^{m-1} et aussi de T_2^{m-1}.

La formule (41) nous montre que R_m est un polynome de degré m, ayant la parité de m.

Les formules (40) nous montrent de même que P_{m-1} et Q_{m-1} sont des polynomes de degré $m-1$, ayant la parité de $m-1$. Il en est de même de N_1^{m-1}, N_2^{m-1} et T_3^{m-1}, d'après (39); puis de N_3^{m-1}, d'après (33) et (30) et enfin [1] de $\frac{\partial P_m}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q_m}{\partial y}$, d'après (44). Il s'ensuit que P_m et Q_m sont des polynomes de degré m, ayant la parité de m, à condition bien entendu de choisir convenablement les constantes d'intégration, en intégrant par exemple de o à x ou de o à y, comme nous en avons le droit (n° **17**).

L'équation (43) nous montre ensuite que $\Delta\Delta\varphi_m$ est un polynome pair ou impair, de degré $m-2$. D'après (45), on a, sur (Γ),

$$\xi_m \, d\sigma = Q_m \, dx, \qquad \eta_m \, d\sigma = P_m \, dy.$$

D'après ce que nous savons sur P_m et Q_m et en nous reportant au numéro **46**, nous concluons que φ_m *est un polynome de degré* $m+2$.

Je dis que *ce polynome a la parité de m*. En effet, supposons qu'il existe des termes de parité différente et soit H le polynome, de degré $m+1$, qu'ils constituent. Les dérivées premières de ce polynome sont des polynomes de degré m, ayant la parité de m. Sur (Γ), ce sont des polynomes en $\cos\theta$, $\sin\theta$, dont aucun terme ne peut se réduire avec un terme des polynomes $\int Q_m \, dx$ et $\int P_m \, dy$, car ces derniers ont la parité de $m+1$. On en conclut que les valeurs de $\frac{\partial H}{\partial x}$ et $\frac{\partial H}{\partial y}$, sur (Γ), sont identiquement nulles. D'autre part, $\Delta\Delta H$ est également nul, pour une raison analogue. On en conclut que H est

---

[1] Même s'il y a des forces de volume, car X'_{m-1} et gX'_{m-2} sont des polynomes homogènes et de degré $m-1$.

une constante, que l'on peut laisser tomber sans changer u_m et v_m. Donc, φ_m a bien la parité de m.

Les formules (42) nous montrent maintenant que $\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial y^2}$ sont des polynomes de degré m, ayant la parité de m. Donc, $\frac{\partial \psi_m}{\partial x}$ et $\frac{\partial \psi_m}{\partial y}$ sont des polynomes pairs ou impairs de degré $m+1$, nuls à l'origine et augmentés respectivement des fonctions linéaires arbitraires $a_m y + b_m$ et $a_m x + c_m$. Les fonctions u_m et v_m apparaissent ainsi comme des polynomes pairs ou impairs de degré $m+1$, augmentés respectivement de $a_m y + b_m$ et $-a_m x - c_m$. Si m est pair, on a $b_m = c_m = 0$, parce que u_m et v_m doivent s'annuler à l'origine; les termes additifs $a_m y$ et $-a_m x$ ont la parité de $m+1$. Si m est impair, a_m est nul, à cause de la condition $\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x \, \partial g} = 0$; les termes additifs b_m et $-c_m$ ont encore la parité de $m+1$.

Dans tous les cas, u_m et v_m *sont des polynomes pairs ou impairs, de degré* $m+1$.

48. La formule (57) nous montre maintenant que Δw_m est un polynome pair ou impair ([1]), de degré $m-1$. Puis, on voit sur l'équation (58) que les coefficients de α et β dans $\frac{dw_m}{dn}$ sont des polynomes pairs ou impairs, de degré m. D'après le numéro **43**, on en conclut que w_m *est un polynome de degré* $m+1$. On démontre *qu'il a la parité de* $m+1$ par un raisonnement analogue à celui qui a été fait plus haut pour φ_m. La propriété 1° est donc démontrée.

49. Reportons-nous maintenant à la formule (35). En égalant les coefficients de t^{m+2} et supposant m impair et > 2, on obtient zéro au premier membre (n° **47**). Au second membre, on a d'abord $\mathrm{ES}\varepsilon_m$. Sous le signe $\int\int$ de chacune des deux intégrales doubles figurent des polynomes impairs; donc, ces intégrales sont nulles et l'on en conclut que $\varepsilon_m = 0$.

---

(1) Même s'il y a des forces de volume, car Z'_{m-1} et gZ'_{m-2} sont des polynomes homogènes, de degré $m-1$.

En égalant les coefficients de t^{m+4} dans les formules (36) ou (60) et supposant toujours m impair, on voit de même que p'_m, q'_m, r'_m sont nuls. La seconde propriété est donc à son tour démontrée.

50. Calcul de la troisième approximation. — Revenons d'abord aux formules (92). Toutes les intégrales sont nulles, ainsi que J, A_1, B_1, C_1, D_1. On obtient ainsi

$$Z = ES\varepsilon_2 - EA(k+1)(pp'_0 + qq'_0).$$

Les deux autres formules nous confirment que $p'_1 = q'_1 = 0$. De même, (60) nous donne $r'_1 = 0$.

Les fonctions K, K', K_1, K_2, K_3, K_4 ont les expressions suivantes :

$$K = \frac{x^2+y^2}{2}, \qquad K' = 0, \qquad K_1 = -\frac{5x^4}{96} + \frac{y^4}{32} + \frac{x^2y^2 + 7x^2 - y^2}{16},$$

$$K_2 \text{ symétrique}, \qquad K_3 = 0, \qquad K_4 = \frac{A}{6}xy(x^2+y^2-3).$$

Portant dans (93), on obtient φ_2. Le reste du calcul est élémentaire et conduit au résultat suivant [1] :

$$\begin{aligned} u_2 = {} & \frac{x^2}{48}(1+2k)[(7+4k)qq'_0 - (1+4k)pp'_0] - \frac{x^2y}{2}k(1+k)(pq'_0+qp'_0) \\ & + \frac{xy^2}{16}[(-3+6k+8k^2)pp'_0 + (5-2k-8k^2)qq'_0] \\ & + \frac{y^3}{6}(k^2-1)(pq'_0+qp'_0) + x\left[\frac{(1+4k)pp'_0 - (7+4k)qq'_0}{16} - \frac{kZ}{ES}\right] \\ & + \frac{y}{4}(1+k)(pq'_0+qp'_0). \end{aligned}$$

L'expression de v_2 s'obtient par symétrie.

On pourrait évidemment éliminer p'_0, q'_0, r'_0 au moyen des formules (85) et (88).

---

[1] Tenir compte de la remarque du n° **40**.

On peut supprimer, dans φ_2, tous les termes ne contenant que x ou que y, à condition de corriger P_2 et Q_2 conformément à la remarque faite au numéro **17**. Cela complique un peu P_2 et Q_2, mais simplifie beaucoup φ_2.

Les équations (94) s'écrivent ([1])

$$EA\,\Delta w_2 = x(k'pN - 2X) + y(k'qN - 2Y),$$

$$\frac{2EA}{k}\frac{dw_2}{dn} = x(X - pN) + y(Y - qN).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} 8EAw_2 = (x^2+y^2)[x(k'pN - 2X) + y(k'qN - 2Y)] \\ + x[2X(2k+3) - pN(k+3)] \\ + y[2Y(2k+3) - qN(k+3)]. \end{aligned}$$

En utilisant les formules (39), (33) et (56), on trouve

$$\begin{aligned} 16A(1+k)N_2^2 = (5+2k)pLx^2 + (7+6k)pL(y^2-1) \\ - (1+2k)qM(3x^2+y^2-1), \end{aligned}$$

N_1^2 par symétrie,

$$\begin{aligned} 8A(1+k)N_3^2 = 2k(3+2k)(pLx^2+qMy^2) - 2(4+5k+2k^2)(qMx^2+pLy^2) \\ + 8(1+k)^2(pM+qL)xy + 2Z(1+k) + (2+k)(pL+qM), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16A(1+k)T_1^2 = (k+3)N(3qx^2+qy^2-2pxy-q) + 2(2k+3)Y(1-y^2) \\ + 2(2k-1)Yx^2 - 4(2k+1)Yxy, \end{aligned}$$

T_2^2 par symétrie,

$$8A(1+k)T_3^2 = 2(1+k)(pM+qL)(1-x^2-y^2) + (1+2k)(pL+qM)xy.$$

51. Le calcul de p'_2, q'_2, r'_2 résulte des formules (36) et (37). Il est assez simple pour r'_2, long et fastidieux pour p'_2 et q'_2. Voici les résultats :

$$\begin{aligned} 48(1+k)EAp'_2 = 2(7+15k+6k^2)\frac{dq}{ds}N - (1+k)(9+20k+8k^2)Lp^2 \\ + 2(7+11k-2k^2-4k^3)Lq^2 \\ - (23+51k+24k^2)Mpq - 4(7+9k+k^2)pZ; \end{aligned}$$

q'_2 par symétrie,

$$48EAr'_2 = 5(3+k)N(p^2+q^2) - 2(11+6k)(pX+qY).$$

Ces diverses formules ne sont pas homogènes, parce que le rayon de (Γ) a été pris pour unité. Mais, on rétablit l'homogénéité en remplaçant l'unité par le carré ρ^2 de ce rayon partout où cela est nécessaire. Par exemple, dans les formules ci-dessus, il suffit de multiplier le second membre par ρ^2.

([1]) Tenir compte de la remarque du numéro **40**.

On voit que le rapport du second terme de la série p' au premier est de l'ordre de $\frac{\rho^2}{R^2}$, R désignant le rayon de courbure. Si ρ est petit vis-à-vis de R, la série doit converger rapidement et les formules utilisées en Résistance des matériaux sont pratiquement suffisantes. Par contre, elles peuvent devenir très inexactes si ρ est comparable à R. En particulier, elles doivent être totalement fausses au voisinage d'un *point anguleux*.

CHAPITRE VI.

Le fil rectiligne.

52. Le cylindre. — On a $p=q=r=g=0$, $h=1$, $\Theta=0$. De plus, s est la cote de la section droite (A), si l'on a pris la fibre neutre pour axe des z. Nous remplacerons donc la lettre s par z. En outre, nous supprimons les accents de p', q', r'. Les équations du Chapitre III deviennent alors

$$\frac{\partial P}{\partial x} + t\left(\frac{\partial T_2}{\partial z} + X'\right) = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} + t\left(\frac{\partial T_1}{\partial z} + Y'\right) = 0; \tag{109}$$

$$2\mu k' \Delta\Delta\varphi = k'\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right) - k\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right) - 2\mu k t \frac{\partial(\Delta w)}{\partial z}, \tag{110}$$

$$2\mu d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = Q\,dx + Y''\,d\sigma, \qquad 2\mu d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = P\,dy - X''\,d\sigma; \tag{111}$$

$$\left\{\begin{aligned} 2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} &= k'P - kQ - 2\mu k'\Delta\varphi - 2\mu k R,\\ 2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} &= kP - k'Q + 2\mu k'\Delta\varphi + 2\mu k R,\end{aligned}\right. \tag{112}$$

$$R = \varepsilon + t\left(py - qx + \frac{\partial w}{\partial z}\right); \tag{113}$$

$$2\mu\Delta\omega + t\frac{\partial}{\partial z}(P + Q - 2\mu\Delta\varphi + 4\mu R) + 2tZ' = 0, \tag{114}$$

$$\frac{d\omega}{dn} = -t\frac{\partial}{\partial z}(\alpha u + \beta v) + \frac{Z''}{\mu}; \tag{115}$$

$$\left\{\begin{aligned} N_1 &= P - 2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, & N_2 &= Q - 2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2},\\ N_3 &= k(P + Q - 2\mu\Delta\varphi) + ER, & T_3 &= 2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y},\end{aligned}\right. \tag{116}$$

$$\frac{T_1}{\mu} = \frac{\partial\omega}{\partial y} + tr\left(\frac{\partial H}{\partial y} + x\right) + t\frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \frac{T_2}{\mu} = \frac{\partial\omega}{\partial x} + tr\left(\frac{\partial H}{\partial x} - y\right) + t\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{117}$$

En outre, les formules (34), (35), (36) et (60) deviennent

$$(118)\qquad F = \frac{\partial T_2}{\partial z} + X', \qquad G = \frac{\partial T_1}{\partial z} + Y',$$

$$(119)\qquad Z = t^2 ES\varepsilon + t^3 E \iint_A \frac{\partial w}{\partial z}\, dx\, dy + t^3 k \iint_A (xF + yG)\, dx\, dy + t^2 k \int_\Gamma (xX'' + yY'')\, d\sigma,$$

$$(120)\qquad \left\{\begin{aligned} L &= t^4 EAp + t^4 E \iint_A y \frac{\partial w}{\partial z}\, dx\, dy + t^4 k \iint_A \left(xy\,F + \frac{y^2 - x^2}{2} G\right) dx\, dy \\ &\quad + t^3 k \int_\Gamma \left(xyX'' + \frac{y^2 - x^2}{2} Y''\right) d\sigma, \\ M &= t^4 EBq - t^4 E \iint_A x \frac{\partial w}{\partial z}\, dx\, dy + t^4 k \iint_A \left(\frac{y^2 - x^2}{2} F - xy\,G\right) dx\, dy \\ &\quad + t^3 k \int_\Gamma \left(\frac{y^2 - x^2}{2} X'' - xyY''\right) d\sigma. \end{aligned}\right.$$

$$(121)\qquad N = \mu t^4 r I - \mu t^3 \iint_A \delta\omega\, dx\, dy + \mu t^4 \iint_A \frac{\partial}{\partial z}(vx - uy)\, dx\, dy.$$

53. Cas où les forces de volume et les forces latérales sont des polynomes en z. — Supposons que X', Y', Z', X'', Y'', Z'' soient des polynomes de degré m en z; les coefficients de ces polynomes étant des fonctions données de x, y ou de σ. Les équations (18) ou un calcul direct nous montrent que X, Y, Z, N sont des polynomes de degré $m+1$ et L, M des polynomes de degré $m+2$. Convenons d'appeler C_i le coefficient de z^{n-i} dans un polynome C de degré n.

Cela posé, rendons tous nos polynomes homogènes, en introduisant la variable d'homogénéité t. Puis, multiplions X', Y', Z' par t^2, X'', Y'', Z'' par t^3; X, Y, Z, L, M par t^4; N par t^5. Convenons d'appeler $\overline{C}_i$ le coefficient de t^i dans le polynome C affecté du multiplicateur correspondant. On a les relations suivantes :

$\overline{X}'_{i+2} = X'_i z^{m-i}$,	formules analogues	pour		Y', Z';
$\overline{X}''_{i+3} = X''_i z^{m-i}$,	»	»	»	Y'', Z'';
$\overline{X}_{i+4} = X_i z^{m-i+1}$,	»	»	»	Y, Z;
$\overline{L}_{i+4} = L_i z^{m-i+2}$,	formule analogue		»	M;
$\overline{N}_{i+5} = N_i z^{m-i+1}$;				

en convenant de remplacer par zéro les coefficients d'indice négatif. Si l'on fait $t = 1$, tous les polynomes reprennent leur expression véritable.

Nous plaçant au second point de vue du numéro **20**, nous allons maintenant faire jouer à la variable t ci-dessus le rôle de la variable t de notre théorie générale et nous allons démontrer que *toutes les fonctions inconnues* sont des polynomes homogènes en t, z, dont les degrés sont $m+2$ pour p, q, r et $m+3$ pour les autres fonctions.

D'abord, il est aisé de vérifier que, si l'on admet cette propriété, les différents termes des équations (109) à (121), ainsi que des équations (18), sont tous des polynomes homogènes et ayant même degré dans chaque équation. Dès lors, il suffit d'employer la méthode des coefficients indéterminés et de montrer que ces coefficients peuvent être calculés d'une manière unique. Or, en identifiant les termes successifs dans les différentes équations et procédant dans l'ordre où les degrés de ces termes par rapport à t vont en croissant, on retombe sur la méthode générale exposée au Chapitre III. D'autre part, les conditions (71), (83) et (90) sont vérifiées par les coefficients surlignés. Donc, $t = 0$ n'est pas un pôle. Par conséquent, *notre démonstration est toute faite*. Dans le cas particulier actuel, *les séries du Chapitre III sont limitées à des polynomes*.

54. Pour évaluer les degrés des diverses fonctions par rapport à z, il suffit, en se reportant aux numéros **28** et **30** à **33**, de calculer les premiers coefficients surlignés et de voir quels sont ceux qui sont nuls.

Les formules (74) et (85) nous donnent d'abord $\bar{\varepsilon}_0 = \bar{\varepsilon}_1 = 0$. Puis, (76), (77) et (88) nous donnent $\bar{u}_0 = \bar{v}_0 = \bar{w}_0 = \overline{\mathrm{N}}_i^0 = \overline{\mathrm{T}}_i^0 = \bar{r}_0 = 0$. D'où, d'après (87) et (89), $\bar{w}_1 = \overline{\mathrm{N}}_1^1 = \overline{\mathrm{N}}_2^1 = \overline{\mathrm{T}}_i^1 = 0$. Enfin, les formules du numéro **32** nous montrent que

$$\overline{\mathrm{P}}_2 = \overline{\mathrm{Q}}_2 = \bar{\varphi}_2 = 0, \qquad \text{d'où } \overline{\mathrm{N}}_1^2 = \overline{\mathrm{N}}_2^2 = \overline{\mathrm{T}}_3^2 = 0.$$

Les autres coefficients ne sont pas nuls en général. En tenant compte des degrés d'homogénéité, on en déduit que *les degrés par rapport à z sont les suivants :*

ε,	p et q,	r,	u et v,	w et ω,	N_1 et N_2,	N_3,	T_1 et T_2,	T_3.
$m+1$	$m+2$	$m+1$	$m+2$	$m+1$	m	$m+2$	$m+1$	m

Nous continuons à adopter la notation du numéro **55** pour ces divers polynomes, ce qui nous donne les formules de correspondance

$$
\begin{array}{llll}
\overline{\varepsilon}_{i+2} = z^{m+1-i}\varepsilon_i, & \overline{p}_i = z^{m+2-i}\, p_i, & \overline{q}_i = z^{m+2-i}\, q_i, & \overline{r}_{i+1} = z^{m+1-i}\, r_i\,; \\
\overline{u}_{i+1} = z^{m+2-i}\, u_i, & \overline{v}_{i+1} = z^{m+2-i}\, v_i, & \overline{\varpi}_{i+2} = z^{m+1-i}\varpi_i, & \overline{\omega}_{i+2} = z^{m+1-i}\omega_i\,; \\
\overline{\mathrm{N}}_1^{i+3} = z^{m-i}\ \ \mathrm{N}_1^i, & \overline{\mathrm{N}}_2^{i+3} = z^{m-i}\ \ \mathrm{N}_2^i, & \overline{\mathrm{N}}_3^{i+1} = z^{m+2-i}\mathrm{N}_3^i\,; & \\
\overline{\mathrm{T}}_1^{i+2} = z^{m+1-i}\,\mathrm{T}_1^i, & \overline{\mathrm{T}}_2^{i+2} = z^{m+1-i}\,\mathrm{T}_2^i, & \overline{\mathrm{T}}_3^{i+3} = z^{m-i}\ \ \mathrm{T}_3^i. &
\end{array}
$$

Les équations du numéro **52** nous donnent alors les *formules de récurrence*

$$
(122)\quad
\left|
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial x} + (m+3-i)\mathrm{T}_2^{i-2} + \mathrm{X}'_{i-2} = 0, \\
\dfrac{\partial \mathrm{Q}_i}{\partial x} + (m+3-i)\mathrm{T}_1^{i-2} + \mathrm{Y}'_{i-2} = 0\,; \\
2\mu k'\,\Delta\Delta\varphi_i = \quad k'\left(\dfrac{\partial^2 \mathrm{P}_i}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \mathrm{Q}_i}{\partial x^2}\right) \\
\qquad\qquad\qquad - k\left(\dfrac{\partial^2 \mathrm{P}_i}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \mathrm{Q}_i}{\partial y^2}\right) - 2\mu k(m+3-i)\,\Delta\varpi_{i-2}, \\
2\mu d\left(\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right) = \mathrm{Q}_i\, dx + \mathrm{Y}''_{i-2}\, d\sigma, \qquad 2\mu d\left(\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right) = \mathrm{P}_i\, dy - \mathrm{X}''_{i-2}\, d\sigma\,; \\
2\mu\dfrac{\partial^2\psi_i}{\partial x^2} = k'\mathrm{P}_i - k\,\mathrm{Q}_i - 2\mu k'\,\Delta\varphi_i - 2\mu k \mathrm{R}_{i-1}, \\
2\mu\dfrac{\partial^2\psi_i}{\partial y^2} = k\,\mathrm{P}_i - k'\mathrm{Q}_i + 2\mu k'\,\Delta\varphi_i + 2\mu k\mathrm{R}_{i-1}\,; \\
\mathrm{R}_i = \varepsilon_i + p_{i+1}y - q_{i+1}x + (m+2-i)\varpi_{i-1}\,; \\
2\mu\,\Delta\omega_i + (m+2-i)(\mathrm{P}_i + \mathrm{Q}_i - 2\mu\,\Delta\varphi_i + 4\mu\mathrm{R}_{i-1}) + 2\mathrm{Z}_{i-1} = 0, \\
\dfrac{d\omega_i}{dn} = -(m+2-i)(\alpha u_i + \beta v_i) + \dfrac{\mathrm{Z}''_{i-1}}{\mu}, \qquad \varpi_i = \omega_i + r_i\mathrm{H}\,; \\
\mathrm{N}_1^i = \mathrm{P}_i - 2\mu\dfrac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}, \qquad \mathrm{N}_2^i = \mathrm{Q}_i - 2\mu\dfrac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}, \\
\mathrm{N}_3^i = k(\mathrm{P}_i + \mathrm{Q}_i - 2\mu\,\Delta\varphi_i) + \mathrm{E}\mathrm{R}_i\,; \\
\mathrm{T}_3^i = 2\mu\dfrac{\partial^2\varphi_i}{\partial x\,\partial y}, \\
\dfrac{\mathrm{T}_1^i}{\mu} = \dfrac{\partial\omega_i}{\partial y} + r_i\left(\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y} + x\right) + (m+2-i)v_i, \\
\dfrac{\mathrm{T}_2^i}{\mu} = \dfrac{\partial\omega_i}{\partial x} + r_i\left(\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} - y\right) + (m+2-i)u_i\,;
\end{array}
\right.
$$

$$(122)\ (suite)\quad \left|\begin{aligned}
Z_i &= ES\varepsilon_i + E(m+2-i)\iint_A w_{i-1}\,dx\,dy \\
&\quad + k(m+2-i)\iint_A (xT_2^{i-1} + yT_1^{i-1})\,dx\,dy \\
&\quad + k\iint_A (xX'_{i-1} + yY'_{i-1})\,dx\,dy + k\int_\Gamma (xX''_{i-1} + yY''_{i-1})\,d\sigma, \\
L_i &= EAp_i + E(m+3-i)\iint_A yw_{i-2}\,dx\,dy \\
&\quad + k(m+3-i)\iint_A \left(xyT_2^{i-2} + \frac{y^2-x^2}{2}T_1^{i-2}\right)dx\,dy \\
&\quad + k\iint_A \left(xyX'_{i-2} + \frac{y^2-x^2}{2}Y'_{i-2}\right)dx\,dy \\
&\quad + k\int_\Gamma \left(xyX''_{i-2} + \frac{y^2-x^2}{2}Y''_{i-2}\right)d\sigma, \\
M_i &= EBq_i - E(m+3-i)\iint_A xw_{i-2}\,dx\,dy \\
&\quad + k(m+3-i)\iint_A \left(\frac{y^2-x^2}{2}T_2^{i-2} - xyT_1^{i-2}\right)dx\,dy \\
&\quad + k\iint_A \left(\frac{y^2-x^2}{2}X'_{i-2} - xyY'_{i-2}\right)dx\,dy \\
&\quad + k\int_\Gamma \left(\frac{y^2-x^2}{2}X''_{i-2} - xyY''_{i-2}\right)d\sigma, \\
N_i &= \mu I r_i - \mu\iint_A \delta\omega_i\,dx\,dy + \mu(m+2-i)\iint_A (xv_i - yu_i)\,dx\,dy.
\end{aligned}\right.$$

Les coefficients d'indice négatif doivent être remplacés par zéro, sauf $R_{-1} = p_0 y - q_0 x$.

55. Pour $i = 0$ et 1, on a (nº **30**).

$$(123)\quad \left\{\begin{aligned}
&L_i = EAp_i, \qquad M_i = EBq_i, \qquad P_i = Q_i = \varphi_i = 0; \\
&u_i = k\left(-\varepsilon_{i-1}x + q_i\frac{x^2-y^2}{2} - p_i xy\right), \\
&v_i = k\left(-\varepsilon_{i-1}y + p_i\frac{x^2-y^2}{2} + q_i xy\right); \\
&N_1^i = N_2^i = T_3^i = 0.
\end{aligned}\right.$$

Puis,

$$(124)\qquad Z_0 = ES\varepsilon_0.$$

On a ensuite

$$\Delta\omega_0 = 2(m+2)(q_0 x - p_0 y),$$
$$\frac{d\omega_0}{dn} = k(m+2)\left[p_0\left(\alpha xy + \beta\frac{y^2-x^2}{2}\right) + q_0\left(\alpha\frac{y^2-x^2}{2} - \beta xy\right)\right].$$

D'où

$$\omega_0 = (m+2)(q_0 W_1 - p_0 W_2), \tag{125}$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} W_1 &= \frac{2+k}{6}x^3 - \frac{k}{2}xy^2 + kH_2 - (1+k)H_1,\\ W_2 &= \frac{2+k}{6}y^3 - \frac{k}{2}x^2 y + kH_3 - (1+k)H_4,\end{aligned}\right. \tag{126}$$

et désignant par H_1, H_2, H_3, H_4 les fonctions harmoniques dont les dérivées normales sur Γ ont pour valeurs respectives

$$\alpha x^2, \quad \alpha y^2, \quad \beta x^2, \quad \beta y^2.$$

Puis, en tenant compte de (1) et (5) et de la notation (54),

$$\begin{aligned} N_0 = \mu I r_0 &+ \mu p_0(m+2)\left\{kA_1 - (k+1)C_1 + \iint_A [k\,\delta H_3 - (1+k)\,\delta H_4]\,dx\,dy\right\}\\ &+ \mu q_0(m+2)\left\{kD_1 - (k+1)B_1 + \iint_A [-k\,\delta H_2 + (1+k)\,\delta H_1]\,dx\,dy\right\}.\end{aligned} \tag{127}$$

Dans *le cas particulier où la section droite admet deux axes de symétrie rectangulaires*, on peut les prendre pour axes Ox et Oy. Les fonctions H_1, H_2, δH_3, δH_4 sont alors impaires en x et paires en y; H_3, H_4, δH_1, δH_2 sont paires en x et impaires en y. La formule (127) se réduit alors à

$$N_0 = \mu I r_0. \tag{128}$$

Il en est de même si $p_0 = q_0 = 0$ ou bien si $p_0 = 0$ et si le plan xOz est plan de symétrie.

On a ensuite

$$\left\{\begin{aligned} N_3^1 &= E(\varepsilon_0 + p_1 y - q_1 x),\\ T_1^0 &= \mu r_0\left(\frac{\partial H}{\partial y} + x\right) + \mu(m+2)\left[kp_0x^2 - (1+k)p_0y^2 + \frac{\partial H'}{\partial y}\right],\\ T_2^0 &= \mu r_0\left(\frac{\partial H}{\partial x} - y\right) + \mu(m+2)\left[(1+k)q_0x^2 - kq_0y^2 + \frac{\partial H'}{\partial x}\right],\end{aligned}\right. \tag{129}$$

avec

$$H' = p_0[(1+k)H_4 - kH_3] + q_0[kH_2 - (1+k)H_1].$$

On en déduit [1]

$$(130)\quad \left\{\begin{aligned}
Z_1 &= ES\varepsilon_1 + E(m+1)r_0\iint_A H\,dx\,dy + E(m+1)(m+2)\iint_A H'\,dx\,dy \\
&\quad + E(m+1)(m+2)\left[p_0\left(kB_1 - \frac{k'}{3}D_1\right) + q_0\left(\frac{k'}{3}A_1 - kC_1\right)\right] \\
&\quad + k\iint_A (xX'_0 + yY'_0)\,dx\,dy + k\int_\Gamma (xX''_0 + yY''_0)\,d\sigma, \\
L_2 &= EAp_2 + E(m+1)r_0\iint_A yH\,dx\,dy \\
&\quad + 2k\mu(m+1)r_0\left(\iint_A xy\frac{\partial H}{\partial x}\,dx\,dy - C_1\right) + E(m+1)(m+2) \\
&\quad \times\left[\iint_A y\left(H' + \frac{kx}{1+k}\frac{\partial H'}{\partial x}\right)dx\,dy\right. \\
&\qquad \left. - \frac{E_2p_0}{3} + q_0\left(\frac{1+5k}{3}B_2 - k\frac{2+5k}{1+k}\frac{D_2}{3}\right)\right] \\
&\quad + k\iint_A\left(xyX'_0 + \frac{y^2-x^2}{2}Y'_0\right)dx\,dy \\
&\quad + k\int_\Gamma\left(xyX''_0 + \frac{y^2-x^2}{2}Y''_0\right)d\sigma, \\
M_2 &= EBq_2 - E(m+1)r_0\iint_A xH\,dx\,dy \\
&\quad - 2k\mu(m+1)r_0\left(\iint_A xy\frac{\partial H}{\partial y}\,dx\,dy + B_1\right) \\
&\quad + E(m+1)(m+2)\left[-\iint_A x\left(H' + \frac{ky}{1+k}\frac{\partial H'}{\partial y}\right)dx\,dy\right. \\
&\qquad \left. - \frac{A_2q_0}{3} + p_0\left(\frac{1+5k}{3}D_2 - k\frac{2+5k}{1+k}\frac{B_2}{3}\right)\right] \\
&\quad + k\iint_A\left(\frac{y^2-x^2}{2}X'_0 - xyY'_0\right)dx\,dy \\
&\quad + k\int_\Gamma\left(\frac{y^2-x^2}{2}X''_0 - xyY''_0\right)d\sigma;
\end{aligned}\right.$$

[1] Les intégrales $\iint\left(x\frac{\partial H_i}{\partial x} + y\frac{\partial H_i}{\partial y}\right)dx\,dy$ se calculent au moyen de l'identité (10), en prenant $U = x^2 + y^2$. On trouve, suivant les valeurs de i

i.		i.	
1	$2A_1 + C_1$	3	B_1
2	C_1	4	$B_1 + 2D_1$

où l'on a posé

$$A_2 = \iint_A x^4\,dx\,dy, \qquad B_2 = \iint_A x^3 y\,dx\,dy, \qquad C_2 = \iint_A x^2 y^2\,dx\,dy,$$

$$D_2 = \iint_A x y^3\,dx\,dy, \qquad E_2 = \iint_A y^4\,dx\,dy.$$

On a ensuite

$$(131)\quad \left\{\begin{aligned}
P_2 &= -\mu r_0 (m+1)(H - xy) \\
&\quad - \mu(m+1)(m+2)\left(\frac{1+k}{3} q_0 x^3 - k q_0 x y^2 + H'\right) - \int X'_0\,dx, \\
Q_2 &= -\mu r_0 (m+1)(H + xy) \\
&\quad - \mu(m+1)(m+2)\left(k p_0 x^2 y - \frac{1+k}{3} p_0 y^3 + H'\right) - \int Y'_0\,dy; \\
2\mu k' \Delta\Delta\varphi_2 &= k\left(\frac{\partial X'_0}{\partial x} + \frac{\partial Y'_0}{\partial y}\right) - k' \int \frac{\partial^2 X'_0}{\partial y^2}\,dx + \frac{\partial^2 Y'_0}{\partial x^2}\,dy, \\
2\mu d\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right) &= Q_2\,dx + Y''_0\,d\sigma, \qquad 2\mu d\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right) = P_2\,dy - X''_0\,d\sigma; \\
\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} &= r_0 \frac{m+1}{2}(xy - H) \\
&\quad + \frac{(m+1)(m+2)}{2}\left(-H' + \frac{k}{3} p_0 y^3 + k q_0 x y^2 - q_0 \frac{1+2k}{3} x^3\right) \\
&\quad + \frac{1}{2\mu}\int k Y'_0\,dy - k' X'_0\,dx - k' \Delta\varphi_2 - k(\varepsilon_1 + p_2 y - q_2 x), \\
\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} &= r_0 \frac{m+1}{2}(xy + H) \\
&\quad + \frac{(m+1)(m+2)}{2}\left(H' + \frac{k}{3} q_0 x^3 + k p_0 x^2 y - p_0 \frac{1+2k}{3} y^3\right) \\
&\quad + \frac{1}{2\mu}\int k' Y'_0\,dy - k X'_0\,dx + k' \Delta\varphi_2 + k(\varepsilon_1 + p_2 y - q_2 x).
\end{aligned}\right.$$

Le calcul de φ_2 exige la résolution d'un *problème biharmonique* et ne peut être effectué que si l'on connaît (Γ), X'_0, Y'_0, X''_0, Y''_0. Nous ne

---

En prenant $U = x^3 - 3xy^2$, puis $y^3 - 3x^2 y$, on a

$$\iint \frac{x^2 - y^2}{2} \frac{\partial H_1}{\partial x}\,dx\,dy = J_1 + \frac{5}{6} A_2 - \frac{3}{2} C_2,$$

$$\iint \frac{x^2 - y^2}{2} \frac{\partial H_2}{\partial x}\,dx\,dy = J_2 + \frac{1}{2}(C_2 - E_2),$$

$$\iint \frac{x^2 - y^2}{2} \frac{\partial H_3}{\partial x}\,dx\,dy = J_3 - B_2,$$

pouvons donc pas écrire les expressions générales de u_2 et v_2. On a maintenant

$$(132)\quad \begin{cases} \Delta\omega_1 = 2(m+1)(-\varepsilon_0 + q_1 x - p_1 y) - \dfrac{Z'_0}{\mu}, \\ \dfrac{d\omega_1}{dn} = -(m+1)(\alpha u_1 + \beta v_1) + \dfrac{Z''_0}{\mu}. \end{cases}$$

Dans le cas particulier où *les formes extérieures sont perpendiculaires à* Oz, on a $Z'_0 = Z''_0 = \varepsilon_0 = 0$ et les équations ci-dessus se déduisent des équations vérifiées par ω_0 en changeant p_0 et q_0 en $p_1 \dfrac{m+1}{m+2}$ et $q_1 \dfrac{m+1}{m+2}$. On peut donc écrire la formule (125), en remplaçant l'indice zéro par l'indice *un* et le coefficient $(m+2)$ par $(m+1)$.

La dernière formule (122) nous montre de même que l'on peut écrire (127) avec le même changement.

56. Le problème de Saint-Venant. — Dans ce problème, les F_V et F_Σ sont nulles. On a donc affaire à un *cas particulier du problème précédent*, à savoir le cas $m = -1$.

Soient X, Y, Z, L, M, N les six coordonnées du système des F_B par rapport au trièdre terminal $O_1 x_1 y_1 z_1$. Les six coordonnées du système (S_A) par rapport à $Oxyz$ sont, en appelant l la *longueur du fil*

$$X,\quad Y,\quad Z,\quad L - lY + zY,\quad M + lX - zX,\quad N.$$

$$\iint \frac{x^2 - y^2}{2} \frac{\partial H_4}{\partial x}\, dx\, dy = J_4 + \frac{B_2}{3} - 2D_2;$$

$$\iint \frac{y^2 - x^2}{2} \frac{\partial H_1}{\partial y}\, dx\, dy = I_1 + \frac{D_2}{3} - 2B_2,$$

$$\iint \frac{y^2 - x^2}{2} \frac{\partial H_2}{\partial y}\, dx\, dy = I_2 - D_2,$$

$$\iint \frac{y^2 - x^2}{2} \frac{\partial H_3}{\partial y}\, dx\, dy = I_3 + \frac{1}{2}(C_2 - A_2),$$

$$\iint \frac{y^2 - x^2}{2} \frac{\partial H_4}{\partial y}\, dx\, dy = I_4 + \frac{5}{6}E_2 - \frac{3}{2}C_2;$$

où l'on a posé

$$I_n = \iint xy \frac{\partial H_n}{\partial x}\, dx\, dy, \qquad J_n = \iint xy \frac{\partial H_n}{\partial y}\, dx\, dy$$

Avec les notations précédentes, on a donc

$$Z_0 = Z, \quad L_0 = L - lY, \quad M_0 = M + lX, \quad N_0 = N, \quad L_1 = Y, \quad M_1 = -X.$$

D'où

$$(133) \qquad \varepsilon = \frac{Z}{ES}, \qquad p = \frac{L - lY + zY}{EA}, \qquad q = \frac{M + lX - zX}{EB};$$

$$(134) \qquad r = \frac{N}{\mu I} + \frac{k}{EI}\left(\frac{X}{B}D_1 - \frac{Y}{A}A_1\right) + \frac{k+1}{EI}\left(\frac{Y}{A}C_1 - \frac{X}{B}B_1\right) + \frac{1}{EI}\iint_A \partial K\, dx\, dy;$$

$$(135) \qquad \begin{cases} N_1 = N_2 = T_3 = 0, \qquad N_3 = E(\varepsilon + py - qx), \\ T_1 = \mu r\left(\dfrac{\partial H}{\partial y} + x\right) + \dfrac{\mu Y}{EA}[kx^2 - (1+k)y^2] + \dfrac{\mu}{E}\dfrac{\partial K}{\partial y}, \\ T_2 = \mu r\left(\dfrac{\partial H}{\partial x} - y\right) + \dfrac{\mu X}{EB}[ky^2 - (1+k)x^2] + \dfrac{\mu}{E}\dfrac{\partial K}{\partial x}, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$K = (1+k)\left(\frac{X}{B}H_1 + \frac{Y}{A}H_4\right) - k\left(\frac{X}{B}H_2 + \frac{Y}{A}H_3\right).$$

La déformation des sections droites est donnée par

$$(136) \qquad \begin{cases} u = k\left(-\varepsilon x + q\dfrac{x^2 - y^2}{2} - pxy\right), \\ v = k\left(-\varepsilon y + p\dfrac{x^2 - y^2}{2} + qxy\right), \\ w = \dfrac{M + lX}{EB}W_1 + \dfrac{lY - L}{EA}W_2 + rH. \end{cases}$$

Ces formules diffèrent de celles de Saint-Venant et sont d'ailleurs plus simples (*cf.* Appell, *loc. cit.*, p. 644 et 645). La divergence et la simplification résultent de ce que *la déformation des sections droites est ici rapportée à un trièdre lié à la fibre neutre*, tandis que, dans les formules de Saint-Venant, elle est rapportée à un trièdre fixe. Pour raccorder les deux groupes de formules, il faut effectuer le *changement de coordonnées*, en supposant, avec Saint-Venant, que la fibre neutre est très peu déformée ([1]). Les coordonnées de l'origine du

([1]) Avec la présente théorie, cette hypothèse n'est pas nécessaire. La forme naturelle de la fibre neutre est déterminée par ses équations intrinsèques. Cet avantage est appréciable si le fil est très long, car, dans ce cas, les formules de Saint-Venant ne s'appliquent plus.

trièdre mobile par rapport au trièdre fixe sont $\left(q\frac{z^2}{2}, 0, z\right)$. Le changement d'orientation est obtenu par une rotation de l'angle qz autour de Oy. En effectuant le changement de coordonnées, *on retrouve exactement les formules de Saint-Venant.*

57. Solution synthétique du problème de Saint-Venant. — Prenons pour point de départ la propriété caractéristique suivante : *l'effort en tout point d'une section droite est normal au plan de cette section.* Ceci se traduit par les conditions $N_1 = N_2 = T_3 = 0$ où, d'après (116),

$$P = Q = \varphi = 0.$$

D'après (112), on en conclut que $\Delta\psi = 0$.

Dès lors, introduisons la variable complexe $\zeta = x + iy$. Soit F une fonction analytique de ζ, dépendant en outre de la variable réelle z. On peut poser

$$u + iv = \frac{\partial\psi}{\partial x} - i\frac{\partial\psi}{\partial y} = k\frac{\partial F}{\partial z} - ir_1\zeta, \tag{137}$$

r_1 désignant une fonction de z admettant r pour dérivée. En dérivant (137) par rapport à x, il vient

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - i\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y} = k\frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial\zeta} - ir_1.$$

Soit maintenant F' la fonction conjuguée de F; c'est une fonction de $\zeta' = x - iy$ et de z. En changeant i en $-i$ dans la relation ci-dessus, on obtient, par addition

$$2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = k\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial\zeta} + \frac{\partial F'}{\partial\zeta'}\right), \tag{138}$$

ou, d'après (112) et (113),

$$2\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial\zeta} + \frac{\partial F'}{\partial\zeta'}\right) - 2\rho \qquad (\rho = \varepsilon + py - qx). \tag{139}$$

D'autre part, on déduit des formules (117) et en tenant compte de $\frac{dr_1}{dz} = r$

$$\frac{T_2 + iT_1}{\mu} = k\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y}.$$

D'après (109) et la nullité de P, Q, X', Y', la dérivée de la fonction ci-dessus par rapport à z est nulle; ceci nous donne, en tenant compte de (139)

$$k\frac{\partial^3 F}{\partial z^3} = \frac{\partial^3 F}{\partial z\,\partial \zeta'^2} - q + ip. \tag{140}$$

Nous obtenons une équation *aux variables mêlées*. La valeur commune des deux membres ne doit dépendre ni de ζ, ni de ζ'; c'est donc une fonction de z seulement. On en déduit que $\frac{\partial F'}{\partial z}$ est un trinome du second degré en ζ'; donc, $\frac{\partial F}{\partial z}$ est un trinome en ζ. Comme $u + iv$ doit s'annuler pour $\zeta = 0$, la formule (137) exige que ce trinome n'ait *pas de terme constant*. D'autre part, $\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$ devant aussi s'annuler pour $\zeta = 0$, le terme en ζ doit avoir un coefficient réel dans $u + iv$. Autrement dit, *la valeur de* $\frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial \zeta}$ *pour* $\zeta = 0$ *doit admettre* $\frac{ir_1}{k}$ *pour partie imaginaire*. Mais, (140) nous montre que $\frac{\partial^3 F}{\partial z^3}$ est indépendant de ζ, donc identiquement nul. Finalement, F *est un polynome biquadratique en* ζ *et* z, *n'ayant pas de terme indépendant de* ζ.

58. Reste à calculer la fonction w. Intégrons (139) par rapport à z. En appelant $\rho_1 = \varepsilon_1 + p_1 y - q_1 x$ une primitive de ρ, il vient, en désignant par $\mathcal{R}$ la partie réelle

$$w = -\rho_1 - \mathcal{R}\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right) + W, \tag{141}$$

W étant une fonction de x, y seulement. Portons dans (114); en tenant compte de (113), remarquant que $\frac{d^2\rho_1}{dz^2} = \frac{d\rho}{dz}$ et que la partie réelle de la fonction analytique $\frac{\partial F}{\partial \zeta}$ est une fonction harmonique, nous obtenons

$$\Delta W = 2\mathcal{R}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial z^2\,\partial \zeta}\right). \tag{142}$$

L'équation (115) s'écrit, d'après (55),

$$\frac{dw}{dn} = r(\alpha y - \beta x) - \frac{\partial}{\partial z}(\alpha u + \beta v)$$

ou

$$\frac{dW}{dn} = -\alpha q_1 + \beta p_1 + \mathcal{R}\left[(\alpha + i\beta)\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2}\right] + r(\alpha y - \beta x)$$
$$- \mathcal{R}\left[(\alpha - i\beta)\left(k\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - ir\zeta\right)\right],$$

soit

$$(143) \qquad \frac{dW}{dn} = \beta p_1 - \alpha q_1 + \mathcal{R}\left[(\alpha + i\beta)\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} - k(\alpha - i\beta)\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right].$$

La compatibilité des équations (142) et (143) exige (¹)

$$\iint_A \Delta W\, dx\, dy = -k\mathcal{R}\left[\iint_A \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i\frac{\partial F}{\partial y}\right) dx\, dy\right]$$

ou

$$\mathcal{R}\left[\iint_A \frac{\partial^3 F}{\partial z^2 \partial \zeta} dx\, dy\right] = 0.$$

Le terme en ζ^2 de F donne une intégrale identiquement nulle. Le terme en ζ donne le produit de $2S$ par la partie réelle du coefficient de $z^2\zeta$. Donc, *le coefficient de $z^2\zeta$ dans* F *doit être imaginaire pur*.

La fonction W est ainsi déterminée par un *problème de Neumann*.

Remarque. — On peut supposer que F *ne contient pas de terme indépendant de z*, car si un tel terme existait, sa suppression équivaudrait, d'après (141), à modifier la fonction W.

59. Nous allons maintenant faire voir que la solution ainsi obtenue est identique à celle du problème de Saint-Venant.

Posons

$$kF = \left[(a_0 + ib_0)\frac{z^2}{2} + (a'_0 + ib'_0)z\right]\zeta^2 + \left[ib_1\frac{z^2}{2} + (a'_1 + ib'_1)z\right]\zeta,$$

les a, b, a', b' désignant des constantes réelles arbitraires. Nous avons d'abord, en prenant la partie imaginaire de $\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta \partial z}$,

$$(144) \qquad r_1 = b_1 z + b'_1, \qquad r = b_1.$$

(¹) Le terme $\beta p_1 - \alpha q_1$ donne évidemment zéro. Il en est de même du premier terme du crochet, qui donne la partie réelle de $-i\int_\Gamma \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} d\zeta = 0$.

Puis

$$(145)\qquad \begin{cases} u = (x^2 - y^2)(a_0 z + a'_0) - 2xy(b_0 z + b'_0) + a'_1 x, \\ v = (x^2 - y^2)(b_0 z + b'_0) + 2xy(a_0 z + a'_0) + a'_1 y. \end{cases}$$

La formule (140) nous donne ensuite

$$(146)\qquad \begin{cases} kp = 2(b_0 z + b'_0), & kq = 2(a_0 z + a'_0); \\ kp_1 = b_0 z^2 + 2b'_0 z, & kq_1 = a_0 z^2 + 2a'_0 z. \end{cases}$$

Les équations (142) et (143) s'écrivent :

$$(147)\qquad k\,\Delta W = 4(a_0 x - b_0 y),$$

$$(148)\qquad \begin{aligned} k\frac{dW}{dn} = k(\beta p_1 - \alpha q_1) + \alpha(a_0 z^2 + 2a'_0 z) - \beta(b_0 z^2 + 2b'_0 z) \\ - k a_0[\alpha(x^2 - y^2) + 2\beta xy] \\ - k b_0[\beta(x^2 - y^2) - 2\alpha xy] + kr(\alpha y + \beta x). \end{aligned}$$

D'après (146), la première ligne de (148) disparaît. On est ramené à un problème de Neumann, dont la solution s'obtient par les fonctions H_1, H_2, H_3, H_4. La suite ne présente plus aucune difficulté et il est facile de constater que tous les résultats finalement obtenus sont entièrement d'accord avec ceux du n° **56**.

60. Poutre encastrée horizontalement et chargée uniformément. — Prenons Ox *vertical vers le bas* et supposons, pour simplifier, que le plan xOz soit *plan de symétrie* pour la poutre et pour les forces latérales. Nous avons $Y' = Z' = Y'' = Z'' = 0$; X' et X'' sont des constantes positives. Nous poserons

$$SX' + X_\Sigma = \varpi;$$

c'est la *somme du poids de la poutre et de sa charge par unité de longueur.*

On en déduit facilement, en appelant l la *longueur de la poutre.*

$$X = \varpi(l - z), \qquad Y = Z = 0; \qquad M = \frac{\varpi}{2}(l - z)^2, \qquad L = N = 0.$$

Avec les notations du n° **53**, on a $m = 0$. Les formules du n° **55** nous donnent immédiatement, en tenant compte de la symétrie par rapport à xOz,

$$\varepsilon_0 = p_0 = 0, \qquad q_0 = \frac{M_0}{EB}, \qquad r_0 = 0; \qquad p_1 = 0, \qquad q_1 = \frac{M_1}{EB}, \qquad r_1 = 0;$$

$$u_0 = kq_0\frac{x^2-y^2}{2}, \qquad v_0 = kq_0xy, \qquad w_0 = 2q_0W_1;$$

$$u_1 = kq_1\frac{x^2-y^2}{2}, \qquad v_1 = kq_1xy, \qquad w_1 = q_1W_1;$$

$$N_3^0 = -Eq_1x, \qquad T_1^0 = 2\mu\frac{\partial H'}{\partial y}, \qquad T_2^0 = 2\mu q_0[(1+k)x^2 - ky^2] + 2\mu\frac{\partial H'}{\partial x};$$

$$S\varepsilon_1 = 2q_0\left(kC_1 - \frac{k'}{3}A_1\right) + 2q_0\iint_A[(1+k)H_1 - kH_2]\,dx\,dy - \frac{k}{E}\int_\Gamma xX''\,d\sigma,$$

$$p_2 = 0, \qquad EBq_2 = M_2 + \Delta M,$$

$$\begin{aligned}\Delta M = {} & 2Eq_0\iint_A[kH_2 - (1+k)H_1]x\,dx\,dy \\ & + \frac{2Ek}{1+k}q_0\iint_A xy\frac{\partial}{\partial y}[kH_2 - (1+k)H_1]\,dx\,dy \\ & + \frac{2}{3}Eq_0A_2 + \frac{k}{2}X'(B-A) + \frac{k}{2}\int_\Gamma X''(x^2-y^2)\,d\sigma;\end{aligned}$$

$$P_2 = -X'x + 2\mu q_0\left[-\frac{1+k}{3}x^3 + kxy^2 + (1+k)H_1 - kH_2\right],$$

$$Q_2 = 2\mu q_0[(1+k)H_1 - kH_2];$$

$$\Delta\Delta\varphi_2 = 0, \qquad 2\mu\,d\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right) = Q_2\,dx, \qquad 2\mu\,d\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right) = P_2\,dy - X''\,d\sigma;$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} = {} & q_0\left[(1+k)H_1 - kH_2 + kxy^2 - \frac{1+2k}{3}x^3\right] \\ & - \frac{k'X'x}{2\mu} - k'\Delta\varphi_2 + K(-\varepsilon_1 + q_2x),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2} = q_0\left[kH_2 - (1+k)H_1 + \frac{k}{3}x^3\right] - \frac{kX'x}{2\mu} + k'\Delta\varphi_2 + k(\varepsilon_1 - q_2x).$$

On ne peut achever le calcul de u_2, v_2 que si l'on connaît (Γ) et la fonction X''.

En tenant compte des formules donnant q_0, q_1, q_2, on a

$$EBq = M + \Delta M.$$

Cette formule nous montre que, pour calculer exactement la courbure de la fibre neutre, *il faut ajouter un terme correctif constant au moment fléchissant* M utilisé dans la théorie élémentaire approchée de la flexion plane. Ce terme correctif est d'ailleurs *très petit vis-à-vis du* *terme principal,* dès que la section droite envisagée se trouve *à une distance de la base libre égale à un grand nombre de fois la plus grande dimension transversale.* Par contre, il donne une *courbure non nulle à l'extrémité libre de la fibre neutre,* contrairement à ce qu'indique la théorie élémentaire.

Le terme correctif ΔM et la dilatation ε_1 de la fibre neutre ne peuvent être calculés explicitement que si l'on connaît la forme de la section droite.

Des formules donnant w_0 et w_1, on déduit

$$w = \frac{Xl}{EB} W_1.$$

Cette formule est identique à la troisième formule (136), quand on y fait $Y = L = M = r = 0$. Donc, *la déformation longitudinale des sections droites est exactement la même que dans le cas de la flexion plane* (Saint-Venant), *pour le même effort tranchant.*

61. Cas du cylindre de révolution. — Supposons *que* (Γ) *soit un cercle de rayon* ρ. Supposons en outre *que la charge soit répartie sur un très petit arc* ayant pour milieu le point le plus haut. Les intégrales figurant dans (151) valent

$$\int_\Gamma x X'' \, d\sigma = -\rho X_\Sigma, \qquad \int_\Gamma (x^2 - y^2) X'' \, d\sigma = \rho^2 X_\Sigma.$$

Les fonctions H_1 et H_2 ont pour expression

$$H_1 = \frac{x^3 - 3xy^2}{12} + \frac{3}{4}\rho^2 x, \qquad H_2 = \frac{3xy^2 - x^3}{12} + \frac{\rho^2}{4} x.$$

Les formules (151) donnent

$$(149)\qquad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon = \varepsilon_1 &= \frac{k}{\pi E \rho} X_\Sigma, \\ \Delta M &= -\frac{X'}{3} \frac{A(7 + 12k + 4k^2)}{1+k} + \frac{k\rho^2}{2} X_\Sigma. \end{aligned} \right.$$

La fonction W_1 a pour expression

$$W_1 = [x^2 + y^2 - (3 + 2k)\rho^2] \frac{x}{4}.$$

Le calcul de φ_2 peut être fait en principe, puisqu'on sait résoudre le problème biharmonique pour le cercle (*cf.* n° **38**). Toutefois, il faudrait préciser la répartition de X'' sur l'arc supportant la charge.

Dans le *cas où la poutre est seulement soumise à son propre poids*, on a $X''=0$ et le calcul devient élémentaire. On détermine φ_2 par la méthode des coefficients indéterminés, en remarquant que c'est une fonction impaire en x et paire en y.

On obtient finalement :

$$(150)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{k(M+\Delta M)}{2EB}(x^2-y^2)+\frac{X'}{24E}[\;x^2(5+30k+16k^2) \\ &\qquad -y^2(1+38k+16k^2)] \\ &\qquad +\frac{X'}{48E\rho^2}[-(5+8k)x^4-6x^2y^2+(8k-1)y^4], \\ v &= \frac{k(M+\Delta M)}{EB}\,xy+\frac{X'}{12E}(3+34k+16k^2)xy \\ &\qquad -\frac{X'}{12E\rho}(1+4k)xy(x^2+y^2). \end{aligned}\right.$$

Comparons ces formules à ce que donnent les formules (136) pour $\varepsilon=p=0$. On voit que le terme principal est le même, pour un moment fléchissant donné. Le rapport de chaque terme correctif au terme principal est de l'ordre de $\frac{\rho^2}{(l-z)^2}$. On en tire la conclusion pratique suivante : *Pour un cylindre dont la longueur est très grande vis-à-vis du rayon, la déformation des sections droites est très approximativement la même que dans le cas de la flexion plane* (Saint-Venant), *dès qu'on s'éloigne de la base libre.*

62. En appliquant les formules (122), on trouve, par un calcul facile,

$$N_1=\frac{X'x}{12(1+k)\rho^2}[\,(5+2k)(\rho^2-x^2)+3(2k-1)y^2],$$

$$N_2=\frac{X'x}{12(1+k)\rho^2}[3(1+2k)(\rho^2-x^2)+(2k-1)x^2],$$

$$N_3=\frac{X'x}{2(1+k)\rho^2}\left[(2+k)\left(x^2+y^2-\frac{2}{3}\rho^2\right)-4(1+k)(l-z)^2\right],$$

$$T_1=\frac{X'(1+2k)}{(1+k)\rho^2}(z-l)xy,$$

$$T_2=\frac{X'(l-z)}{2(1+k)\rho^2}[(3+2k)(\rho^2-x^2)+(2k-1)y^2],$$

$$T_3=\frac{X'y}{12(1+k)\rho^2}[(1-2k)(\rho^2-y^2)-3(1+2k)x^2].$$

Il est aisé de vérifier que toutes les équations d'équivalence sont satisfaites.

Sur la base (B) *s'exerce un effort normal*

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{X}'(2+k)}{2(1+k)\rho^2}\,x\left(x^2+y^2-\frac{2}{3}\rho^2\right).$$

Prenons le point M sur le rayon d'angle polaire θ à une distance du centre égale à $m\rho$, m désignant un facteur constant. Si ρ tend vers zéro, N_1, N_2, T_3 tendent aussi vers zéro; T_1 et T_2 demeurent constants; mais, N_3 a pour valeur asymptotique

$$-2m\mathrm{X}'(l-z)^2\frac{\cos\theta}{\rho},$$

donc tend vers l'infini, conformément à ce qu'on a vu au n° **36**.

63. Poutre a section rectangulaire. — Supposons que (Γ) soit un rectangle ayant pour côtés $2a$, $2b$, le côté $2b$ étant horizontal. Supposons en outre que la charge soit *uniformément répartie sur la face supérieure*. On a

$$\int_\Gamma x\mathrm{X}''\,d\sigma = -a\mathrm{X}_\Sigma,\qquad \int_\Gamma (x^2-y^2)\mathrm{X}''\,d\sigma = \frac{3a^2-b^2}{3}\mathrm{X}_\Sigma;$$

$$(151)\qquad \mathrm{H}_1 = a^2x,\qquad \mathrm{H}_2 = \frac{b^2x}{3}+\frac{4b^3}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3\operatorname{ch}\left(n\pi\frac{a}{b}\right)}\operatorname{sh}\left(n\pi\frac{x}{b}\right)\cos\left(n\pi\frac{y}{b}\right).$$

D'autre part, $\mathrm{A}_1 = \mathrm{C}_1 = 0$, $\mathrm{B}-\mathrm{A} = \frac{\mathrm{S}}{2}(a^2-b^2)$. Les formules du n° **60** nous donnent alors

$$(152)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{ES}\varepsilon_1 = ka\mathrm{X}_\Sigma,\\ &\Delta\mathrm{M} = \frac{12\varpi k^2b^4}{\pi^4(1+k)a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\left(1-\frac{\operatorname{th} n\pi\frac{a}{b}}{n\pi\frac{a}{b}}\right)\\ &\qquad +\frac{\varpi}{15}[5kb^2-3a^2(4+5k)]+\frac{k}{6}[(a^2-b^2)\mathrm{X}_\mathrm{V}+(3b^2-a^2)\mathrm{X}_\Sigma].\end{aligned}\right.$$

En portant (151) dans (126), on a la fonction W_1, d'où l'on déduit w. Quant au calcul de u_2 et v_2, il est subordonné à la résolution du problème biharmonique posé par les équations du n° **60**.

64. Cylindre homogène pesant et vertical. — On a, dans ce cas,

$$X' = Y' = 0, \qquad Z' = \text{const.}; \qquad X = Y = L = M = N = 0, \qquad Z = Z'S(l - z).$$

Le calcul ne présente aucune difficulté et conduit à

$$Z = ES\varepsilon, \qquad p = q = r = 0;$$
$$u = -k\varepsilon x, \qquad v = -k\varepsilon y, \qquad w = -\frac{kZ'}{2E}(x^2 + y^2).$$

On retrouve la *déformation classique de l'extension d'un cylindre, accompagnée d'un gauchissement des sections droites en forme de paraboloïde de révolution.*

Les efforts sont donnés par

$$N_1 = N_2 = T_3 = 0, \qquad N_3 = \frac{Z}{S}, \qquad T_1 = \frac{-kZ'y}{2(1+k)}, \qquad T_2 = \frac{-kZ'x}{2(1+k)}.$$

Le cas d'un *cylindre encastré obliquement* est une combinaison du cas ci-dessus et du cas traité au n° **56**.

65. Cylindre tournant. — Supposons que le cylindre soit animé d'une rotation de vitesse angulaire constante ω autour d'un axe quelconque A. Un élément dV pris autour du point M est soumis à la force centrifuge $\rho\omega^2 dV.\overrightarrow{PM}$, ρ désignant la densité et P la projection de M sur A. Nous poserons $\rho\omega^2 = f$. La force par unité de volume est alors $\vec{F} = f.\overrightarrow{PM}$.

Supposons maintenant qu'on remplace A par A′ parallèle à A. Nous avons

$$\vec{F'} = f\overrightarrow{P'M} = f\overrightarrow{P'P} + \vec{F}.$$

Or, $\overrightarrow{P'P}$ est indépendant de M. Dès lors, la déformation due à la rotation autour de A′ se déduit, par superposition, de la déformation due à la rotation autour de A et de la déformation due au champ constant $f.\overrightarrow{P'P}$. Celle-ci ayant été étudiée précédemment (nos **60** et **64**), *nous pouvons supposer que l'axe* A *passe* par un point arbitrairement choisi, par exemple *par le centre de gravité de la base encastrée* B_0. Dans ces conditions, si l'on appelle (a, b, c) les cosinus directeurs de A, on trouve facilement

$$(153) \qquad X' = f(1 - a^2)x - faby - facz,$$

et les deux formules analogues. On est ramené à un cas particulier du cas où X', Y', Z' sont des *fonctions linéaires* quelconques de x, y, z. Ce cas résulte lui-même de la combinaison des cinq cas suivants :

$$X' = x, \quad Y' = Z' = 0; \qquad X' = y, \quad Y' = Z' = 0; \qquad X' = z, \quad Y' = Z' = 0;$$
$$X' = Y' = 0, \quad Z' = x; \qquad X' = Y' = 0, \quad Z' = z,$$

et des cas symétriques obtenus en intervertissant (¹) x, y, et X', Y'. Ces différents cas peuvent se traiter par la méthode générale du n° **53**.

66. *Cas* I. — $X' = x$, $Y' = Z' = 0$. On a $m = 0$ et

$$X = Y = Z = L = M = N = 0.$$

Les fonctions d'indices 0 et 1 sont nulles, sauf ε_1. On a ensuite

$$ES\varepsilon_1 = -kB, \qquad EAp_2 = -kB_1, \qquad EBq_2 = \frac{k}{2}(A_1 - C_1);$$
$$P_2 = -\frac{x^2}{2}, \qquad Q_2 = 0;$$
$$2\mu k' \Delta\Delta\varphi_2 = k, \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = 0, \qquad 4\mu\, d\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right) = -x^2\, dy \qquad \text{sur } (\Gamma).$$

D'où (n° **32**)

$$128\mu k' \varphi_2 = k(x^2 + y^2)^2 - 4kK - 32k'K_2.$$

Le calcul explicite de ψ_2, donc de u_2 et v_2, ne peut être fait si l'on ne connaît pas (Γ).

Dans le *cas où* (Γ) *est un cercle* de rayon ρ, on a φ_2 en se reportant au n° **50**. Un calcul facile donne ensuite :

$$u = u_2 = \frac{x}{96\mu k'}\left[x^2(10k - 7) + 3y^2(6k - 5) + 3\rho^2\frac{7 - 5k - 4k^2}{1 + k}\right],$$
$$v = v_2 = \frac{y}{96\mu k'}\left[3x^2(3 - 2k) + y^2(1 + 2k) - 3\rho^2\frac{1 + 5k - 4k^2}{1 + k}\right],$$
$$4E\varepsilon_1 = -k\rho^2, \qquad p_2 = q_2 = 0;$$
$$16k'N_1 = k'(7 - 7x^2 - 5y^2) + k(\rho^2 - x^2 - 3y^2),$$
$$16k'N_2 = (k' - k)(3x^2 + y^2 - \rho^2);$$
$$8k'T_3 = (k - k')xy, \qquad 8k'N_3 = k(\rho^2 - 2x^2 - 2y^2), \qquad T_1 = T_2 = 0.$$

(¹) Cette interversion doit être accompagnée du changement de signe des rotations et des moments, ainsi que de la fonction ψ.

Le cas symétrique ($X'=0$, $Y'=y$, $Z'=0$) s'obtient comme on l'a dit au nº **65**.

67. *Cas* II. — $X'=y$, $Y'=Z'=0$. On a

$$m=0, \qquad X=Y=Z=L=M=0, \qquad N=A(z-l).$$

On trouve

$$\varepsilon_0=p_0=q_0=p_1=q_1=u_0=v_0=u_1=v_1=0;$$
$$r_0=\frac{A}{\mu I}, \qquad w_0=r_0 H; \qquad r_1=-\frac{Al}{\mu I}, \qquad w_1=r_1 H.$$

On a ensuite

$$\mu I S \varepsilon_1=-A\iint_A H\,dx\,dy,$$
$$EIAp_2=-2A(1+k)\iint_A yH\,dx\,dy+2kA\left(C_1-\iint_A xy\frac{\partial H}{\partial x}dx\,dy\right)-kIC_1,$$
$$2EIBq_2=\;4A(1+k)\iint_A xH\,dx\,dy+4kA\left(B_1+\iint_A xy\frac{\partial H}{\partial y}dx\,dy\right)$$
$$+kI(B_1-D_1).$$

Puis,

$$IP_2=-AH+(J-B)xy, \qquad IQ_2=-A(H+xy).$$

Puis (nº **34**)

$$2\mu\varphi_2=-\frac{A}{I}K_3-\frac{K_4}{A+B}.$$

Dans le *cas du cercle*, on retrouve (nº **50**)

$$8\mu u=y(\rho^2+x^2-y^2), \qquad 8\mu v=x(\rho^2-x^2+y^2), \qquad w=0;$$
$$\varepsilon=p=q=0, \qquad N=\mu I r;$$
$$N_t=0, \qquad 2T_1=x(z-l), \qquad 2T_2=y(l-z), \qquad 4T_3=\rho^2-x^2-y^2.$$

Le cas symétrique ($X'=0$, $Y'=x$, $Z'=0$) s'obtient comme il a été indiqué au nº **65**.

68. *Cas* III. — $X'=z$, $Y'=Z'=0$. Cette fois $m=1$;

$$X=\frac{S}{2}(l^2-z^2), \qquad Y=Z=L=N=0, \qquad M=\frac{S}{6}(z-l)^2(z+2l).$$

A partir de u_2, v_2, le calcul ne peut être explicité que dans le *cas du cercle*. Il est au surplus très compliqué. On obtient pour u_2 un polynome du quatrième degré, pair en x et en y; pour v_2 le produit de xy par une fonction linéaire de x^2+y^2; w_0 est nul; mais, w_1 est un polynome du cinquième degré, à coefficients compliqués.

Il me paraît inutile de reproduire ces résultats et je donne seulement la *déformation de la fibre neutre*. On trouve

$$\varepsilon=p=r=0, \qquad \mathrm{EA}q=\mathrm{M}+\Delta\mathrm{M}, \qquad \Delta\mathrm{M}=-\mathrm{A}z\frac{7+12k+4k^2}{3(1+k)}.$$

Le rapport $\frac{\Delta\mathrm{M}}{\mathrm{M}}$ est de l'ordre de $\frac{z\rho^2}{(z+2l)(z-l)^2}$. Il est très petit, si ρ est petit vis-à-vis de l, sauf au voisinage de la base libre.

69. *Cas* IV. — $\mathrm{X}'=\mathrm{Y}'=0$, $\mathrm{Z}'=x$. On a

$$\mathrm{X}=\mathrm{Y}=\mathrm{Z}=\mathrm{L}=\mathrm{N}=0, \qquad \mathrm{M}=\mathrm{B}(z-l).$$

Les calculs sont faciles et donnent

$$\varepsilon=p=0, \qquad \mathrm{M}=\mathrm{EB}q, \qquad \mathrm{EI}r=k\left[\iint_{\mathrm{A}}\delta\mathrm{H}_2\,dx\,dy-\mathrm{D}_1\right];$$

$$u=\frac{kq}{2}(x^2-y^2), \qquad v=kqxy, \qquad w=r\mathrm{H}+\frac{k}{\mathrm{E}}\left(\mathrm{H}_2-\frac{x^3+3xy^2}{6}\right).$$

70. *Cas* V. — $\mathrm{X}'=\mathrm{Y}'=0$, $\mathrm{Z}'=z$. On a

$$\mathrm{X}=\mathrm{Y}=\mathrm{L}=\mathrm{M}=\mathrm{N}=0, \qquad \mathrm{Z}=\frac{\mathrm{S}}{2}(l^2-z^2).$$

On a d'abord, par les formules (123), (124), (125) et (128),

$$p_i=q_i=0 \quad \text{pour } i=0,1,2; \qquad \varepsilon_0=-\frac{1}{2\mathrm{E}}, \qquad \varepsilon_1=0;$$

$$u_0=v_0=0; \qquad u_1=-k\varepsilon_0 x, \qquad v_1=-k\varepsilon_0 y; \qquad w_0=r_0=0.$$

Puis, par (132) et (122),

$$w_1=k\varepsilon_0(x^2+y^2), \qquad r_1=0.$$

Puis,

$$\mathrm{T}_1^1=\mathrm{T}_2^1=0;$$

$$2\mathrm{ES}\varepsilon_2=\mathrm{S}l^2-k(\mathrm{A}+\mathrm{B}), \qquad 2\mathrm{EA}p_3=k(\mathrm{B}_1+\mathrm{D}_1), \qquad 2\mathrm{EB}q_3=-k(\mathrm{A}_1+\mathrm{C}_1).$$

Puis, par (131),

$$\mathrm{P}_2=\mathrm{Q}_2=\varphi_2=u_2=v_2=0.$$

Puis, par (122),

$$w_2 = r_2 = 0\,;$$

$$P_3 = Q_3 = 0, \qquad k'\Delta\,\Delta\varphi_3 = -4k^2\varepsilon_0, \qquad \frac{\partial\varphi_3}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_3}{\partial y} = 0\,;$$

d'où (n° **32**),

$$32\,\mathrm{E}k'\varphi_3 = k^2[(x^2+y^2)^2 - 4\mathrm{K}].$$

Le calcul explicite de ψ_3 peut être fait dans le *cas du cercle* et conduit à

$$8\mathrm{E}k'u_3 = k^2x(x^2+y^2-\rho^2) - kl^2x, \qquad \mathrm{N}_1 = -\frac{k^2}{8k'(1+k)}(x^2+3y^2-\rho^2),$$

v_3 et N_2 par symétrie;

$$\mathrm{T}_1 = \mathrm{T}_2 = 0, \qquad \mathrm{T}_3 = \frac{k^2xy}{4k'(1+k)}, \qquad \mathrm{N}_3 = \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{S}} + \frac{k}{4k'(1+k)}(\rho^2 - 2x^2 - 2y^2).$$

71. Rotation autour de Oz. — On a, dans ce cas, $X' = fx$, $Y' = fy$, $Z' = 0$.

En combinant le cas I avec le cas symétrique, on obtient

$$\mathrm{ES}\varepsilon = -fk(\mathrm{A}+\mathrm{B}), \qquad 2\,\mathrm{EA}p = -fk(\mathrm{B}_1+\mathrm{D}_1), \qquad 2\,\mathrm{EB}q = fk(\mathrm{A}_1+\mathrm{C}_1),$$
$$r = w = 0.$$

On voit, en particulier, que *la fibre neutre reste rectiligne lorsque la section droite admet deux axes de symétrie rectangulaires*. Dans les autres cas, elle peut être déformée. Mais, il n'y a *jamais de torsion*.

Dans le *cas du cercle*, on a

$$u = \frac{fx}{16\mu k'}\left[(2k-1)(x^2+y^2) + \rho^2\frac{3-5k}{1+k}\right],$$
$$8k'\mathrm{N}_1 = f[(1+2k')(\rho^2-x^2) - (1+2k)y^2],$$

v et N_2 par symétrie;

$$\mathrm{T}_1 = \mathrm{T}_2 = 0, \qquad 4k'\mathrm{T}_3 = (2k-1)fxy, \qquad 4k'\mathrm{N}_3 = fk(\rho^2 - 2x^2 - 2y^2).$$

Ces dernières formules sont faciles à vérifier directement en coordonnées polaires (*cf.* Lecornu, *Cours de Mécanique*, t. II, p. 377). On voit que les *conditions limites concernant les bases* exigeraient que la force appliquée en M, par unité de surface, ait pour valeur $\frac{fk}{4k'}(\rho^2 - 2\,\mathrm{OM}^2)$. Ce serait une traction au centre et une pression pour la circonférence. Pour un *fil long*, on peut appliquer le principe de l'équivalence; mais on ne saurait l'admettre pour le problème de la meule (*cf.* Lecornu, *loc. cit.*).

72. Rotation autour d'un axe rencontrant Oz. — Nous pouvons supposer que l'axe de rotation passe par le centre de la base B_0. En nous bornant au cas du *fil rond*, nous pouvons aussi prendre cet axe dans le plan zOx. Appelons θ l'angle qu'il fait avec Oz. En appliquant les formules (153), on voit qu'on a affaire à une combinaison du cas I, du cas symétrique et des cas III, IV, V. En utilisant les résultats précédents, la *déformation de la fibre neutre* est donnée par les formules suivantes :

$$2E\varepsilon = f[(l^2 - z^2)\sin^2\theta - k\rho^2\cos^2\theta], \qquad p = r = 0, \qquad EAq = M + \Delta M.$$

Dans la dernière formule, M désigne le moment fléchissant calculé à la manière habituelle; il a pour expression

$$M = fA\sin 2\theta (l - z)\left[\frac{(z-l)(z+2l)}{3\rho^2} + \frac{1}{2}\right].$$

Quant au terme correctif ΔM, il a pour expression

$$\Delta M = fAz\sin 2\theta\,\frac{7 + 12k + 4k^2}{6(1+k)}.$$

Son rapport au terme principal est très petit quand le fil est très mince et qu'on n'est pas au voisinage de la base libre.

73. La torsade. — Nous appelons ainsi un *fil engendré par un mouvement hélicoïdal de* (A) *autour de* Oz. On a donc $p = q = 0$, $r = \text{const.}$

Négligeons les forces de volume et les forces latérales et plaçons-nous, pour simplifier l'écriture, dans le cas du n° **27**.

Il n'y a rien de changé dans la première approximation. Pour la deuxième approximation, on a toujours les formules (85) et les deux premières formules (87). Mais, il faut reprendre le calcul de ω_1, au moyen des équations (82).

Comme précédemment, remplaçons s par z et remarquons que $\frac{dZ}{dz} = 0$; d'où résulte $\frac{d\varepsilon_0}{dz} = 0$. D'autre part, $Z'_0 = Z''_1 = 0$. Dès lors, les équations (82) nous donnent

(154) $$\omega_1 = -(1+2k) r \varepsilon_0 H.$$

La formule (60) donne ensuite

(155) $$N = \mu I r'_0 + \mu r \varepsilon_0 [1 + 2J(1+k)].$$

La torsion dépend donc *non seulement du couple de torsion, mais encore de la traction longitudinale* (¹).

On a ensuite, en se reportant aux formules (56),

(156) $$w_1 = jH, \qquad T_1^1 = \mu\left(j\frac{\partial H}{\partial y} + j'x\right), \qquad T_2^1 = \mu\left(j\frac{\partial H}{\partial x} - j'y\right),$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

(157) $$j = r'_0 - (1+2k) r \varepsilon_0, \qquad j' = r'_0 + r\varepsilon_0.$$

74. Passons à la *troisième approximation*. On trouve d'abord, par les formules (35), (36), (53),

(158) $$S\varepsilon_2 = -rjJ;$$

(159) $$EAp'_1 = 2\mu rj(3+2k)\iint_A xy\frac{\partial H}{\partial y}dx\,dy + Erj(2B_1 - D_1) + \frac{\mu krj}{2}(D_1 - 3B_1) + \frac{\mu krj'}{2}(B_1 + D_1)$$

et une formule analogue pour q'_1.

Puis,

$$\begin{aligned}\omega_2 = {} & \frac{x^3}{6}\left[(2+k)\frac{dq'_0}{dz} - krp'_0\right] - \frac{y^3}{6}\left[(2+k)\frac{dp'_0}{dz} + krq'_0\right] \\ & + \frac{x^2y}{2}\left[k\frac{dp'_0}{dz} + rq'_0(k+2)\right] + \frac{xy^2}{2}\left[-k\frac{dq'_0}{dz} + rp'_0(k+2)\right] \\ & + (1+k)\left(H_4\frac{dp'_0}{dz} - H_1\frac{dq'_0}{dq}\right) + H_2\left[k\frac{dq'_0}{dz} - rp'_0(3+2k)\right] \\ & - H_3\left[k\frac{dp'_0}{dz} + rq'_0(3+2k)\right];\end{aligned}$$

(¹) Par exemple, *si l'on tire simplement sur le fil*, c'est-à-dire si $N = 0$ et $Z > 0$, on voit que $r'_0 < 0$; la torsion r est diminuée; *le fil se détord*, conformément à ce que suggère l'expérience vulgaire.

et

$$(160)\quad \mathrm{I}r'_1 = \frac{dp_0}{dz}\left[(1+k)\left(\mathrm{C}_1+\iint_{\mathrm{A}}\delta\mathrm{H}_4\,dx\,dy\right)-k\left(\mathrm{A}_1+\iint_{\mathrm{A}}\delta\mathrm{H}_3\,dx\,dy\right)\right]$$
$$+\frac{dq_0}{dz}\left[(1+k)\left(\mathrm{B}_1-\iint_{\mathrm{A}}\delta\mathrm{H}_1\,dx\,dy\right)+k\left(-\mathrm{D}_1+\iint_{\mathrm{A}}\delta\mathrm{H}_2\,dx\,dy\right)\right]$$
$$+rp'_0\left[\mathrm{D}_1-2(1+k)\mathrm{B}_1-(3+2k)\iint_{\mathrm{A}}\delta\mathrm{H}_2\,dx\,dy\right]$$
$$+rq'_0\left[2(1+k)\mathrm{C}_1-\mathrm{A}_1-(3+2k)\iint_{\mathrm{A}}\delta\mathrm{H}_3\,dx\,dy\right].$$

On a ensuite

$$\mathrm{P}_2 = -2\mu jr\frac{\partial(y\overline{\mathrm{H}})}{\partial y},\qquad \mathrm{Q}_2 = -2\mu jr\frac{\partial(x\overline{\mathrm{H}})}{\partial x};$$

d'où (n° **34**)

$$\varphi_2 = \frac{r}{2}[-j\mathrm{K}+(j-j')\mathrm{K}'].$$

Puis,

$$\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2} = jr(2k-1)\overline{\mathrm{H}}+k'\frac{r}{4}[j\,\Delta\mathrm{K}+(j'-j)\,\Delta\mathrm{K}']$$
$$-k(\varepsilon_2+p'_1 y-q'_1 x).$$

On peut achever le calcul dans le cas du cercle; mais, ce cas est sans intérêt, car la torsade est alors un cylindre et l'on peut supposer $r=0$.

Dans le cas particulier où *l'on exerce seulement une traction longitudinale et un couple de torsion* sur la base (B), on a

$$p'_0 = q'_0 = \omega_2 = r'_1 = \varpi_2 = 0.$$

D'après les formules (159), p'_1 et q'_1 sont des constantes. Il en est de même de r'_0; donc aussi de p', q', r'. On en conclut que *la fibre neutre se déforme suivant une hélice*, si toutefois la section droite n'admet pas deux axes de symétrie, auquel cas elle reste rectiligne.

CHAPITRE VII.

Calcul de la déformation de la fibre neutre.

75. Équations différentielles de la déformation. — Négligeons les forces F_{V} et F_{Σ} et appelons X, Y, ..., N les coordonnées du système des F_B par rapport à des axes quelconques $Oxyz$. Soit x, y, z les coordonnées du point P de la fibre neutre qui a pour abscisse curviligne s. Appelons Px', Py', Pz' les axes que nous appelions Ox, Oy, Oz dans les chapitres précédents. Soit (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3) leurs cosinus directeurs respectifs. Les moments résultants des F_B par rapport à Px', Py', Pz' sont

$$(161)\quad \left\{\begin{aligned} L' &= a_1(L + zY - yZ) + b_1(M + xZ - zX) + c_1(N + yX - xY),\\ M' &= a_2(L + zY - yZ) + b_2(M + xZ - zX) + c_2(N + yX - xY),\\ N' &= a_3(L + zY - yZ) + b_3(M + xZ - zX) + c_3(N + yX - xY).\end{aligned}\right.$$

Pour simplifier l'écriture, posons

$$\frac{1}{EA} = \lambda_1, \qquad \frac{1}{EB} = \lambda_2, \qquad \frac{1}{\mu I} = \lambda_3.$$

Nous avons

$$(162)\qquad p = p_0 + \lambda_1 L', \qquad q = q_0 + \lambda_2 M', \qquad r = r_0 + \lambda_3 N'.$$

D'autre part, on a

$$(163)\qquad \frac{da_1}{ds} + qa_3 - ra_2 = 0,$$

et les huit équations analogues, obtenues en permutant circulairement les indices et p, q, r, puis remplaçant les a_i par les b_i et les c_i. On a enfin

$$(164)\qquad \frac{dx}{ds} = a_3, \qquad \frac{dy}{ds} = b_3, \qquad \frac{dz}{ds} = c_3.$$

En portant (161) dans (162), puis le résultat obtenu dans (163), on aboutit finalement à un système de douze équations différentielles du premier ordre à douze inconnues [1], qui sont toutes résolues par rapport aux dérivées premières.

Si le fil est encastré au point $s = 0$, on connaît les valeurs initiales des douze inconnues. On peut donc calculer, en principe, les a_i, b_i, c_i, x, y, z en fonction de s, X, Y, ..., N. Les fonctions ainsi obtenues sont holomorphes par rapport à ces sept variables au voisinage de la

[1] On pourrait réduire à six le nombre des inconnues et des équations, en exprimant les neuf cosinus au moyen des angles d'Euler.

valeur zéro. En remplaçant s par s_1 (longueur du fil), on a les coordonnées de l'extrémité libre du fil et les cosinus directeurs du trièdre correspondant. Ces coordonnées sont des fonctions déterminées de X, Y, ..., N. Si X, Y, ..., N, s_1 sont assez petits, elles sont holomorphes et permettent de *calculer inversement* X, Y, Z, L, M, N *en fonction de la position de l'extrémité du fil.*

Telle est la solution théorique. Pratiquement, le problème est fort compliqué (1).

76. Cas où la déformation est petite. — Supposons la déformation très petite, de telle sorte que les accroissements α_i, β_i, γ_i, des a_i, b_i, c_i et Δx, Δy, Δz de x, y, z, à partir de l'état naturel (2) puissent être considérés comme des infiniment petits du premier ordre. L'équation (163) s'écrit, en négligeant le second ordre,

$$\frac{d\alpha_1}{ds} + q_0\alpha_3 - r_0\alpha_2 = r'a_2 - q'a_3, \tag{165}$$

où les a_i ont leurs valeurs naturelles. En permutant les indices, on obtient un système linéaire, que l'on peut intégrer par la méthode de la variation des constantes, puisqu'on connaît les trois solutions fondamentales (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) du système sans seconds membres. Un calcul élémentaire donne

$$\alpha_i = bc_i - cb_i, \qquad \beta_i = ca_i - ac_i, \qquad \gamma_i = ab_i - ba_i, \tag{166}$$

avec (3)

$$a = \int_0^s (p'a_1 + q'a_2 + r'a_3)\, ds \tag{167}$$

et les formules analogues en b et c.

On a ensuite

$$\Delta x = \int_0^P b\, dz - c\, dy,$$

(1) J'en ai donné une solution approchée et pratiquement suffisante dans le cas particulier du *spiral* (*Bull. Soc. Math.*, t. LVIII, 1930).

(2) Ou d'un état déjà déformé, si l'on se propose de calculer la déformation supplémentaire due à l'introduction de forces nouvelles très petites.

(3) Nous supposons toujours le fil encastré au point $s = 0$.

ou, en intégrant par parties,

$$(168) \quad \Delta x = bz - cy + \int_0^s [y(p'c_1 + q'c_2 + r'c_3) - z(p'b_1 + q'b_2 + r'b_3)]\, ds,$$

et les deux formules analogues.

Si le fil n'est pas très long, les intégrales (167) et (168) sont très petites. Mais, *si le fil est très long*, les intégrales a, b, c peuvent devenir grandes, malgré la petitesse de p', q', r'. Dans ce cas, la présente méthode de calcul ne vaut plus rien.

Remarque. — Dans le cas qui vient d'être considéré, il n'est pas nécessaire de négliger les F_V et F_Σ. *Les formules ci-dessus sont valables quelles que soient les forces extérieures, pourvu que la déformation globale soit très petite.*

77. Supposons que le trièdre $Oxyz$ soit solidaire du trièdre $Px'y'z'$. Son déplacement pendant la déformation peut être considéré comme résultant des translations ξ, η, ζ suivant les axes Ox, Oy, Oz et des rotations λ, μ, ν autour de ces mêmes axes. Le travail virtuel du système (S_A) a pour expression

$$\delta\mathcal{T} = X\,\delta\xi + Y\,\delta\eta + Z\,\delta\zeta + L\,\delta\lambda + M\,\delta\mu + N\,\delta\nu.$$

On en conclut que l'on doit avoir [1]

$$(169) \qquad \xi = \frac{\partial V}{\partial X}, \qquad \lambda = \frac{\partial V}{\partial L},$$

et les formules analogues, en désignant par V l'énergie de déformation [2] de la portion de fil antérieure à (A). C'est ce qu'il est aisé de vérifier à partir des formules précédentes. On a $\alpha_i = \mu c_i - \nu b_i$ et les

(1) *Cf. Bull. Soc. Math.*, t. LVI, p. 240.

(2) Si la déformation infiniment petite considérée se produit à partir de l'état naturel, il s'agit de l'énergie de déformation véritable. Si l'on part d'un état déjà déformé, V représente, au signe près, le travail des nouvelles forces intérieures résultant de la nouvelle déformation et ne doit pas être confondu avec l'accroissement subi par la véritable énergie de déformation. (*Cf. loc. cit.*, Note de la page 241.)

formules analogues. En comparant avec (166), on en conclut que $a = \lambda$, $b = \mu$, $c = \nu$. D'autre part (n° **41**),

$$V = \frac{1}{2}\int_0^s (\lambda_1 L'^2 + \lambda_2 M'^2 + \lambda_3 N'^2)\, ds.$$

D'où

$$\frac{\partial V}{\partial L} = \int_0^s (\lambda_1 L' a_1 + \lambda_2 M' a_2 + \lambda_3 N' a_3)\, ds = \lambda,$$

d'après (156). On a ensuite

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial X} &= \int_0^s [\lambda_1 L'(c_1 y - b_1 z) + \lambda_2 M'(c_2 y - b_2 z) + \lambda_3 N'(c_3 y - b_3 z)]\, ds \\ &= \Delta x + cy - bz,\end{aligned}$$

d'après (157). Or, $\Delta x = \xi + bz - cy$. Donc, $\frac{\partial V}{\partial x} = \xi$.

Connaissant ξ, η, ζ, λ, μ, ν, le déplacement de P a pour composantes $\xi + \mu z - \nu y$, $\eta + \nu x - \lambda z$, $\zeta + \lambda y - \mu x$. Les rotations du trièdre $Px'y'z'$ sont λ, μ, ν autour de Px', Py', Pz'. Pour $s = s_1$, on a le déplacement de l'extrémité du fil.

78. Le ressort cylindrique ou conique. — Nous allons calculer *approximativement* sa *déformation infiniment petite*, en supposant les *spires très aplaties, sensiblement circulaires et nombreuses*.

Prenons pour axe des z l'axe du ressort et un axe Ox passant par le point d'encastrement. Appelons r, φ, z les coordonnées semi-polaires du point courant P. On a

$$a_3 = -\sin\varphi, \qquad b_3 = \cos\varphi, \qquad c_3 = 0.$$

Supposons maintenant *que les axes principaux d'inertie de la section droite du fil soient dirigés suivant le rayon de la spire et la perpendiculaire à son plan*. On a

$$a_1 = -\cos\varphi, \quad b_1 = -\sin\varphi, \quad c_1 = 0; \quad a_2 = b_2 = 0, \quad c_2 = 1.$$

La méthode de calcul la plus simple consiste à utiliser les formules (169). Calculons d'abord la partie principale de V. On a, d'après (161),

$$L' = -L\cos\varphi - M\sin\varphi + z(X\sin\varphi - Y\cos\varphi),$$
$$M' = N + yX - xY,$$
$$N' = -L\sin\varphi + M\cos\varphi - z(X\cos\varphi + Y\sin\varphi) + Zr.$$

D'où

$$L'^2 = \frac{L^2+M^2}{2} + \frac{z^2}{2}(X^2+Y^2) + z(LY - MX) + \ldots,$$
$$M'^2 = N'^2 + \frac{r^2}{2}(X^2+Y^2) + \ldots,$$
$$N'^2 = L'^2 + r^2z^2 + \ldots$$

Dans ces formules, les termes non écrits donneraient, par intégration, des termes infiniment petits par rapport à ce que donnent les termes conservés, si l'on considère φ comme un infiniment grand. La partie principale de V est donc

$$V = s\frac{L^2+M^2}{2}(\lambda_1+\lambda_3) + \frac{X^2+Y^2}{2}[(\lambda_1+\lambda_3)I_{xOy} + \lambda_2 I_{Oz}]$$
$$+ (LY - MX)(\lambda_1+\lambda_3)sz_G + Z^2\lambda_3 I_{Oz} + N^2 s\lambda_2,$$

où I_{xOy} et I_{Oz} désignent les moments d'inertie de l'arc s par rapport à xOy et Oz et z_G la cote de son centre de gravité (la densité linéaire étant supposée égale à *un*).

Les formules (169) nous donnent maintenant

$$\xi = X[(\lambda_1+\lambda_3)I_{xOy} + \lambda_2 I_{Oz}] - M(\lambda_1+\lambda_3)sz_G,$$
$$\eta = Y[(\lambda_1+\lambda_3)I_{xOy} + \lambda_2 I_{Oz}] + L(\lambda_1+\lambda_3)sz_G,$$
$$\zeta = 2Z\lambda_3 I_{Oz},$$
$$\lambda = s(\lambda_1+\lambda_3)(L + Yz_G), \qquad \mu = s(\lambda_1+\lambda_3)(M - Xz_G), \qquad \nu = 2Ns\lambda_2.$$

Dans le cas du *ressort cylindrique*, on a (1), en appelant R son *rayon*,

$$s = R\varphi, \qquad z_G = \frac{z}{2}, \qquad I_{xOy} = s\frac{z^2}{3}, \qquad I_{Oz} = sR^2.$$

Dans le cas du *ressort conique* (2), on a, en appelant R le rayon

(1) Nous supposons que le ressort a la forme d'une hélice circulaire.

(2) Nous supposons que le ressort a la forme d'une hélice conique, c'est-à-dire que z et r sont fonctions linéaires de φ.

à l'encastrement,

$$s = (\mathrm{R} + r)\frac{\varphi}{2}, \qquad z_{\mathrm{G}} = \frac{z(\mathrm{R} + 2r)}{3(\mathrm{R} + r)},$$

$$\mathrm{I}_{x\mathrm{O}y} = z^2(\mathrm{R} + 3r)\frac{\varphi}{12}, \qquad \mathrm{I}_{\mathrm{O}z} = s\,\frac{\mathrm{R}^2 + r^2}{2}.$$

Des formules ci-dessus, on déduit le déplacement du trièdre $\mathrm{P}x'y'z'$, comme il a été expliqué au n° **77**. Mais, bien entendu, les formules ne sont approximativement exactes que si *le nombre de spires séparant* P *de l'encastrement est assez grand*. Pour obtenir la déformation du ressort près de l'encastrement, il faudrait faire rigoureusement le calcul de V.

CHAPITRE VIII.

Le principe d'équivalence.

79. Énoncé du principe. — Supposons notre fil soumis à des forces extérieures quelconques. Nous savons trouver une solution particulière satisfaisant aux équations indéfinies et aux conditions aux limites, sauf celles qui concernent les bases, qui ne sont vérifiées que moyennant une répartition convenable des forces. Retranchons cette solution particulière de la solution générale. Nous sommes ramenés au problème suivant : *Trouver la déformation correspondant à des forces de volume et à des forces latérales identiquement nulles, les forces appliquées sur chaque base formant un système donné équivalent à zéro.*

Si le principe de l'équivalence est exact, *cette déformation doit devenir rapidement très petite dès qu'on s'éloigne des bases.*

La démonstration de cette propriété paraît extrêmement difficile. Nous allons seulement essayer de l'aborder dans le cas du cylindre.

80. Cas du cylindre. — Revenons aux équations du n° **52**, en y annulant X′, Y′, Z′, X″, Y″, Z″, ε, p, q, r et faisant $t = 1$. Les formules (117) peuvent s'écrire

$$(170) \qquad \mathrm{T}_1 = \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(w + \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\right), \qquad \mathrm{T}_2 = \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(w + \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\right).$$

Portant dans (109) et intégrant, il vient

$$(171)\qquad P = -\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(w + \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\right), \qquad Q = -\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(w + \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\right).$$

Portant dans (42), on obtient par addition et soustraction et en désignant par $\Delta' = \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ le laplacien dans l'espace,

$$(172)\qquad \Delta'\psi = 0,$$

$$(173)\qquad 2k'\Delta'\varphi - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial w}{\partial z} + D\psi = 0.$$

Enfin, l'équation (114) s'écrit

$$(174)\qquad \Delta' w = \frac{\partial\Delta'\varphi}{\partial z}.$$

Les équations (172), (173) et (174) constituent les *équations indéfinies d'équilibre*.

En éliminant w entre (173) et (174), on obtient, en tenant compte de (172),

$$(175)\qquad \Delta'\Delta'\varphi = 0.$$

Les fonctions ψ et φ sont respectivement harmonique et biharmonique dans l'espace.

Les formules (171) peuvent maintenant s'écrire :

$$P = 2\mu\left(k'\Delta\varphi - k\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right), \qquad Q = 2\mu\left(k'\Delta\varphi - k\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right).$$

Les *conditions aux limites* (111) et (115) deviennent

$$(176)\qquad \begin{cases} d\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \left(k'\Delta\varphi - k\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)dx, \\ d\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \left(k'\Delta\varphi - k\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)dy; \end{cases}$$

$$(177)\qquad \frac{\partial}{\partial n}\left(w + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\beta\frac{\partial\psi}{\partial y} - \alpha\frac{\partial\psi}{\partial x}\right).$$

On a enfin, d'après (116),

$$(178)\qquad N_3 = -2\mu\left[(k'+1)\Delta\varphi + k\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + D\psi\right].$$

81. Recherche d'une solution particulière. — Suivant une méthode souvent employée, cherchons une solution telle que φ, ψ et w soient de la forme

$$(179) \qquad \varphi = Z\Phi, \qquad \psi = Z\Psi, \qquad w = Z_1 W,$$

Z, Z_1 désignant des fonctions de z et Φ, Ψ, W des fonctions de x, y.

L'équation (172) devient

$$Z\,\Delta\Psi + Z''\Psi = 0.$$

Dès lors, *si Ψ n'est pas nul*, on doit avoir $Z = e^{-mz}$ et

$$(180) \qquad \Delta\Psi + m^2\Psi = 0,$$

m désignant une constante réelle ou imaginaire. L'équation (175) devient alors

$$(181) \qquad \Delta\,\Delta\Phi + 2m^2\Delta\Phi + m^4\Phi = 0.$$

On a ensuite, par (173),

$$(182) \qquad w = \frac{e^{-mz}}{m}\left[2k'\,\Delta\Phi + (2k' - 1)m^2\Phi + D\Psi\right],$$

moyennant quoi l'équation (174) se ramène à (181).

Les conditions (176) et (177) s'écrivent enfin :

$$(183) \qquad \begin{cases} d\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right) = \left(k'\,\Delta\Phi - km^2\Phi - \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right)dx, \\ d\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = \left(k'\,\Delta\Phi - km^2\Phi + \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right)dy; \end{cases}$$

$$(184) \qquad \frac{\partial}{\partial n}(2k'\Delta\Phi - 2km^2\Phi + D\Psi) + m^2\left(\beta\frac{\partial\Psi}{\partial y} - \alpha\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) = 0.$$

Il faudrait trouver deux fonctions Φ et Ψ vérifiant les équations (180), (181) et les conditions aux limites (183), (184). Si cela était possible pour une infinité de valeurs de m, on pourrait espérer trouver des développements de Fourier permettant de réaliser sur chaque base une distribution de forces arbitrairement choisie.

82. Examinons maintenant le *cas* $\Psi = 0$. L'équation (175) s'écrit

$$(185) \qquad Z\Delta\,\Delta\Phi + 2Z''\Delta\Phi + Z''''\Phi = 0.$$

En donnant à x et y des valeurs numériques, on voit que la fonction Z

doit vérifier une ou deux équations linéaires à coefficients constants. Cela nous conduit à distinguer deux cas.

Cas I. — Z vérifie deux équations. On en conclut que $Z = e^{-mz}$; moyennant quoi (185) se réduit à (181). On retombe sur la solution envisagée au n° **81**, mais avec la condition supplémentaire $\Psi = 0$.

Dans le but de reconnaître si une telle solution peut exister, plaçons-nous dans le cas particulier du *cylindre de révolution*, en supposant de plus que la distribution des forces sur chaque base est également de révolution autour de Oz (¹). La fonction Φ est alors une simple fonction de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. L'équation (181) s'intègre facilement (²) par les fonctions de Bessel : son intégrale est, avec les notations habituelles (³),

$$\Phi = \mathrm{A}\,mr\mathrm{J}_1(mr) + \mathrm{B}\mathrm{J}_0(mr) + \mathrm{C}\,mr\mathrm{N}_1(mr) + \mathrm{D}\mathrm{N}_0(mr).$$

Mais, il faut que la déformation et les efforts restent finis pour $r = 0$. On constate facilement que ceci n'est possible que si $C = D = 0$. En écrivant les conditions (183) et (184), on obtient deux équations linéaires et homogènes en A et B, dont la compatibilité exige

$$2k' = m^2 r^2 \left[1 + \frac{\mathrm{J}_0^2(mr)}{\mathrm{J}_1^2(mr)} \right].$$

Cette dernière équation devrait être vérifiée par le rayon a du cylindre. Mais, du fait que $2k' < 2$, cette équation n'a aucune racine réelle (⁴). Donc, *la solution cherchée n'existe pas.*

83. On peut cependant trouver une *solution approchée*. Prenons $A = 0$. Des formules (170) et (178), on déduit *l'effort radial* T et

(¹) Cette dernière condition entraîne nécessairement $\Psi = 0$; de sorte que le calcul qui va suivre peut être considéré comme s'appliquant tout aussi bien au cas du numéro **81**.

(²) On intègre successivement les deux équations

$$\Delta G + m^2 G = 0, \qquad \Delta\Phi + m^2\Phi = 0.$$

(³) *Cf.* Georges Goudet, *Les fonctions de Bessel et leurs applications en Physique.*

(⁴) Elle n'en a d'ailleurs qu'un nombre fini pour toute valeur positive de k'.

l'effort normal N

$$T = 2\mu m^2 B e^{-mz} J_1(mr), \qquad N = 2\mu m^2 B e^{-mz} J_0(mr).$$

En faisant $z = 0$, on a les *efforts sur la base*.

Supposons que le nombre m soit choisi de telle manière que ma soit une des racines, en nombre infini, de la fonction J_1. On peut alors *se donner arbitrairement soit la fonction* T, *soit la fonction* N et calculer les coefficients B de manière à obtenir le développement de ladite fonction en série de fonctions J_1 ou de fonctions J_0. Bien entendu, les forces latérales ne sont pas identiquement nulles. Mais, la présence du facteur e^{-mz} dans chaque terme des séries représentant leurs composantes montre que ces forces *tendent rapidement vers zéro dès qu'on s'éloigne de la base*. Il en est de même de la déformation et de tous les efforts élastiques.

On peut répéter ceci pour l'autre base. Cela change infiniment peu la distribution des forces appliquées à la première, si la hauteur du cylindre est grande vis-à-vis de son rayon.

84. *Cas II.* — On a, dans ce cas,

$$\Delta\Phi + m^2\Phi = 0 \tag{186}$$

et

$$Z'''' - 2m^2 Z'' + m^4 Z = 0. \tag{187}$$

L'équation (173) donne ensuite

$$w = \left[(1 + 2k')Z' - \frac{2k'}{m^2}Z'''\right]\Phi. \tag{188}$$

On constate facilement que *les trois conditions aux limites ne peuvent pas être vérifiées simultanément*. On peut toutefois satisfaire à la troisième, en imposant à Φ la condition de vérifier, sur (T), l'équation

$$\frac{d\Phi}{dn} = 0,$$

qui est compatible (¹) avec (186) pour une infinité de valeurs réelles

(¹) *Voir*, par exemple, W. Stekloff, *Théorie générale des fonctions fondamentales* (*Ann. Fac. Sc.*, Toulouse, 1904).

de m. D'autre part, les formules (170) et (178) deviennent

$$(189)\quad \begin{cases} T_1 = 2\mu\left[(1+k')Z' - \dfrac{k'}{m^2}Z'''\right]\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}, \\ T_2 = 2\mu\left[(1+k')Z' - \dfrac{k'}{m^2}Z'''\right]\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}, \end{cases}$$

$$(190)\quad N_3 = 2\mu[(1+k')m^2 Z - k'Z'']\Phi.$$

Imposons-nous par exemple la condition que le crochet des formules (189) s'annule pour $z = 0$. On a

$$Z = A_m e^{-mz}\left(z + \frac{1-2k'}{m}\right);$$

$$T_1 = -2\mu m A_m z\, e^{-mz}\frac{\partial\Phi_m}{\partial y}, \qquad T_2 = -2\mu m A_m z\, e^{-mz}\frac{\partial\Phi_m}{\partial x};$$

$$N_3 = 2\mu m A_m (mz+1)\, e^{-mz}\Phi_m;$$

en désignant par A_m une constante arbitraire et par Φ_m la fonction fondamentale correspondant au nombre m.

Sur la base $z = 0$, on a

$$T_1 = T_2 = 0, \qquad N_3 = 2\mu m A_m \Phi_m.$$

On peut calculer les coefficients A_m par les formules de Fourier, de manière à réaliser sur cette base des *forces normales ayant une distribution arbitrairement choisie*, ce qui constitue une *solution approchée et partielle du problème de l'équivalence*.

85. Application au cylindre de révolution. — Faisons les mêmes hypothèses qu'au n° **83**. La fonction fondamentale est $J_0(mr)$, le nombre m étant tel que $ma = t_n$ soit une des racines, en nombre infini, de la fonction $J_1(t)$. On peut alors écrire

$$(191)\quad \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t_n\frac{z}{a}}(A_n z + B_n) J_0\left(t_n\frac{r}{a}\right).$$

Les formules (189) et (190) nous donnent ensuite *l'effort radial* T et *l'effort normal* N sur la section droite de cote z

$$(192)\quad T = \frac{2\mu}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-t_n\frac{z}{a}}[t_n(A_n z + B_n) + A_n a(1-2k)]t_n J_1\left(t_n\frac{r}{a}\right),$$

$$(193)\quad N = \frac{2\mu}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-t_n\frac{z}{a}}[t_n(A_n z + B_n) + 2k' A_n a]t_n J_0\left(t_n\frac{r}{a}\right).$$

En faisant $z=0$, on a les efforts sur la base. Si on se les donne *a priori* en fonction de r, on a (1)

$$\mu t_n[t_n B_n + (1-2k) a A_n] J_0^2(t_n) = \int_0^a J_1\left(t_n \frac{r}{a}\right) T(r) r\, dr,$$

$$\mu t_n[t_n B_n + \quad 2k' \quad a A_n] J_0(t_n) = -\int_0^a J_0\left(t_n \frac{r}{a}\right) N(r) r\, dr.$$

d'où l'on déduit les constantes A_n et B_n.

On peut donc réaliser une *distribution arbitraire des forces appliquées sur la base*, pourvu qu'elle soit de révolution autour de Oz. La présente solution est donc plus complète que celle donnée au n° **83**, qui permettait seulement de choisir soit T, soit N.

Sur la face latérale, on a *l'effort normal* (2)

$$\frac{2\mu}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} t_n e^{-t_n \frac{z}{a}} [2ka A_n - t_n(A_n z + B_n)] J_0(t_n).$$

Comme au n° **83**, il tend rapidement vers zéro quand on s'éloigne de la base.

Bien entendu, ceci peut être répété sur l'autre base, comme on l'a expliqué au n° **83**.

86. Ces tentatives de justification du principe d'équivalence sont évidemment très imparfaites, et il serait intéressant de trouver une solution, autre que celles de Saint-Venant, pour laquelle les forces latérales seraient identiquement nulles.

---

(1) *Cf.* Goudet, *loc. cit.*, p. 42.

(2) Calculer N_1 et T_3 par les formules (39), en utilisant la valeur de P trouvée au n° **80**. Le calcul est très simple, en se plaçant sur l'axe Ox.