JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

BERTRAND GAMBIER

Sur les couples de surfaces applicables avec conservation des courbures principales. Systèmes cycliques

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 23 (1944), p. 249-304.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1944_9_23__249_0>

Sur les couples de surfaces applicables avec conservation des courbures principales. Systèmes cycliques;

PAR BERTRAND **GAMBIER**.

1. INTRODUCTION. — C'est Ossian Bonnet qui a eu l'idée d'étudier les couples de surfaces applicables tels qu'aux points homologues les rayons de courbure soient respectivement égaux d'une surface à l'autre; pour abréger, appelons *déformation* O. B. ce genre de déformation.

J'ai obtenu, dès 1922, un certain nombre de résultats intéressants sur ce problème et en ai donné une partie dans une Note des *C. R.* de Paris (t. 174, 19 juin 1922, p. 1613). M. Élie Cartan a publié au *Bulletin des Sciences Mathématiques* (2ᵉ Série, t. LXVI, mai-août 1942) un article de 30 pages où, par la méthode du trièdre mobile et les propriétés des systèmes en involution, il retrouve les propriétés signalées par Ossian Bonnet et les géomètres qui avaient repris la question; mais M. É. Cartan réalise un grand progrès dans le champ réel. J'indique la liste des divers travaux parus :

O. BONNET, *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables* (*J. Éc. Polyt.*, 42, 1867, p. 72-92).

L. RAFFY, *Sur certaines surfaces W* (*Bull. Soc. Math. France*, 19, 1890-1891, p. 158-169).

L. RAFFY, *Sur une classe nouvelle de surfaces isothermiques et sur les surfaces déformables sans altération des courbures principales* (*Bull. Soc. Math. France*, 21, 1893, p. 70-72).

J. N. HAZZIDAKIS, *Biegung mit Erhaltung der Hauptkrümmungsradien* (*J. Crelle*, 117, 1897, p. 42-56).

R. SERVANT, *Sur les formules de Gauss* (*Bull. Soc. Math. France*, 29, 1901, p. 142-145).

W. C. GRAUSTEIN, *Applicability with preservation of both curvature* (*Bull. American Math. Soc.*, 1924, p. 19-27).

W. C. GRAUSTEIN, *Duke Math. Journal*, 2, 1936, p. 177-191).

Dans le domaine réel, M. Cartan a montré le premier que, *pour un couple isolé, la solution générale dépend de quatre fonctions d'une variable et qu'il y a* *une infinité de solutions réelles; les lignes caractéristiques du problème de Cauchy sont les lignes minima des deux surfaces et les lignes qui ont la même courbure normale. Dans le cas de déformation continue à un paramètre, il y a une infinité de surfaces réelles.* M. Cartan donne quelques propriétés des *trois classes* à déformation continue qui se présentent, et que Hazzidakis s'était borné à signaler par leurs formes fondamentales, sans se préoccuper de la réalité : en particulier, *la seconde classe ne comprend que des surfaces imaginaires.*

Dans ma Note de 1922, que M. Cartan ignorait, j'avais, pour la première fois, signalé ce dernier résultat. J'avais montré que, *sauf le cas des surfaces minima, on n'a jamais de déformation avec réseau conjugué permanent, ni même de réseau cinématiquement conjugué permanent.* D'autre part, j'avais signalé que l'on peut profiter de surfaces imaginaires obtenues dans les diverses classes pour obtenir des *systèmes cycliques réels, ainsi que des systèmes triples orthogonaux réels;* il arrive même ici que l'on puisse obtenir des exemples *algébriques.* J'avais montré aussi que, pour les sufaces de la troisième classe, *les* ∞^1 *surfaces se déformant au sens* O. B. *les unes en les autres ne sont qu'une seule et unique surface auto-déformable, complétée par une surface exceptionnelle (révolutive ou hélicoïdale) qui peut être considérée comme une autodéformée à la limite de la surface unique trouvée.*

Je vais ici tâcher de faire une synthèse de tous les résultats jusqu'ici connus; je suivrai la même méthode que J. N. Hazzidakis (qui se borne à amorcer les diverses questions sans aller jusqu'au bout et ne donne pas l'origine des découvertes qu'il a faites).

Le paragraphe **2** donne la mise en équation du problème et traite du cas de déformation non continue.

Le paragraphe **3** indique comment le cas de déformation continue à un paramètre se décompose en trois classes; à propos de la première classe, composée de surfaces minima ou à courbure moyenne constante, j'indique des exemples particulièrement simples de systèmes cycliques ou triples orthogonaux, dont certains sont algébriques.

Le paragraphe **4** montre pourquoi, si la courbure moyenne de la surface est variable, nous trouvons deux autres classes de surfaces à déformation O. B. continue, qui sont la deuxième ou troisième classe annoncées.

Le paragraphe **5** montre que la seconde classe ne comprend que des surfaces imaginaires; elle comprend des surfaces W (qui lui sont communes avec la troisième classe). Ce paragraphe se termine par deux exemples de systèmes cycliques algébriques ou triples orthogonaux dont le second est aussi algébrique.

Le paragraphe **6** montre que la troisième classe comprend deux types distincts, étudiés respectivement aux paragraphes **7**, **8** au point de vue de leur autodéformation et de la représentation plane de leurs lignes de courbure quand ces surfaces sont réelles.

Le paragraphe **9** est consacré à la recherche des équations en termes finis des surfaces, hélicoïdales pour la troisième classe premier type, ou révolutives pour la troisième classe second type qui sont les autodéformées à la limite des surfaces de la troisième classe et ces surfaces spéciales hélicoïdales ou révolutives sont étudiées en détail aux paragraphes **10**, **11**, **12**. Dans la recherche des surfaces *à déformation* O. B. *continue* s'indroduit une *équation différentielle ordinaire d'ordre* 3 dont Hazzidakis a donné, sans explication, une intégrale première du second ordre : la recherche des surfaces hélicoïdales ou révolutives conduit, d'une façon naturelle, *à trouver cette intégrale première*.

Ce sont les paramètres des lignes minima de la surface qui donnent les calculs les plus simples (mais néanmoins assez compliqués comme nous le verrons). M. Cartan emploie, au contraire, des coordonnées paramétriques réelles qui, suivant la remarque faite par lui-même, rachètent le désavantage de la longueur plus grande des calculs par l'avantage de ne faire intervenir que des quantités ayant une signification intrinsèque.

En raison des circonstances curieuses, que j'ai signalées le premier en 1922, et que M. Cartan a retrouvées en 1942, sur l'autodéformation de certaines surfaces, j'ajoute une note complémentaire pour montrer la généralité de ce phénomène.

2. Mise en équation du problème. — L'élément linéaire de la surface est pris sous la forme

$$ds^2 = 2F\,dp\,dq. \tag{1}$$

J'appelle D, D′, D″ les coefficients *primitifs* de Gauss [on se rappellera que la plupart des géomètres modernes adoptent une autre notation et désignent par D, D′, D″ le quotient par $\sqrt{EG - F^2}$ (qui ici est iF) des coefficients usités par Gauss]. On a donc

$$D = \left| \frac{\partial x}{\partial p}\ \frac{\partial x}{\partial q}\ \frac{\partial^2 x}{\partial p^2} \right|, \qquad D' = \left| \frac{\partial x}{\partial p}\ \frac{\partial x}{\partial q}\ \frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q} \right|, \qquad D'' = \left| \frac{\partial x}{\partial p}\ \frac{\partial x}{\partial q}\ \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} \right|,$$

et nous nous rappellerons que l'échange de p avec q remplace D, D′, D″ par $-$D″, $-$D′, $-$D.

Nous posons, avec Hazzidakis et M. Servant,

$$D = \delta F^2 = \Delta F \qquad D' = \delta' F^2 \qquad D'' = \delta'' F^2 = \Delta'' F, \tag{2}$$

de sorte que la seconde forme fondamentale de la surface est

$$i(\Delta\,dp^2 + 2\,\delta' F\,dp\,dq + \Delta''\,dq^2).$$

Les relations de Gauss-Codazzi sont

$$F\frac{\partial \delta'}{\partial p} = \frac{\partial \Delta}{\partial q}, \qquad F\frac{\partial \delta'}{\partial q} = \frac{\partial \Delta''}{\partial p}, \qquad \frac{\Delta\Delta''}{F^2} - \delta'^2 + \frac{1}{F}\frac{\partial^2 \log F}{\partial p\,\partial q} = 0. \tag{3}$$

La courbure d'une section normale est donnée par

$$(4)\qquad \frac{i}{R} = \frac{\delta\, dp^2 + 2\delta'\, dp\, dq + \delta''\, dq^2}{2\, dp\, dq}.$$

Les courbures principales se calculent par les équations

$$(5)\qquad \frac{1}{RR'} = \delta\delta'' - \delta'^2, \qquad \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = -2i\delta', \qquad \delta\delta'' = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)^2.$$

Les lignes de courbure ont pour équation

$$(6)\qquad \delta\, dp^2 - \delta''\, dq^2 = 0.$$

Si deux surfaces S, S_1 ont même ds^2 et mêmes courbures principales, on voit que F, δ', $\delta\delta''$ ont les mêmes valeurs aux points homologues; en comparant Δ, Δ'' sur S et Δ_1, Δ''_1 sur S_1, on a aussitôt, pour remplacer le système (3) relatif à S, les équations

$$(7)\qquad \Delta_1 = \Delta - \frac{1}{P}, \qquad \Delta''_1 = \Delta'' - \frac{1}{Q}, \qquad \Delta P + \Delta'' Q - 1 = 0,$$

où P, Q sont des fonctions respectives de p seul ou q seul; donc, *pour que S soit déformable O. B., il est nécessaire et suffisant que l'on puisse trouver deux fonctions* P *de* p, Q *de* q, *telles que* $\Delta P + \Delta'' Q - 1 = 0$.

Si l'on pose $p = f(\bar{p})$, $q = \varphi(\bar{q})$; on a

$$\bar{\Delta} = \left(\frac{dp}{d\bar{p}}\right)^2 \Delta, \qquad \bar{\Delta}'' = \left(\frac{dq}{d\bar{q}}\right)^2 \Delta''; \qquad \bar{\delta}' = \delta',$$

de sorte que, si l'on prend $\left(\frac{dp}{d\bar{p}}\right)^2 = P$, $\left(\frac{dq}{d\bar{q}}\right)^2 = -Q$, on a

$$(8)\qquad \bar{\Delta}_1 = \bar{\Delta} - 1, \qquad \bar{\Delta}''_1 = \bar{\Delta}'' + 1, \qquad \bar{\Delta} - \bar{\Delta}'' = 1.$$

Ces notations ont été choisies parce que, pour une surface réelle, aux points réels on peut prendre p, q imaginaires conjuguées, ainsi que Δ et $-\Delta''$. Adoptons les nouvelles variables $\bar{p}$, $\bar{q}$, puis supprimons le surlignage : autrement dit, nous réduisons P à $+1$, Q à -1. Nous écrivons, *pour un couple* (qu'il y ait ou non déformation continue)

$$(9)\qquad \boxed{\left\{\begin{array}{llll} \Delta = \frac{1}{2} + \lambda i, & \Delta'' = -\frac{1}{2} + \lambda i, & \Delta_1 = \Delta'', & \Delta''_1 = \Delta, \\ F\frac{\partial\delta'}{\partial p} = i\frac{\partial\lambda}{\partial q}, & F\frac{\partial\delta'}{\partial q} = i\frac{\partial\lambda}{\partial p}, & \multicolumn{2}{l}{\frac{1}{F}\frac{\partial^2 \log F}{\partial p\, \partial q} = \left(\frac{1}{4} + \lambda^2\right)\frac{1}{F^2} + \delta'^2.} \end{array}\right.}$$

Les variables λ, $\frac{\delta'}{i}$, F, si les surfaces sont réelles, doivent prendre des valeurs *réelles* quand p, q sont *imaginaires conjuguées*, F devant de plus être *positive*.

Les trois équations de la seconde ligne (9) sont un système de trois équations aux dérivées partielles par rapport aux trois fonctions inconnues F, $\frac{\delta'}{i}$, λ qui doivent être réelles pour les points réels d'une surface réelle (donc pour p, q imaginaires conjuguées); une fois ces fonctions obtenues, les formules de la première ligne $\Delta = \Delta_1'' = \frac{1}{2} + \lambda i$, $\Delta'' = \Delta_1 = -\frac{1}{2} + \lambda i$ permettent d'obtenir *intrinsèquement* le couple O. B. correspondant : on sait que la difficulté est ramenée à la résolution d'une équation de Riccati (dans le domaine complexe). Le système (9) n'est pas mis sous la forme normale qui permet de montrer que *son intégrale générale dépend de quatre fonctions d'un argument.* Mais la réduction s'opère aisément en posant

$$p_1 = hp + kq, \qquad q_1 = h_1 p + k_1 q,$$

où h, k, h_1, k_1 sont des constantes numériques; écrivons aussi $\delta' = i\mu$ et nous avons le nouveau système

$$(9')\quad \begin{cases} F\left(h\dfrac{\partial\mu}{\partial p_1} + h_1\dfrac{\partial\mu}{\partial q_1}\right) = k\dfrac{\partial\lambda}{\partial p_1} + k_1\dfrac{\partial\lambda}{\partial q_1}, \qquad F\left(k\dfrac{\partial\mu}{\partial p_1} + k_1\dfrac{\partial\mu}{\partial q_1}\right) = h\dfrac{\partial\lambda}{\partial p_1} + h_1\dfrac{\partial\lambda}{\partial q_1}, \\ hk\dfrac{\partial^2 F}{\partial p_1^2} + (hk_1 + h_1 k)\dfrac{\partial^2 F}{\partial p_1\,\partial q_1} + h_1 k_1\dfrac{\partial^2 F}{\partial q_1^2} = \left(\dfrac{1}{4} + \lambda^2\right)\dfrac{1}{F^2} - \mu^2. \end{cases}$$

On peut résoudre les deux premières par rapport à $\frac{\partial\lambda}{\partial p_1}$, $\frac{\partial\mu}{\partial p_1}$ si $h^2 - k^2 \neq 0$, de sorte que, supposant $h \neq \pm k$, $hk \neq 0$ les équations (9′) résolues en $\frac{\partial^2 F}{\partial p_1^2}$, $\frac{\partial\lambda}{\partial p_1}$, $\frac{\partial\mu}{\partial p_1}$ sont sous la forme canonique et que la solution générale est déterminée par la donnée des fonctions $\lambda(0, q_1)$, $\mu(0, q_1)$, $F(0, q_1)$, $\frac{\partial F}{\partial p_1}(0, q_1)$; la solution générale (donnant un *couple de deux surfaces*) dépend donc de quatre fonctions d'un argument. Pour rester dans le champ réel, on peut prendre pour nouvelles variables

$$p_1 = p + q, \qquad q_1 = i(p - q),$$

ce qui donne le système

$$(9'')\quad F\frac{\partial\mu}{\partial p_1} = \frac{\partial\lambda}{\partial p_1}, \qquad F\frac{\partial\mu}{\partial q_1} = -\frac{\partial\lambda}{\partial q_1}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial p_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial q_1^2} = \left(\frac{1}{4} + \lambda^2\right)\frac{1}{F^2} - \mu^2$$

(en vertu de $h = k$, $h_1 = -k_1$, ce système n'est sous la forme canonique ni pour p_1, ni pour q_1).

M. Cartan réalise, au point de vue réel, un grand progrès en étudiant le *problème de Cauchy* : on donne deux courbes orientées C, C_1, par lesquelles doivent passer respectivement les deux surfaces inconnues S, S_1; C et C_1 se correspondent sur S et S_1 : on a indiqué le point de C_1 qui correspond à un point donné *a priori* de C, de sorte que, les points correspondants de C et C_1

sont ceux qui ont la même abscisse curviligne comptée à partir des deux premiers points homologues; on donne arbitrairement la développable circonscrite à S le long de C, de sorte que l'égalité de la courbure géodésique donne la développable circonscrite à S_1 le long de C_1; *si les données sont quelconques, le problème est déterminé et l'on obtient un couple réel :* cela résulte des énumérations de fonctions arbitraires qui ont déjà été faites; on a trouvé *quatre* fonctions, strictement nécessaires et suffisantes, d'un argument pour avoir le *couple* général, et ici on y a ajouté une fonction arbitraire complémentaire d'un argument, pour obtenir une courbe *quelconque* sur l'une des surfaces du couple, ce qui doit donner *cinq* fonctions arbitraires d'un argument; en effet C exige le choix de deux fonctions d'un argument (x, y fonctions de z sur C); la développable circonscrite à S le long de C fait intervenir une troisième fonction; la donnée de C_1 donne deux fonctions arbitraires nouvelles. On sera donc sûr d'obtenir tous les couples en nous bornant, par exemple, à une courbe C *plane*, et l'on n'introduit ainsi que les quatre fonctions strictement nécessaires. Je renvoie à l'article de M. Cartan pour le résultat concernant les *caractéristiques :* les caractéristiques sont *les lignes minima des deux surfaces et les lignes qui se correspondent avec conservation de la seconde forme fondamentale, c'est-à-dire avec conservation de la courbure normale.* Ces dernières forment sur les deux surfaces deux *réseaux orthogonaux et isothermes.*

Si nous ne démontrons pas ce résultat, nous pouvons néanmoins le vérifier de la façon suivante. Les formules (4) montrent que *les courbes dont la courbure normale (et par suite la courbure) se conserve dans la déformation* O. B. sont fournies par l'équation

$$(\Delta - \Delta_1)\, dp^2 + (\Delta'' - \Delta''_1)\, dq^2 = 0,$$

de sorte que, si nous avons adopté les variables normalisées p, q qui conduisent à $\Delta_1 = \Delta - 1$, $\Delta''_1 = \Delta'' + 1$ [*voir* formules (8) et (9)], nous avons l'équation $dp^2 - dp^2 = 0$; comme l'équation des lignes minima est $dp\,dq = 0$, nous constatons bien que le système en jeu est à la fois *orthogonal et isotherme;* les deux formes $ds^2 = 2\mathrm{F}\,dp\,dq$ et $(-\mathrm{S}\,dc\,dx) = -i(\Delta dp^2 + 2\delta'\mathrm{F}\,dp\,dq + \Delta'' dq^2)$ permettent de calculer le rayon de torsion géodésique des courbes $d(p \pm q) = 0$: *il est égal à* $2\mathrm{F}$ *pour l'une des courbes, à* $-2\mathrm{F}$ *pour l'autre sur la première surface et aux valeurs opposées* $-2\mathrm{F}$ *et* $2\mathrm{F}$ *sur la seconde surface.* Supposons donc que, reprenant le problème de Cauchy comme plus haut, les deux courbes C, C_1 soient choisies de façon à avoir *la même courbure* (tout court) aux points correspondants; en raison de la conservation de la courbure géodésique, R et θ sont les mêmes pour C et C_1, donc aussi les courbures normales, $\frac{\cos\theta}{\mathrm{R}}$, sur les deux courbes : mais alors, *le problème, d'après ce que nous venons de constater, est impossible si les torsions géodésiques ne sont pas égales* (ou du moins C et C_1 seront des lignes singulières des surfaces éventuelles); *ce phénomène d'impossibilité (ou du moins de singularité) suffit à prouver que les lignes qui se correspondent avec conservation de la courbure normale sont des caractéristiques.* Il résulte aussi de cette discussion que le problème ne peut devenir possible (sans singularité) que si C, qui a même courbure normale (donc même courbure tout court) que C_1, a sa torsion géodésique opposée à celle de C; mais alors on connaît en chaque point de C_1 (quand C est donnée ainsi que la développable circonscrite le long de C à S), à la fois R_1 et T_1; *donc* C_1 *est déterminée d'une façon intrinsèque;* les données dépendent donc de *trois* fonctions arbitraires d'une variable (par exemple, R, T, θ en fonction de s sur C) : il existera donc des cas où à ces données correspondront une infinité de solutions du problème, *ces solutions dévendant nécessairement d'une fonction nouvelle d'un argument*, puisque nous savons que le couple *général* S, S_1 dépend de *quatre* fonctions d'un argument. La discussion ainsi présentée n'indique pas quelles sont *toutes* les caractéristiques (M. Cartan a montré que les lignes minima sont aussi des caractéristiques et épuisent, avec les courbes précédentes l'ensemble des caractéristiques) et ne nous dit pas, pour le cas précis que nous venons d'étudier, si nous avons ou non épuisé les conditions de possibilité. Nous avons en même temps, en posant $p = \alpha + \beta i$, $q = \alpha - \beta i$, donné *la forme réduite et intrinsèque* $|T_g|(d\alpha^2 + d\beta^2)$ *de l'élément linéaire des surfaces à déformation* O. B. *rapportées au système isotherme dont la courbure normale reste invariante dans la déformation* [1]. Il s'agit, d'ailleurs, *d'une propriété qui est bien caractéristique des surfaces admettant une déformation* O. B. *:* la surface est rapportée à un système orthogonal et isotherme; son ds^2 est $E(d\alpha^2 + d\beta^2)$; le rayon de torsion géodésique des courbes $\alpha = \text{const.}$ est $\frac{\varepsilon E^2}{D'}$, celui des courbes $\beta = \text{const.}$, $\frac{-\varepsilon E^2}{D'}$, où ε est $+1$ ou -1 (mais le même dans les deux cas) et où D, D′, D″ sont les coefficients *primitifs* de Gauss (calculés avec les variables α, β); dire que E est la valeur absolue de ce rayon revient à dire que $D' = \pm E$; mais alors, en posant $p = \alpha + \beta i$, $q = \alpha - \beta i$, ceci se traduit, avec les notations (2) par $\Delta - \Delta'' = \pm 1$, ce qui est précisément la forme réduite de la condition nécessaire et suffisante, $\Delta P + \Delta'' Q - 1 = 0$, pour une déformation O. B.

3. Déformation continue. Première classe. Systèmes cycliques. — Nous allons donner de suite un résultat fondamental : *si une surface* S *admet deux déformées* O. B., S_1 *et* S_2, *elle en admet une infinité à un paramètre.* En effet, on a des équations

$$(10)\quad \begin{cases} \Delta P_1 + \Delta'' Q_1 - 1 = 0, & \Delta P_2 + \Delta'' Q_2 - 1 = 0, \\ \Delta_1 = \Delta - \dfrac{1}{P_1}, \quad \Delta''_1 = \Delta'' - \dfrac{1}{Q_1}, & \Delta_2 = \Delta - \dfrac{1}{P_2}, \quad \Delta''_2 = \Delta'' - \dfrac{1}{Q_2}, \end{cases}$$

[1] Ce résultat m'a été signalé dans une lettre par M. Cartan.

où P_1, P_2 dépendent de p seul et Q_1, Q_2 de q seul. On peut donc, avec un paramètre constant h, écrire

$$(11)\quad \begin{cases} \Delta\dfrac{P_1+hP_2}{1+h}+\Delta''\dfrac{Q_1+hQ_2}{1+h}-1=0, \\ \Delta_{(h)}=\Delta-\dfrac{1+h}{P_1+hP_2} \qquad \Delta''_{(h)}=\Delta''-\dfrac{1+h}{Q_1+hQ_2}. \end{cases}$$

Chaque valeur de la constante h donne une déformée O. B.*;* la valeur $h=-1$ redonne la surface S; $h=0$, $h=\infty$ donnent S_1, S_2. La relation

$$\Delta(P_1-P_2)+\Delta''(Q_1-Q_2)=0$$

donne à l'équation des lignes de courbure de S la forme $\dfrac{dp^2}{P_1-P_2}+\dfrac{dq^2}{Q_1-Q_2}=0$, *de sorte que* S (*et par suite toutes ses déformées* O. B.) *sont isothermiques* ([1]). *Réciproquement, si une surface* S *admet une déformée* O. B. *et est isothermique, elle admet* ∞^1 *déformées* O. B.*;* il existe en effet deux relations

$$\Delta P_1+\Delta''Q_1-1=0 \qquad \text{et} \qquad \Delta f(p)+\Delta''\varphi(q)=0$$

qui entraînent

$$\Delta[P_1+hf(p)]+\Delta''[Q_1+h\varphi(q)]-1=0,$$

où h est une constante arbitraire, de sorte que

$$\overline{\Delta}=\Delta-\frac{1}{P_1+hf(p)} \qquad \text{et} \qquad \overline{\Delta''}=\Delta''-\frac{1}{Q_1+h\varphi(q)}$$

donnent, h variant, ∞^1 déformées O. B.

Le changement de variables $\left(\dfrac{dp}{dp_1}\right)^2=P_1-P_2$, $\left(\dfrac{dq}{dq_1}\right)^2=Q_2-Q_1$, si l'on prend les notations (10), donne des valeurs nouvelles de Δ, Δ'' pour la surface S, à savoir $\overline{\Delta}$, $\overline{\Delta''}$ égales à $\dfrac{1}{P+Q}$, où $P=\dfrac{P_1}{P_1-P_2}$, $Q=\dfrac{Q_1}{Q_2-Q_1}$. Nous supposons donc ce changement de variables déjà effectué, de façon à avoir $\Delta=\Delta''=\dfrac{1}{P+Q}$ pour S et alors la surface S_t définie par $\Delta_t=\Delta-\dfrac{1}{P-t}$, $\Delta''_t=\Delta''-\dfrac{1}{Q+t}$, où t est une constante arbitraire, est une déformée O. B. de S,

---

([1]) Nous écartons le cas où Δ ou Δ'' est nul; si $\Delta=\Delta''=0$, les asymptotiques sont lignes minima, la surface est une sphère, pour laquelle une déformation O. B. est une symétrie, ou un déplacement, cas écarté. Si Δ seul est nul, une famille d'asymptotiques est minima, donc formée de droites isotropes; on sait que la courbure totale d'une surface réglée isotrope est constante le long d'une génératrice, de sorte que dans toute déformation de cette surface en surface réglée (forcément isotrope) la courbure principale (unique, car les deux systèmes de lignes de courbure coïncident avec le système des génératrices) reste constante : nous écartons aussi ce cas.

car $\Delta(P-t)+\Delta''(Q+t)=1$ revient à l'identité $\frac{(P-t)+(Q+t)}{P+Q}\equiv 1$; avec ces notations la surface de départ est obtenue pour $t=\infty$.

Sauf le cas des surfaces minima, il n'existe pas de réseau conjugué permanent; pour une surface minima, la famille O. B. obtenue est évidemment constituée par les surfaces minima *associées* : le réseau conjugué permanent est celui des lignes minima. On sait qu'un réseau conjugué est permanent s'il est conjugué sur trois surfaces applicables entre elles; supposons que S_o, S_t, S_∞ admettent un réseau permanent, qui divise donc harmoniquement les réseaux asymptotiques qui sont

$$\left(\Delta-\frac{1}{P}\right)dp^2+2\delta' F\,dp\,dq+\left(\Delta''-\frac{1}{Q}\right)dq^2=0,$$
$$\left(\Delta-\frac{1}{P-t}\right)dp^2+2\delta' F\,dp\,dq+\left(\Delta''-\frac{1}{Q+t}\right)dq^2=0,$$
$$\Delta\,dp^2+2\delta' F\,dp\,dq+\Delta''\,dq^2=0.$$

L'existence d'un réseau conjugué commun aux trois surfaces exige que les coefficients de chaque forme quadratique soient liés par la même relation linéaire : autrement dit il est nécessaire et suffisant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \Delta-\frac{1}{P} & \delta' F & \Delta''-\frac{1}{Q} \\ \Delta-\frac{1}{P-t} & \delta' F & \Delta''-\frac{1}{Q+t} \\ \Delta & \delta' F & \Delta'' \end{vmatrix} \equiv \delta' F \begin{vmatrix} -\frac{1}{P} & 0 & -\frac{1}{Q} \\ -\frac{1}{P-t} & 0 & -\frac{1}{Q+t} \\ \Delta & 1 & \Delta'' \end{vmatrix}$$

soit nul, ce qui entraîne $\delta' F(P+Q)=0$; comme F ni $P+Q$ ne peuvent être nuls, il reste $\delta'=0$ qui caractérise les surfaces minima.

De même *il ne peut exister de réseau cinématiquement conjugué permanent;* en effet pour S_t, S_∞ le réseau cinématiquement conjugué est celui, déjà étudié, de courbure normale invariante; il a pour équation $\frac{dp^2}{P-t}+\frac{dq^2}{Q+t}=0$ et il varie quand t varie (car $P+Q$ n'est pas nul).

Ces généralités exposées, reprenons le système fondamental (3) avec $\Delta=\Delta''=\frac{1}{P+Q}$ et *nous obtenons les trois équations fondamentales pour la suite* $\left(\text{où } P'=\frac{dP}{dp},\ Q'=\frac{dQ}{dq}\right)$

$$\boxed{F\frac{\partial\delta'}{\partial p}+\frac{Q'}{(P+Q)^2}=0,\quad F\frac{\partial\delta'}{\partial q}+\frac{P'}{(P+Q)^2}=0,\quad \frac{1}{F^2(P+Q)^2}-\delta'^2+\frac{1}{F}\frac{\partial^2\log F}{\partial p\,\partial q}=0.} \tag{12}$$

Les trois classes annoncées en introduction s'obtiennent en étudiant ce système; on aperçoit aussitôt que, si δ' est une constante, P et Q sont constants : on peut, sans restreindre, en effectuant au préalable un changement sur p et un autre sur q, supposer $P = Q = \frac{1}{2}$; δ' est une constante ai, d'où $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) = a$; *si a est nul, on a les surfaces minima; si a est non nul, on a le cas étudié par Ossian Bonnet des surfaces à courbure moyenne constante;* F doit vérifier l'unique équation

$$(13) \qquad \frac{1}{F}\frac{\partial^2 \log F}{\partial p\,\partial q} = -a^2 - \frac{1}{F^2}$$

et l'on peut prendre

$$(13') \qquad \Delta_t = \frac{t + \frac{1}{2}}{t - \frac{1}{2}}, \qquad \Delta''_t = \frac{t - \frac{1}{2}}{t + \frac{1}{2}}, \qquad \delta' = ai.$$

On a ainsi retrouvé la première classe O. B.; nous nous bornerons à rappeler le résultat curieux obtenu par Hazzidakis : l'équation différentielle des lignes de courbure est $\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 dp^2 - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dq^2 = 0$, de sorte que si $tt' = \frac{1}{4}$, les lignes de courbure de S_t et $S_{t'}$ se correspondent, mais si R_1, R_2 sont les rayons de courbure principaux de S_t pour le premier et le second système, les rayons correspondants sur $S_{t'}$ sont R_2, R_1; on peut, sans restreindre, se borner à $t = 0$, $t = \infty$ pour un tel couple; l'équation des asymptotiques de S_0 est $-dp^2 + 2ia\,F\,dp\,dq - dq^2 = 0$ et celle de S_2; $dp^2 + 2ia\,F\,dp\,dq + dq^2 = 0$, de sorte qu'aux points homologues sur un tel couple d'Hazzidakis l'angle V des asymptotiques de S_0 est remplacé par $\pi - V$ (si a est nul, il n'y a pas lieu de s'occuper d'un tel couple, car les asymptotiques se correspondent et l'on a simplement remplacé la surface minima par une symétrique relativement à un point).

Nous pouvons maintenant donner des exemples de systèmes cycliques réels. Si (X, Y, Z), (X_1, Y_1, Z_1) sont deux courbes minima conjuguées, au lieu de prendre la surface minima réelle $S_0\,(X + X_1,\ Y + Y_1,\ Z + Z_1)$, nous pouvons étudier la surface minima $S\,(X + X_1,\ Y + Y_1,\ Z - Z_1)$: cette dernière surface S, pour un couple de points conjugués pris sur (X, Y, Z), (X_1, Y_1, Z_1) donne un point dont deux coordonnées (x, y) sont réelles, mais la troisième, (z), imaginaire pure : le ds^2, somme de la forme définie positive $(dx^2 + dy^2)$ et du carré, réel mais négatif, dz^2 est *réel* : pour un champ de variation des paramètres tel que $[(dx^2 + dy^2) + dz^2]$ soit une forme définie *positive*, nous pourrons donc trouver des surfaces réelles Σ, telles qu'à un point (x, y, z) de S, avec x, y réels, z imaginaire pure, corresponde un point réel (x_1, y_1, z_1) de Σ dans l'application; en faisant rouler S sur Σ, on obtient un système cyclique réel, un système triple orthogonal réel. *Faisons bien remarquer qu'ici, nous profitons de notre étude pour obtenir une surface* S *qui admet une déformée* O. B., *mais que* Σ *n'est pas une déformée* O. B., *de* S, *mais simplement une déformée quelconque.*

Faisons encore une remarque, spéciale aux surfaces minima. Nous sommes partis d'une surface minima S_0 réelle, qui peut être considérée comme lieu des milieux des segments réunissant chaque point d'une certaine courbe minima C à chaque point de la courbe conjuguée C_0; nous avons remplacé C_0 par sa symétrique Γ relativement à un certain plan P; si nous remplaçons P par un autre plan P', nous obtenons une courbe Γ', égale à Γ, se déduisant de Γ par un certain déplacement; dans ces conditions la surface minima S, déduite du couple (C, Γ), et la surface imaginaire (C, Γ') sont différentes, *mais elles se correspondent avec conservation des lignes minima, des lignes asymptotiques et des lignes de courbure*, d'après une étude que Goursat a faite aux *Acta Mathematica*, **11**, (2), 1888, p. 135-186; nous pourrons donc, avec la même surface minima réelle S_0 de départ, obtenir des surfaces minima S contenant trois paramètres et assez différentes : nous allons avoir un exemple particulièrement frappant en utilisant la surface minima d'Enneper, que nous définissons par les formules classiques

$$(14)\quad 2x = 3p - p^3 + 3q - q^3, \qquad 2y = i[3p + p^3 - (3q + q^3)], \qquad 2z = 3p^2 + 3q^2.$$

Son ds^2 est $ds^2 = 9(1+pq)^2\,dp\,dq$ et les points réels sont obtenus par u, v imaginaires conjuguées. Si nous prenons la surface

$$(15)\quad 2X = 3p - p^3 + 3q - q^3, \qquad 2Y = i[3p + p^3 - (3q + q^3)], \qquad 2Z = 3p^2 - 3q^2,$$

puisque $dZ^2 = dz^2 - 36\,pq\,dp\,dq$, on a $dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 9(1-pq)^2\,dp\,dq$, de sorte que, pour p, q imaginaires conjuguées, X et Y sont réels, Z imaginaire pure et le ds^2 défini positif (sauf si le module commun de p, q est égal à 1); on peut donc trouver une infinité de surfaces S_1 réelles, applicables sur S dans les conditions indiquées : en particulier, de simples quadratures fournissent des surfaces S_1 de révolution. Nous pouvons remarquer qu'en posant $q = -q_1$, le ds^2 de S devient $-9(1+pq_1)^2\,dp\,dq_1$, ce qui est le ds^2, non pas de la surface minima d'Enneper S_0, mais de cette surface qui aurait été soumise à une homothétie de rapport i; or les surfaces minima qui ont un même ds^2 sont des surfaces *associées*; d'autre part la surface minima d'Enneper (qu'il s'agisse de S_0 ou de iS_0) est *égale* à chacune de ses surfaces associées : donc la surface minima S que nous avons définie, à partir de la surface d'Enneper réelle S_0, au moyen des formules (15), est égale à la surface iS_0 et l'on s'en assurerait aisément.

Nous allons avoir besoin de la développée Σ de la surface minima (14) d'Enneper; elle se compose de deux nappes égales d'ont l'une, en posant $p = \alpha - i\beta$, $q = \alpha + i\beta$, est représentée par les formules paramétriques donnant le point courant (ξ, η, ζ) et le ds^2

$$(16)\quad \begin{cases} \xi = 6\alpha + 6\alpha\beta^2 + 2\alpha^3, \qquad \eta = -4\beta^3, \qquad \zeta = \frac{3}{2}(\alpha^2+\beta^2)^2 + 3\alpha^2 - 3\beta^2 - \frac{3}{2}, \\ ds^2 = 36(1+\alpha^2+\beta^2)^2[d\alpha^2 + (\alpha\,d\alpha + \beta\,d\beta)^2]. \end{cases}$$

Cela posé, nous allons étudier une surface minima particulière, qui a été injustement dédaignée sous prétexte qu'elle est imaginaire; nous verrons qu'elle dérive aussi de la surface d'Enneper par la construction qui a été indiquée (symétrie effectuée sur l'*une* des deux courbes minima génératrices). J'ai signalé cette surface S au *Bulletin de la Société math. de France*, **56**, 1928, p. 224-239; *elle est de révolution, autour d'un axe isotrope*, algébrique et de degré 4. Elle a pour équation cartésienne

$$(17)\qquad 3(x^2+y^2+z^2)=(x-iy)^4,$$

ce qui justifie l'extension de l'expression : *surface de révolution*, bien que l'axe $(x-iy=0,\ z=0)$ soit *isotrove*. On peut prendre comme représentation paramétrique

$$(18)\qquad x+iy=\left(-\frac{u^3}{3}+uv^2\right)i,\qquad x-iy=iu,\qquad z=uv.$$

Le ds^2 est $u^2(du^2+dv^2)$, *caractéristique des développées de surface minima* [1]. En posant $u=p+q$, $v=i(p-q)$ de façon à rapporter la surface à ses lignes minima, on trouve

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{l} x+iy=-\dfrac{4i}{3}(p^3+q^3),\qquad x-iy=i(p+q),\qquad z=i(p^2-q^2),\\[2mm] x=i\left(-\dfrac{2p^3}{3}+\dfrac{p}{2}\right)+i\left(-\dfrac{2q^3}{3}+\dfrac{q}{2}\right),\qquad y=-\left(\dfrac{2p^3}{3}+\dfrac{p}{2}\right)-\left(\dfrac{2q^3}{3}+\dfrac{q}{2}\right),\\[2mm] z=i(p^2-q^2).\end{array}\right.$$

Ce résultat prouve que la surface est *minima*. Nous voyons que la courbe minima C

$$(\mathrm{C})\qquad \left(-\frac{2p^3}{3}+\frac{p}{2}\right)i,\qquad -\left(\frac{2p^3}{3}+\frac{p}{2}\right),\qquad ip^2$$

est associée, pour engendrer la surface de translation, non à la courbe conjuguée, mais à la symétrique de cette dernière par rapport à yOz. La surface minima S_0 obtenue en associant C à sa conjuguée C_0 donne un ds^2 égal à celui de S augmenté (à cause du changement du carré dx^2) de $(4p^2-1)(4q^2-1)\,dp\,dq$ et comme le ds^2 de S est $(p+q)^2\,dp\,dq$, celui de S_0 est $(4pq+1)^2\,dp\,dq$, ce qui, en posant $2p=p_1$, $2q=q_1$ est $\frac{1}{4}(1+p_1q_1)^2\,dp_1\,dq_1$;

---

(1) On sait que toutes les surfaces de ds^2 égal à $u^2(du^2+dv^2)$ sont des développées de surface minima et réciproquement; toutes ces surfaces sont donc applicables les unes sur les autres; cela entraîne que l'une, Σ, soit applicable sur toutes les surfaces homothétiques; en effet, en posant $u=\rho u_1$, $v=\rho v_1$, on a le $ds^2=\rho^4u_1^2(du_1^2+dv_1^2)$, de sorte que le point (u,v) de Σ vient, dans l'application de Σ sur la surface $(\rho^2\Sigma)$, recouvrir le point (u_1,v_1) de $(\rho^2\Sigma)$, avec $u_1=u:\rho$, $v_1=v:\rho$.

si donc on multipliait toutes les coodonnées de S_0 par 6, on retrouverait le $ds^2 = 9(1+p_1 q_1)^2\, dp_1\, dq_1$ indiqué plus haut pour la surface minima d'Enneper; or un ds^2 de surface minima définit ∞^1 surfaces *associées*, et toute surface minima dont le ds^2 est de révolution est *égale* à ses associées; donc la surface S_0 est une surface minima d'Enneper, *de sorte qu'à partir d'une surface minima d'Enneper, pour une position convenable du plan de symétrie qui transforme l'une des courbes minima génératrices, on obtient la surface spéciale de révolution trouvée ici*. Réalisons maintenant l'application de S sur la surface Σ' homothétique dans le rapport ρ^2 à la développée Σ d'Enneper indiquée plus haut (Σ' est le lieu du point $\rho^2\xi$, $\rho^2\eta$, $\rho^2\zeta$ où ρ est une constante d'homothétie); le ds^2 de Σ' est $\rho^4\ (1+\alpha^2+\beta^2)^2\,[d\alpha^2+(\alpha\, d\alpha+\beta\, d\beta)^2]$. L'applicabilité de S sur Σ' s'obtient en écrivant

$$(20)\qquad u = \frac{\rho}{\sqrt{2}}(1+\alpha^2+\beta^2), \qquad v = \rho\sqrt{2}(\alpha+C),$$

où C est une constante arbitraire; ce résultat montre que le roulement de S sur Σ' conduit à ∞^2 *systèmes cycliques réels algébriques*, dépendant des constantes arbitraires ρ, C. Il s'agit maintenant de trouver les systèmes triples orthogonaux qui en résultent; on sait (*voir* Darboux, t. 4) que l'on doit chercher le système conjugué commun à S et Σ'; or les asymptotiques de Σ' sont représentées dans le plan $\omega\alpha\beta$, où $\omega\alpha$, $\omega\beta$ sont deux axes rectangulaires, par l'équation $d\alpha^2+d\beta^2=0$, de sorte que *les réseaux conjugués de Σ' sont ceux qui ont pour image plane un réseau orthogonal*; les lignes de courbure de S sont données par $du\,dv=0$, les lignes de longueur nulle par $du^2+dv^2=0$, donc les asymptotiques par $du^2-dv^2=0$; les courbes $u-v=C_1$ ont pour image sur $\omega\alpha\beta$ les cercles concentriques $\alpha^2+\beta^2-2\alpha=\frac{C_1\sqrt{2}}{\rho}-1+2C$, de centre commun F $(1,0)$ et de même les courbes $u+v=C_2$ les cercles de centre F$'(-1,0)$ d'équation $\alpha^2+\beta^2+2\alpha=\frac{C_2\sqrt{2}}{\rho}-1-2C$; dans le plan $\omega\alpha\beta$, au point $M(\alpha,\beta)$, les images des directions conjuguées communes sont les bissectrices des tangentes (ou des normales) des deux cercles en jeu issus de M; les normales des cercles sont MF, MF$'$; *le réseau conjugué commun a donc pour image l'ensemble des coniques homofocales de foyers* F, F$'$, d'équation $\frac{\alpha^2}{\lambda+1}+\frac{\beta^2}{\lambda}-1=0$, où λ est une constante arbitraire : les systèmes cycliques sont donc *algébriques*.

Nous allons fournir un autre exemple qui réusssit d'une façon encore plus miraculeuse si j'ose dire. Nous avons dit que la surface minima réelle $S_0(X+X_1, Y+Y_1, Z+Z_1)$ nous avait conduit à étudier la surface minima *imaginaire* $S(X+X_1, Y+Y_1, Z-Z_1)$; la surface minima *adjointe de* S_0, soit $S'_0(iX-iX_1, iY-iY_1, iZ-iZ_1)$ conduit par le même procédé, pour le même plan de symétrie xOy, à étudier la surface

$$S'(iX - iX_1,\ iY - iY_1,\ iZ + iZ_1)$$

qui est *l'adjointe de* S. Prenons donc *l'adjointe de notre surface minima algébrique de rotation* : nous allons découvrir *l'hélicoïde minimum algébrique.* En nous reportant aux formules (19), nous avons, pour définir cette nouvelle surface,

$$(21)\quad (S')\left\{\begin{aligned} &x = \frac{2p^3}{3} - \frac{p}{2} - \frac{2q^3}{3} + \frac{q}{2}, \qquad y = i\left[-\left(\frac{2p^3}{3} + \frac{p}{2}\right) + \left(\frac{2q^3}{3} + \frac{q}{2}\right)\right], \\ &z = -p^2 - q^2, \end{aligned}\right.$$

dont le ds^2 est encore $4(p+q)^2\,dp\,dq = u^2(du^2 + dv^2)$; pour p, q imaginaires conjuguées, (ou u, v réels), y et z sont réels et x imaginaire pure. Nous réalisons l'application de S' sur Σ' par les mêmes formules que plus haut (puisque S et S' sont applicables par les points de mêmes u, v ou mêmes p, q); *donc les systèmes cycliques obtenus sont encore algébriques* [et le raisonnement prouve que, quelle que soit la surface minima S_0 de départ adoptée, si la surface S obtenue fournit avec une certaine surface Σ des systèmes cycliques réels et algébriques, la surface adjointe S' donnera, par son roulement sur Σ, des systèmes cycliques eux aussi réels et algébriques; on peut même remarquer que les surfaces réelles *associées* à S fournissent, avec le même plan de symétrie, de nouveaux systèmes cycliques réels, et algébriques si S a réalisé des systèmes algébriques; cela tient à ce que S_0 conduit à $e^{i\omega}X + e^{-i\omega}X_1$, $e^{i\omega}Y + e^{-i\omega}Y_1$, $e^{i\omega}Z + e^{-i\omega}Z_1$ où ω est réel, et le plan de symétrie donne $e^{i\omega}X + e^{-i\omega}X_1$, $e^{i\omega}Y + e^{-i\omega}Y_1$, $e^{i\omega}Z - e^{-i\omega}Z_1$ qui est une surface *associée* à S] [1]. Pour obtenir le réseau conjugué commun à S' et Σ', il faut prendre l'image sur $\omega\alpha\beta$ des asymptotiques de S', ou, si l'on veut, des lignes de courbure de S; on a les courbes $du\,dv = 0$ ou $u = \text{const.}$, ou $\alpha^2 + \beta^2 = \text{const.}$, et les courbes $v = \text{const.}$ ou $\alpha = \text{const.}$ Le même raisonnement que plus haut nous fournit les *paraboles homofocales* dont le foyer est l'origine ω et l'axe la droite $\omega\alpha$. *On a encore des systèmes triples algébriques.* Il est bon de donner ici quelques propriétés de la nouvelle surface que nous venons d'introduire. En reprenant les formules (21) on a

$$(21')\qquad x + iy = \frac{4(p^3 - q^3)}{3}, \qquad x - iy = -p + q, \qquad z = -p^2 - q^2.$$

---

(1) On voit donc qu'une surface minima réelle S_0 fournit ∞^3 familles de surfaces minima imaginaires, les surfaces d'une même famille étant associées; si, dans l'une des familles, une surface donne un système cyclique algébrique, toutes les autres surfaces de la famille donnent des systèmes cycliques algébriques; mais si le système triple orthogonal fourni par une surface est algébrique, il n'y a aucune raison pour que les systèmes triples fournis par les autres surfaces de la famille soient aussi algébriques.

On en déduit $x+iy=\frac{4}{3}(p-q)(p^2+pq+q^2)=\frac{4}{3}(x-iy)(z-pq)$; puis $(x-iy)^2+z=-2pq$; l'équation de la surface s'obtient donc aussitôt :

$$x+iy=2(x-iy)\left[z+\frac{(x-iy)^2}{3}\right]. \tag{22}$$

C'est une surface réglée cubique; les génératrices s'obtiennent en écrivant $x-iy=3C$, $x+iy=6C[z+3C^2]$. Chaque asymptotique curviligne admet les génératrices pour normales principales, de sorte que les ∞^1 asymptotiques curvilignes sont les courbes de Bertrand, dites *cubiques de Lyon*, dont les rayons de courbure et torsion sont constants. Inversement, une cubique de Lyon engendre, par ses normales principales, une surface minima (le raisonnement est le même que pour l'hélice circulaire); *ce qui n'était pas évident, c'est la façon dont cet hélicoïde minimum peut se rattacher à la surface minima d'Enneper.*

Enfin, il est intéressant de montrer que les surfaces minima associées aux deux surfaces précédentes (surface minima algébrique de révolution et hélicoïde minimum algébrique) conduisent aussi à des systèmes triples orthogonaux *algébriques*, dans leur roulement sur la surface Σ'; nous devons en effet chercher l'image des asymptotiques de la surface minima sur le plan $\omega\alpha\beta$; or les diverses surfaces minima en jeu ayant le même ds^2, $u^2(du^2+dv^2)$, qui fournit une représentation conforme sur le plan (u, v) et les asymptotiques de l'une étant représentées par $du\,dv=0$, c'est-à-dire par les droites parallèles à Ou ou Ov, les asymptotiques des autres surfaces sont représentées par deux faisceaux de droites parallèles $u\sin\varphi-v\cos\varphi=C_1$, $u\cos\varphi+v\sin\varphi=C_2$ d'après les propriétés bien connues des lignes asymptotiques des diverses surfaces minima associées entre elles; sur le plan $\omega\alpha\beta$ on trouve donc

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\cot\varphi=\text{const.},\qquad \alpha^2+\beta^2+2\alpha\,\text{tang}\,\varphi=\text{const.}$$

On trouve ainsi, par le même raisonnement que plus haut, pour image du réseau conjugué commun, les coniques homofocales de foyers $(\cot\varphi, 0)$, $(-\text{tang}\,\varphi, 0)$; quand φ varie, ces deux foyers se correspondent dans une involution à points doubles imaginaires. Nous avons donc établi notre résultat et obtenu ainsi, *grâce aux trois constantes* ρ, C, φ, *une triple infinité de systèmes cycliques ou triples orthogonaux, tous algébriques.*

Rappelons que la surface minima d'Enneper S_0 devait, par variation du plan de symétrie P, nous donner ∞^3 surfaces minima S susceptibles, par une déformation convenable, de nous fournir des systèmes cycliques et triples orthogonaux (réels, mais en général transcendants); la surface minima d'Enneper (comme toute surface minima applicable sur une surface de révolution) est égale à chacune de ses associées; il n'y a donc pas lieu de considérer les surfaces *associées* à S; mais ce que l'on semble perdre ainsi, au point de vue de la découverte de systèmes cycliques réels, se rattrape aussitôt en remarquant que, si Σ est une surface réelle applicable sur S dans les conditions voulues, la surface Σ est aussi applicable de ∞^1 façons sur elle-même, *point réel pour point réel*, et que, par suite, chaque système cyclique obtenu en faisant rouler S sur Σ fournit aussitôt ∞^1 autres systèmes cycliques; nous avons eu même la bonne chance, avec la surface minima algébrique de révolution et l'hélicoïde minimum algébrique, d'avoir, non seulement, *une* suface Σ, mais ∞^1, à savoir Σ (développée de la surface d'Enneper) et toutes ses homothétiques.

4. Seconde et troisième classe de la déformation continue. — Nous prenons le système fondamental (12)

$$\text{(F)}\quad \boxed{F\frac{\partial\delta'}{\partial p}+\frac{Q'}{(P+Q)^2}=0,\qquad F\frac{\partial\delta'}{\partial q}+\frac{P'}{(P+Q)^2}=0,\qquad \frac{1}{F}\frac{\partial^2\log F}{\partial p\,\partial q}+\frac{1}{F^2(P+Q)^2}-\delta'^2=0,}$$

avec

$$\Delta=\Delta''=\frac{1}{P+Q},\qquad \Delta_t=\Delta\frac{t+Q}{t-P},\qquad \Delta''_t=\Delta''\frac{t-P}{t+Q}.$$

Le cas $P'=0$ où P constant permet de supposer $P=0$, $\Delta=\Delta''=\frac{1}{Q}$; δ' est fonction de p seul, et l'on a

$$F=\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{Q}\right):\frac{d\delta'}{dp},\qquad ds^2=2F\,dp\,dq;$$

F est produit d'une fonction de p par une fonction de q, de sorte que la surface est développable; nous laisserons ce cas de côté en renvoyant, pour son étude, au Mémoire de M. Cartan.

Nous supposons donc $P'Q'\not\equiv 0$ et en égalant les valeurs de $F(P+Q)^2$ donnée par les deux premières équations (E), nous avons

$$P'\frac{\partial\delta'}{\partial p}-Q'\frac{\partial\delta'}{\partial q}=0 \tag{23}$$

et nous introduirons une fonction P_1 de p, une fonction Q_1 de q telles que l'on ait

$$P'_1=\frac{1}{P'},\qquad Q'_1=\frac{1}{Q'}, \tag{24}$$

et nous remarquons que P_1 (ou Q_1) est comme P (ou Q) une fonction effective de p (ou q), et que l'on a

$$\frac{dP_1}{dp}=\frac{dp}{dP},\qquad dp^2=dP\,dP_1,\qquad \frac{dP_1}{dP}=\left(\frac{dp}{dP}\right)^2=\left(\frac{dP_1}{dp}\right)^2. \tag{25}$$

L'équation (23) s'écrit donc

$$\frac{\partial\delta'}{\partial P_1}=\frac{\partial\delta'}{\partial Q_1}\quad\text{ou}\quad \delta'=f(P_1+Q_1). \tag{26}$$

Dans cette relation f est une fonction, *non constante*, de l'argument $P_1 + Q_1$, et l'on a, en tenant compte de (E),

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l} \delta' = f(P_1+Q_1), \qquad P'_1 = \dfrac{1}{P'}, \qquad Q'_1 = \dfrac{1}{Q'}, \qquad F = \dfrac{-P'Q'}{(P+Q)^2 f'}, \\ \delta = \delta'' = \dfrac{-(P+Q)f'}{P'Q'}, \qquad \delta_t = \delta\,\dfrac{t+Q}{t-P}, \qquad \delta''_t = \delta''\,\dfrac{t-P}{t+Q}; \end{array}\right.$$

$$(28)\quad (P+Q)^2 P_1'^2 Q_1'^2\left[f' + \left(\frac{f''}{f'}\right)'\right] = \frac{f^2}{f'^2} + 2.$$

C'est l'équation (28) qui donne la clé de la solution; comme $P_1'^2 = \dfrac{dP_1}{dP}$, $Q_1'^2 = \dfrac{dQ_1}{dQ}$, il y a avantage à prendre comme variables indépendantes $u = P$, $v = Q$; nous désignerons P_1 par U, Q_1 par V; on a donc

$$dp^2 = du\,dU = U'du^2, \qquad \frac{dp}{du} = \sqrt{U'},$$

quand on fait ce changement de variables sur p et q, le nouveau coefficient δ se trouve remplacé par le produit de sa valeur primitive par $\dfrac{dp}{dP}\dfrac{dQ}{dq}$; donc δ est remplacé par $\dfrac{-(P+Q)f'}{P'Q'}\dfrac{1}{P'}Q'$ ou $\dfrac{-(P+Q)f'}{P'^2}$ ou encore $-(P+Q)f'\dfrac{dP_1}{dP}$, ce qui, avec les notations définitives, donne

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{l} ds^2 = \dfrac{-2\,du\,dv}{(u+v)^2 f'}, \qquad \delta = -(u+v)f'U', \qquad \delta' = f, \qquad \delta'' = -(u+v)f'V', \\ \delta_t = -(u+v)f'U'\,\dfrac{t+v}{t-u}, \qquad \delta''_t = -(u+v)f'V'\,\dfrac{t-u}{t+v}; \end{array}\right.$$

$$(E_1)\quad \boxed{(u+v)^2 U'V'\left[f' + \left(\frac{f''}{f'}\right)'\right] = \frac{f^2}{f'} + 2.}$$

Dans l'équation (E_1) f, est une fonction de l'argument unique $\omega = U + V$; f', f'' signifient $\dfrac{df}{d\omega}$, $\dfrac{d^2f}{d\omega^2}$. Tout d'abord, Hazzidakis (auquel les résultats de ce paragraphe sont dus) remarque que $\dfrac{f^2}{f'} + 2 = 0$ entraîne $f = \dfrac{2}{\omega + C}$, où C est une constante,

$$f' = \frac{-2}{(\omega+C)^2}, \qquad \frac{f''}{f'} = \frac{2}{\omega + C} = -f$$

et, par suite, l'équation (E_1) se trouve vérifiée parce que les deux membres sont nuls; *ce cas donne la seconde classe* (qu'Hazzidakis détermine complètement).

La *troisième classe* (qu'Hazzidakis a simplement effleurée) correspond au cas où les deux membres de (E_1) sont égaux sans être nuls.

5. SECONDE CLASSE. — Si l'on a

$$f = \frac{2}{U + V + C},$$

on peut prendre comme fonction de u, non pas U, mais $\overline{U} = U + \frac{C}{2}$ et de même $\overline{V} = V + \frac{C}{2}$ au lieu de V; supprimant le surlignage, on a les mêmes formules où C est remplacé par zéro. On a ainsi

$$(30)\quad \boxed{\begin{gathered} ds^2 = \left(\frac{U+V}{u+v}\right)^2 du\,dv, \qquad \delta' = \frac{2}{U+V}, \qquad \delta = \frac{2\,U'(u+v)}{(U+V)^2}, \qquad \delta'' = \frac{2\,V'(u+v)}{(U+V)^2}, \\ \delta_t = \frac{2\,U'(u+v)}{(U+V)^2}\,\frac{t+v}{t-u}, \qquad \delta''_t = \frac{2\,V'(u+v)}{(U+V)^2}\,\frac{t-u}{t+v}. \end{gathered}}$$

Hazzidakis remarque que les équations classiques permettant de trouver x, y, z s'intègrent complètement; on a, à un déplacement près,

$$(31)\quad \left\{ \begin{aligned} x_t &= \frac{\eta(1-\psi^2)+\varphi}{2}, & \eta &= \frac{(v+t)(u-t)}{u+v}, \\ y_t &= \eta\psi, & \varphi &= \int \frac{V^2 dv}{(v+t)^2} + \int \frac{U^2 du}{(u-t)^2}, \\ z_t &= \frac{i}{2}[\eta(1+\psi^2)-\varphi], & \psi &= i\int \frac{V\,dv}{(v+t)^2} - i\int \frac{U\,du}{(u-t)^2}. \end{aligned} \right.$$

On a donc quatre intégrales simples à calculer, une fois U, V *choisies*. Ce calcul donne S_t, pourvu que t soit fini; or la surface de départ correspond à $t = \infty$: en ordonnant en séries procédant suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{t}$, on obtient les coordonnées x, y, z de la surface de départ

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{-1}{u+v}\,\frac{1-\psi_0^2}{2} + \frac{\varphi_0}{2}, & \varphi_0 &= \int V^2 dv + U^2 du, \\ y &= \frac{-1}{u+v}\,\psi_0, & \psi_0 &= i\int V\,dv - U\,du, \\ z &= -\frac{i}{2}\left(\frac{1+\psi_0^2}{u+v} + \varphi_0\right). \end{aligned} \right.$$

On pourra remarquer les formules simples

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} x_t + iz_t &= -\eta\psi^2 + \varphi, & x + iz &= \frac{\psi_0^2}{u+v} + \varphi_0, \\ x_t - iz_t &= \eta, & x - iz &= \frac{-1}{u+v}; \\ x_t^2 + y_t^2 + z_t^2 &= \eta\varphi, & x^2 + y^2 + z^2 &= \frac{-\varphi_0}{u+v}. \end{aligned} \right.$$

Comme vérification, on pourra remarquer que, si dans les formules (32) on écrit $u = \frac{1}{u_1 - t}$, $v = \frac{1}{v_1 + t}$, les formules (32) prennent la forme (31), et ceci confirme que, *dans la famille obtenue en faisant varier t, les diverses surfaces jouent bien le même rôle.*

Toutes les surfaces obtenues sont imaginaires : en effet, on a

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{-4i}{U+V},\qquad \left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)^2=\frac{-16\,U'V'(u+v)^2}{(U+V)^4},\qquad ds^2=du\,dv\left(\frac{U+V}{u+v}\right)^2.$$

Si donc la surface est réelle, aux points réels $U+V$ est imaginaire pure, $dU+dV$ aussi; $\frac{du\,dv}{(u+v)^2}$, en ces points, est donc négatif; donc

$$\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)^2=\frac{-16(u+v)^2}{du\,dv}\cdot\frac{dU\,dV}{(U+V)^4},$$

et par suite $dU\,dV$ sont positifs; puisque

$$(dU-dV)^2=(dU+dV)^2-4\,dU\,dV;$$

l'expression $dU-dV$ est imaginaire pure; comme $dU+dV$ l'est aussi, dU et dV sont imaginaires pures. Mais alors, allant sur la surface d'un point réel (u_0, v_0) à un autre point réel (u, v) par un chemin réel, l'expression $U-U_0$, obtenue par une série d'accroissements infinitésimaux tous imaginaires pures, a sa partie réelle nulle identiquement; comme c'est une fonction *analytique* de u, elle se réduit à une constante; or nous avons écarté ce cas; la surface est donc tout entière imaginaire.

Cette seconde classe contient des surfaces W (nous verrons que ces surfaces spéciales sont un cas de dégénérescence des surfaces de la troisième classe). En effet, pour une surface W, l'expression $\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}$ doit être fonction de $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}$, de sorte que les expressions, rappelées plus haut pour ces deux expressions, montrent que $\log[U'V'(u+v)^2]$ doit être fonction de $U+V$. Or, pour la troisième classe, puisque les deux membres de (E_1) sont tous deux non nuls, $U'V'(u+v)^2$ est une fonction de $U+V$, de sorte que toutes les surfaces de la troisième classe sont W et que, parmi celles de la seconde classe, celles qui sont W s'obtiennent aussi comme cas spécial des surfaces de la troisième classe : nous y reviendrons plus tard.

On peut chercher *les surfaces de la seconde classe applicables sur une surface de révolution;* on a une équation assez compliquée en écrivant que les courbes où la courbure totale reste constante sont géodésiquement parallèles; mais on obtient une solution particulière en prenant $U=iu^2$, $V=-iv^2$, de sorte que

$$\frac{U+V}{u+v}=i(u-v)\qquad\text{et}\qquad ds^2=-(u-v)^2du\,dv;$$

si l'on pose $u=A+iB$, $v=A-iB$, on obtient

$$ds^2=4\,B^2(dA^2+dB^2)$$

qui est le ***ds^2 caractéristique des développées de surface minima***. Nous allons, avec cet exemple particulier, obtenir des systèmes cycliques réels et même algébriques; nous aurons même, avec l'un des deux exemples qui vont être fournis, obtenir des systèmes triples orthogonaux, non seulement réels, mais encore algébriques.

Prenons, pour $U = iu^2$, $V = -iv^2$, la surface $t = \infty$ [formules (32) ou (33)]; on a

$$(34)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\varphi_0 = -\frac{u^5 + v^5}{5}, \qquad \psi_0 = \frac{u^3 + v^3}{3}, \\ &x + iz = -\frac{(u+v)^2}{45}[5(u^3 + v^3) - (u+v)^3], \\ &x - iz = \frac{-1}{u+v}, \qquad y = -\frac{1}{3}(u^2 - uv + v^2). \end{aligned} \right.$$

En posant $u + v = C$, $u^2 - uv + v^2 = \gamma$ on a, avec les paramètres C, γ,

$$(35)\qquad x + iz = -\frac{C^2}{45}[5C\gamma - C^3], \qquad x - iz = \frac{-1}{C}, \qquad y = -\frac{\gamma}{3},$$

de sorte que $C = \text{const.}$ fournit une famille de droites; l'équation de la surface est

$$(36)\qquad 45(x - iz)^5(x + iz) + 15y(x - iz)^2 + 1 = 0.$$

On a une surface réglée de degré 6, admettant le plan isotrope $x - iz = 0$ comme plan directeur; u, v réels ou imaginaires conjugués donnent un point de coordonnées x, y réelles et z imaginaire pure : le ds^2 n'est réel et positif que pour u, v imaginaires conjugués. Appliquons cette surface sur la développée de la surface minima d'Enneper; rappelons que toute surface S dont le ds^2 est $4B^2(dA^2 + dB^2)$ est applicable sur toutes les surfaces homothétiques; nous nous reportons aux équations paramétriques (16); en posant

$$(37)\qquad A - \lambda = \rho\alpha, \qquad 2B = \rho(1 + \alpha^2 + \beta^2),$$

où ρ et λ sont des constantes, $4B^2(dA^2 + dB^2)$ devient

$$\rho^4(1 + \alpha^2 + \beta^2)[d\alpha^2 + (\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta)^2];$$

donc, en nous reportant à Darboux (*Théorie des Surfaces*, t. 4, p. 123 et suiv.), en faisant rouler la surface imaginaire sur la surface $\frac{\varepsilon\rho^2}{6}\xi$, $\frac{\varepsilon\rho^2}{6}\eta$, $\frac{\varepsilon\rho^2}{6}\zeta$, où $\varepsilon = +1$, et nous bornant à α, β réels, c'est-à-dire (A, B) réels, (u, v) imaginaires conjugués, nous obtenons des systèmes cycliques non seulement réels, mais encore algébriques, dépendant des deux constantes arbitraires ρ, λ. On obtient du même coup des systèmes triples orthogonaux réels, à condition d'intégrer l'équation du réseau conjugué simultanément sur les deux surfaces applicables. Or le réseau asymptotique de la développée (16) est fourni par $d\alpha^2 + d\beta^2 = 0$, celui de la surface (34) par $(u\,du - v\,dv)(du + dv) = 0$ ou $dA\,d(AB) = 0$, c'est-à-dire $B\,dA^2 + A\,dB\,dA = 0$; la suite nous prouvera qu'il y a avantage à adopter les variables A, B plutôt que α, β; nous transformons donc $d\alpha^2 + d\beta^2 = 0$, ce qui donne pour les asymptotiques des deux surfaces les équations

$$2B\,dA^2 + 2A\,dB\,dA = 0,$$
$$(2B - \rho)\,dA^2 - 2(A - \lambda)\,dA\,dB + \rho\,dB^2 = 0,$$

et le réseau conjugué commun est fourni par l'équation

(38) $$(A\rho + 2B\lambda - 4AB)\,dA^2 + 2\rho B\,dA\,dB + A\rho\,dB^2 = 0$$

qui ne semble pas rentrer dans un type intégrable, de sorte que les systèmes obtenus sont, vraisemblablement, transcendants.

Passons maintenant à la surface $t = 0$, toujours pour $U = iu^2$, $V = -iv^2$. On a alors

(39) $$x + iz = \frac{-(u+v)^3}{3}, \qquad x - iz = \frac{uv}{u+v}, \qquad y = uv.$$

Si l'on regarde $u + v$ et uv comme les paramètres, il est clair que $u + v = \text{const.}$ fournit une droite parallèle au plan isotrope $x + iz = 0$; l'équation de la surface est

(40) $$3(x + iz)(x - iz)^3 + y^3 = 0.$$

La surface est algébrique et de degré 4; les asymptotiques ont pour équation

$$(u\,dv - v\,du)(du + dv) = 0 \qquad \text{ou} \qquad dA.d\left(\frac{B}{A}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad A\,dB\,dA - dA^2 = 0;$$

les formules (37) donnent l'application de cette surface (39) ou (40) sur la même surface $\frac{\varepsilon\rho^2}{6}\xi$, $\frac{\varepsilon\rho^2}{6}\eta$, $\frac{\varepsilon\rho^2}{6}\zeta$ (avec $u = A + iB$, $v = A - iB$), de sorte que nous avons encore des systèmes cycliques réels, et même algébriques, dépendant des deux constantes arbitraires ρ, λ. Pour les systèmes triples, nous avons à trouver le système oonjugué commun, c'est-à-dire divisant harmoniquement les deux réseaux asymptotiques

$$2B\,dA^2 - 2A\,dB\,dA = 0,$$
$$(2B - \rho)\,dA^2 - 2(A - \lambda)\,dB\,dA - \rho\,dB^2 = 0.$$

On peut remplacer le second réseau par $\rho\,dA^2 - 2\lambda\,dB\,dA + \rho\,dB^2 = 0$, de sorte que l'on obtient, pour le réseau cherché, l'équation homogène en A, B, donc intégrable

(41) $$(A\rho - 2B\lambda)\,dA^2 - 2B\rho\,dA\,dB + A\rho\,dB^2 = 0.$$

L'intégrale est même algébrique :

$$B + \frac{A\lambda}{\rho} \pm \sqrt{B^2 + \frac{2AB\lambda}{\rho} - A^2} = \mu, \tag{42}$$

où μ est arbitraire; *cette fois les systèmes triples sont algébriques.*

Les surfaces correspondant à $U = iu^2$, $V = -iv^2$ et t quelconque sont transcendantes, mais donnent encore des systèmes cycliques ou triples orthogonaux réels.

6. Troisième classe de surfaces. — Nous revenons aux équations (29) et (E_1) que je recopie

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} & ds^2 = \frac{-2\,du\,dv}{(u+v)^2 f'}, \qquad \delta = -(u+v) f' U', \qquad \delta' = f, \qquad \delta'' = -(u+v) f' V', \\ & \delta_t = -(u+v) f' U' \frac{t+v}{t-u}, \qquad \delta''_t = -(u+v) f' V' \frac{t-u}{t+v}; \end{aligned} \right.$$

$$(E_1) \qquad \boxed{(u+v)^2 U'V' \left[f' + \left(\frac{f''}{f'} \right)' \right] = \frac{f^2}{f'} + 2,}$$

où f est une fonction de l'argument $\omega = U + V$; U est fonction de u, V de v et nous supposons $\frac{f^2}{f'} + 2 \neq 0$; nous avons été déjà, au paragraphe précédent, conduit à remarquer que (E_1) entraîne que $(u+v)^2 U'V'$ est fonction de $U + V$; donc les dérivées partielles de $\log[(u+v)^2 U'V']$ sont proportionnelles à celles de $U + V$ et l'on a ainsi une condition où f ne figure plus :

$$\frac{1}{U'} \left(\frac{U''}{U'} + \frac{2}{u+v} \right) = \frac{1}{V'} \left(\frac{V''}{V'} + \frac{2}{u+v} \right). \tag{30}$$

Si l'on pose

$$U_1 = \frac{1}{U'}, \qquad V_1 = \frac{1}{V'},$$

cette équation s'écrit

$$2(U_1 - V_1) + (u+v)(V'_1 - U'_1) = 0;$$

en dérivant en u, puis en v, on obtient

$$V''_1 - U''_1 = 0, \qquad \text{d'où} \quad U''_1 = V''_1 = 2a,$$

où a est une constante; on a donc

$$U_1 = au^2 + 2bu + c,$$

où a, b, c sont des constantes et, puisque si l'on choisit $u = t$, $v = -t$, on a

$$U_1(t) = V_1(-t),$$

on a

$$V_1 = av^2 - 2bv + c$$

et l'on constate que l'équation

$$2(U_1 - V_1) + (u+v)(V_1' - U_1') = 0$$

est vérifiée; nous en avons donc la solution générale.

Cette équation (E_1), *quand les deux membres ne sont pas nuls, entraîne, comme cela a déjà été dit, que la surface est* W; *ainsi, toutes les surfaces des classes* 1, 3 *sont* W; *mais les surfaces à déformation* O. B. *non continue et les surfaces de la classe* 2 (*sauf celles qui rentrent dans la classe* 3) *ne sont pas* W.

On voit immédiatement que, si l'on effectue la substitution

$$u = \frac{\alpha u_1 + \beta}{\gamma u_1 + \delta}, \qquad v = \frac{-\alpha v_1 + \beta}{\gamma v_1 - \delta}, \qquad t = \frac{\alpha T + \beta}{\gamma T + \delta}$$

(de sorte que u, $-v$, t subissent la même transformation), les expressions de ds^2, δ, δ', δ'', δ_t, δ_t'' au moyen des nouvelles variables u_1, v_1, T ont la même forme que précédemment, mais permettent de ramener les quadratures donnant U, V à savoir

$$U = \int \frac{dv}{au^2 + 2bu + c} \qquad V = \int \frac{dv}{av^2 + 2bv + c}$$

à l'une des deux formes canoniques

$$U = \int \frac{du}{2bu}, \qquad V = \int \frac{-dv}{2bv} \qquad (b \neq 0);$$

$$U = \int \frac{du}{c}, \qquad V = \int \frac{dv}{c} \qquad (c \neq 0),$$

suivant que les racines de $au^2 + 2bu + c$ sont distinctes (la substitution les remplaçant par 0 et $+\infty$) ou confondues (la racine double se trouvant remplacée par ∞); mais alors, puisque t subit la même transformation, les valeurs $t = 0$ ou ∞ dans le premier cas, ou $t = \infty$ dans le second correspondront *à des surfaces remarquables dans la déformation* O. B. *à un paramètre*. La troisième classe se partage donc en *deux types*.

7. Troisième classe. Premier type. — Nous avons

$$u = e^{2b(U-U_0)}, \qquad v = e^{-2b(V-V_0)},$$

$$(u+v)^2 U'V' = \frac{-(u+v)^2}{4b^2 uv} = \frac{-\left(\frac{u}{v} + 1\right)^2}{4b^2 \frac{u}{v}} = \frac{-[e^{2b(U-U_0)+2b(V-V_0)} + 1]^2}{4b^2 e^{2b(U-U_0)+2b(V-V_0)}};$$

$$(42') \qquad ds^2 = \frac{-2\,du\,dv\,U'V'}{(u+v)^2 U'V' f} = \frac{2b^2 dU\,dV}{f' \mathrm{Ch}^2[b(U-U_0) + b(V-V_0)]}.$$

D'ailleurs (E_1) fournit

$$(43)\qquad b^2\left(\frac{f^2}{f'}+2\right)+\left[f'+\left(\frac{f''}{f'}\right)'\right]Ch^2[b(U-U_0)+b(V-V_0)]=0.$$

Ceci amène à faire le changement de variables

$$(44)\quad \begin{cases} u=e^{2U_1}, & b(U-U_0)=U_1, \quad v=-e^{-2V_1}, \quad b(V-V_0)=V_1+\dfrac{i\pi}{2},\\ f(U+V)=bf_1(U_1+V), & f(\omega)=bf_1(\omega_1), \quad b\omega-b(U_0+V_0)=\omega_1=U_1+V_1. \end{cases}$$

On a

$$(45)\quad \begin{cases} \dfrac{df}{d\omega}=\dfrac{b\,df_1}{d\omega}=\dfrac{b^2 df_1}{d\omega_1}, \quad f''=b^3f_1'', \quad \dfrac{f^2}{f'}=\dfrac{f_1^2}{f_1'},\\ \dfrac{f''}{f'}=b\dfrac{f_1''}{f_1'}, \quad \left(\dfrac{f''}{f'}\right)'=b_1^2\left(\dfrac{f_1''}{f_1'}\right). \end{cases}$$

De la sorte, l'équation transformée de (43) ne contient plus le paramètre b, si l'on emploie les variables U_1, V_1, ω_1 et la fonction f_1. On a [d'après les formules (29)] pour les nouvelles valeurs de δ, δ', δ''

$$\delta_1=-(u+v)f'\cdot\frac{dU}{du}\cdot\frac{du}{dU_1}\cdot\frac{dV_1}{dv}=-(e^{2U_1}-e^{-2V_1})b^2f_1'\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{2e^{-2V_1}}.$$

On écrit donc

$$(46)\quad \begin{cases} \delta_1=\dfrac{-(e^{2U_1}-e^{-2V_1})e^{2V_1}bf_1'}{2}, \quad \delta_1'=bf_1, \quad \delta_1''=\dfrac{-(e^{2U_1}-e^{2V_1})e^{-2U_1}bf_1'}{2},\\ ds^2=\dfrac{-2\,dU_1\,dV_1}{b^2f_1'\,Sh^2(U_1+V_1)}. \end{cases}$$

C'est pour des raisons d'opportunité que nous avons préféré employer la fonction Sh plutôt que Ch; nous verrons, en effet, comment le second type de la troisième classe peut se déduire, par continuité, du premier en posant

$$U_1=a\overline{U}_1, \qquad V_1=a\overline{V}_1$$

et faisant tendre a vers zéro. Nous avons voulu respecter, autant que possible, les calculs tels que Hazzidakis les a amorcés; il eut été peut-être préférable de remplacer v par $(-v)$ et V_1 par $(-V_1)$, ou V par $(-V)$. Les formules (46) prouvent que *la constante b n'intervient que pour réaliser une homothétie*, car si b varie, bx, by, bz restent constants. On peut donc, *à une similitude près, écrire, avec un changement de notations*, les formules définitives

$$(47)\quad \boxed{\begin{gathered} ds^2=\frac{-2\,dU\,dV}{f'Sh^2(U+V)}, \quad U+V=\omega, \quad \delta=-e^{\omega}Sh\,\omega f', \quad \delta'=f, \quad \delta''=-e^{-\omega}Sh\,\omega f',\\ \overline{\delta}=-e^{\omega}Sh\,\omega f'\,\frac{t-e^{-2V}}{t-e^{2U}}, \quad \overline{\delta}''=-e^{-\omega}Sh\,\omega f'\,\frac{t-e^{2U}}{t-e^{-2V}},\\ \left(\frac{f''}{f'}\right)'+f'-\frac{2}{Sh^2\omega}-\frac{f^2}{f'Sh^2\omega}=0. \end{gathered}}$$

La suite prouvera que l'équation différentielle fournissant f en fonction de ω admet l'intégrale première

$$\boxed{\left(\frac{f''}{f'}+\frac{2}{\mathfrak{T}h\,\omega}\right)^2+\frac{4f}{\mathfrak{T}h\,\omega}+\frac{2}{Sh^2\omega}\frac{f^2}{f'}+2f'=k,} \tag{48}$$

où k est une constante arbitraire. Nous avons fait déjà remarquer que $\frac{f^2}{f'}+2=0$ donne des surfaces particulières de la troisième classe appartenant aussi à la seconde classe : dans ce cas, la valeur de k est 4 [mais pour $k=4$, l'équation (48) est encore du second ordre et a d'autres intégrales que celles qui vérifient $\frac{f^2}{f'}+2=0$].

Nous allons montrer que *la surface* S_t (*où t n'est ni nul ni infini*) *n'est ni de révolution ni hélicoïdale, et que la variation de t donne simplement une surface unique avec ses auto-applications*; S_0, S_∞ *sont des surfaces exceptionnelles qui peuvent être regardées comme des auto-déformées à la limite de* S_1; *dans ce premier type* S_0, S_∞ *sont hélicoïdales et égales chacune à une symétrique plane de l'autre*.

Considérons en effet la surface S_1 obtenue pour $t=1$ et soient

$$X=A(U,V),\qquad Y=B(U,V),\qquad Z=C(U,V) \tag{49}$$

les coordonnées du point courant de S_1; les fonctions δ, δ', δ'' relatives à S_1, S_t sont, en posant $t=e^{2h}$,

$$\delta_1=-e^{\omega}Sh\,\omega.f'.\frac{1-e^{-2V}}{1-e^{2U}},\qquad \delta'=f,\qquad \delta''=-e^{-\omega}Sh\,\omega.f'\,\frac{1-e^{2U}}{1-e^{-2V}},$$

$$\delta_t=-e^{\omega}Sh\,\omega.f'.\frac{1-e^{-2(V+h)}}{1-e^{-2(U-h)}},\qquad \delta''_t=-e^{-\omega}Sh\,\omega.f'.\frac{1-e^{2(U-h)}}{1-e^{-2(V+h)}}.$$

La comparaison montre aussitôt que si l'on pose $U-h=\overline{U}$, $\overline{V}=V+h$ les formules qui définissent S_1 au moyen de U, V et celles qui définissent S_t au moyen de $\overline{U}$, $\overline{V}$ sont *les mêmes*, car on n'a pas à changer ω non plus que $f(\omega)$; la surface S_t est donc *égale* à la surface S_1 (un point $\overline{U}$, $\overline{V}$ de S_t ayant pour homologue dans la superposition le point U, V de S_1 tel que U et $\overline{U}$, V et $\overline{V}$ prennent la même valeur numérique), et de plus, S_t est applicable sur S_1, l'applicabilité ayant lieu par les points de mêmes coordonnées curvilignes U, V (de sorte que cette fois $\overline{U}$ est égal à $U-h$, et $\overline{V}$ à $V+h$); la surface S_t est le lieu du point

$$\overline{X}=A(U-h,\,V+h),\qquad \overline{Y}=B(U-h,\,V+h),\qquad \overline{Z}=C(U-h,\,V+h), \tag{50}$$

où A, B, C sont les mêmes fonctions que dans (49) et ce point $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ est lui-même un point de S_1; *le passage de* S_t *à* S_1 *est donc une auto-déformation de* S_1.

Quand U, V restent constants, la variation de h déplace le point $U - h$, $V + h$, sur la courbe $\omega = \text{const.}$ qui passe par sa position initiale, courbe que nous pouvons appeler *parallèle*, en employant la dénomination *méridien* ou *parallèle* pour une courbe de cette surface O. B. qui se transforme en méridien ou parallèle effectif quand on applique la surface O. B. sur une surface de révolution de même ds^2. Il est facile de calculer la longueur d'arc $M\overline{M}$ du parallèle entre les points (U, V) et $(U - h, V + h)$; si M reste fixe et si h varie, on a manifestement

$$ds^2 = \frac{2\,dh^2}{f'(\omega)\,\mathrm{S}h^2(\omega)}, \qquad \text{arc}\, M\overline{M} = |h|\sqrt{\frac{2}{f'(\omega)\,\mathrm{S}h^2\omega}},$$

de sorte que, si t tend vers zéro ou l'infini, le point $\overline{M}$ s'éloigne indéfiniment sur le parallèle; cette remarque montre même (en admettant provisoirement que toutes les surfaces S_t sont réelles, résultat établi plus loin), puisque h se calcule en posant $t = e^{2h}$, *que l'on passe de* S_1 *à* S_t *par une déformation, réelle si t est positif, et imaginaire si t est négatif*; autrement dit, la surface S_1 se compose d'une nappe S' réelle et d'une nappe S'' imaginaire, mais on peut concevoir un déplacement imaginaire qui rende S' imaginaire et S'' réelle; il suffit de songer aux deux surfaces

$$(51) \qquad e^x + e^y + e^z = 1, \qquad e^x + e^y - e^{z'} = 1,$$

qui sont égales, puisque la translation parallèle à Oz définie par

$$z = z' + (2k+1)i\pi$$

suffit à faire coïncider les deux surfaces, une nappe réelle de l'une devenant imaginaire, tandis qu'une nappe primitivement imaginaire devient réelle; en revenant à notre problème, on voit que, la donnée de ds^2, δ, δ', δ'' donnant une surface à un déplacement près, on peut s'arranger pour que S_1 soit représentée par une nappe réelle, puis, indépendamment des calculs relatifs à S_1, s'arranger pour que S_{-1} soit représentée par une nappe réelle, mais alors S_1 et S_{-1} sont *égales*, exactement comme les deux surfaces (51), *un point réel de chacune ayant pour homologue sur l'autre un point imaginaire et inversement*, tandis que l'on peut appliquer S_1 sur S_{-1} point réel sur point réel, de ∞^1 façons.

Le raisonnement qui précède prouve aussi que ni S_0 ni S_∞ ne sont égales à S_1 (ni d'une façon générale à S_t); en effet quand nous passons de S_1 à S_t nous avons vu que le point U, V de S_t a pour homologue dans la *superposition* de S_1 et S_t (mais non la *déformation* de S_1 en S_t) le point de S_1 qui a pour coordonnées paramétriques $U - h$, $V + h$ [comme le prouvent les formules (49) et (51)]; or, si t est voisin de zéro ou l'infini, la valeur de h est de plus en plus grande en valeur absolue, et ce n'est donc que dans sa région définie par des valeurs infiniment grandes de U, V que S_1 est recouverte par S_0 ou S_∞.

Nous allons bien comprendre ce phénomène (que j'ai signalé en 1922 et que M. Cartan a retrouvé) en prenant un exemple plus simple. Soit une hyperbole quelconque H que nous déplaçons dans son plan d'un mouvement de translation continu parallèle à une asymptote A; nous trouvons ainsi une famille de ∞^1 courbes, toutes égales entre elles, mais contenant une courbe parasite isolée, non égale aux hyperboles, à savoir l'asymptote A elle-même. Le calcul est immédiat : $xy - a = 0$ est l'équation de H rapportée à ses asymptotes et nous avons envisagé les hyperboles $x(y-\lambda) - a = 0$, où λ est quelconque; quand λ, valeur absolue de la translation convertissant H en H', devient très grand, H' se réduit à $x = 0$ qui est l'asymptote A; la raison est facile à donner; le segment d'hyperbole H, compris entre $y = \lambda$ et $y = \lambda + 1$ par exemple, s'éloigne à l'infini si λ augmente indéfiniment, mais se rapproche asymptotiquement du segment $(\lambda, \lambda+1)$ de l'axe Oy; pour constater empiriquement ce fait, on peut supposer qu'un observateur placé au voisinage de O fasse déplacer ce segment de H d'un mouvement de translation, d'amplitude λ, parallèle à Oy, qui amène l'origine de ce segment sur Ox; à mesure que λ, variant d'une façon continue, augmente indéfiniment, le segment transporté de H vient de se confondre de plus en plus avec le segment $(0, 1)$ de l'axe Oy, et c'est pour cela que le calcul donne brutalement Oy au milieu de toutes ces hyperboles égales H'. *On peut dire, en abrégé, que* Oy *résulte d'une portion infiniment éloignée de* H, *dont la translation, parallèle à* Oy, *est devenue infinie;* de même, en revenant à la déformation O. B., la surface S_1 et S_0 peuvent être placées de façon que S_1 soit asymptote à S_0; nous pouvons nous borner à la portion de S_1 comprises entre les parallèles $\omega_0 - k$, $\omega_0 + k$; sur le *parallèle* médian ω_0, prenons les points équidistants (U_0, V_0), avec $U_0 + V_0 = \omega_0$, $(U_0 - h, V_0 + h)$, $(U_0 - 2h, V_0 + 2h)$, ..., $(U_0 - nh, V_0 + nh)$, ...; les *méridiens* issus de ces points partagent cette bande de S_1 en *quadrilatères tous applicables les uns sur les autres en totalité;* quand n augmente indéfiniment le quadrilatère de rang n sur S_1 tend à se confondre avec un quadrilatère de même rang sur S_0; sur S_0, qui est hélicoïdale comme nous allons le voir, *les quadrilatères successifs sont tous égaux;* supposant donc S_0 et S_1 liées invariablement, nous pouvons concevoir le mouvement hélicoïdal continu qui fait glisser S_0 sur elle-même : S_1, emportée par ce mouvement, fait apparaître, quand l'amplitude de ce mouvement devient très grande, le quadrilatère de rang n de S_1 en face du quadrilatère de rang 1 de S_0, et *l'on peut dire que* S_0 *résulte d'un déplacement hélicoïdal infiniment grand de* S_1, *qui fait venir à distance finie les portions infiniment éloignées de cette surface;* à ce point de vue, on peut dire que S_0 représente la portion à l'infini de S_1 Le raisonnement pour S_∞ est le même : chaque parallèle de S_1 s'éloigne d'ailleurs indéfiniment, d'un côté vers S_0, de l'autre vers S_∞.

Montrons que S_t *n'est ni hélicoïdale ni de révolution;* en effet, dans ses auto-applications, S_t est remplacée par S_{t_1}; or l'équation des lignes de courbure de S_t est, en vertu de l'équation (6),

$$(52) \qquad \frac{e^{2U}\,dU^2}{(e^{2U}-t)^2} = \frac{e^{-2V}\,dV^2}{(e^{-2V}-t)^2}.$$

Le changement de t en t_1 change l'équation, de sorte que la proposition est établie. Pour S_∞ l'équation des lignes de courbure est $e^{2U}dU^2 - e^{-2V}dV^2 = 0$ et ne change pas si l'on remplace (U, V) par $(U-h, V+h)$; or ce changement applique S_∞ sur elle-même et ne change ni δ, ni δ', ni δ'', de sorte que cette application de S_∞ sur elle-même est un *déplacement*; mais $U + V = \text{const.}$ n'est intégrale première pour aucun des deux systèmes de lignes de courbure de S_∞, *de sorte que* S_∞ *est hélicoïdale, sans être de révolution. Raisonnement semblable pour* S_0 *et même conclusion.*

D'autre part S_∞ *est égale à une symétrique de* S_0 *par rapport à un plan.* En effet pour S_∞ on a (avec $\omega = U + V$)

$$(53) \quad ds^2 = \frac{-2\,dU\,dV)}{f'\,Sh^2(U+V)}, \qquad \delta_\infty = -e^{\omega}Sh\,\omega f', \qquad \delta'_\infty = f, \qquad \delta''_\infty = -e^{-\omega}Sh\,\omega f'.$$

et, pour S_0, on a

$$(54) \quad ds^2 = \frac{-2\,dU\,dV}{f'\,Sh^2(U+V)}, \qquad \delta_0 = -e^{-\omega}Sh\,\omega f', \qquad \delta'_0 = f, \qquad \delta''_0 = -e^{\omega}Sh\,\omega f'.$$

Pour la surface S_∞ *faisons un simple changement de notations,* $U = \overline{V}$, $V = \overline{U}$: la fonction δ_∞, qui se calcule avec un déterminant d'ordre 3, devient $-\overline{\delta''_\infty}$; le changement des noms de U, V remplace en effet le calcul de δ par celui de δ'' et inversement; il faut de plus, quand on échange U et V, échanger entre elles les deux premières lignes du déterminant; comme δ_∞ et δ'_0 sont identiques et de même δ_0 et δ''_∞, on voit que $\overline{\delta''_\infty}$, si l'on supprime le surlignage, est égal à $(-\delta''_0)$; de même $\overline{\delta_\infty}$ est égal à $(-\delta_0)$, et $\overline{\delta'_\infty}$ égal à $(-\delta'_0)$ (finalement nous n'avons fait qu'écrire V à la place de U et inversement); donc les deux surfaces S_∞, S_0 ont (quand on a échangé U et V dans S_∞) leurs ds^2 et leurs secondes formes égales et de signe contraire; c'est bien le fait caractéristique; pour deux surfaces dont chacune est égale à une symétrique plane de l'autre un point de coordonnées paramétriques (U_0, V_0) sur l'une a pour homologue sur l'autre le point $U = V_0$, $V = U_0$.

Occupons-nous maintenant de la réalité. Nous avons écrit plus haut l'équation (51) des lignes de courbures de S_t; or on a

$$(55) \qquad d\log\left(\frac{e^U - \sqrt{t}}{e^U + \sqrt{t}}\right) = \frac{2\sqrt{t}\,e^U dU}{e^{2U} - t}, \qquad d\log\left(\frac{e^{-V} - \sqrt{t}}{e^{-V} + t}\right) = \frac{-2\sqrt{t}\,e^{-V}dV}{e^{-2V} - t}.$$

Supposons d'abord t *réel,* U *et* $(-V)$ *imaginaires conjuguées*; ω est donc imaginaire pure, $Sh\omega$ aussi; $Sh^2\omega$ est réel, négatif. Si donc nous supposons $f'(\omega)$ *réel, négatif, pour* ω *imaginaire pure*, le ds^2 est défini positif; nous pouvons poser, d'après un calcul analogue à celui qui a donné les relations (45),

$$(56)\quad \left\{\begin{array}{l} f(\omega)=if_1(\omega_1),\qquad i\omega=\omega_1,\qquad f'(\omega)=\dfrac{df}{d\omega}=\dfrac{idf_1}{-id\omega_1}=-f_1'(\omega_1),\\ f''(\omega)=\dfrac{df'}{d\omega}=\dfrac{-df_1'}{-id\omega_1}=-if_1'',\qquad \dfrac{f''}{f'}=i\dfrac{f_1''}{f_1'},\\ \left(\dfrac{f''}{f'}\right)'=\dfrac{i}{d\omega}d\left(\dfrac{f_1''}{f_1'}\right)=-\left(\dfrac{f_1''}{f_1'}\right)'. \end{array}\right.$$

L'équation différentielle obtenue en (47) devient donc, avec une variable ω_1 réelle, une fonction $f_1(\omega_1)$ réelle

$$(57)\quad \left(\frac{f_1''}{f_1'}\right)'+f_1'-\frac{2}{\sin^2\omega_1}-\frac{f_1^2}{f_1'\sin^2\omega_1}=0.$$

L'intégrale première, en conservant la constante k qui figure dans (48), est

$$(58)\quad \left(\frac{f_1''}{f_1'}+\frac{2}{\operatorname{tang}\omega_1}\right)^2+\frac{4f_1}{\operatorname{tang}\omega_1}+\frac{2}{\sin^2\omega_1}\frac{f_1^2}{f_1'}+2f_1=-k.$$

Cette équation peut s'écrire

$$(58')\quad \left(\frac{f_1''}{f_1'}+\frac{2}{\operatorname{tang}\omega_1}\right)^2+\frac{2}{f_1'\sin^2\omega_1}\left[(f_1+f_1'\cos\omega_1\sin\omega_1)^2+f_1'^2\sin^4\omega\right]=-k,$$

et par conséquent, pour une surface réelle, k doit être négatif $\Big($à titre de vérification, les solutions particulières pour lesquelles $\dfrac{f_1^2}{f_1'}+2$ est nulle correspondent à $k=+4$ et ne peuvent donner de surfaces réelles$\Big)$. Sous les conditions qui viennent d'être précisées, *si t est positif*, écrivons pour définir les variables *réelles* ξ, η

$$(59)\quad \left\{\begin{array}{ll} \xi+i\eta=\dfrac{1}{\sqrt{t}}\log\dfrac{e_{\mathrm{U}}-\sqrt{t}}{e^{\mathrm{U}}+\sqrt{t}}, & d(\xi+i\eta)=\dfrac{2e^{\mathrm{U}}d\mathrm{U}}{e^{2\mathrm{U}}-t};\\ \xi-i\eta=\dfrac{1}{\sqrt{t}}\log\dfrac{e^{-\mathrm{V}}-\sqrt{t}}{e^{-\mathrm{V}}+\sqrt{t}}, & d(\xi-i\eta)=\dfrac{-2e^{-\mathrm{V}}d\mathrm{V}}{e^{-\mathrm{V}}-t};\\ d\xi=\dfrac{e^{\mathrm{U}}d\mathrm{U}}{e^{2\mathrm{U}}-t}-\dfrac{e^{-}\,d\mathrm{V}}{e^{-2\mathrm{V}}-t}, & id\eta=\dfrac{e^{\mathrm{U}}d\mathrm{U}}{e^{2\mathrm{U}}-t}+\dfrac{e^{-\mathrm{V}}d\mathrm{V}}{e^{-2\mathrm{V}}-t}. \end{array}\right.$$

Les lignes de courbure de la surface $\mathrm{S}_t(t>0)$ sont représentées par $\xi=\text{const.}$, $\eta=\text{const.}$; on a

$$(60)\quad d\xi^2+d\eta^2=\frac{-4e^{\mathrm{U}-\mathrm{V}}\,d\mathrm{U}d\mathrm{V}}{(e^{2\mathrm{U}}-t)(e^{-2\mathrm{V}}-t)},\qquad ds^2=\frac{(e^{2\mathrm{U}}-t)(e^{-2\mathrm{V}}-t)}{2f'(\omega)\,\mathrm{S}h^7\omega}(\xi^2+d\eta^2).$$

On peut remplacer le produit $f'(\omega)\,\mathrm{S}h^2\omega$ par $f'(\omega_1)\sin^2\omega_1$, avec $\omega_1=i\omega$.

Nous avons ainsi retrouvé ce fait que les surfaces étudiées sont isothermiques. *Les rayons de courbure principaux sont réels,* car l'on a

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=-2if, \qquad \left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)^2=-4\,\delta\delta''=-4\,\mathrm{S}h^2\omega\, f'^2=4\sin^2\omega_1 f_1'^2;$$

le ds^2 étant défini positif pour U, — V imaginaires conjuguées et $f'(\omega)$ réelle négative [c'est-à-dire $f_1'(\omega_1)$ positive pour ω_1 réel] *la surface* S_t *est réelle*; la recherche des coordonnées effectives revient à la résolution d'une équation de Riccati.

On remarquera maintenant que, si *t est négatif,* $\sqrt{t}$ a pour imaginaire conjuguée $-\sqrt{t}$ et $\log\frac{e^{\mathrm{U}}-\sqrt{t}}{e^{\mathrm{U}}+t}$ a pour conjuguée $\log\frac{e^{-\mathrm{V}}+\sqrt{t}}{e^{-\mathrm{V}}-\sqrt{t}}$, de sorte que les quantités ξ, η définies par (58) sont encore réelles : donc nos conclusions subsistent et la surface S_t est encore réelle.

Tout est donc ramené à intégrer l'équation (57) pour ω_1 réel et à ne conserver une intégrale réelle f_1 que dans les intervalles où f_1' est positive; or k étant négatif, on peut définir une intégrale f_1 en donnant les valeurs de f_1 et f_1' pour une valeur numérique donnée $(\omega_1)_0$ de ω_1; on peut effectivement, en prenant $(f_1')_0$ positive, obtenir une nappe de surface réelle [quand k est donné, et négatif, l'équation (58′) fournit une nouvelle inégalité à vérifier par $(f_1)_0$, $(f_1')_0$; si l'on se reporte seulement à l'équation (57), on peut choisir $(f_1)_0$, $(f_1')_0$ et $(f_1'')_0$].

Bien entendu, les résultats relatifs à la réalité s'appliquent à la surface S_∞, mais les calculs pour obtenir, à la limite pour $t=\infty$, les formules (58) ou (59) sont légèrement différents; l'équation générale (6) des lignes de courbure devient ici $e^{2\mathrm{U}}d\mathrm{U}^2-e^{-2\mathrm{V}}d\mathrm{V}^2=0$, de sorte que nous écrivons avec des variables ξ, η réelles (et la variable ω_1 réelle égale à $i\omega$)

$$(61)\qquad \left\{\begin{aligned} &\xi+i\eta=e^{\mathrm{U}}, \qquad \xi-i\eta=e^{-\mathrm{V}}, \qquad d\xi^2+d\eta^2=-e^{(\mathrm{U}-\mathrm{V})}d\mathrm{U}\,d\mathrm{V},\\ &ds^2=\frac{2\,e^{\mathrm{V}-\mathrm{U}}}{f'(\omega)\,\mathrm{S}h^2\omega}(d\xi^2+d\eta^2)=\frac{2\,(d\xi^2+d\eta^2)}{(\xi^2+\eta^2)\,f'(\omega_1)\sin^2\omega_1}\end{aligned}\right.$$

Les mêmes raisons que plus haut montrent que S_∞ est réelle. Inutile de faire le calcul semblable pour S_0 qui est égale à une symétrique de S_∞ (en tous cas le calcul permet de retrouver ce fait).

Supposons maintenant que t soit négatif : alors $\sqrt{t}$ est imaginaire pure et a pour conjuguée $-\sqrt{t}$; si donc U et — V sont encore imaginaires conjuguées, $\log\frac{e^{\mathrm{U}}-\sqrt{t}}{e^{\mathrm{U}}+\sqrt{t}}$ a pour conjuguée une détermination de $\log\frac{e^{-\mathrm{V}}+\sqrt{t}}{e^{-\mathrm{V}}-\sqrt{t}}$ et les quantités $\xi+i\eta$, $\xi-i\eta$ définies par les formules (59) sont encore conjuguées, grâce au facteur $\frac{1}{\sqrt{t}}$ qui précède le logarithme; les formules (60) subsistent et les conclusions relatives à la réalité de S_t subsistent.

Mais il y a un autre type de surfaces réelles : on l'obtient avec U, V *imaginaires conjuguées et t imaginaire, de module égal à* 1. Cette fois la quantité conjuguée de $\frac{e^{U}-\sqrt{t}}{e^{U}+\sqrt{t}}$ est $\frac{e^{V}-\frac{1}{\sqrt{t}}}{e^{V}+\frac{1}{\sqrt{t}}}$ ou $\frac{\sqrt{t}-e^{-V}}{\sqrt{t}+e^{-V}}$; on pose donc

$$(62)\quad \begin{cases} \xi+i\eta=\log\dfrac{e^{U}-\sqrt{t}}{e^{U}+\sqrt{t}}, & d(\xi+i\eta)=\dfrac{2\sqrt{t}\,e^{U}dU}{e^{2U}-t};\\[2ex] \xi-i\eta=\log\dfrac{\sqrt{t}-e^{-V}}{\sqrt{t}+e^{-V}}, & d(\xi-i\eta)=\dfrac{-2\sqrt{t}\,e^{-V}dV}{e^{-2V}-t}. \end{cases}$$

On a

$$(63)\quad d\xi^2+d\eta^2=\frac{4e^{U+V}dU\,dV}{(e^{2U}-t)\left(e^{2V}-\frac{1}{t}\right)},\qquad ds^2=\frac{-(e^{2U}-t)\left(e^{2V}-\frac{1}{t}\right)}{2f'(\omega)\mathrm{Sh}^2\omega}(d\xi^2+d\eta^2).$$

Si nous remplaçons la surface (47) lieu du point (x, y, z) par la surface (x_1, y_1, z_1) avec $x_1=\frac{x}{b}$, $y_1=\frac{y}{b}$, $z_1=\frac{z}{b}$, nous trouvons pour la surface (x_1, y_1, z_1)

$$(63')\qquad \delta_1=b\delta,\qquad \bar{\delta}'_1=b\bar{\delta}',\qquad \bar{\delta}''_1=b\bar{\delta}'',\qquad ds^2=\frac{-2\,dU\,dV}{b^2 f'(\omega)\,\mathrm{Sh}^2(\omega)}$$

avec

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=-2ibf,\qquad \left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)^2=-4b^2\mathrm{Sh}^2\omega f'^2;$$

on voit que, *si* ω *est réel,* $f(\omega)$ *fonction réelle de* ω *avec une dérivée* f' *positive, b étant imaginaire pure,* R et R′ sont réels et le ds^2 devient

$$\frac{-1}{2b^2 f(\omega)\,\mathrm{Sh}^2\omega}(e^{2U}-t)\left(e^{2V}-\frac{1}{t}\right)(d\xi^2+d\eta^2),$$

expression qui est une forme définie positive, de sorte que la surface est réelle et rapportée à ses lignes de courbure $\xi=$ const., $\eta=$ const.; l'intégrale première d'Hazzidakis

$$(64)\qquad \left(\frac{f''}{f'}+\frac{2}{\mathrm{Ch}\,\omega}\right)^2+\frac{2}{\mathrm{Sh}^2\omega f'}\left[(f+f'\,\mathrm{Ch}\,\omega\,\mathrm{Sh}\,\omega)^2-f'^2\,\mathrm{Sh}^4\omega\right]=k$$

ne fournit plus cette fois de condition pour le signe de k $\Big($mais, comme vérification, la fonction $f=\frac{2}{\omega+C}$, où C est réelle, donne $f'=\frac{-2}{(\omega+C)^2}$ et des surfaces imaginaires$\Big)$. *Cette fois les deux surfaces exceptionnelles, hélicoïdales comme plus haut, sont imaginaires.* La surface S_t n'offre plus la particularité d'avoir deux nappes, l'une réelle, l'autre imaginaire, susceptibles, par un déplacement imaginaire, de devenir, la première imaginaire, la seconde réelle;

elle n'a qu'une nappe réelle; les diverses auto-déformations s'obtiennent en prenant $t = e^{i\varphi}$ où φ est réel : la variation de φ dans l'intervalle $(0, 2\pi)$ par exemple s'effectue sans rencontrer de valeurs critiques, tandis que dans l'autre hypothèse, t, variant dans le domaine réel, rencontre deux valeurs critiques 0 et ∞.

Cette discussion minutieuse a été guidée par les résultats relatifs aux lignes de courbure; nous pouvons, puisque toutes les surfaces S_t sont applicables les unes sur les autres par les points de mêmes coordonnées U, V, les mettre toutes en représentation conforme sur un même plan auxiliaire et appeler *réseaux* O. B. *les réseaux du plan* (*ou des surfaces* S_t) *qui sont les images des divers réseaux de courbure*. D'après ce qui a déjà été dit, l'équation en termes finis des lignes de courbure de S_t est, suivant le système adopté,

$$(65)\qquad \frac{e^{U}-\sqrt{t}}{e^{U}+\sqrt{t}}\cdot\frac{e^{-V}-\sqrt{t}}{e^{-V}+\sqrt{t}}=C \qquad \text{ou} \qquad \frac{e^{U}-\sqrt{t}}{e^{U}+\sqrt{t}}:\frac{e^{-V}-\sqrt{t}}{e^{-V}+\sqrt{t}}=C'.$$

Prenons le premier cas étudié ici (qui est le cas A de M. Cartan à qui est due cette idée de définir et étudier les réseaux O. B); c'est le cas où U, $(-V)$ sont imaginaires conjuguées et t réel; posons, avec X et Y réels,

$$(66)\qquad e^{U}=X+iY,\qquad e^{-V}=X-iY.$$

Les lignes de longueur nulle $U=\text{const.}$, $V=\text{const.}$ sont représentées sur le plan (X, Y) par les droites isotropes, de sorte que nous avons une représentation conforme, qui reste la même quelle que soit la valeur de t, tandis que précédemment nous avons obtenu une représentation conforme sur le plan ξ, η variable avec t. Si t est positif, C est réel et C' imaginaire de module unité; si t est négatif, C est imaginaire de module égal à 1 et C' réel; si t est positif, les équations (65) peuvent s'écrire

$$(66')\qquad \begin{cases} \dfrac{(X-\sqrt{t})^2+Y^2}{(X+\sqrt{t})^2+Y^2}=C, & X^2+Y^2-t-2C'_1Y=0, \\ C'=e^{2i\varphi}, & C'_1=\sqrt{t}\cot\varphi. \end{cases}$$

Nous voyons que *les lignes de courbure de* S_t *sont représentées par deux faisceaux de cercles orthogonaux*. Nous allons pouvoir présenter le résultat synthétiquement en suivant le procédé de M. Cartan; comme le groupe conforme des transformations du plan X, Y laisse le résultat invariant, nous constatons ce qui suit :

Les lignes de courbure du premier système donnent ∞^1 *faisceaux, si* t *varie; chacun de ces faisceaux comprend un cercle fixe* Γ [*axe* OY *avec les formules* (66)]; *les points de base décrivent,* t *variant, un cercle fixe* Γ_1 *orthogonal à* Γ [*avec les formules* (66), Γ_1 *est l'axe* OX] *et découpent sur* Γ_1 *une involution à points doubles réels, à savoir les points communs à* Γ *et* Γ_1 [avec les notations (66) les points doubles sont les points d'abscisse $\pm\sqrt{t}$ sur OX]. *Les lignes de* *courbure du second système donnent les ∞^1 faisceaux respectivement orthogonaux aux précédents; chacun de ces nouveaux faisceaux comprend un cercle fixe qui est justement Γ_1; les points de base de ces nouveaux faisceaux sont imaginaires conjugués et situés sur Γ, et sont conjugués par rapport aux points communs à Γ et Γ_1.*

Si t devient négatif, les cercles Γ et Γ_1 ne changent pas, mais leurs rôles s'échangent ; c'est le second faisceau de cercles qui a ses points base réels et non plus le premier, et inversement : cela se conçoit assez aisément en remarquant que les équations (66) s'écrivent, si l'on veut,

$$(66'') \qquad X^2+Y^2+t-2\sqrt{t}\,\frac{1+C}{1-C}\,X=0, \qquad X^2+Y^2-t+2i\sqrt{t}\,\frac{1+C'}{1-C'}\,Y=0,$$

et que les paramètres $\sqrt{t}\,\frac{1+C}{1-C}$ et $i\sqrt{t}\,\frac{1+C'}{1-C'}$ sont réels, soit dans le cas :

t positif, C réel, C' imaginaire de module unité,

soit dans le cas :

t négatif, C imaginaire de module unité, C' réel.

Ce résultat se voit très simplement, géométriquement, en donnant à Γ et Γ_1 une forme circulaire et non rectiligne; Γ et Γ_1 sont réels tous deux et orthogonaux et ont pour centre deux points O, O_1 : on considère un angle droit variable dont les côtés passent en O et O_1; le côté issu de O donne, par son intersection avec Γ_1, les points de base du premier faisceau (points de Poncelet du second), et le côté issu de O_1 donne, de même, sur Γ les points de base du second faisceau. Comme Γ et Γ_1 sont orthogonaux et se coupent en deux points réels A, B, on trouve les faisceaux singuliers qui correspondent soit à S_0, soit à S_∞ en supposant que les côtés de l'angle droit sont, soit OA, O_1A, soit OB, O_1B; les lignes de courbure de S_0 (ou S_∞) sont représentées par deux faisceaux de cercles tangents entre eux dans chaque faisceau. On se rappellera d'ailleurs que les diverses surfaces S_t sont, si t est positif, les auto-déformées d'une seule et unique surface réelle, S_1 par exemple; si t est négatif, ce sont les auto-déformées d'une unique surface S_{-1} par exemple; S_1 et S_{-1} sont *égales*, mais un point réel de l'une a pour homologue sur l'autre un point imaginaire : toutes ces propriétés se retrouvent en partie sur les images des lignes de courbure *réelles*.

Passons maintenant au *second cas* que nous avons étudié (cas B de M. Cartan) correspondant à U, V imaginaires conjuguées et t imaginaire de module égal à 1. Nous posons $e^U = X+iY$, $e^V = X-iY$, $t=\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$ où X, Y, φ sont réels; $\sqrt{t}$ est égal à $\cos\varphi + i\sin\varphi$; la fonction $\frac{e^U-(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{e^U+(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$ a pour conjuguée

$$\frac{e^V-(\cos\varphi-i\sin\varphi)}{e^V+(\cos\varphi-i\sin\varphi)}=\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi-e^{-V}}{\cos\varphi+i\sin\varphi+e^{-V}}.$$

De la sorte les intégrales premières des équations des lignes de courbure sont

$$(67)\quad \begin{cases} \dfrac{X+iY-(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{X+iY+(\cos\varphi+i\sin\varphi)}\,\dfrac{X-iY-(\cos\varphi-i\sin\varphi)}{X-iY+(\cos\varphi-i\sin\varphi)}=C_1 & (C_1 \text{ réel}),\\[2mm] \dfrac{X+iY-(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{X+iY+(\cos\varphi+i\sin\varphi)}\,\dfrac{X-iY+(\cos\varphi-i\sin\varphi)}{X-iY-(\cos\varphi-i\sin\varphi)}=C_2 & (C_2=e^{2i\psi},\ \psi \text{ réel}).\end{cases}$$

La première équation définit un faisceau de cercles

$$X^2+Y^2+1-2\,\frac{1+C_1}{1-C_1}(X\cos\varphi+Y\sin\varphi)=0$$

qui comprend, quel que soit φ, *toujours le cercle* Γ, $X^2+Y^2+1=0$; *les points de Poncelet* $(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $(-\cos\varphi, -\sin\varphi)$ *décrivent le cercle fixe* Γ_1, $X^2+Y^2-1=0$ *orthogonal à* Γ *et se correspondent involutivement sur* Γ_1 (diamétralement opposés, donc *conjugués par rapport aux points d'intersection de* Γ *et* Γ_1, si l'on veut rester dans le domaine anallagmatique); *la seconde équation définit un faisceau de cercles*

$$\frac{X^2+Y^2-1}{\cos\psi}=\frac{2(Y\cos\varphi-X\sin\varphi)}{\sin\psi}$$

qui, quel que soit φ, *comprend toujours le cercle* $X^2+Y^2-1=0$ *qui est le cercle* Γ_1 *déjà rencontré; les points de base du faisceau en jeu sont les points* $(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $(-\cos\varphi, -\sin\varphi)$ *déjà rencontrés*. Ce second énoncé est analogue au premier; la différence est que les cercles Γ, Γ_1 sont cette fois l'un réel, l'autre imaginaire et d'équation réelle; les deux surfaces hélicoïdales (égales chacune à une symétrique de l'autre) sont imaginaires.

8. Troisième classe. Deuxième type. — On a trouvé

$$(68)\quad \begin{cases} dU=\dfrac{du}{c}, \quad dV=\dfrac{dv}{c}, \quad u=c(U-U_0), \quad v=c(V-V_0);\\[2mm] \delta=-\dfrac{u+v}{c}f', \quad \delta'=f, \quad \delta''=-\dfrac{u+v}{c}f', \quad ds^2=\dfrac{-2\,du\,dv}{(u+v)^2f'};\\[2mm] \delta_t=-\dfrac{u+v}{c}f'\,\dfrac{t+v}{t-u}, \quad \delta''_t=-\dfrac{u+v}{c}f'\,\dfrac{t-u}{t+v},\end{cases}$$

et f étant fonction de $U+V=\omega$, on a l'équation

$$(E_1)\qquad \frac{(u+v)^2}{c^2}\left[f'+\left(\frac{f''}{f'}\right)'\right]=\frac{f^2}{f'}+2.$$

On a ici

$$u+v=c\omega-c(U_0+V_0);$$

posons $f(U+V)=cf_1(u+v)$, $u=v=\alpha$. On en déduit

$$f'(\omega)=\frac{df}{d\omega}=\frac{c\,df_1}{d\omega}=\frac{c^2df_1}{d\alpha}, \qquad f''(\omega)=\frac{d}{d\omega}\left(c^2\frac{df_1}{d\alpha}\right)=c^3f''_1,$$

$$\frac{f''}{f'}=c\frac{f''_1}{f'_1}, \qquad \left(\frac{f''}{f'}\right)'=c^2\left(\frac{f''_1}{f'_1}\right)'$$

et l'équation (E_1) se réduit à

$$\alpha^2\left[f'_1+\left(\frac{f''_1}{f'_1}\right)'\right]=\frac{f_1^2}{f'_1}+2;$$

de sorte que, avec un changement de notations qui consiste à écrire f au lieu de f_1 et ω à la place de α, nous pouvons écrire, avec f fonction de $\omega=u+v$,

(69)
$$\boxed{\begin{gathered} ds^2=\frac{-2\,du\,dv}{c^2(u+v)^2f'}, \qquad u+v=\omega;\\ \delta=-(u+v)cf', \qquad \delta'=cf, \qquad \delta''=-(u+v)cf';\\ \delta_t=-(u+v)cf'\frac{t+v}{t-u}, \qquad \delta'_t=cf, \qquad \delta''_t=-(u+v)cf'\frac{t-u}{t-v};\\ \omega^2\left[f'+\left(\frac{f''}{f'}\right)'\right]=\frac{f^2}{f'}+2. \end{gathered}}$$

La constante c a disparu de l'équation différentielle qui donne f en fonction de ω; si, pour $c=1$, on a une surface lieu du point (x, y, z), la surface (x_1, y_1, z_1) avec $x=cx_1$, $y=cy_1$, $z=cz_1$ est celle qui correspond aux formules (69), de sorte que c est une constante d'homothétie; il suffit, pour l'étude théorique, de se borner à $c=1$; mais, dans les applications, il y aura lieu de voir si l'homothétie à effectuer correspond à une valeur de c réelle ou imaginaire pure. Nous avons une intégrale première de l'équation en f

(70)
$$\boxed{\left(\frac{f''}{f'}+\frac{2}{\omega}\right)^2+\frac{4f}{\omega}+\frac{2}{\omega^2}\frac{f^2}{f'}+2f'=k.}$$

Pour la solution particulière $f=\frac{2}{\omega+C}$, la constante k est nulle.

Comme plus haut, si la surface S_0 est définie par le point $X=A(u, v)$, $Y=B(u, v)$, $Z=C(u, v)$, on voit que la surface S_t est le lieu du point $X_1=A(u-t,\ v+t)$, $Y_1=B(u-t,\ v+t)$, $Z_1=C(u-t, v+t)$, qui est manifestement un autre point de S_0, de sorte que nous retrouvons bien une surface unique S_0 et ses auto-déformées; mais la surface S_∞, qui est notre surface de départ, est obtenue par un point de S_0 qui s'est éloigné indéfiniment sur la courbe $u+v=$ const. qui en est le lieu quand u, v restent fixes et que t varie. L'équation des lignes de courbure de S_t est $\frac{du^2}{(t-u)^2}-\frac{dv^2}{(t+v)^2}=0$ et sur S_∞ $du^2-dv^2=0$; sur S_∞ le changement de u, v en $u-t$, $v+t$ ne change ni le ds^2, ni δ, δ', δ'', de sorte que S_∞ est de révolution ou hélicoïdale; comme l'équation des lignes de courbure est satisfaite pour $u+v=$ const., *la surface* S_∞ *est de révolution.* L'équation des lignes de courbure de S_t donne par intégration

(71)
$$(u-t)(v+t)=C, \qquad (u-t):(v+t)=C'$$

avec les constantes C, C′ arbitraires. *Si u et v sont imaginaires conjuguées et t*

imaginaire pure, en prenant C réel, C' de module égal à 1, et, posant $t = i\theta$, $C' = \frac{\lambda + \mu i}{\lambda - \mu i}$, $u = \xi + i\eta$, $v = \xi - i\eta$, on a les équations réelles

$$(72) \qquad \xi^2 + (\eta - \theta)^2 = C, \qquad \frac{\xi}{\lambda} = \frac{\eta - \theta}{\mu},$$

de sorte que les *lignes de courbure sont, dans la représentation conforme de la surface sur le plan* ξ, η *représentées pour* S_t *par des cercles concentriques pour l'un des systèmes, et par des droites concourantes dans l'autre; quand* t (*ou* θ) *varie, le centre des cercles concentriques décrit la droite* $O\eta$ (*qui est un cercle de l'autre famille, en se plaçant au point de vue anallagmatique*).

On peut donc dire, toujours du même point de vue, que *les* ∞^1 *réseaux obtenus comprennent d'abord : les cercles orthogonaux à un cercle fixe réel* Γ, *puis les cercles issus d'un point fixe* F *situé sur* Γ : en prenant sur Γ un point arbitraire F', le second faisceau de cercles se compose des cercles issus de F et F' et le premier du faisceau dont F et F' sont les points de Poncelet; on peut donc dire que ce type (qui est le cas C de M. Cartan) est intermédiaire entre les cas A et B qui sont caractérisés par deux cercles Γ et Γ' orthogonaux. Si Γ est fixe et si le centre de Γ' est extérieur à Γ, on a le cas A; quand le centre de Γ' se déplace et tend vers un point de Γ, on obtient le cas C; ensuite le centre de Γ' entrant dans Γ, on obtient le cas B.

Si u et v sont tels que u et $(-v)$ soient imaginaires conjuguées, et si t est réel, on pose $v = -v_1$, $u = \xi + i\eta$, $-v = v_1 = \xi - i\eta$ et les images des lignes de courbure de S_t sont

$$(\xi - t)^2 + \eta^2 = C, \qquad \frac{\xi - t}{\lambda} = \frac{\eta}{\mu},$$

et la disposition des ∞^1 réseaux est la même que précédemment, sauf que les rôles de $O\xi$ et $O\eta$ s'échangent.

Pour le cas C *étudié ici, il y a un réseau exceptionnel correspondant à* S_∞ : *on l'obtient en supposant qae* F' *vienne en* F, *on a ainsi d'une part les cercles orthogonaux à* Γ *en* F *et d'autre part les cercles tangents à* Γ *en* F.

Si nous nous rappelons les résultats

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = -2icf, \qquad \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)^2 = -4(u+v)^2 c^2 f^2, \qquad ds^2 = \frac{-2\,du\,dv}{c^2(u+v)^2 f'},$$

on voit que si u, v sont imaginaires conjuguées, et c, t imaginaires pures, en supposant f fonction réelle de la variable réelle $\omega = u + v$, si $\frac{df}{d\omega}$ est positive, le ds^2 est réel, défini positif, les images des lignes de courbure sont réelles, les rayons R, R' aussi; *donc les surfaces* S_t *et* S_∞ *sont réelles*; l'intégrale première s'écrit

$$\left(\frac{f''}{f'} + \frac{2}{\omega}\right)^2 + \frac{2}{\omega^2 f'}[f + \omega f']^2 = k.$$

Les conditions indiquées exigent que la *constante k soit positive*, de sorte que, pour $k = 0$, on ne trouve aucune surface réelle, ce qui est bien d'accord avec ce fait que la solution $f = \frac{2}{\omega + C}$, qui fait retrouver diverses surfaces de la seconde famille, ne donne aucune surface réelle. On remarque encore que $k = 0$ donne aussi la solution $f = \frac{C}{\omega}$ qui conduit au ds^2 du plan, mais nous avons écarté les surfaces développables.

Remarquons enfin que si l'on prend u, $-v$ imaginaires conjuguées, c, t réelles, f imaginaire pure, f' réelle négative, on a aussi des surfaces réelles : mais il suffit de poser $u = iu_1$, $v = iv_1$ pour être ramené au cas u_1, v_1 imaginaires conjuguées; en tous cas, cela nous confirme bien que le cas C est le cas intermédiaire entre les cas A et B. Comme précédemment la surface S_∞ est une auto-déformée à la limite de S_1 et peut être regardée comme provenant de S_1 après un mouvement de rotation infiniment grand.

9. Surfaces révolutives ou hélicoïdales. Intégrale première d'Hazzidakis. — Hazzidakis n'a pas dit comment il a découvert l'intégrale première de l'équation différentielle qui détermine f en fonction de $U + V$. Nous allons y arriver en déterminant explicitemennt les surfaces hélicoïdales ou révolutives qui figurent dans la famille O.B.

Avant d'aborder cette question, signalons que *la plupart des résultats relatifs au second type de la troisième classe peuvent se déduire, par passage convenable à la limite, des résultats relatifs au premier type.*

En effet, prenons les formules (47) et posons

$$U = \varepsilon u, \qquad V = \varepsilon u, \qquad f(\omega) = f(\varepsilon u + \varepsilon v) = \frac{1}{\varepsilon} f_1(u + v) = \frac{1}{\varepsilon} f_1(\omega_1);$$

$$\omega = U + V = \varepsilon(u + v) = \varepsilon\omega_1, \qquad u + v = \omega_1;$$

$$f'(\omega) = \frac{df}{d\omega} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\omega} f_1(\omega_1) = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d}{d\omega_1} f_1(\omega_1) = \frac{1}{\varepsilon^2} f'_1(\omega_1);$$

$$f'' = \frac{1}{\varepsilon^3} f''_1, \qquad \frac{f''}{f'} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{f''_1}{f'_1}, \qquad \left(\frac{f''}{f'}\right)' = \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{f''_1}{f'_1}\right)'.$$

On remarque alors que l'on a, en reprenant les formules (47),

$$\frac{ds^2}{\varepsilon^2} = \frac{-2\,du\,dv}{f'_1\left(\frac{\operatorname{sh}\varepsilon\omega_1}{\varepsilon}\right)^2}, \qquad \left(\frac{f''_1}{f'_1}\right)' + f'_1 - \left(\frac{f_1^2}{f'_1} + 2\right)\left(\frac{\varepsilon}{\operatorname{sh}\varepsilon\omega_1}\right)^2 = 0.$$

Si donc nous considérons la surface lieu du point $\frac{x}{\varepsilon}$, $\frac{y}{\varepsilon}$, $\frac{z}{\varepsilon}$, nous aboutissons, en faisant tendre ε vers zéro, aux formules qui définissent le second type de la troisième classe, puisque $\frac{\operatorname{sh}\varepsilon\omega_1}{\varepsilon}$ tend vers ω_1; ceci explique aussi, pourquoi, au point de vue de la réalité, les deux espèces différentes

$$ds^2 = \frac{-2\,dU\,dV}{f'\,\mathrm{sh}^2(U+V)}, \qquad ds^2 = \frac{2\,du_1\,dV_1}{f'_1\,\sin^2(U_1+V_1)}$$

ne conduisent qu'à une espèce unique dans le second type de la troisième classe. Cette remarque nous servira pour simplifier l'exposé relatif aux surfaces exceptionnelles, hélicoïdales ou révolutives. Elle explique aussi pourquoi il était opportun d'adopter la fonction $\mathrm{sh}(U+V)$ au lieu de $\mathrm{ch}(U+V)$; la fonction sh est plus commode pour le passage à la limite.

Prenons maintenant le premier type à la troisième classe et écrivons les formules

$$(73)\quad \begin{cases} ds^2 = \dfrac{-2\,dU\,dV}{f'\,\mathrm{sh}^2(U+V)}, \qquad \delta = -e^{\omega}\,\mathrm{sh}\,\omega f', \qquad \delta' = f, \qquad \delta'' = -e^{-\omega}\,\mathrm{sh}\,\omega f', \\ \left(\dfrac{f''}{f'}\right)' + f' - \dfrac{2}{\mathrm{sh}^2\omega} - \dfrac{f^2}{f'\,\mathrm{sh}^2\omega} = 0. \end{cases}$$

Nous avons expliqué que ces formules conduisent à une surface hélicoïdale; on sait, par quadratures, obtenir tous les hélicoïdes définis par leur ds^2 (à condition de connaître aussi les *parallèles :* ici $U+V = \text{const.}$ donne ces courbes); mais il sera plus avantageux de suivre la méthode d'Hazzidakis, qui consiste à former les équations aux dérivées partielles fournissant les coordonnées du point courant d'une surface dont on connaît les deux premières formes fondamentales.

Si l'on pose $x_1 = \dfrac{\partial x}{\partial U}$, $x_2 = \dfrac{\partial x}{\partial V}$, la théorie de la déformation montre que x_1, x_2 satisfont aux équations linéaires

$$(74)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \log x_1}{\partial U} = -\dfrac{f''}{f'} - \dfrac{2\,\mathrm{ch}\,\omega}{\mathrm{sh}\,\omega} - \dfrac{e^{\omega}\,\mathrm{sh}\,\omega f'}{f}\,\dfrac{\partial \log x_1}{\partial V}, \\ \dfrac{\partial \log x_2}{\partial V} = -\dfrac{f''}{f'} - \dfrac{2\,\mathrm{ch}\,\omega}{\mathrm{sh}\,\omega} - \dfrac{e^{-\omega}\,\mathrm{sh}\,\omega f'}{f}\,\dfrac{\partial \log x_2}{\partial U}. \end{cases}$$

Hazzidakis fait remarquer que *l'équation en x_1 s'intègre complètement, au moyen d'une quadrature, si l'on en connaît une solution particulière :* en principe, cela exigerait que f soit déjà solution de l'équation différentielle rappelée en (72), mais ici nous n'aurons pas à invoquer cette propriété. Ensuite, l'équation en x_2, compte tenu de $\dfrac{\partial x_2}{\partial U} = \dfrac{\partial x_1}{\partial V}$, fournit x_2 en termes finis (parce que x_2 satisfait à deux équations linéaires simultanées); or, et c'est là que l'on trouve l'intégrale première d'Hazzidakis, la quadrature nécessaire pour avoir x_1 se fait ici sans imposer de condition à f; mais, comme cette condition ne peut disparaître, on la retrouve au moment de calculer x_2 sous une forme différente de celle déjà obtenue, f figurant encore au degré 3, et *cette nouvelle équation renferme une constante arbitraire : l'élimination de la dérivée troisième fournit donc l'intégrale première annoncée.*

En posant $z = \log x_1$, l'équation qui fournit x_1 se ramène à l'intégration des équations

$$(75)\qquad \frac{dU}{1} = \frac{dV}{e^{\omega}\operatorname{sh}\omega\frac{f'}{f}} = \frac{dz}{-\frac{f''}{f'} - \frac{2\operatorname{ch}\omega}{\operatorname{sh}\omega}}.$$

On forme aussitôt le rapport $\dfrac{d\omega}{1 + e^{\omega}\operatorname{sh}\omega\frac{f'}{f}}$ égal à chacun des précédents; posons

$$(76)\qquad \left\{\begin{aligned} &\theta = \int dU - \frac{d\omega}{1 + e^{\omega}\operatorname{sh}\omega\frac{f'}{f}} = \int \frac{e^{\omega}\operatorname{sh}\omega f' dU - f dV}{e^{\omega}\operatorname{sh}\omega f' + f} = \int \frac{\delta dU + \delta' dV}{\delta - \delta'}, \\ &\theta = U + \int \frac{\delta' d\omega}{\delta - \delta'}, \qquad \varphi(\omega) = \int \frac{-\left(\frac{f''}{f'} + \frac{2\operatorname{ch}\omega}{\operatorname{sh}\omega}\right) f d\omega}{e^{\omega}\operatorname{sh}\omega f' + f}. \end{aligned}\right.$$

L'équation $z - \varphi(\omega) = \log H(\theta)$ ou, si l'on préfère, $x_1 = H(\theta)e^{\varphi(\omega)}$ où $H(\theta)$ est une fonction arbitraire de θ, donne l'intégrale générale de l'équation en x_1; il faut montrer que la quadrature φ se fait en termes finis, *quelle que soit la fonction* f; on a, en effet, comme on le vérifie aisément, possibilité d'écrire, en choisissant la constante d'intégration

$$(77)\qquad e^{\varphi} = \frac{(e^{\omega}\operatorname{sh}\omega f' + f)}{f'\operatorname{sh}^2\omega} = -(e^{\omega}\operatorname{sh}\omega f' + f)F.$$

L'intégrale qui figure dans θ ne se calcule pas en termes finis. Donc x_1 est fourni par l'équation

$$(78)\qquad x_1 = (\delta - \delta')FH(\theta),$$

où H est une fonction arbitraire de l'expression θ, où θ est donnée par la quadrature indiquée en (76); j'écrirai

$$(77)\qquad \theta = U + I, \qquad I = \int \frac{\delta' d\omega}{\delta - \delta'}.$$

Pour la même raison, on trouverait

$$(80)\qquad \left\{\begin{aligned} &x_2 = (\delta'' - \delta')FK(\eta), \\ &\eta = V + \int \frac{\delta' d\omega}{\delta'' - \delta'} = \int \frac{\delta' dU + \delta'' dV}{\delta'' - \delta'} = \int \frac{e^{-\omega}\operatorname{sh}\omega f' dV - f dU}{e^{-\omega}\operatorname{sh}\omega f' + f}, \\ &\eta = V + J, \qquad J = \int \frac{\delta' d\omega}{\delta'' - \delta'}; \end{aligned}\right.$$

η se calcule au moyen de la quadrature J; $K(\eta)$ est une fonction arbitraire de η. Or, si nous appliquons la méthode suggérée par Hazzidakis, nous écrivons la seconde équation (74) sous la forme

$$(81)\qquad \frac{\partial x_2}{\partial V} = -\left(\frac{f''}{f'} + \frac{2\operatorname{ch}\omega}{\operatorname{sh}\omega}\right)x_2 + \frac{\delta''}{\delta'}\frac{\partial x_2}{\partial U}.$$

Nous dérivons en U et remarquons que $\frac{\partial x_2}{\partial U} = \frac{\partial x_1}{\partial V}$, ce qui donne

$$(82) \qquad \frac{\partial^2 x_1}{\partial V^2} = -\left[\left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{2}{\operatorname{sh}^2\omega}\right] x_2 - \left(\frac{f''}{f'} + \frac{2\operatorname{ch}\omega}{\operatorname{sh}\omega}\right)\frac{\partial x_1}{\partial V} + \frac{\partial}{\partial U}\left(\frac{\delta''}{\delta'}\frac{\partial x_1}{\partial V}\right).$$

C'est une équation qui donne x_2 en termes finis dès que l'on a calculé x_1; autrement dit, si dans (82) nous remplaçons x_1, x_2 par leurs valeurs (78), (80), nous avons une relation liant les fonctions $H(\theta)$, $K(\eta)$; mais alors il revient au même de partir des équations (78), (80) et d'égaler $\frac{\partial x_1}{\partial V}$ et $\frac{\partial x_2}{\partial U}$; on trouve ainsi

$$H\frac{d}{d\omega}[(\delta-\delta')F] + (\delta-\delta')FH'\frac{\delta'}{\delta-\delta'} = K\frac{d}{d\omega}[(\delta''-\delta')F] + (\delta''-\delta')FK'\frac{\delta'}{\delta''-\delta'}.$$

Or, d'après les équations (3) du début,

$$\frac{d}{d\omega}(F\delta) = F\frac{d\delta'}{d\omega}, \qquad \frac{d}{d\omega}(F\delta'') = \frac{F\,d\delta'}{d\omega}.$$

La relation que nous obtenons s'écrit donc sous la forme très simple

$$(83) \qquad \frac{H'-K'}{H-K} = \frac{\frac{dF}{d\omega}}{F} \qquad \left(H' = \frac{dH}{d\theta},\ K' = \frac{dK}{d\theta}\right).$$

F n'est pas une constante (le cas des développables exclu); $\frac{dF}{d\omega}$ n'est pas nul et $H'-K'$ ne peut être nulle, à moins que $H-K$ ne soit nul aussi, c'est-à-dire si H et K sont égaux à une même constante; si H et K sont variables, *nous pourrons considérer ω et U comme variables indépendantes;* en écrivant $\theta = U + \int\frac{\delta'\,d\omega}{\delta-\delta'}$, $\eta = \omega - U + \int\frac{\delta'\,d\omega}{\delta''-\delta'}$ et dérivant par rapport à U l'équation (83) nous obtenons

$$(84) \qquad (H''+K'')(H-K) - (H'^2 - K'^2) = 0,$$

où cette fois nous n'avons plus que deux arguments θ, η (*qui peuvent être regardés comme variables indépendantes*) *et les fonctions* $H(\theta)$, $K(\eta)$. En dérivant en θ, puis η, nous obtenons $H'''K' - K'''H' = 0$: le cas $H' = K' = 0$ a déjà été considéré et a fourni pour H, K la même valeur constante; donc, en dehors de ce cas nous avons $\frac{H'''}{H'} = \frac{K'''}{K'} = a^2$, où a est une constante, puis $H'' = a^2H + b$, $K'' = a^2K + b_1$, $H'^2 = a^2H^2 + 2bH + c$, $K'^2 = a^2K^2 + 2bK + c_1$, où a, b, c, b_1, c_1 sont des constantes; (84) se réduit alors à $(b_1 - b)H - c = (b - b_1)K - c_1$ et, puisque nous avons supposé H, K non constants, on a $b = b_1$ $c = c_1$, de sorte que nous avons le résultat définitif

$$(85) \qquad H'^2 = a^2H^2 + 2bH + c, \qquad K'^2 = a^2K^2 + 2bK + c,$$

et nous avons deux cas à distinguer : $a \neq 0$, $a = 0$.

10. Troisième classe, premier type. Surfaces hélicoïdales, première subdivision. — Nous prenons d'abord $a \neq 0$; l'équation différentielle qui donne H contient les trois constantes arbitraires a, b, c, puis l'intégration donne une quatrième constante; nous pouvons donc écrire avec trois constantes arbitraires nouvelles A, B, C,

(86) $$H = A\,\mathrm{sh}\,a\theta + B\,\mathrm{ch}\,a\theta + C.$$

On vérifie sans peine que l'on doit avoir

$$A^2 - B^2 = \frac{a^2 c - b^2}{a^4}, \qquad C = -\frac{b}{a^2},$$

de sorte que, si nous écrivons de même

(87) $$K = A_1\,\mathrm{sh}\,a\eta + B_1\,\mathrm{ch}\,a\eta + C_1,$$

nous aurons

$$A^2 - B^2 = A_1^2 - B_1^2, \qquad C_1 = C;$$

puisque, provisoirement, θ et η sont définis à une constante additive près, on peut écrire $\eta = \bar\eta + \eta_0$, où $\bar\eta$ est la nouvelle variable, et η_0 une constante quelconque; on a alors

$$K = (A_1\,\mathrm{ch}\,a\eta_0 + B_1\,\mathrm{sh}\,a\eta_0)\,\mathrm{sh}\,a\bar\eta + (A_1\,\mathrm{sh}\,a\eta_0 + B_1\,\mathrm{ch}\,a\eta_0)\,\mathrm{ch}\,a\bar\eta + C.$$

Si la différence $A^2 - B^2 = A_1^2 - B_1^2$ n'est pas nulle et si $\bar A$, $\bar B$ sont deux nombres tels que $\bar A^2 - \bar B^2$ soit égal à $A_1^2 - B_1^2$ ou $A^2 - B^2$, on a possibilité de choisir η_0, de sorte que

$$A_1\,\mathrm{ch}\,a\eta_0 + B_1\,\mathrm{sh}\,a\eta_0 = \bar A, \qquad A_1\,\mathrm{sh}\,a\eta_0 + B_1\,\mathrm{ch}\,a\eta_0 = \bar B,$$

car on a un système linéaire en $\mathrm{ch}\,a\eta_0$, $\mathrm{sh}\,a\eta_0$ dont le déterminant est égal à $A_1^2 - B_1^2$; il sera avantageux de prendre $\bar A = A$, $\bar B = B$, de sorte que K s'exprime au moyen de η comme H au moyen de θ. (Il arrivera aussi qu'on pourra être amené à prendre $\bar A = A$ et $\bar B = -B$). Écrivons donc, ce qui ne restreint pas la généralité quand $A^2 - B^2$ n'est pas nul,

(86′) $$H = A\,\mathrm{sh}\,a\theta + B\,\mathrm{ch}\,a\theta + C, \qquad K = A\,\mathrm{sh}\,a\eta + B\,\mathrm{ch}\,a\eta + C.$$

La relation

$$\frac{H' - K'}{H - K} = \frac{1}{F}\frac{dF}{d\omega}$$

devient, par un calcul aisé,

(88) $$a.\frac{A\,\mathrm{sh}\left(a.\dfrac{\theta+\eta}{2}\right) + B\,\mathrm{ch}\left(a.\dfrac{\theta-\eta}{2}\right)}{A\,\mathrm{ch}\left(a.\dfrac{\theta+\eta}{2}\right) + B\,\mathrm{sh}\left(a.\dfrac{\theta+\eta}{2}\right)} = -\frac{f''}{f'} - \frac{2\,\mathrm{ch}\,\omega}{\mathrm{sh}\,\omega}.$$

C'est une équation en termes finis qui détermine $(\theta+\eta)$ *en fonction de* ω, de sorte que les deux quadratures nécessaires pour obtenir θ, η reviennent en réalité à une seule : *nous allons voir, dans un instant, que ceci conduit à l'intégrale première donnée par Hazzidakis pour l'équation d'ordre trois que vérifie* $f(\omega)$. L'équation (88) fournit explicitement au moyen de f et ses dérivées la fonction $\operatorname{Th} a\left(\frac{\theta+\eta}{2}\right)$.

Si l'on suppose $A^2 - B^2 = A_1^2 - B_1^2 = 0$, on a le choix entre

1° $H = Be^{a\theta} + C, \quad K = B_1 e^{a\eta} + C;$

2° $H = Be^{-a\theta} + C, \quad K = B_1 e^{a\eta} + C;$

3° $H = Be^{a\theta} + C, \quad K = B_1 e^{-a\eta} + C;$

4° $H = Be^{-a\theta} + C, \quad K = B_1 e^{-a\eta} + C.$

Le cas 4° revient à 1° en changeant a en $(-a)$; de même 2° et 3° reviennent au même; il suffit donc d'étudier 1° et 2°. Le cas 1° est impossible; on aurait en effet

$$\frac{H'-K'}{H-K} = a = \frac{1}{F}\frac{dF}{d\omega}, \qquad \text{d'où} \quad F = \lambda e^{a\omega} = \frac{-1}{f'\operatorname{sh}^2\omega}.$$

D'autre part l'équation (71) s'écrit

$$\left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{2}{\operatorname{sh}^2\omega} = \frac{f^2}{f'\operatorname{sh}^2\omega} - f';$$

or, puisque F est $\frac{-1}{f'\operatorname{sh}^2\omega}$, on a

$$\frac{1}{F}\frac{dF}{d\omega} = -\frac{f''}{f'} - \frac{2\operatorname{ch}\omega}{\operatorname{sh}\omega};$$

si $\frac{1}{F}\frac{dF}{d\omega}$ est égal à a, $\left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{2}{\operatorname{sh}^2\omega}$ est nul et par suite on aurait

$$\frac{f'}{f} = \frac{\varepsilon}{\operatorname{sh}\omega} \qquad \text{où } \varepsilon \text{ est } \pm 1;$$

cette équation est incompatible avec $f' = \frac{-e^{-a\omega}}{\lambda\operatorname{sh}^2\omega}$. Il reste donc à étudier le cas 1° qui donne

$$\frac{H'-K'}{H-K} = a\,\frac{Be^{-a\theta} + B_1 e^{a\eta}}{B_1 e^{a\eta} - Be^{-a\theta}},$$

en égalant ce rapport à $\frac{1}{F}\frac{dF}{d\omega}$, *on a encore une équation, au fond équivalente à* (88), *qui détermine* $(\theta+\eta)$ *en fonction de* ω.

Si l'on prend la forme réduite (86'), on peut encore la simplifier en remplaçant θ, η par $\bar\theta+\alpha$, $\bar\eta+\alpha$, où α est une constante et la réduire à $H = \bar B \operatorname{ch} a\bar\theta + C$, $K = \bar B \operatorname{ch} a\bar\eta + C$; supprimons le surlignage, on a ainsi, en écrivant (86′) et (88) avec $A = 0$,

$$(89) \qquad \left\{ \begin{aligned} & H = B \operatorname{ch} a\theta + C, \qquad K = B \operatorname{ch} a\eta + C, \\ & a : \operatorname{th}\left(a . \frac{\theta + \eta}{2}\right) = -\frac{f''}{f'} - \frac{2 \operatorname{ch} \omega}{\operatorname{sh} \omega}. \end{aligned} \right.$$

Rappelons maintenant

$$(90) \qquad \left\{ \begin{aligned} \theta &= \int \frac{\delta\, dU + \delta'\, dV}{\delta - \delta'} = U - \int \frac{f\, d\omega}{e^{\omega} \operatorname{sh} \omega f' + f}, \\ \eta &= \int \frac{\delta'\, dU + \delta''\, dV}{\delta'' - \delta'} = V - \int \frac{f\, d\omega}{e^{-\omega} \operatorname{sh} \omega f' + f}, \\ \theta + \eta &= \int \frac{(\delta\delta'' - \delta'^2)\, d\omega}{(\delta - \delta')(\delta'' - \delta')} = \int \frac{(f'^2 \operatorname{sh}^2 \omega - f^2)\, d\omega}{f^2 + 2ff' \operatorname{sh} \omega \operatorname{ch} \omega + f'^2 \operatorname{sh}^2 \omega}. \end{aligned} \right.$$

Nous avons ainsi, en dérivant la dernière équation (89), où les deux membres sont des fonctions de ω seul,

$$(91) \qquad \frac{a^2}{2}\left[1 - \operatorname{Coth}^2\left(a . \frac{\theta + \eta}{2}\right)\right] \frac{f'^2 \operatorname{sh}^2 \omega - f^2}{f^2 + 2ff' \operatorname{sh} \omega + f'^2 \operatorname{sh}^2 \omega} = -\left(\frac{f''}{f'}\right)' + \frac{2}{\operatorname{sh} \omega} = \frac{f'^2 \operatorname{sh}^2 \omega - f^2}{f' \operatorname{sh}^2 \omega}.$$

[Le dernier membre est obtenu en tenant compte ds (73)]. La quantité $f' \operatorname{sh}^2 \omega - f^2$ ne peut être nulle : la vérification, en effet, a eu lieu un peu plus haut. Il reste donc, en tenant compte de la valeur de $\operatorname{th}\left(a \frac{\theta + \eta}{2}\right)$ donnée par (89), *l'intégrale première de Hazzidakis*

$$(92) \qquad a^2 = \frac{2(f^2 + 2ff' \operatorname{sh} \omega \operatorname{ch} \omega + f'^2 \operatorname{sh}^2 \omega)}{f' \operatorname{sh}^2 \omega} + \left(\frac{f''}{f'} + \frac{2 \operatorname{ch} \omega}{\operatorname{sh} \omega}\right)^2.$$

La forme réduite $H = B e^{-a\theta} + C$, $K = B_1 e^{a\eta} + C$ peut s'écrire

$$H = e^{-a(\theta - \theta_0)} + C, \qquad K = e^{a(\eta - \eta_0)} + C,$$

ou simplement

$$H = e^{-a\theta} + C, \qquad K = e^{a\eta} + C,$$

en faisant rentrer θ_0 et η_0 dans θ, η, qui ne sont définies qu'à une constante additive près; cela revient à avoir remplacé B et B_1 par l'unité; on constate alors que la dernière équation (89) est encore vérifiée. Nous avons ainsi vérifié que les constantes A, B, C, A_1, B_1, C_1 qui figurent dans (86) et (87) ne jouent finalement aucun rôle pour la détermination de l'équation d'Hazzidakis.

On pourra faire une remarque utile pour la suite : la quantité connue en termes finis est $\operatorname{th}\left[a \frac{(\theta + \eta)}{2}\right]$, de sorte que $a\left(\frac{\theta + \eta}{2}\right)$ est connu à un multiple près de $i\pi$; si donc θ a été choisi, la quantité η se trouve déterminée à un multiple entier près de $\frac{2i\pi}{a}$; cette remarque pourra jouer pour l'étude de la réalité, car θ et η pourront être soumises à des obligations telles que celles-ci : θ, η imaginaires conjuguées ou θ et $\eta + \frac{2i\pi}{a}$ imaginaires conjuguées.

Nous avons obtenu ces résultats en étudiant la coordonnée x; y et z conduisent nécessairement au même résultat pour l'intégrale première d'Hazzidakis, de sorte que a^2 reste le même (remplacer a par $-a$ est indifférent); quant à θ, η, elles sont définies intrinsèquement, donc restent les mêmes. Donc chaque coordonnée est fournie par une quadrature de la forme

$$(93)\quad \begin{cases} x = \int F[(\delta-\delta')(A\,\mathrm{ch}a\theta + B\,\mathrm{sh}a\theta + C\,)dU + (\delta''-\delta')(A_1\mathrm{ch}a\eta + B_1\mathrm{sh}a\eta + C)dV], \\ y = \int F[(\delta-\delta')(A'\mathrm{ch}a\theta + B'\mathrm{sh}a\theta + C'\,)dU + (\delta''-\delta')(A'_1\mathrm{ch}a\eta + B'_1\mathrm{sh}a\eta + C')dV], \\ z = \int F[(\delta-\delta')(A''\mathrm{ch}a\theta + B''\mathrm{sh}a\theta + C'')dU + (\delta''-\delta')(A''_1\mathrm{ch}a\eta + B''_1\mathrm{sh}a\eta + C'')dV]. \end{cases}$$

C'est maintenant une pure question de patience de déterminer les constantes A, B, ..., C″ de façon à obtenir le ds^2, égal à $\dfrac{-2dU\,dV}{f'\mathrm{sh}^2(U+V)}$; un peu d'attention, joint à quelques remarques simples, abrège les tâtonnements : les expressions

$$A\,\mathrm{ch}a\theta + B\,\mathrm{sh}a\theta + C, \quad A'\mathrm{ch}a\theta + B'\mathrm{sh}a\theta + C', \quad A''\mathrm{ch}a\theta + B''\mathrm{sh}a\theta + C''$$

doivent être les paramètres directeurs d'une direction isotrope : par une orientation convenable des axes, on peut les réduire à

$$A\,\mathrm{ch}a\theta, \quad -Ai\,\mathrm{sh}a\theta, \quad A.$$

Mais alors l'expression $x+iy$ est telle que la fonction $H(\theta)$ correspondante est $Ae^{a\theta}$, de sorte que la forme *réduite* de la fonction $K(\eta)$ correspondante est $Ae^{-a\theta}$; la fonction H relative à z est A; à ce stade, il n'y a plus qu'un léger effort pour obtenir A et l'on arrive ainsi aux formules définitives

$$(94)\quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int F[(\delta-\delta')\,\mathrm{ch}\,a\theta\,dU + (\delta''-\delta')\,\mathrm{ch}\,a\eta\,dV], \\ y = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int F[-(\delta-\delta')\,\mathrm{sh}\,a\theta\,dU + (\delta''-\delta')\,\mathrm{sh}\,a\eta\,dV], \\ z = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int F[(\delta-\delta')\,dU + (\delta''-\delta')\,dV]. \end{cases}$$

Les vérifications sont aisées à faire; le ds^2 est bien égal à $2F\,dU\,dV$ et l'on a bien, pour les coefficients de Gauss,

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial U} & \dfrac{\partial x}{\partial V} & \dfrac{\partial^2_x}{\partial U^2} \end{vmatrix} = \delta F^2, \qquad D' = \delta' F^2, \qquad D'' = \delta'' F^2$$

(car on pourrait craindre d'avoir $D = -\delta F^2$, $D' = -\delta' F^2$, $\theta'' = -\delta'' F^2$).

Il est facile de retrouver les conditions de réalité; nous avons trouvé deux cas :

Premièrement: U et $(-V)$ imaginaires conjuguées, donc ω imaginaire pure; $f(\omega)$ est une fonction imaginaire pure, de sorte que $f' = \frac{df}{d\omega}$ est réelle; nous avons vu que f' doit être négative. Nous avons vu que k, égal à a^2, est négatif pour une surface réelle; donc a est imaginaire pure; les expressions de $F = \frac{-1}{f' \operatorname{sh}^2 \omega}$, $\delta = -e^{\omega} \operatorname{sh} \omega f'$, $\delta' = f$, $\delta'' = -e^{-\omega} \operatorname{sh} \omega f'$ montrent que δ, δ', δ'' ont pour conjuguées $-\delta''$, $-\delta'$, $-\delta$ et que F est réel négatif; la relation (89) qui donne $\theta + \eta$ montre que $\operatorname{ch}\left(a\frac{\theta+\eta}{2}\right)$ est réel et que l'argument $\left[a\frac{\theta+\eta}{2} - i\frac{\pi}{2}\right]$ est réel (ou égal à un nombre réel augmenté d'un multiple de $i\pi$) si la valeur de $\operatorname{th}\left(a\frac{\theta+\eta}{2}\right)$ est extérieure à l'intervalle $(-1, +1)$; or nous avons vu qu'en posant $f = if_1(\omega_1)$, $i\omega = \omega_1$, l'intégrale première de Hazzidakis prend la forme (58′) que nous recopions

$$(58') \qquad \left(\frac{f_1''}{f_1'} + \frac{2}{\operatorname{tang} \omega_1}\right)^2 + \frac{2}{f_1' \sin^2 \omega_1} [(f_1 + f_1' \cos \omega_1 \sin \omega_1)^2 + f_1'^2 \sin^4 \omega_1] = -a^2,$$

où f_1' est réelle *positive*; $(-a^2)$ est réel, *positif*, et

$$1 : \operatorname{Th}\left(a\frac{\theta+\eta}{2}\right) = -\frac{i}{a}\left(\frac{f_1''}{f_1'} + \frac{2}{\operatorname{tang} \omega_1}\right).$$

D'après (58′), la quantité réelle $\frac{f_1''}{f_1'} + \frac{2}{\operatorname{tang} \omega_1}$ a son module inférieur à celui de la quantité réelle $\frac{i}{a}$; par suite $\operatorname{th}\left(a\frac{\theta+\eta}{2}\right)$ est réel et a son module supérieur à 1; par suite, les quantités θ et $\left(\frac{i\pi}{a} - \eta\right)$ définies par les intégrales

$$\int \frac{\delta\, dU + \delta'\, dV}{\delta - \delta'}, \quad -\int \frac{\delta'\, dU + \delta''\, dV}{\delta'' - \delta'}$$

peuvent être supposées conjuguées, et alors, puisque a est une imaginaire pure, $\left(a\frac{\theta+\eta}{2} - i\frac{\pi}{2}\right)$ est réel. On vérifie sans peine que x, y, z sont réelles, et nous avons ainsi une vérification précieuse des prévisions données au paragraphe 7. Les cosinus directeurs de la normale peuvent être pris égaux à

$$(95) \qquad \frac{-i \operatorname{ch}\left(a\frac{\eta-\theta}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(a\frac{\eta+\theta}{2}\right)}, \quad \frac{\operatorname{sh}\left(a\frac{\eta-\theta}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(a\frac{\eta+\theta}{2}\right)}, \quad \frac{\operatorname{ch}\left(a\frac{\eta+\theta}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(a\frac{\eta+\theta}{2}\right)}$$

et sont réels. Les courbes $\eta + \theta$ const. ou $\omega = $ const. sont ce que nous avons appelé les *parallèles* de l'hélicoïde; elles sont des hélices circulaires et, le long de chacune, la normale à la surface fait un angle constant avec l'axe de l'hélicoïde : *les formules* (95) *prouvent que cet axe est parallèle à* Oz.

Deuxièmement : pour la troisième classe O.B., premier type, quand U, V sont imaginaires conjuguées, on obtient des surfaces O.B. réelles, auto-déformées d'une surface réelle unique, mais la surface hélicoïdale exceptionnelle est imaginaire; nous ne nous en occuperons pas davantage.

Pour déterminer les hélicoïdes, nous avons suivi une très brève indication donnée par Hazzidakis (qui n'a fait aucun calcul précis relatif à ces surfaces ni indiqué comment il avait découvert son intégrale première). On aurait pu suivre une méthode beaucoup plus élémentaire — peut-être même plus naturelle —, mais qui donne des calculs assez longs et tout à fait inélégants : néanmoins la comparaison avec ce qui précède devant donner quelques résultats intéressants, donnons un aperçu de cette méthode.

On sait, par deux quadratures, déterminer les ∞^2 hélicoïdes qui ont un ds^2 donné de révolution. Ici nous avons non seulement le ds^2, mais encore la seconde forme quadratique : le ds^2 est

$$(96)\qquad \left\{\begin{array}{lll} ds^2 = \dfrac{-2\,d\mathrm{U}\,d\mathrm{V}}{f'\,\mathrm{sh}^2(\mathrm{U}+\mathrm{V})}, & \mathrm{U}+\mathrm{V}=\omega, & \mathrm{U}-\mathrm{V}=iv, \\ ds^2=\omega_1^2(d\omega^2+dv^2), & \omega_1^2=-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{f'(\omega)\mathrm{S}h^2\omega}, & \end{array}\right.$$

avec ce ds^2, sans avoir aucune hypothèse à faire sur la fonction f, nous avons, en utilisant les résultats classiques, ∞^2 hélicoïdes dépendant des constantes arbitraires h, m par les formules

$$(97)\qquad \left\{\begin{array}{l} x=\rho\cos v_1,\qquad y=\rho\sin v_1,\qquad z+\varphi(\rho)+hv_1, \\ \rho=\sqrt{\dfrac{-m^2}{2f'\mathrm{S}h^2}-h^2},\quad d\varphi=\dfrac{m^2\,d\omega}{m^2+2h^2f'\mathrm{S}h^2\omega}\sqrt{\mathrm{R}},\quad dv_1=\dfrac{dv}{m}+\dfrac{2h'\mathrm{S}h^2\omega\,d\omega}{m^2+2h^2f'\mathrm{S}h^2\omega}\sqrt{\mathrm{R}}, \\ \mathrm{R}=\dfrac{m^2}{8f'\mathrm{S}h^2\omega}\left(\dfrac{f''}{f}+\dfrac{2\,\mathrm{C}h\,\omega}{\mathrm{S}h\,\omega}\right)^2-\dfrac{1}{2f'\mathrm{S}h^2\omega}-\dfrac{h^2}{m^2}; \end{array}\right.$$

h et m sont deux constantes arbitraires; les formules (97) s'appliquent, *quelle que soit la fonction* $f(\omega)$ pour donner les ∞^2 hélicoïdes dont le ds^2 est donné par (96); la seconde forme fondamentale d'un tel hélicoïde est

$$(98)\qquad \frac{\rho\dfrac{d^2\varphi}{d\rho^2}\,d\rho^2-2\,h\,d\rho\,dv_1+\rho^2\dfrac{d\varphi}{d\rho}\,dv_1^2}{\sqrt{\mathrm{R}_1}},\qquad \left[\mathrm{R}_1\equiv h^2+\rho^2\left(1+\frac{d\varphi}{d\rho}\right)^2\right].$$

En identifiant cette forme (98) avec celle que nous connaissons *a priori* pour l'hélicoïde O. B., à savoir

$$(99)\qquad \frac{1}{if'\mathrm{S}h^2\omega}\left[e^{\omega}\mathrm{S}h\,\omega f'\,d\mathrm{U}^2-2f\,d\mathrm{U}\,d\mathrm{V}+e^{-\omega}\mathrm{S}h\,\omega f'\,d\mathrm{V}^2\right],$$

nous avons trois équations liant h, m et la fonction $f(\omega)$, jusqu'à ses dérivées d'ordre trois inclusivement; il suffit de remplacer $d\rho$ par $\frac{d\rho}{d\omega}d\omega$, $\frac{d^2\varphi}{d\varphi^2}\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2$

par $\dfrac{d^2\varphi}{d\omega^2}-\dfrac{d\varphi}{d\omega}\dfrac{\frac{d^2\rho}{d\omega^2}}{\frac{d\rho}{d\omega}}$ pour obtenir, au lieu de (98), la forme

$$(98')\quad \frac{1}{\sqrt{R_1}}\left\{\rho\left(\frac{d^2\varphi}{d\omega^2}-\frac{d\varphi}{d\omega}\frac{\frac{d^2\rho}{d\omega^2}}{\frac{d\rho}{d\omega}}\right)(dU+dV)^2-2h\frac{d\rho}{d\omega}(dU+dV)\right.$$
$$\times\left[\frac{dU-dV}{im}+\frac{2hf'\mathrm{Sh}\,\omega^2(dU+dV)\sqrt{R}}{m^2+2h^2f'\mathrm{Sh}^2\omega}\right]$$
$$\left.+\rho^2\frac{\frac{d\varphi}{d\omega}}{\frac{d\rho}{d\omega}}\left[\frac{dU-dV}{im}+\frac{2hf'\mathrm{Sh}\,\omega^2(dU+dV)\sqrt{R}}{m^2+2h^2f'\mathrm{Sh}^2\omega}\right]^2\right\}.$$

En identifiant avec (99), nous obtenons

$$(99)\quad\left\{\begin{aligned}
&\rho\left(\frac{d^2\varphi}{d\omega^2}-\frac{d\varphi}{d\omega}\frac{\frac{d^2\rho}{d\omega^2}}{\frac{d\rho}{d\omega}}\right)-2h\frac{d\rho}{d\omega}\left(\frac{1}{im}+\frac{2hf'\mathrm{sh}^2\omega\sqrt{R}}{m^2+2h^2f'\mathrm{sh}^2\omega}\right)\\
&\qquad+\rho^2\frac{\frac{d\varphi}{d\omega}}{\frac{d\rho}{d\omega}}\left(\frac{1}{im}+\frac{2hf'\mathrm{sh}^2\omega\sqrt{R}}{m^2+2h^2f'\mathrm{sh}^2\omega}\right)^2=\frac{e^{\omega}}{i\,\mathrm{sh}\,\omega}\sqrt{R_1},\\
&\rho\left(\frac{d^2\varphi}{d\omega^2}-\frac{d\varphi}{d\omega}\frac{\frac{d^2\rho}{d\omega^2}}{\frac{d\rho}{d\omega}}\right).-4h^2\frac{d\rho}{d\omega}\frac{f'\mathrm{sh}^2\sqrt{R}}{m^2+2h^2f'\mathrm{sh}^2\omega}\\
&\qquad+\rho^2\frac{\frac{d\varphi}{d\omega}}{\frac{d\rho}{d\omega}}\left[\frac{1}{m^2}+\frac{4h^2f'^2\mathrm{sh}^4\omega.R}{(m^2+2h^2f'\mathrm{sh}^2\omega)^2}\right]=\frac{-f}{if'\mathrm{sh}^2\omega}\sqrt{R_1},\\
&\rho\left(\frac{d^2\varphi}{d\omega^2}-\frac{d\varphi}{d\omega}\frac{\frac{d^2\rho}{d\omega^2}}{\frac{d\rho}{d\omega}}\right)-2h\frac{d\rho}{d\omega}\left[\frac{-1}{im}+\frac{2hf'\mathrm{sh}^2\omega.\sqrt{R}}{m^2+2h^2f'\mathrm{sh}^2\omega}\right]\\
&\qquad+\rho^2\frac{\frac{d\varphi}{d\omega}}{\frac{d\rho}{d\omega}}\left(\frac{-1}{im}+\frac{2hf'\mathrm{sh}^2\omega.\sqrt{R}}{m^2+2h^2f'\mathrm{sh}^2\omega}\right)^2=\frac{e^{-\omega}}{i\,\mathrm{sh}\,\omega}\sqrt{R_1}.
\end{aligned}\right.$$

Nous remarquons que $\frac{d\varphi}{d\omega}$, $\frac{d\rho}{d\omega}$, R et R_1 contiennent les dérivées de f jusqu'à l'ordre 2; les seuls termes qui contiennent les dérivées d'ordre 3 sont $\frac{d^2\varphi}{d\omega^2}$ et $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$; donc si les trois équations (99) sont schématisées par (99_1), (99_2), (99_3), les deux combinaisons que nous schématiserons par (99_1)-(99_2) et (99_1)-(99_3) ne contiennent plus que les dérivées secondes de f, et les constantes h, m. On peut résoudre ces deux équations par rapport à h et m et l'on obtient ainsi l'intégrale première d'Hazzidakis par des calculs assez longs, mais n'exigeant aucune ingéniosité spéciale. Comme nous n'avons pas l'intention de faire ce calcul, nous en indiquons le résultat en comparant avec la méthode que nous avons suivie au début de ce paragraphe (méthode qui a été suggérée par une remarque d'Hazzidakis).

Nous avons constaté que la surface définie par les formules (94) est un hélicoïde dont l'axe est parallèle à Oz, exactement comme celle que définit la première ligne (97); donc on peut supposer que les deux surfaces (en choisissant convenablement les constantes d'intégration) coïncident; cela entraîne donc en comparant les cotes z

$$d\varphi + h\,dv_1 = \frac{i}{a}\left\{\frac{d\omega}{f'\operatorname{sh}^2\omega}(f + f'\operatorname{sh}\omega\operatorname{ch}\omega) + i\,dv\right\}.$$

En égalant les coefficients de $d\omega$ et dv, on a

$$h = -\frac{m}{a}, \qquad \left(\frac{f''}{f'} + \frac{2\operatorname{ch}\omega}{\operatorname{sh}\omega}\right)^2 - \frac{8h^2f'\operatorname{sh}^2\omega}{m^4} - \frac{4}{m^2} + \frac{8h^2f'\operatorname{sh}^2\omega}{m^4}\left(\frac{f}{f'\operatorname{sh}^2\omega} + \frac{\operatorname{ch}\omega}{\operatorname{sh}\omega}\right)^2 = 0.$$

Nous pouvons donc, en nous reportant à l'intégrale première trouvée par notre méthode, écrire

$$m^2 = \frac{4}{k} = \frac{4}{a^2}, \qquad \frac{h^2}{m^4} = \frac{1}{4}.$$

Ces deux équations sont compatibles avec $h = -\dfrac{m}{a}$ et nous avons ainsi

$$(100) \qquad m = \frac{2\varepsilon}{a}, \qquad h = \frac{-2\varepsilon}{a^2} \qquad (m^2 = 2\varepsilon h).$$

Donc le calcul que nous n'avons pas fait pour obtenir h et m nous donnerait, par la résolution en m et h des deux équations indiquées plus haut,

$$(101) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{4}{m^2} = \left(\frac{f''}{f'} + \frac{2\operatorname{ch}\omega}{\operatorname{sh}\omega}\right)^2 + 4f\frac{\operatorname{ch}\omega}{\operatorname{sh}\omega} + \frac{2}{\operatorname{sh}^2\omega}\frac{f^2}{f'} + 2f', \\ &h = -\frac{m}{a}. \end{aligned}\right.$$

Hazzidakis n'a pas dit comment il a obtenu son intégrale première; il était nécessaire, pour la satisfaction des chercheurs, d'indiquer au moins une méthode : nous en avons indiqué deux. Nous avons encore à énoncer quelques remarques : les formules (94) semblent exiger *quatre* quadratures : d'abord celle qui donne θ (ou η, puisque $\theta + \eta$ est obtenu en termes finis) puis les trois quadratures de différentielle totale constituant ces formules mêmes. En réalité il suffit de deux quadratures indiquées en (97) servant à calculer φ et v_1; on remarque alors que l'intégrale première d'Hazzidakis donne $\sqrt{R}$ sous forme dégagée de radical, à savoir

$$(102) \qquad \sqrt{R} = \frac{i}{af'\mathrm{sh}^2\omega}(f + f'\,\mathrm{sh}\,\omega\,\mathrm{ch}\,\omega) \qquad \left(m = \frac{2\varepsilon}{a},\ h = -\frac{2\varepsilon}{a^2}\right).$$

Ensuite θ et η eux-mêmes s'obtiennent sans aucune quadrature, car en différentiant $x = \rho\cos v_1$, $y = \rho\sin v_1$ et identifiant le résultat avec ce que donne (94), on a

$$(103) \quad \begin{cases} \dfrac{F}{2a}(\delta - \delta')\mathrm{ch}\,a\theta(d\omega + i\,dv) + \dfrac{F}{2a}(\delta'' - \delta')\mathrm{ch}\,a\eta(d\omega - i\,dv) = d\rho\cos v_1 - \rho\sin v_1\,dv_1, \\ -\dfrac{iF}{2a}(\delta - \delta')\mathrm{sh}\,a\theta(d\omega + i\,dv) + \dfrac{iF}{2a}(\delta'' - \delta')\mathrm{sh}\,a\eta(d\omega - i\,dv) = d\rho\sin v_1 - \rho\cos v_1\,dv_1, \end{cases}$$

soit un total de deux équations linéaires fournissant $\mathrm{ch}\,a\theta$, $\mathrm{ch}\,a\eta$ et deux autres analogues fournissent $\mathrm{sh}\,a\theta$, $\mathrm{sh}\,a\eta$ par formules dégagées de tout signe d'intégration et de tout radical. Ce dernier résultat n'avance d'ailleurs en rien pour l'intégration de l'équation différentielle d'ordre 2 que vérifie f : il tient simplement à ce fait que si une équation différentielle entre la variable x et la fonction y est ramenée à la forme

$$P(x, y, y', y'' \ldots) = \frac{d}{dx}Q(x, y, y', y'' \ldots),$$

la quadrature $\int (Px, y, y', y'', \ldots)\,dx$ se fait en termes finis, *quand y est une intégrale de l'équation.*

11. Troisième classe, premier type. Surfaces hélicoïdales, seconde subdivision. — Cette fois H'^2, K'^2, si nous nous reportons à l'équation (85) qui termine le paragraphe **9**, sont deux polynomes du premier degré en H ou K, $H'^2 = 2bH + c$, $K'^2 = 2bK + c$. Un *changement de notations* permet d'écrire

$$H = a\theta^2 + 2b\theta + c, \qquad K = a\eta^2 + 2b_1\eta + c_1 \qquad \text{avec } b^2 - ac = b_1^2 - ac_1,$$

on a

$$H'^2 = 4aH + 4(b^2 - ac), \qquad K'^2 = 4aK + 4(b_1^2 - ac_1);$$

il résulte de là que si a est différent de zéro, on peut, en augmentant η d'une constante, supposer $H = a\theta^2 + 2b\theta + c$, $K = a\eta^2 + 2b\eta + c$; en augmentant θ et η de la même constante, on peut encore obtenir la forme plus réduite

$$H = a\theta^2 + c, \qquad K = a\eta^2 + c;$$

on a alors

$$(104) \qquad \frac{H' - K'}{H - K} = \frac{2}{\theta + \eta} = -\frac{f''}{f'} - 2\frac{Ch\,\omega}{Sh\,\omega}.$$

Si a est nul, on a $b_1 = \varepsilon b\,(\varepsilon = \pm 1)$, $H = 2b\theta + c$, $K = 2\varepsilon b\eta + c_1$, et si b n'est pas nul, on peut adopter la forme réduite $H = 2b\theta$, $K = 2\varepsilon b\eta$;

le cas $\varepsilon = 1$ entraîne $f' \mathrm{sh}^2 \omega =$ const., relation incompatible (calcul déjà fait) avec celle qui donne f; on a donc la forme réduite

$$H = 2b\theta, \qquad K = -2b\eta, \qquad \frac{H' - K'}{H - K} = \frac{2}{\theta + \eta};$$

et nous retrouvons la formule (104). Si l'on dérive la relation (104) en se rappelant que

$$\theta + \eta = \int \frac{(f'^2 \mathrm{Sh}^2 \omega - f^2)\, d\omega}{f^2 + 2ff' \mathrm{Sh}\,\omega\, \mathrm{Ch}\,\omega + f'^2 \mathrm{Sh}^2 \omega}$$

[voir formule (90)], on a la relation

$$\frac{-2}{(\theta + \eta)^2}\, \frac{f'^2 \mathrm{Sh}^2 \omega - f^2}{f^2 + 2ff' \mathrm{Sh}\,\omega\, \mathrm{Ch}\,\omega + f'^2 \mathrm{Sh}^2 \omega} = -\left(\frac{f''}{f'}\right)' + \frac{2}{\mathrm{Sh}^2 \omega} = \frac{f'^2 \mathrm{Sh}^2 \omega - f^2}{f' \mathrm{Sh}^2 \omega}.$$

Comme plus haut, le facteur $f^2 - f'^2 \mathrm{sh}^2 \omega$ n'est pas nul, et nous obtenons

$$(105) \qquad \left(\frac{f''}{f'} + \frac{2\, \mathrm{Ch}\,\omega}{\mathrm{Sh}\,\omega}\right)^2 + \frac{2}{f' \mathrm{Sh}^2 \omega}\,(f^2 + 2ff' \mathrm{Sh}\,\omega + f'^2 \mathrm{Sh}^2 \omega) = 0.$$

C'est l'intégrale première de Hazzidakis, où la valeur de k est nulle. Finalement, et c'est tout à fait l'analogue de ce qui s'est produit au paragraphe précédent, nous avons les trois formes réduites $(H = \theta^2, K = \eta^2)$, $(H = \theta, K = -\eta)$, $(H = 1, K = 1)$, et nous arrivons aux formules, obtenues par les mêmes idées que plus haut,

$$(106) \qquad \begin{cases} x = \displaystyle\int F\left[(\delta - \delta')\, \frac{1 + \theta^2}{2}\, dU + (\delta'' - \delta')\, \frac{1 + \eta^2}{2}\, dV\right], \\ y = i \displaystyle\int F\left[(\delta - \delta')\, \frac{\theta^2 - 1}{2}\, dU + (\delta'' - \delta')\, \frac{\eta^2 - 1}{2}\, dV\right], \\ z = i \displaystyle\int - F[(\delta - \delta')\, \theta\, dU - (\delta'' - \delta')\, \eta\, dV]. \end{cases}$$

Les cosinus directeurs de la normale sont

$$\frac{i(1 - \eta\theta)}{\eta + \theta}, \qquad \frac{1 + \eta\theta}{\eta + \theta}, \qquad \frac{\theta - \eta}{\eta + \theta}.$$

Nous savons que la surface obtenue est toujours imaginaire; elle rentre d'ailleurs dans la seconde classe.

Il est intéressant de montrer comment cette seconde subdivision s'obtient à partir de la première subdivision. Supposons en effet que la constante a qui est intervenue au paragraphe précédent [formules (92) et (94)] tende vers zéro; la relation (92) se réduit à (105); θ, η sont toujours définies par les quadratures

$$\int \frac{\delta\, dU + \delta' dV}{\delta - \delta'}, \quad \int \frac{\delta' dU + \delta'' dV}{\delta'' - \delta'}$$

et la relation (89), qui donne a : $\mathrm{th}\frac{a(\theta+\eta)}{2}$, se réduit à l'équation (104) qui donne $\frac{2}{\theta+\eta}$; dans les quadratures (94), $\frac{\mathrm{sh}\,a\theta}{a}$ tend vers θ, $\frac{\mathrm{sh}\,a\eta}{a}$ vers η; en formant $\frac{x+iz}{a}$, d'après (94), on a

$$\frac{x+iz}{a}=\int \mathrm{F}(\delta-\delta')\,\frac{\mathrm{Ch}\,a\theta-1}{a^2}\,d\mathrm{U}+\mathrm{F}(\delta''-\delta')\,\frac{\mathrm{Ch}\,a\eta-1}{a^2}\,d\mathrm{V}.$$

On trouve donc, comme limite, si a tend vers zéro,

$$\int \mathrm{F}(\delta-\delta')\,\frac{\theta^2}{2}\,d\mathrm{U}+\mathrm{F}(\delta''-\delta')\,\frac{\eta^2}{2}\,d\mathrm{V}.$$

Formons de même

$$a(x-iz)=\int \mathrm{F}(\delta-\delta')(\mathrm{ch}\,a\theta+1)\,d\mathrm{U}+\mathrm{F}(\delta''-\delta')(\mathrm{ch}\,a\eta+1)\,d\mathrm{V}.$$

Si a tend vers zéro, on trouve comme limite

$$\int \mathrm{F}(\delta-\delta')\,2\,d\mathrm{U}+\mathrm{F}(\delta''-\delta')\,2\,d\mathrm{V}.$$

Or la surface (X, Y, Z), déduite de la surface (x, y, z) par les formules

$$\mathrm{X}+i\mathrm{Z}=\frac{2}{a}(x+iz),\qquad \mathrm{X}-i\mathrm{Z}=\frac{a}{2}(x-iz),\qquad \mathrm{Y}=y,$$

correspond à la surface (x, y, z) par un déplacement imaginaire, et à la limite la surface (X, Y, Z), quand a tend vers zéro, devient la surface définie par (102), à part l'ordre des coordonnées.

12. Troisième classe. Second type. Surface de révolution. — Nous pourrions recommencer les mêmes opérations que pour le premier type de la troisième classe : mais nous avons pris soin, au début du paragraphe **9**, de montrer que l'étude du second type de la troisième classe se déduit, *tout entière*, de l'étude du premier type, de sorte que les *surfaces de révolution* se déduisent, elles aussi, par passage à la limite des *surfaces hélicoïdales*. Il suffit donc d'écrire les formules suivantes, qui ont la même forme (extérieure) que précédemment.

Première subdivision. — Nous reprenons, purement et simplement, les formules (94) où F, δ, δ', δ'' se rapportent au nouveau ds^2; θ, η sont encore données par les intégrales

$$\theta=\int\frac{\delta\,du+\delta'\,dv}{\delta-\delta'},\qquad \eta=\int\frac{\delta'\,du+\delta''\,dv}{\delta''-\delta'}$$

(nous écrivons u, v au lieu de U, V) et l'on a

$$a:\mathrm{T}h\left(a\,\frac{\theta+\eta}{2}\right)=-\frac{f''}{f'}-\frac{2}{\omega}. \tag{107}$$

La fonction f satisfait à l'équation

$$\left(\frac{f''}{f'}\right)' + f' - \frac{2}{\omega^2} - \frac{f^2}{f'} = 0 \tag{108}$$

et à l'équation, intégrale première,

$$\left(\frac{f''}{f'} + \frac{2}{\omega}\right)^2 + \frac{2}{\omega^2 f'}(f + \omega f')^2 = a^2. \tag{109}$$

Seconde subdivision. — On a fait tendre a vers zéro et l'on a

$$\frac{2}{\theta + \eta} = -\frac{f''}{f'} - \frac{2}{\omega}; \tag{110}$$

f satisfait à l'équation (104) et à l'équation

$$\left(\frac{f''}{f'} + \frac{2}{\omega}\right)^2 + \frac{2}{\omega^2 f'}(f + \omega f')^2 = 0.$$

On recopie purement et simplement les formules (102) où F, δ, δ', δ'' se rapportent au nouveau ds^2.

Note complémentaire. — *Auto-déformation d'une surface; surface asymptote.* — Si une surface S est auto-déformable, son ds^2 est de révolution; en écartant le cas des surfaces à courbure totale constante, S admet exactement ∞^1 auto-applications sur elle-même. Il peut arriver que la nappe à l'infini (réelle ou imaginaire) de S soit asymptote à une surface Σ de révolution; nous supposerons que, sur S, les courbes que nous avons convenu d'appeler *parallèles* s'étendent *toutes à l'infini*; par conséquent le cas où S est un hyperboloïde et Σ son cône asymptote ou tout autre hyperboloïde homothétique est exclu. *Dans ces conditions Σ a le même ds^2 que* S (tandis que dans le cas exclu à l'instant où tout cas analogue les deux surfaces S, Σ ont des ds^2 différents); la circonstance tient à ce que nous pouvons tracer sur S deux *parallèles* différents P_1, P_2 définissant sur S une région en forme de ruban illimité, que nous décomposons en quadrilatères curvilignes par des *méridiens* M_1, M_2, ..., M_n, ... issus de points m_1, m_2, ..., m_n, ... équidistants pris sur P_1; tous les quadrilatères curvilignes tels que celui de frontières M_nP_1, $M_{n+1}P_2$ sont applicables les uns sur les autres dans toute leur étendue; d'autre part, puisque S est asymptote à Σ, les *parallèles* (ou *méridiens*) de S sont chacun asymptote à un parallèle (ou à un méridien) de Σ, et chaque quadrilatère curviligne de S devient, quand son rang augmente indéfiniment, asymptote à un quadrilatère correspondant de Σ; comme la distance d'un point variable de S au point correspondant de Σ devient infiniment petite, le ds^2 de S tend vers celui de Σ; mais le ds^2 de S est fixe dans chaque quadrilatère, donc le ds^2 de Σ est identique à celui de S. Il ne serait pas difficile de présenter cette démonstration intuitive sous forme parfaitement rigoureuse.

Nous avons rencontré un exemple de ce phénomène avec les surfaces de la troisième classe d'Ossian Bonnet. Nous allons en donner un autre exemple. Je reprends la développée de la surface minima d'Enneper; elle va jouer le rôle de S; *elle est auto-déformable et possède même un réseau conjugué permanent* : on le voit en rappelant les expressions des coordonnées [*voir* plus haut, formules (16)]

$$(1)\quad \begin{cases} \xi = 6\alpha + 6\alpha\beta^2 + 2\alpha^3, \qquad \eta = -4\beta^3, \qquad \zeta = \frac{3}{2}(\alpha^2+\beta^2)^2 + 3\alpha^2 - 3\beta^2 - \frac{3}{2}, \\ ds^2 = 36(1+\alpha^2+\beta^2)^2[d\alpha^2 + (\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta)^2]. \end{cases}$$

Le point de coordonnées curvilignes α_1, β_1 s'applique sur le point α, β si l'on écrit, avec une constante arbitraire C,

$$(2)\qquad \alpha_1 = \alpha + C, \qquad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = \alpha^2 + \beta^2, \qquad \beta_1 = \sqrt{\beta^2 - 2C\alpha - C^2}.$$

Pour chaque valeur de C on a donc ainsi réalisé une auto-application de S; le point $M_1(\alpha_1, \beta_1)$ engendre une portion S_1 de notre surface, dont les asymptotiques sont figurées par $d\alpha_1^2 + d\beta_1^2 = 0$; ce réseau, quand cette portion S_1 s'applique sur S, a pour image, sur S, le réseau défini par

$$(\beta^2 - 2C\alpha - C^2)\, d\alpha^2 + (\beta\, d\beta - C\, d\alpha)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \beta^2(d\alpha^2 + d\beta^2) - 2C\, d\alpha(\beta\, d\beta + \alpha\, d\alpha) = 0;$$

puisque C figure au premier degré dans cette équation, on voit qu'il existe un réseau conjugué permanent : on le détermine en prenant (dans le plan auxiliaire $\omega\alpha\beta$ rapporté à deux axes rectangulaires $\omega\alpha$, $\omega\beta$) les bissectrices du réseau déterminé par $d\alpha = 0$, $\beta\, d\beta + \alpha\, d\alpha = 0$; ce réseau se compose des droites parallèles à $\omega\beta$ et des cercles concentriques de centre ω; on peut tracer, non pas les tangentes, mais les normales pour en prendre les bissectrices : on reconnaît ainsi que le réseau conjugué est formé, dans $\omega\alpha\beta$, par les paraboles homofocales de foyer commun ω, d'axe porté par $\omega\alpha$; une parabole de ce système, d'équation $\alpha_1^2 + \beta_1^2 - (\alpha_1 - h)^2 = 0$ où h est constant, est remplacée, en passant de S_1 à S, par la parabole $\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha + C - h)^2 = 0$ du même système.

Nous connaissons le théorème : *soit un ds^2 donné $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ et un réseau défini* in abstracto *par l'équation* $A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 = 0$, *parmi les surfaces représentatives du ds^2, il y en a exactement* 0, 1, 2 *ou* ∞^1 *sur lesquelles ce réseau est conjugué; quand il y en a ∞^1, les surfaces correspondantes dépendent d'une constante arbitraire, que l'on peut faire varier d'une façon continue.*

Ici, pour notre développée S, nous avons donc un réseau conjugué permanent formé des paraboles indiquées à l'instant : les ∞^1 surfaces correspondantes sont Σ et ses auto-déformées; mais alors nous constatons, avec une certaine stupeur, que *la surface* H *minima réglée imaginaire* (*indiquée plus haut paragraphe* 3) *est, elle aussi, une déformée de* S *avec ce même réseau conjugué.* Le paradoxe se lève en raisonnant sur le mode affirmatif au lieu du mode négatif : *le théorème est vrai, donc* H *figure parmi les auto-déformées de* S ; elle n'est pas superposable à S dans une région à distance finie, mais, comme pour les surfaces O. B., elle représente la région à l'infini de S ramenée à distance finie par un déplacement infiniment grand.

Nous allons le constater très simplement : ξ_1, η_1, ζ_1, coordonnées cartésiennes de M_1, s'expriment en α_1, β_1 par les formules (1); nous allons exprimer α_1 et β_1 en α et β (et C) et nous avons ainsi les expressions des coordonnées de M_1 en α_1 et β :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \xi_1 &= -12\alpha C^2 + 6C(\beta^2-\alpha^2) + 6\alpha + 6\alpha\beta^2 + 2\alpha^3 + (6C - 4C^3),\\ \zeta_1 &= 12\alpha C + \frac{3}{2}(\alpha^2+\beta^2)^2 + 3\alpha^2 - 3\beta^2 + (6C^2),\\ \eta_1 &= -4i(C^2 + 2C\alpha - \beta^2)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}\right.$$

Quand C devient très grand, ξ_1, ζ_1 grandissent indéfiniment par valeurs réelles (α, β, C étant supposés réels) et η_1 devient infiniment grand et imaginaire pure : en passant, remarquons que nous sommes dans les conditions voulues pour obtenir des systèmes cycliques réels algébriques et des systèmes triples orthogonaux algébriques, puisque l'application de S_1 sur S se fait algébriquement et que le réseau conjugué commun est algébrique; quand C est fixe, l'inégalité $C^2 + 2C\alpha - \beta^2 > 0$ fournit la région de S telle qu'à un point réel de S corresponde sur S_1 un point dont les coordonnées ξ_1, ζ_1 sont réelles et η_1 imaginaire pure. Nous allons développer en série ordonnée suivant les puissances décroissantes de C la coordonnée η_1, en écrivant

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \eta_1 &= -4iC^3\left(1 + \frac{2\alpha}{C} - \frac{\beta^2}{C^2}\right)^{\frac{3}{2}},\\ i\eta_1 &= (4C^3) + 12\alpha C^2 + 6C(\alpha^2-\beta^2) - 6\alpha\beta^2 - 2\alpha^3 + \frac{3}{2C}(\alpha^2+\beta^2)^2 - \frac{3\alpha(\alpha^2+\beta^2)^2}{2C^2} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Nous effectuons une translation de S_1 en écrivant

$$\xi_1 = \xi' + (6C - 4C^3), \qquad \eta_1 = \eta' - 4iC^3, \qquad \zeta_1 = \zeta' + 6C^2,$$

ce qui revient, au fond, à négliger les termes constants dans ξ_1, η_1, ζ_1. On voit alors qu'il est naturel de former la combinaison $\xi' + C\zeta'$ pour faire disparaître le terme en C^2; comme nous devons effectuer une substitution orthogonale, nous calculerons les expressions $\frac{\xi' + C\zeta'}{\sqrt{1+C^2}}$, $\frac{C\xi' - \zeta'}{\sqrt{1+C^2}}$ développées suivant les puissances décroissantes de C, ce qui revient à écrire

$$(1 + C^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{C} - \frac{1}{2C^3} + \frac{3}{8C^5}\cdots,$$

et nous avons

$$(5)\quad \begin{cases} Z=\dfrac{\xi'+C\zeta'}{\sqrt{1+C^2}}=3\left[\beta^2-\alpha^2+\dfrac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{2}\right]+\dfrac{1}{C}(\ldots), \\ X=\dfrac{C\xi'-\zeta'}{\sqrt{1+C^2}}=-12\alpha C^2+6C(\beta^2-\alpha^2)+6\alpha\beta^2+2\alpha^3 \\ \qquad -\dfrac{3}{2C}(\alpha^2+\beta^2)^2+\dfrac{1}{C^2}\left[-\dfrac{3\alpha}{2}-3\alpha\beta^2-\alpha^3\right]+\ldots. \end{cases}$$

Substituer ainsi (X, Z) à (ξ', ζ') revient à faire tourner le trièdre $\omega\xi'\eta'\zeta'$ autour de $\omega\eta'$ (dans un sens convenable) d'un angle φ tel que $\cot\varphi = C$ (de sorte que, si C devient très grand, φ tend vers zéro). On remarque alors que X et $(-i\eta')$ ont les mêmes termes en C^2, C, C^0, C^{-1}; donc nous allons former $X+i\eta'$, $X-i\eta'$, puis remplacer $X+i\eta'$ qui est de l'ordre de $\frac{1}{C^2}$ par $X_1+iY_1=C^2(X+i\eta')$ et $X-i\eta'$ par $X_1-iY_1=\dfrac{X-i\eta'}{C^2}$, ce qui revient à effectuer une rotation d'amplitude imaginaire pure autour de OZ, rotation infiniment grande si C est infiniment grand. Les nouvelles quantités X_1+iY_1, $X_1-iY_1 Z$ restent finies quand C est très grand; en nous bornant, dans les séries obtenues, au terme indépendant de C, nous avons la position limite Σ que prend S_1, après cet ensemble de déplacements, quand C est très grand. On trouve ainsi pour définir Σ

$$(6)\quad \begin{cases} x+iy=-\dfrac{3\alpha}{2}-3\alpha\beta^2-\alpha^3-\dfrac{3\alpha}{2}(\alpha^2+\beta^2)^2, \\ x-iy=-24\alpha, \\ z\ =3\left[\beta^2-\alpha^2+\dfrac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{2}\right]. \end{cases}$$

On aperçoit aussitôt les relations, indépendantes de β,

$$(7)\quad \begin{cases} x+iy+\alpha z=-\dfrac{3\alpha}{2}-4\alpha^3, \\ x-iy\qquad\ =-24\alpha. \end{cases}$$

La surface est donc réglée, les génératrices correspondant à $\alpha = \text{const}$. Les asymptotiques de S_1, pour C très grand, sont données par $d\alpha(\alpha\,d\alpha+\beta\,d\beta)=0$; la forme du ds^2 prouve que sur toutes les surfaces représentatives, les courbes définies par $d\alpha=0$ et $\alpha\,d\alpha+\beta\,d\beta=0$ sont orthogonales; mais, sur Σ, ce sont les asymptotiques; donc Σ est une surface minima réglée; c'est l'hélicoïde minimum algébrique imaginaire. L'élimination de α est immédiate : la surface a pour équation algébrique

$$(8)\quad x+iy=\left(z+\frac{3}{2}\right)\frac{x-iy}{24}+\frac{4(x-iy)^3}{24^3}.$$

Une rotation (imaginaire) autour de Oz remplace la surface par

$$\lambda(x+iy)=\left(z+\frac{3}{2}\right)\frac{x-iy}{24\lambda}+\frac{4(x-iy)^3}{24^3\lambda^3}, \tag{8'}$$

où λ est une constante : en prenant $\lambda^2=\frac{1}{48}$, la surface (8') coïncide (sauf translation parallèle à Oz) avec la surface définie par l'équation (22) du paragraphe **3**.

Rappelons que si l'hélicoïde minimum algébrique est imaginaire, c'est un accident — regrettable évidemment pour beaucoup de géomètres qui ont horreur des imaginaires, bien que l'étude des surfaces minima réelles soit fondée sur l'emploi d'êtres géométriques imaginaires — mais enfin cette surface possède de nombreuses propriétés intéressantes : avec l'hélicoïde minimum réel et transcendant, ce sont les deux seules surfaces ayant ∞^2 réseaux conjugués persistant dans une déformation, et sur ces ∞^2 réseaux, il y en a ∞^1 qui sont formés de géodésiques; ces deux surfaces sont les seules ayant ∞^1 réseaux conjugués formés de géodésiques.