JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BERNARD ORGEVAL (D')

Les variétés à trois dimensions de genres 1, dont les sections hyperplanes sont surfaces canoniques d'ordre minimum

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 25 (1946), p. 173-178.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1946_9_25__173_0>

Les Variétés à trois dimensions de genres 1, dont les sections hyperplanes sont surfaces canoniques d'ordre minimum;

Par Bernard d'ORGEVAL.

M. Castelnuovo [1] a montré que si le système canonique d'une surface algébrique est irréductible et simple, le genre superficiel p_a ne peut surpasser la valeur $\frac{p^{(1)}+6}{3}$, $p^{(1)}$ étant le genre linéaire. Il en résulte que si $p=p_a=p_g$ est donné (pour une surface régulière), la valeur minima de $p^{(1)}$, et par conséquent celle de l'ordre de la surface canonique représentative, est $3p-6$. M. Castelnuovo a, de plus, montré que si $p>5$, une surface F, de genre p, et de genre linéaire $p^{(1)}=3p-6$, est donnée par l'intersection d'une variété simplement infinie de plans, V^3_{p-3}, d'ordre $p-3$ et de dimension 3 de l'espace S^{p-1} par une variété V_4^{p-2} du 4^e ordre, à $p-2$ dimensions, passant par $(p-5)$ plans de la V^3_{p-3}. Il a encore démontré que les F_{3p-7} ainsi définies étaient, si $p>7$, les seules surfaces jouissant de cette propriété. Pour les valeurs de p, inférieures à 7, il faut ajouter la F_6 de S^3 $(p=4)$, l'intersection d'une quadrique de S^4 par une variété du 4^e ordre de cet espace $(p=5)$, enfin l'intersection dans S^6 d'une V_4^3 par une V_4^5, ayant en commun un cône quadrique $(p=6)$.

Une généralisation immmédiate va nous donner les variétés à trois dimensions dont tous les genres sont 1, et dont les sections

(1) *Cf.* G. Castelnuovo, *Osservazioni intorno alla gemetria sopra una superficie*, nota II (*R. C. R. Istituto Lombardo*, série II, vol. XXIV, 1891).

hyperplanes sont des surfaces canoniques d'ordre minimum (l'intersection de deux telles sections étant une courbe irréductible). Les variétés considérées seront les intersections d'une variété à quatre dimensions V^4_{p-3}, d'ordre $p-3$, contenant un système ∞^1 de S^3 (cette variété appartenant à S^p), par une V^{p-1}_4 de S^p, d'ordre 4, à $p-1$ dimensions, contenant $(p-5)$ S^3 de la V^4_{p-3}. De telles variétés ont bien les genres égaux à 1. Projetons, en effet, de $(p-4)$ points sur un S^4. On obtient une variété d'ordre $2p-3$ sur laquelle les S^3 du système ∞^1 vont découper des surfaces du 4ᵉ ordre. Mais ce système ∞^1 de S^3 doit se représenter par un faisceau. La variété Σ_{2p-3} possède un plan multiple d'ordre $2p-7$; soit Π ce plan. Parmi les S^3 de notre V^4_{p-3}, il y en a $p-4$ qui passent par les $p-4$ points de projection; les surfaces du 4ᵉ ordre qui y sont contenues doivent se projeter sur une surface du 3ᵉ ordre dont tous les genres sont 1, c'est-à-dire selon un plan triple. En conséquence la variété Σ_{2p-3} possède un plan Π, d'ordre $2p-7$, et $(p-4)$ plans ϖ_i triples; ces plans ϖ_i sont avec Π dans un même S^3, donc le coupent selon des droites.

Notre variété se projette donc dans S^4, selon une Σ_{2p-3} dotée d'un plan Π, $(2p-7)-ph$ auquel sont incidents selon des droites $(p-4)$ plans triples. Le système canonique de la Σ_{2p-3} va être découpé par les variétés Φ, d'ordre $2p-8$, passant $2p-8$ fois par Π et 2 fois par chaque ϖ_i. Les variétés se réduisent aux $p-4$ S^3 (Π, ϖ_i), chacun compté deux fois. Le système canonique se réduit donc aux $p-4$ plans exceptionnels, images des $p-4$ points de projection; une telle variété a donc bien ses genres égaux à l'unité, les systèmes plans canoniques se ramènent aussi à ces plans.

Si donc $p > 7$, les variétés dont tous les genres sont 1 du type étudié, possèdent toujours un système ∞^1 de surfaces du 4ᵉ ordre de genres 1, F_4. Considérons alors une section de notre variété passant par une F_4, c'est-à-dire la section par un S^{p-1}, passant par un des S^3 de la V^4_{p-3}. Les S^{p-1} sont ∞^{p-4}, puisque passer par un S^3, c'est en contenir 4 points. La variété ayant tous ses genres égaux à 1, il en résulte que les sections résiduelles Φ ont les genres $p_a = p_g = p-4 = \varpi$. Cette Φ résiduelle coupe la F_4 selon une courbe de genre x, telle que

$$x+1+p-4=p; \qquad x=3.$$

Or sur la F_4 générale, les courbes de genre 3 sont les sections planes; il en résulte que F_4 et Φ se coupent selon une section plane de la F_4.

Cherchons maintemant le genre linéaire d'une surface Φ, c'est-à-dire le genre d'une courbe (Φ, Φ), puisque sur une variété dont tous les genres sont 1, les surfaces d'un système linéaire découpent sur l'une d'elles le système canonique.

Soit F une section hyperplane quelconque. Parmi les F, il existe une surface $F = F_4 + \Phi$; on a donc

$$\text{genre}(F, F) = \text{genre}(F, F_4 + \Phi),$$

d'où

$$\Pi_{(F, \Phi)} + \Pi_{(F, F_4)} + i - 1 = 3p - 6,$$

i désignant le nombre des points d'intersection d'une (F, Φ) avec une (F, F_4), c'est-à-dire d'une F, avec une section plane de F_4, donc $i = 4$. On a donc

$$\Pi_{(F, \Phi)} + 3 + 4 - 1 = 3p - 6,$$
$$\Pi_{(F, \Phi)} = 3p - 12.$$

Mais on a encore

$$(\Phi, \Phi) = (\Phi, F) - (\Phi, F_4),$$

d'où

$$\Pi_{(\Phi, \Phi)} + \Pi_{(\Phi, F_4)} + j - 1 = 3p - 12,$$

j désignant le nombre des intersections de (Φ, Φ) et (Φ, F_4), c'est-à-dire de deux sections planes de F_4, donc

$$j = 4,$$
$$\Pi_{(\Phi, \Phi)} + 3 + 4 - 1 = 3p - 12,$$
$$\Pi_{(\Phi, \Phi)} = 3p - 18 - 3(p - 4) - 6,$$
$$\Pi_{(\Phi, \Phi)} = 3\varpi - 6.$$

Le système des surfaces Φ possède encore l'ordre minimum compatible avec le genre des surfaces Φ. Si donc on rapporte les S^{p-1} de S^p, passant par une des F_4 considérées aux hyperplans de S^{p-4}, notre variété dont tous les genres sont 1, se ramène par une transformation birationnelle à une variété de S^{p-4}, de même type. Les F_4 de la V_{3p-7} de S^p se transforment en surfaces dont tous les genres sont 1, rencontrées en quatre points par les sections hyperplanes, c'est-à-dire encore en un système linéaire de F_4.

On peut donc poursuivre le procédé, si $p > 7$, et ainsi en l'appliquant *n* fois se ramener à à une variété pour laquelle

$$p = 4, 5, 6, 7,$$

ces variétés possédant un faisceau de surfaces générales du 4^e ordre.

En conséquence, les variétés dont tous les genres sont 1, qui ont pour sections hyperplanes des surfaces canoniques, à système canonique irréductible d'ordre minimum $p^{(1)} = 3p - 6$, peuvent, si $p > 7$, se ramener à quatre types de variétés dotées d'un faisceau de surfaces du 4^e ordre.

a. $p = 4$. — Variété générale du 5^e ordre de S^4 dotée d'un faisceau de surfaces du 4^e ordre.

b. $p = 5$. — Intersection d'une hyperquadrique de S^5, par une variété du 4^e ordre, cette variété étant dotée d'un faisceau de surfaces du 4^e ordre.

c. $p = 6$. — Variété du type général considéré.

d. $p = 7$. — Variété du type général considéré.

Nous retrouverons ainsi les généralisations des surfaces de Castelnuovo, sauf le 2^e type de surfaces $p = 7$. Il existe évidemment un type de variétés, intersections dans S^7, d'une V_4^4 par une V_4^6 ayant en commun un cône de 2^e espèce à trois dimensions (cône ayant une droite-sommet). Une telle variété ayant ses sections hyperplanes canoniques est bien de genre 1. Mais une telle variété ne peut contenir un faisceau de surfaces du 4^e ordre. Une telle surface appartient, en effet, à la section d'un S^3, par une variété du 4^e ordre. Si la variété considérée en contenait, l'une des V_4 (V_4^4 ou V_4^6) contiendrait un système ∞^1 de S^i ($i = 3$ ou 5) et serait en conséquence rationnelle, possédant une variété multiple. L'intersection par l'autre V_4 contiendrait une partie multiple, imposant des conditions de passage au système canonique de la V_{14}, qui ne saurait plus être de genre 1.

Remarquons au contraire que l'autre variété de S^7 peut se ramener à $p = 3$, et par conséquent à un cas particulier du S^3 double avec une surface de diramation du 8^e ordre, dont les sections sont des droites doubles avec 8 points de diramation, donc de genre

$$2p^{(1)} - 2 = -4 + 8,$$
$$p^{(1)} = 3 = 3 \times 3 - 6,$$

selon la formule de Zeuthen.

En définitive :

THÉORÈME. — *Les variétés les plus générales dont tous les genres sont* 1, *appartenant à un* S^p, *telles que les sections hyperplanes soient des surfaces canoniques, à système canonique irréductible, d'ordre minimum, se ramènent par des transformations birationnelles aux cinq types suivants :*

1° Le S^3 double avec surface de diramation du 8^e ordre. Au cas particulier de ce S^3 doté d'un faisceau de plans doubles équivalents à des F_4, générales, se ramènent les variétés avec

$$p = 3 + 4n.$$

2° La variété générale du 5^e ordre de S^4. Au cas particulier de la V_5^3 dotée d'un faisceau de F_4 générales, se ramènent les variétés avec

$$p = 4 + 4n.$$

3° La variété V_8^3 de S^5 section d'une hyperquadrique par une V_4 de S^5. Au cas particulier des quadriques possédant des S^3 se ramènent les variétés avec

$$p = 5 + 4n.$$

4° La variété V_{11}^3 de S^6, intersection d'une variété V_3^4 contenant $\infty^1 S^3$, par une V_4^5 passant par un espace S^3 de la V_3^4. A cette variété se ramènent les variétés avec

$$p = 6 + 4n.$$

5° La variété V_{14}^3 de S^7, intersection d'une V_3^4 par une V_4^6 de S^7, ayant en commun un cône quadrique, à 3 dimensions. A ce type, ne s'en ramène aucun autre.

Remarque. — Il est à noter que par l'imposition d'un point triple à la V_{3p-7} de S^p, on obtient, par projection, la $V_{3(p-1)-7}$ analogue de S^{p-1}. Vérifions-le, sur une section hyperplane, surface F_{3p-7}, dotée d'un point triple T. Projetons de T et de $(p-5)$ autres points sur S^3. On obtient une F_{2p-5}. Celle-ci possède une droite d'ordre $2p-9$, et $p-5$ droites triples. Le plan passant par le point triple fait naître une droite et une cubique image du point triple. Donc les seules singularités de la F_{2p-5} sont une droite d'ordre $2p-9=2(p-1)-7$ et $p-5=(p-1)-4$ droites triples. Ce sont les caractères de la projection de la F_{3p-16} de S^{p-1} à partir de $p-5$ de ses points.