JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

OLIVIER COSTA DE BEAUREGARD

Dynamique relativiste des milieux continus. La variation de la masse propre en fonction du travail des forces superficielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 25 (1946), p. 187-207.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1946_9_25__187_0>

Dynamique relativiste des milieux continus. La variation de la masse propre en fonction du travail des forces superficielles;

PAR M. OLIVIER COSTA DE BEAUREGARD.

Nous avons exposé, dans un travail antérieur, ce qui nous semble être la voie la plus naturelle et la plus économique en postulats pour l'établissement de la dynamique relativiste (¹). M. E. Durand (²) préconise une autre méthode, basée sur l'équation de conservation de la masse propre

$$[a] \qquad \partial_i(\rho_0 V^i) = 0,$$

qu'il pense pouvoir établir *a priori* ($i, j, k, l = 1, 2, 3, 4$); ρ_0 désigne la densité massique propre, et V^i la quadrivitesse du fluide, qui est reliée à la vitesse ordinaire $\vec{v}$ ou v^u suivant

$$[b] \qquad V^u = \alpha v^u, \qquad V^4 = ic\alpha; \qquad \alpha = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 - v^2}}; \qquad V_i V^i = -c^2$$

($u, v, w = 1, 2, 3$ par permutation circulaire). Or, d'une part les considérations invoquées par M. Durand sont à notre sens inefficaces (³); d'autre part, ainsi que M. de Laue, notamment l'a expliqué, il

(¹) *Journ. de Math.*, t. XXIII, fasc. 3, 1944. p. 211.

(²) *Journ. de Math.*, t. XXV, fasc. 3, 1946, p. 179.

(³) Soit δu un petit volume fluide considéré simultanément, $\delta u_0 = \alpha \delta u$ sa valeur propre; M. Durand pose $\rho' = \alpha \rho_0$, et remarque que l'expression $\rho' \delta u$ est *invariante* par les changements de repère galiléen. Il ne suit aucunement de là qu'elle soit *conservative* lors de l'évolution de la goutte δu, et l'on ne peut pas conclure [a] de la remarque précédente. Par ailleurs, M. Durand considère le est *a priori* exclu que la masse propre d'une goutte fluide soit conservative, car le travail de déformation fourni à cette goutte a, d'après une loi relativiste absolument générale, un équivalent massique ([1]). Pour ces raisons, la méthode préconisée par M. E. Durand n'est, à notre sens pas viable.

Il n'en est pas moins vrai que la formule [a] se trouve être une conséquence générale de la formule fondamentale de la dynamique relativiste, et des postulats que nous avons adoptés pour établir cette formule (postulats qui ne font qu'expliciter ceux communément admis). Il résulte de ce qui précède que cette conséquence est paradoxale, et qu'elle demande à être expliquée; elle signifie que, moyennant ces postulats, le travail des forces superficielles est identiquement nul, et, en particulier, qu'un fluide non visqueux devrait être incompressible ([2]). L'explication de ces paradoxes est fort simple *les postulats adoptés ne tiennent pas compte des forces superficielles;* il ne faut pas s'étonner alors que le travail de ces forces soit absent du résultat. Or, faute d'avoir donné de la force finie une définition covariante, la théorie de la relativité n'était jusqu'ici pas à son aise pour traiter des forces superficielles; récemment, nous avons donné une telle définition ([3]), et nous allons montrer

---

nombre conservatif N des molécules formant la goutte matérielle δu; on peut évidemment définir une densité propre de présence ν_0 et écrire, ainsi que le veut M. Durand,

$$\partial_i(\nu_0 V^i) = 0;$$

mais, pour passer de cette formule à celle [a] du texte, il faudrait relier explicitement la densité massique ρ_0 de la gouttelette aux masses des molécules; et l'on s'apercevrait alors que la masse propre de la gouttelette δu n'est conservative qu'en l'absence d'énergie d'agitation thermique.

([1]) *Théorie de la Relativité* (trad. G. Létang), t. I, p. 286, (Paris, 1926). La formule (353) de M. de Laue a bien, comme l'assure M. Durand, la forme [a], mais elle est écrite seulement pour le cas d'une pression ramenée à une valeur « normale », d'ailleurs arbitraire. Pour les raisons indiquées dans le texte, M. de Laue n'a aucunement l'idée d'attribuer à sa formule (353) une validité indépendante de la valeur de la pression.

([2]) *C. R. Acad. Sci.*, t. **222**, 1946, p. 272.

([3]) *C. R. Acad. Sci.*, t. **221**, 1945, p. 743. *Voir* aussi notre article aux *Ann. de Phys.*, **1**, 1946, p. 523-527.

dans les pages suivantes le parti qu'on en peut tirer dans la théorie des forces soit volumiques, soit superficielles, pour préciser les causes de la variation de la masse propre qui doit nécessairement se produire au sein d'un fluide relativiste, ainsi que la forme des seconds membres qu'il convient d'attribuer à la formule [a] précédente. La formule obtenue pour le cas simple d'une pression normale isotrope coïncide avec l'une des formules de base possibles pour toute la théorie des tourbillons ou sein des fluides relativistes non visqueux de MM. Eisenhart, Synge, Lichnerowicz; cette belle théorie peut être ainsi fondée, comme en mécanique prérelativiste, sur la notion d'une *pression* d'origine authentiquement superficielle. Nous indiquons ce rattachement, comme autre application de la même formule, nous étendons à la Relativité la loi bien connue de la compression adiabatique des gaz parfaits.

Il va sans dire que toute notre théorie, exposée en terme de Relativité restreinte, s'étendrait sans peine à la Relativité générale. Nous avons simplement voulu alléger sa formulation, et rendre évident son intérêt aux physiciens non spécialistes des questions astronomiques.

1. Les lois électromagnétiques de la densité de force entrainent en dynamique la conservation de la masse propre. — Nous avons fondé, dans notre travail cité, l'équation fondamentale, bien connue, de la dynamique relativiste des milieux continus

$$\boxed{f^i = \partial_j(\rho_0 V^i V^j),} \tag{1}$$

sur les postulats suivants, tirés de l'électromagnétisme :

1° la densité de force f^i est une densité volumique vraie, sans aucune intervention de forces superficielles;

2° la composante f^4 de f^i est reliée aux trois composantes f^u, qui représentent la force proprement dite, suivant la relation

$$f^4 = \frac{i}{c}(\vec{f}.\vec{v}), \tag{2'}$$

dont la transcription covariante est

$$\boxed{V_i f^i = 0.} \tag{2}$$

Soit alors τ le temps propre compté le long des lignes de courant d'Univers $\mathcal{L}$, A une grandeur de champ quelconque attachée aux molécules fluides; posons

$$\text{(3)} \qquad A' = \frac{d}{d\tau} A \equiv V_i \partial^i A.$$

Suivant une remarque comme, reprise par M. Durand, l'équation fondamentale (1) peut être mise sous la forme

$$\text{(4)} \qquad f^i = V^i \partial_j(\rho_0 V^j) + \rho_0 V'^i;$$

multipliant tous les termes par V_i, tenant compte du postulat (2), ainsi que de la relation

$$\text{(5)} \qquad V_i V^i = -c^2,$$

il vient successivement les deux formules générales, indiquées par M. Durand,

$$\text{(6)} \qquad \boxed{\partial_j(\rho_0 V^j) = 0,} \qquad f^i = \rho_0 V'^i;$$

mais, contrairement à ce qu'affirme M. Durand, nous estimons que ces formules ne peuvent venir qu'en *conséquence* de la formule (1).

Il est maintenant nécessaire pour la suite que nous établissions quelques formules de cinématique relativiste des fluides. Soit $ic\,\delta u^l$ le quadrivecteur dual de l'élément trilinéaire $[dx^i dx^j dx^k]$, dont la composante $\delta u = [dx^u dx^v dx^w]$ représente le volume élémentaire proprement dit. Si $ic\,\delta u^l$ désigne une hypersection (du genre espace) d'un tube d'Univers infiniment délié, l'invariant tensoriel

$$\text{(7)} \qquad \delta u_0 = V_i \delta u^i$$

est conservé par les changements d'orientation d'Univers de δu^i en un instant-point donné dans le tube; il mérite ainsi le nom d'*hypersection scalaire* du tube. Par ailleurs, étant aussi la valeur prise par δu dans le repère galiléen entraîné, δu_0 mérite encore le nom de *volume matériel scalaire* de la gouttelette considérée.

Prenons alors un tube de courant d'Univers fini, deux hypercloisons $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ du genre espace représentant deux *états* successifs d'une même goutte fluide $\mathcal{C}$, et l'hyperparoi latérale $\mathfrak{T}$; l'intégrale quadruple de la quadridivergence $\partial_i V^i$ étendue au domaine enclos dans $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathfrak{T}$ peut se transformer suivant

$$\iiint_{\mathcal{C}_2-\mathcal{C}_1+\mathfrak{T}} V_i \delta u^i,$$

la contribution de l'hyperparoi $\mathfrak{T}$ à cette expression étant identiquement nulle. Finalement, les deux hypercloisons $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ étant orientées dans le même sens par rapport aux lignes de courant d'Univers, et posant par définition du *volume scalaire* de la goutte $\mathcal{C}$

$$u_0 = \iiint_{\mathcal{C}} V_i \delta u^i, \tag{7'}$$

il vient le résultat

$$(u_0)_2 - (u_0)_1 = \frac{1}{ic} \iiiint \partial_i V^i \,|\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 \,|. \tag{8}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le volume scalaire u_0 se conserve le long de tout tube de courant d'Univers est que l'on ait

$$\partial_i V^i \equiv 0; \tag{9}$$

cette relation entraîne, par (6_1) et (3), $\rho_0 = \text{const.}$ le long des $\mathcal{L}$. Convenons d'appeler *incompressible* un fluide tel que $\rho_0 = \text{const.}$ dans tout l'espace-temps; moyennant les postulats actuellement adoptés, la relation (9) sera satisfaite dans un tel fluide, ce qui justifie, du point de vue cinématique, le qualificatif *incompressible* (1).

Revenons au cas général, et considérons à nouveau un tube infiniment délié; prenant deux hypersections infiniment voisines, la formule (8) peut s'écrire

$$d\delta u_0 = \partial_i V^i \delta u_0\, d\tau, \tag{8'}$$

ce qui est la généralisation quadridimensionnelle de la formule bien connue $d\delta u = \operatorname{div} \vec{v}\, \delta u\, dt$. Par ailleurs, la formule (6_1) peut être mise

(1) Nous venons de reprendre, en les précisant, les définitions de notre note (4). Un fluide tel que $\rho_0 = \text{const.}$ est dit par M. Lichnerowicz « incompressible du type A ». Pour M. de Laue, ce fluide était seulement *de moindre compressibilité*; la nouvelle terminologie n'est pas moins justifiée en Relativité que celle de *corps solide*, étant bien entendu qu'en tous cas les éléments de volume en mouvement subissent la contraction de Lorentz.

sous la forme

$$\rho_0' + \rho_0 \partial^i V_i = 0;$$

en rapprochant les deux formules précédentes, il vient la loi des compressions adiabatiques, conséquence des postulats adoptés jusqu'ici

$$(10') \qquad \rho_0 \delta u_0 = \text{const.};$$

elle exprime qu'il y a la conservation de la masse propre des gouttelettes δu_0.

Cette même loi peut être établie par un raisonnement général semblable à celui qui nous a fourni la formule (8). Posant, par définition de la *masse propre* ou *scalaire* d'une goutte matérielle $\mathcal{C}$,

$$(10) \qquad m_0 = \iiint_{\mathcal{C}} \rho_0 \delta u_0 \equiv \iiint_{\mathcal{C}} \rho_0 V_i \delta u^i,$$

il résulte de la conséquence (6_1) de nos postulats actuels que cette masse propre est conservative. Il est intéressant de se servir de ce résultat pour établir déductivement la conservation de la masse propre d'un point matériel; partant de la définition générale de l'impulsion-masse d'une goutte fluide

$$(11) \qquad p^i = \iiint_{\mathcal{C}} \rho_0 V^i V^j \delta u_j,$$

passant au cas limite d'un tube infiniment délié, et tenant compte des définitions précédentes, on écrit en effet,

$$\delta p^i = V^i \delta m_0.$$

Ces points étant précisés, il nous faut, comme nous le disions dans l'introduction, chercher la solution du grave paradoxe d'énergétique relativiste que constitue la conservation de la masse propre au sein d'un fluide compressible et visqueux.

2. Rappel de notre définition covariante de la force finie. Généralisation de la théorie de la force volumique. — Nous avons montré, en raisonnant sur le point matériel, que la force finie peut être définie en Relativité comme un tenseur antisymétrique du second rang F^{ij}, et que l'expression dp^i de la variation d'impulsion-masse du point lors du quadridéplacement dx^i doit alors s'écrire

$$\boxed{dp^i = F^{ij}\, dx_j;} \tag{12}$$

il résulte de l'antisymétrie de F^{ij} que l'on a

$$dp^i dx_i = 0 \tag{13}$$

et par suite, les quadrivecteurs p^i et dx^i étant colinéaires pour un point dénué de spin, que la masse propre du point est conservative [1]. Dans la suite, pour abréger le discours, nous appellerons dp^i le *quadritravail élémentaire* de la force F^{ij}. Par définition, nous avons dit que deux forces d'Univers F^{ij} et F'^{ij} sont *équivalentes* pour un quadridéplacement dx_j si elles fournissent le même quadritravail dp^i.

Dans la Note citée, nous avons également relié le tenseur antisymétrique force finie F^{ij} au quadrivecteur densité de force f^i par la formule tout indiquée

$$\boxed{\delta F^{ij} = f^i \delta u^j - f^j \delta u^i;} \tag{14}$$

compte tenu de notre postulat (2), ainsi que de la relation évidente

$$ic\delta u^j dx_j = [dx_1 dx_2 dx_3 dx_4], \tag{15}$$

le quadritravail élémentaire de δF^{ij} a bien la forme connue

$$d\delta p^i = \frac{1}{ic} f^i [dx_1 dx_2 dx_3 dx_4], \tag{16}$$

qui est à la base de la dynamique relativiste, et d'où la formule (1) résulte directement [2].

Mais la définition (14), corrélative de celle du nouveau tenseur F^{ij}, permet de se libérer du postulat restrictif (2); il faut alors chercher la formule qui généralise (1) comme loi fondamentale de la dyna-

---

(1) *C. R. Acad. Sci.*, t. **221**, 1945, p. 743. Voir aussi notre article aux *Annales de Physique*, **1**, 1946, p. 523-527.

(2) *Voir*, par exemple, notre *Relativité restreinte* (*Mém. des Sc. Math.*, t. **103**, 1944, p. 50-52).

mique. Si l'on admettait que la formule (14) représente rigoureusement la force pondéromotrice finie, la loi cherchée serait évidemment

$$(17') \qquad \iiiint \{ f^i - \partial_j (\rho_0 V^i V^j) \} [dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \, dx_4] = ic \int_{\mathcal{L}} \iiint_{\mathcal{C}} V_j f^j \delta u^i d\tau;$$

elle aurait l'inconvénient de devoir garder la forme intégrale, et de ne pas pouvoir prendre une forme densitaire analogue à (1). Mais, sous le nom « d'hypothèse H », considérons le cas où les $\mathcal{L}$ admettent des trajectoires orthogonales $\mathcal{C}_0$, et où l'on a pris pour $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux $\mathcal{C}_0$; le quadrivolume élémentaire δu^i est alors colinéaire à V^i, et (7) et (5) permettent d'écrire

$$(18) \qquad \delta u_0^i = -\frac{1}{c^2} \delta u_0 V^i.$$

Dans cette « hypothèse H », compte tenu de ce que

$$(19) \qquad ic \, du_0 \, d\tau = [dx_1 dx_2 dx_3 dx_4],$$

l'équation (17′) admet la forme densitaire

$$(17) \qquad \boxed{f^i + \frac{1}{c^2} f_j V^j V^i = \partial_j (\rho_0 V^i V^j).}$$

Dans le cas général où les $\mathcal{C}$ ne sont pas trajectoires orthogonales des $\mathcal{L}$ (c'est-à-dire, notamment, lorsque les $\mathcal{L}$ n'admettent pas de trajectoires orthogonales), il n'y a plus équivalence entre (17) et (17′) ; mais, par hypothèse, nous admettrons que la loi dynamique fondamentale rigoureuse est (17) et non (17′).

Nous serons amenés, dans nos généralisations ultérieures, à reprendre l'essentiel des précédentes hypothèses, que nous allons condenser à cette fin sous la forme du « postulat P » suivant. ***Étant donnée*** a priori ***une loi de force finie*** F^{ij}, ***si l'équation dynamique fondamentale qui s'ensuit ne peut pas prendre la forme densitaire, on admettra que la loi en question n'est qu'approchée, et qu'elle vient en coïncidence avec la loi exacte, susceptible d'une forme densitaire, dans « l'hypothèse H » précédemment formulée.***

Ayant remplacé comme il vient d'être dit la loi (1), qui était valable dans l'hypothèse (2), par la loi (17) supposée valable dans le cas général, demandons-nous s'il y a encore conservation de la masse propre du fluíde; la réponse est affirmative car, si nous multiplions tous les termes de (17) par V_i, le premier membre de l'équation obtenue est encore nul en vertu de (5); la formule (6_1) subsiste, et nous n'avons donc pas encore réussi à nous affranchir du paradoxe signalé dans l'introduction [1].

Mais voici de nouvelles hypothèses que l'étude relativiste de la loi électro-thermique de Joule nous a amené à formuler [2]. Admettant toujours que la force finie est représentée par un tenseur du second rang, nous cesserons d'exiger que ce tenseur soit nécessairement antisymétrique [ce qui, d'après ce que nous avons dit au sujet de la formule (13), permet d'envisager le problème d'un point matériel dont la masse propre ne serait pas conservative]; nous devons alors évidemment renoncer à la formule (14) qui reliait les forces finie et densitaire, et la remplacerons par la formule

$$\boxed{\delta F^{ij} = f^i \delta u^j;} \tag{20}$$

le point important est que, dans l'hypothèse (2) initialement adoptée, les deux définitions (14) et (20) de la force finie sont *équivalentes* au sens précédemment dit, comme fournissant la même expression (16) du quadritravail élémentaire. Si maintenant, comme nous venons de le faire un peu plus haut, nous rejetons l'hypothèse intiale (2), la forme intégrale de la nouvelle loi de force diffère de (17') par un second membre núl; par conséquent, d'après l'hypothèse H et le postulat $\mathfrak{T}$ précédents, sa forme densitaire se confond avec (1), d'où l'on conclut toujours (4). Avec nos actuelles hypothèses, la loi (6_1) se trouve donc remplacée par la loi

$$\boxed{\partial_j(\rho_0 V^j) = -\frac{1}{c^2} V_i f^i,} \tag{21}$$

qui prévoit une variation de la masse propre au sein d'un fluide du

---

[1] La démonstration que nous venons de donner précise et clarifie celle que nous avions indiquée dans notre note [4].

[2] *Annales de Physique*, op. cit., p. 527-531.

fait du travail des forces volumiques; il se trouve que cette loi est précisément celle qui convient pour qu'il soit rendu compte, en électromagnétisme, de l'apparition de la chaleur de Joule. Par une généralisation tout indiquée, *nous admettrons que la formule* (21) *convient à tous les cas convenables où, au sein d'un fluide, se produit une création ou une annihilation d'énergie ou de masse; en particulier, elle devra s'appliquer aux régions de l'espace-temps où il existe des distributions volumiques de sources ou de puits au sens de l'hydrodynamique.* Suivant que le produit scalaire $V_i f^i$ est négatif ou positif, on a une création ou une annihilation de chaleur, d'énergie ou de masse. D'après tout ce qui précède, le fait d'admettre la formule (21) exige qu'on adopte aussi la formule (20), en vertu de laquelle la force finie est définie en général comme un tenseur asymétrique du second rang.

5. Introduction et théorie de la force superficielle dans le cas simple d'une pression. — Soit $ic\delta s^{kl}$ le dual de l'élément d'aire d'Univers $[dx^i dx^j]$, les trois $ic\delta s^{u4} = [dx^v dx^w]$ représentant l'aire au sens ordinaire; il est clair que la définition classique de la pression $\delta\vec{F} = -\varpi\delta\vec{s}$ admet la généralisation quadridimensionnelle

$$\boxed{\delta F^{ij} = -\varpi\,\delta s^{ij};} \tag{22}$$

par définition, et comme en théorie classique, nous dirons que le milieu considéré est *non visqueux* lorsque la force superficielle élémentaire δF^{ij} est essentiellement de la forme (22).

Soit alors $\mathfrak{S}$ le contour bidimentionnel d'un domaine tridimensionnel du genre espace $\mathcal{C}$ représentant une goutte fluide; intégrant l'expression (22) sur le contour $\mathfrak{S}$, et transformant en intégrale triple, il vient la formule

$$\iint_{\mathfrak{S}} \delta F^{ij} = \iiint_{\mathcal{C}} \partial^i\varpi\,\delta u^j - \partial^j\varpi\,\delta u^i, \tag{23}$$

qui, en un sens, permet de considérer le quadrivecteur

$$f^i = \partial^i\varpi \tag{24}$$

comme la densité volumique de la force élastique.

Les deux systèmes de forces δF^{ij} et f^i, bien qu'ayant la même somme, ne sont pas intégralement *équivalents* en ce sens que, lors de la déformation de la gouttelette δu^i, ils ne fournissent pas le même quadritravail élémentaire ([1]). En effet, prenons pour simplifier des temps propres $d\tau$ égaux sur toutes les trajectoires $\mathcal{L}$ issues de $\mathcal{C}$; le quadritravail des forces superficielles s'écrit

$$(25)\qquad d\tau\iint_{\mathcal{S}} V_j \delta F^{ij} = d\tau \iiint_{\mathcal{C}} V_j(f^i \delta u^j - f^j \delta u^i) + d\tau \iiint_{\mathcal{C}} \varpi(\partial^i V^j \delta u_j - \partial^j V_j \delta u^i);$$

la dernière intégrale représente la différence annoncée.

Soit toujours $\mathfrak{T}$ l'hyperparoi engendrée par le contour $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux états successifs de la même goutte $\mathcal{C}$; le premier membre de (26) est une autre expression, intégrée sur $d\tau$, de celui de (25), et une tranformation d'intégrales permet d'écrire

$$(26)\qquad -\iiint_{\mathfrak{T}} \varpi \delta u^i = -\frac{1}{ic}\iiiint \partial^i \varpi [dx_1 dx_2 dx_3 dx_4] + \iiint_{\mathcal{C}_2-\mathcal{C}_1} \varpi \delta u^i.$$

Dans le cas particulier ou les $\mathcal{L}$ admettent des trajectoires orthogonales $\mathcal{C}_0$, et où $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux des $\mathcal{C}_0$, c'est-à-dire dans « l'hypothèse H » précédemment formulée on a, en vertu de (18) et de (7),

$$(27)\qquad \delta u_0^i = -\frac{1}{c^2} V^i V^j \delta u_j;$$

dans (26), la dernière intégrale se transforme alors suivant

$$\iiint_{\mathcal{C}_1-\mathcal{C}_2} \varpi \delta u_0^i = -\frac{1}{ic^3}\iiiint \partial_j(\varpi V^i V^j)\,[dx_1 dx_2 dx_3 dx_4],$$

et l'on établit, suivant un raisonnement déjà fait, a formule densitaire

$$(28)\qquad \boxed{\partial^i \varpi + \partial_j\left\{\left(\rho_0 + \frac{\varpi}{c^2}\right) V^i V^j\right\} = 0;}$$

c'est là, d'après notre « postulat P », la formule fondamentale de la dynamique pour le cas où la force pondéromotrice est une pression;

([1]) Rappelons qu'en théorie classique de l'élasticité la circonstance énoncée n'avait lieu que pour le travail proprement dit.

le terme en $i\frac{\varpi}{c^2}$ est celui, dont la présence était escomptée, qui traduit une variation de la masse propre; on retrouve l'homogénéité, comme par la Physique classique, entre une densité d'énergie et une pression.

La relation (28) peut être mise sous la forme

$$\partial^i \varpi + V^i \partial_j \left\{ (\quad) V^j \right\} + (\quad) V'^i = 0;$$

multipliant par V_i et tenant compte de (3) et (5), il vient

$$\varpi' - c^2 \partial_j \left\{ (\quad) V^j \right\} = 0;$$

comme

$$\partial_j (\varpi V^j) = \varpi \partial_j V^j + \varpi'$$

la relation obtenue s'écrit enfin

$$\boxed{\partial_j (\rho_0 V^j) = -\frac{\varpi}{c^2} \partial_j V^j;} \tag{29}$$

telle est, lorsqu'on tient compte des forces de pression, la loi de compression adiabatique qui remplace (6_1). Si, par hypothèse, on continue d'appeler *incompressible* un fluide tel que $\rho_0 = \text{const.}$ dans tout l'espace-temps, l'on voit, en écartant l'hypothèse physiquement inintéressante $\varpi = -c^2 \rho_0 = \text{const.}$ dans tout l'espace-temps, qu'un tel fluide reste caractérisé par la formule (9).

Dans le cas que nous considérons maintenant, il n'y a plus conservation de la masse propre; on écrit en effet, en raisonnant comme à la fin du n° 1,

$$(m_0)_2 - (m_0)_1 = \frac{i}{c^3} \iiiint \varpi \, \partial_j V^j [dx_1 dx_2 dx_3 dx_4], \tag{30}$$

et par conséquent, d'après (19) et (8'),

$$(m_0)_2 - (m_0)_1 = -\frac{1}{c^2} \iiiint \varpi \, d\delta u_0; \tag{30'}$$

l'expression $\iiiint \varpi \, d\delta u_0$, analogue au $\int p \, dv$ classique, mérite le nom de ***travail scalaire de la pression;*** comme nous le voulions, la variation de la masse propre de la goutte $\mathcal{C}$ est directement mise en relation avec ce travail [1].

---

[1] Les raisonnements précédents développent et précisent ceux que nous avions indiqués aux *C. R. Acad. Sc.*, t. **222**, 1946, p. 477.

Si satisfaisants *a priori* que soient les résultats précédents, il est indiqué d'en éprouver la justesse sur un exemple. Nous avons récemment montré que si l'on introduit la notion de *quantité de chaleur propre* ou *scalaire*, analogue à celles de *masse propre* ou de *travail scalaire* que nous avons utilisées jusqu'à présent, la notion de température propre ou scalaire T_0 s'introduit d'elle même, et que l'équation d'état des gaz parfaits prend en relativité la forme (¹)

$$\boxed{\iiint_{\mathcal{C}} \frac{\varpi\,\delta u_0}{k T_0} = N;} \tag{31}$$

k désigne la constante de Boltzmann, et N le nombre, conservatif, des molécules contenues dans la goutte $\mathcal{C}$ (les N trajectoires d'Univers restent contenues dans l'hypertube $\mathfrak{T}$).

Du point de vue de la Théorie cinétique, la quadrivitesse V^i qui figure implicitement dans δu_0 n'a qu'une signification statistique; c'est celle de l'origine du repère galiléen par rapport auquel l'impulsion moyenne de δu_0 est nulle. Supposons, pour simplifier, toutes les molécules identiques; soit m_0 leur masse propre, m la valeur moyenne de leur masse relativiste $\frac{p^4}{ic}$ à la température T_0; supposons cette température assez élevée pour que les dégénérescences quantiques n'interviennent pas, et supposons enfin les molécules rigoureusement rigides. L'expression $c^2(m - m_0)$ représente l'énergie thermique moyenne d'une molécule; d'après la Théorie cinétique, elle est un multiple simple de la température KT_0 de la forme

$$\boxed{k T_0 = \frac{2}{3} \nu c^2 (m - m_0);} \tag{32}$$

suivant que le gaz est mono-, di- ou triatomique, on a $\nu = 1, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}$. Soit alors δu_0 le volume moléculaire moyen; on a, la troisième

---

(¹) *C. R. Acad. Sci.*, t. **222**, 1946, p. 590. *Voir* aussi sur cette définition d'une *température scalaire* et sur sa relation avec le quadrivecteur classique θ^i, ECKART, *Physical. Review.*, t. **58**, 1940, p. 922, et BERGMAN, *ibid*, t. **59**, 1941, p. 928; $1/T_0$ est la longueur du quadrivecteur θ^i.

relation étant fournie par l'équation d'état,

$$m = \rho_0 \delta u_0, \qquad m_0 = \rho_{00} \delta u_0, \qquad k T_0 = \varpi \delta u_0; \tag{33}$$

nous désignons par ρ_{00} la valeur que prendrait la densité du volume δu_0 au zéro absolu. Les formules (32) et (33) donnent

$$\boxed{\frac{\varpi}{c^2} = \frac{2}{3} \nu (\rho_0 - \rho_{00}),} \tag{34}$$

équation qui relie, indépendamment de la température et de la concentration moléculaire, l'équivalent massique de la densité d'énergie thermique du gaz à la pression ϖ.

Ici se place la vérification annoncée, à la fois de la théorie des forces superficielles qui vient s'achever avec la formule générale (29) des compressions adiabatiques, et de la théorie thermodynamique qui vient s'achever avec la formule (34) valable pour pour les gaz parfaits. *En portant* (34) *dans* (29), *nous devons retrouver la formule bien connue de la compression adiabatique des gaz parfaits.*

En vertu de l'équation d'état (31), la pression ϖ est nulle au zéro absolu; il résulte alors des considérations développées au numéro 1 que l'on a la relation

$$\partial_j (\rho_{00} V^j) = 0. \tag{35}$$

La formule obtenue en portant (34) dans (29) s'écrit alors

$$\frac{3}{2\nu} V^j \partial_j \varpi + \left(\frac{3}{2\nu} + 1\right) \varpi \partial_j V^j = 0,$$

ou encore, en posant

$$\boxed{\gamma = 1 + \frac{2}{3} \nu} \tag{36}$$

et tenant compte des formules (3) et (8'),

$$\frac{d\varpi}{\varpi} + \gamma \frac{d\delta u_0}{\delta u_0} = 0; \tag{37'}$$

c'est bien là la formule attendue, qui, une fois intégrée, s'écrit

$$\varpi (\delta u_0)^\gamma = \text{const.}; \tag{37}$$

suivant que le gaz est mono-, di- ou triatomique, on a $\gamma = \frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{4}{3}$.

Indiquons maintenant, comme autre application intéressante, comment notre formule (28) peut servir de fondement à toute la belle Théorie des tourbillons au sein des fluides non visqueux de MM. Eisenhart, Synge et Lichnerowicz; *celle-ci*, comme la théorie prérelativiste de Lagrange-Helmholtz qu'elle généralise, *sera ainsi fondée sur une authentique théorie superficielle de la pression* (1).

Soient F et G deux fonctions d'instant-point, provisoirement indéterminées, telles que

$$FG \equiv \mu, \quad \text{avec} \quad \boxed{\mu = \rho_0 + \frac{\varpi}{c^2};} \tag{38}$$

introduisons les deux quadrivecteurs colinéaires à V^i

$$\boxed{U^i = FV^i,} \qquad \boxed{W^i = GV^i,} \tag{39}$$

et posons enfin

$$\boxed{\partial_i W^i \equiv \sigma,} \qquad \boxed{\partial^j U^i - \partial^i U^j \equiv \theta^{ij};} \tag{40}$$

la relation (28) peut être mise sous la forme

$$-\partial^i \varpi = \partial_j (U^i W^j),$$

et développée suivant

$$-\partial^i \varpi = \sigma U^i + \theta^{ij} W_j + W_j \partial^i U^j;$$

compte tenu de (5), le dernier terme se transforme suivant

$$W_j \partial^i U^j = GV_j (V^j \partial^i F + F \partial^i V^j) = -c^2 G \partial^i F = -c^2 \mu \frac{\partial^i F}{F}.$$

L'idée toute naturelle est alors de faire en sorte que ce terme détruise identiquement le premier membre; il faut d'abord postuler pour cela

---

(1) Pour l'exposé de la théorie et les références bibliographiques, *voir* les articles de M. A. Lichnerowicz, *Bull. Sc. Math.* t. 65, 1941, p. 54, et *Ann. École Normale,* t. 58, 1941, 4, p. 285.

Nous avons indiqué, aux *C. R. Acad. Sci.*, t. 222, 1946, p. 1472, que l'équation fondamentale de cette théorie des tourbillons coïncide, en Relativité restreinte, avec la formule (28) de notre texte.

que le fluide satisfait à une équation d'état du type isotherme

$$\boxed{\rho_0 = \rho_0(\varpi),} \tag{41}$$

et poser ensuite, avec Synge, la relation

$$\boxed{F = e^{\int_{\varpi_0}^{\varpi} \frac{d\varpi}{c^2\mu}},} \quad \text{d'où} \quad \boxed{G = e^{\int_{\varpi_0}^{\varpi} \frac{d\rho_0}{\mu}}.} \tag{42}$$

Avec ces hypothèses, l'équation fondamentale devient

$$\sigma U^i + \theta^{ij} W_j = 0, \tag{43}$$

et comme les deux quadrivecteurs ainsi mis en évidence sont orthogonaux entre eux, on conclut de là les deux relations

$$\boxed{\partial_i W^i = 0,} \qquad \boxed{(\partial^j U^i - \partial^i U^j)\, dx_j = 0;} \tag{44}$$

la seconde peut être prise comme point de départ de toute la Théorie des tourbillons des auteurs précités, et nous pensons qu'il n'est pas sans intérêt de lui associer, en toute généralité, la première.

Il résulte de la Théorie des tourbillons, étendue à la Relativité, qu'on peut considérer un écoulement de fluide non visqueux irrotationnel en général, sauf à l'intérieur de certains tubes de courant d'Univers où θ^{ij} n'est pas nul; d'ailleurs, les sections de ces hypertubes tourbillonnaires par des variétés tridimensionnelles du genre espace se referment sur elles-mêmes, ou s'étendent jusqu'à l'infini (ou jusqu'à des parois du genre temps canalisant l'écoulement fluide d'Univers). Par analogie, et suivant toujours le schéma prérelativiste bien connu, nous voulons prendre en considération le cas où il existe, à l'intérieur de certaines régions de l'espace-temps, des distributions volumiques de sources ou de puits; il résulte clairement de la formule (44_1) que ce cas n'est pas prévu jusqu'ici par la présente théorie; mais il est facile de remédier à cette lacune en tenant compte de ce qui a été dit à la fin du n° **2**. Il suffit de compléter le premier membre de la formule de départ (28) par un terme f^i, non orthogonal à V^i dans ces régions, et que nous devrons même supposer essentiellement colinéaire à V^i si notre seul but est de tenir compte de la présence de sources ou de puits; moyennant cela, dans les régions telles que $V_{i,}f^i \neq 0$, la formule (44_1) aura un second membre σ, et la formule (44_2) subsistera.

Nous allons, grâce à ces remarques, donner une forme tout à fait satisfaisante à la théorie que nous avions proposée dans une Note aux *Comptes Rendus* (¹), et dont l'objet était d'étendre à la Relativité la théorie bien connue des potentiels scalaire et vecteur de l'hydrodynamique, ainsi que la notion de potentiel des tourbillons de Poincaré. Postulons pour cela qu'on a identiquement

$$\boxed{F = G = +\sqrt{\mu},} \tag{45}$$

ce qui entraîne, le long des lignes de courant $\mathcal{L}$, la relation

$$\boxed{c^2 \rho_0 = \varpi + \text{const.};} \tag{46}$$

cette dernière hypothèse n'est autre que celle formulée par M. Lichnerowicz sous le nom de « définition B » du fluide incompressible, définition grâce à laquelle la célérité des ébranlements de pression vaut c (²).

Le fluide parfait conforme à la « définition B » de M. Lichnerowicz satisfait donc aux deux relations

$$\boxed{\partial_i U^i = \sigma,} \quad . \quad \boxed{\partial^j U^i - \partial^i U^j = \theta^{ij},} \tag{47}$$

les fonctions σ et θ^{ij} étant supposées non nulles seulement dans certains domaines de l'espace-temps; le tenseur de tourbillon θ^{ij} satisfait identiquement à la relation

$$\sum \partial^i \theta^{jk} = 0, \tag{48}$$

dans laquelle la sommation s'entend par permutation circulaire. Cherchons alors à faire dériver le champ U^i de deux potentiels d'Univers, l'un scalaire P, l'autre tenseur antisymétrique R^{jk} satis-

(¹) *C. R. Acad. Sci.*, t. **222**, 1946, p. 369.

(²) A. Lichnerowicz, *C. R. Acad. Sci.*, t. **219**, 1944, p. 270.

faisant identiquement à

$$\boxed{\sum \partial^i R^{jk} = 0,} \tag{49}$$

suivant

$$\boxed{U^i = \partial^i P + \partial_j R^{ij};} \tag{50}$$

portant (50) dans les (47), et tenant compte de l'hypothèse essentielle (49), il vient les formules de génération des potentiels

$$\boxed{\partial_i^i P = \sigma,} \qquad \boxed{\partial_i^i R^{jk} = 0^{jk},} \tag{51}$$

qui généralisent visiblement les formules prérelativistes bien connues. Appliquant aux trois termes de (50) l'opérateur dalembertien ∂_i^i, et tenant compte des (51), il vient

$$\boxed{\partial_i^i U^k = \partial^k \sigma + \partial_l 0^{kl}.} \tag{52}$$

Les relations (51) et (52) admettent des solutions du type *retardé* bien connu de Kirchhoff-Lorentz.

On peut, à nouveau, faire dériver P et R^{ij} d'un quadrivecteur A^i, qui sera la généralisation relativiste du potentiel des tourbillons de Poincaré. La condition essentielle (49) montre que R^{ij} est un rotationnel, défini à un quadrigradient près; en résolvant l'équation

$$\partial_i^i Y_0 = P - \partial_i A_0^i,$$

on fera en sorte d'avoir à la fois

$$\boxed{P = \partial_i A^i,} \qquad \boxed{R^{ij} = \partial^j A^i - \partial^i A^j;} \tag{53}$$

enfin, de (53) et (50) on conclut

$$\boxed{\partial_i^i A^k = U^k.} \tag{54}$$

Ces derniers résultats généralisent en Relativité ceux, bien connus, de Poincaré [1].

---

[1] En l'absence de sources ou de puits, il résulte bien de (53_1) que la quadridivergence du potentiel de Poincaré généralisé est nulle.

4. Sur les fondements de la théorie générale des forces superficielles. — Lorsqu'on cherche à développer la théorie des forces superficielles dans le cas d'un tenseur élastique E^{ij} quelconque, on se heurte à de sérieuses difficultés si l'on conserve l'hypothèse suivant laquelle le tenseur du second rang δF^{ij} serait antisymétrique. L'extension relativiste de la formule bien connue

$$\delta F^{u} = E^{uv} \delta s_v$$

serait alors en effet

$$\delta F^{ij} = E^{jk} \delta s^{i}_{.k} - E^{ik} \delta s^{j}_{.k};$$

pour le quadritravail élémentaire, δu^{*}_{k} désignant l'élément trilinéaire d'hyperparoi $\delta s^{kl}\, dx_l$, on aurait l'expression

$$d\delta p^{i} \equiv \delta F^{ij}\, dx_j = E^{ik} \delta u^{*}_{k} + E^{jk} \delta s^{i}_{.k}\, dx_j.$$

Lorsqu'on cherche à étendre, en partant de cette formule, les raisonnements et les formules du numèro précédent, la présence du second groupe de termes du second membre entraîne de nombreuses difficultés de calcul et d'interprétation; d'ailleurs, cette même présence entraîne que la valeur de l'expression $d\delta p^{i}$ ne serait pas indé- indépendante de l'orientation d'Univers des δs^{ij} initiale et finale, ce qui semble assez contraire aux circonstances qui se présentent dans les théories relativistes usuelles.

Nous allons donc amorcer le développement de notre théorie en postulant que, dans le cas élastique général, le tenseur δF^{ij} n'est pas antisymétrique [1], et en posant simplement

$$(55) \qquad \boxed{\delta F^{ij} = E^{ik} \delta s^{*j}_{k},} \qquad \boxed{\delta F^{ij}\, dx_j = E^{ik} \delta u^{*}_{k};}$$

pour $E^{ik} = -\varpi \delta^{ik}$, on retombe sur les formules (22) et (26) précédentes. Il serait facile d'écrire l'extension du cas présent de la formule (23), de celle, analogue, relative aux moments [2], et de

[1] Avec un tenseur F^{ij} non antisymétrique, la formule (13) n'est plus conséquence de (12); un tel tenseur pourrait donc être utilisé dans la théorie du point matériel doué de spin [voir notre *Thèse* (*Journ. de Math.*, t. XXII, fasc. 2, 1943, p. 135)].

[2] *Voir* notre Note aux *C. R. Acad. Sci.*, t. **222**, 1946, p. 477.

la formule (25); nous nous contenterons d'établir l'extension de la formule (28), et de celle, analogue, relative aux moments, qui sont physiquement plus intéressantes.

Partant de la formule (55_2); on écrit la formule, analogue à (26),

$$\iiint_{\mathcal{C}} E^{ik}\delta u_k = \frac{1}{ic}\iiiint \partial_k E^{ik}[dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4] - \iiint_{\mathcal{C}_2-\mathcal{C}_1} E^{ik}\delta u_k;$$

dans « l'hypothèse H » formulée au n° 2, la dernière intégrale s'écrit

$$+\frac{1}{ic^3}\iiiint \partial_l E^{i}_{.k} V^k V^l [dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4].$$

Par ailleurs, un « spin » pondéromoteur étant implicitement contenu dans l'asymétrie éventuelle du tenseur E^{ij}, nous postulerons aussi l'existence d'un spin dynamique, et admettrons pour le tenseur inertique l'une ou l'autre des écritures équivalentes

$$\rho_0 V^i V^j = \rho^{i}_{.k} V^k V^j,$$

avec (1)

$$V^i V_i = -c^2 \qquad \text{ou} \qquad \rho^{ij} V_i V_j = -\rho_0 c^2;$$

nous concluerons de là, en vertu du « postulat P », que la formule cherchée s'écrit

$$\boxed{\partial_k E^{ik} = \partial_l\left\{\left(\rho^{i}_{.k} - \frac{1}{c^2}E^{i}_{.k}\right)V^k V^l\right\}.} \tag{56}$$

Passons à l'étude des moments. Reprenant la formule (12) relative au point matériel, on écrit

$$x^i dp^j - x^j dp^i = (x^i F^{jk} - x^j F^{ik})\, dx_k, \tag{57}$$

ce qui nous amène à définir le *moment pondéromoteur orbital d'Univers* comme étant le tenseur, antisymétrique en i, j,

$$M^{ijk} = x^i F^{jk} - x^j F^{ik}. \tag{58}$$

D'après (55_2), l'expression du travail d'Univers du moment des

(1) *Journ. de Math., op. cit.*, p. 133 et suiv.; *C. R. Acad. Sci.*, t. 218, 1944, p. 31.

forces superficielles est alors

$$\iiint_{\mathfrak{T}} (x^i E^{jk} - x^j E^{ik})\, \delta u_k = \frac{1}{ic} \iiiint \partial_k(^{ijk})\, |dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4| - \iiint_{\mathcal{C}_2 - \mathcal{C}_1} (^{ijk})\, \delta u_k;$$

dans « l'hypothèse H », la dernière intégrale s'écrit

$$+ \frac{1}{ic^3} \iiiint \partial_l \{(^{ijk})\, V_k V^l\}\, |dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4|.$$

Au premier membre, on aura de même l'expression

$$\frac{1}{ic} \iiiint \partial_l \{(x^i \rho^{jk} - x^j \rho^{ik})\, V_k V^l\}\, |dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4|.$$

Dans l'équation reliant entre elle les trois intégrales quadruples, il y aura deux groupes de termes : l'un, de la forme $x^i \partial_l \ldots$ ou $x^j \partial_l \ldots$ fournira l'équation en moments conséquence de (56); l'autre, dans lequel les dérivées partielles seront prises sur les x, fournira la relation nouvelle entre les densités de moments propres

$$\boxed{E^{ji} - E^{ij} = \left\{\left(\rho^{jk} - \frac{1}{c^2} E^{jk}\right) V^i - \left(\rho^{ik} - \frac{1}{c^2} E^{ik}\right) V^j\right\} V_k;} \tag{59}$$

en vertu du « postulat P », on attribuera à cette relation une validité générale.