JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

SERGE FINIKOFF

Déformation projective d'une configuration (T)

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 18 (1939), p. 405-415.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1939_9_18__405_0>

Déformation projective d'une configuration (T);

PAR SERGE **FINIKOFF**.

Introduction. — La définition de la *déformation projective* pour les surfaces a été donnée par M. Fubini [1]; M. Cartan [2] a étendu cette définition à une figure arbitraire et à un groupe arbitraire de transformations; ces auteurs et bien d'autres géomètres ont étudié ainsi la *déformation des surfaces, des congruences et des complexes.* C'est M. Terracini qui, le premier, a envisagé le problème de la déformation d'une figure, en imposant comme condition qu'une forme différentielle convenablement choisie se conserve : c'est l'*invariant différentiel de deux éléments voisins de la figure;* il a ainsi étudié [3] la déformation d'une figure composée d'une surface et d'une congruence dont les éléments homologues coïncident.

J'ai étudié moi-même [4] la déformation au sens de Fubini-Cartan d'*un couple de congruences et d'une configuration* (T) [5]. *Une configuration* (T) *est l'ensemble de quatre congruences engendrées par les*

---

(1) *Applicabilita proiettiva di due superficie* (*Rendiconti di Palermo,* t. **41**, 1916, p. 155-162). *Voir* aussi FUBINI-ČECH, *Geom. proiett. diff.*, 1926, Chap. VII.

(2) *Sur le problème général de la déformation* [*C. R. du Congrès intern. de Math. de Strasbourg,* 1920; *Ann. de Toulouse,* 1921, p. 397-406; *Ann. de l'École Normale,* (3), t. **37**, 1920, p. 259-357].

(3) *Su alcuni elementi lineari proiettivi* [Annali di Pisa, (**2**), t. **2**, 1933, p. 401-428].

(4) *Déformation projective d'un couple de congruences* (*Comptes rendus,* t. **199**, 1934, p. 177).

(5) *Transformations* (T) *de congruences de droites* [*Annali di Pisi,* (**2**), t. **2**, 1933, p. 59-88].

arêtes d'un quadrilatère gauche dont les sommets décrivent les nappes focales de ces congruences.

Suivant la définition de M. Cartan, *deux configurations sont projectivement applicables d'ordre n si, une correspondance biunivoque ayant été établie entre leurs éléments, on peut trouver pour chaque couple d'éléments homologues une homographie* Π *amenant en coïncidence ces éléments et leurs éléments infiniment voisins jusqu'à l'ordre n inclus.*

Or, dans la Note déjà citée, j'ai montré que la déformation projective d'ordre 2 d'un couple de congruences nous conduit à une congruence W (associée à elle-même) dont les focales sont réglées. C'est une configuration (T) dégénérée dont les deux autres congruences opposées dégénèrent en les génératrices rectilignes des nappes focales. *Il nous reste donc à examiner la déformation projective du premier ordre d'une configuration* (T) et c'est là le but du présent article.

Nous verrons que les seules configurations T *déformables sont des quadruples conjugués.* Une configuration (T) est un quadruple conjugué si chaque couple de congruences opposées constitue un couple stratifiable conjugué; leurs développables se correspondent et les rayons de chaque congruence d'un couple portent les points de ∞^1 surfaces dont les plans tangents passent par les rayons homologues de l'autre. Chaque congruence du quadruple est une congruence R de Tzitzéica-Demoulin, c'est-à-dire une congruence dont les deux transformées de Laplace sont W également. Mais si les seules configurations T déformables sont formées de quadruples conjugués, il n'est pas exact que, réciproquement, les quadruples conjugués soient tous déformables. En effet, dans un Mémoire récent [*Sur les couples transformables* (*Ann. roumaines de math.*, 2, 1935, p. 1-33)], M. Pantazzin étudié les quadruples conjugués et a découvert une classe remarquable. Les nappes focales d'un quadruple de Pantazzi sont des surfaces dont les asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires; chaque congruence du quadruple fait correspondre aux lignes de Darboux d'une nappe focale les lignes de Segre de l'autre; les quatre congruences d'un quadruple établissent sur une quadrique, qui est l'enveloppe commune des quadriques de Lie attachées aux divers points des quatre nappes focales, une correspondance qui est à la fois celle de Kœnigs-Moutard et de Darboux.

Tous les quadruples conjugués, à l'exception des quadruples de Pantazzi, sont déformables; un quadruple général de la classe découverte par M. Pantazzi est indéformable. D'une façon plus précise, *chaque quadruple conjugué qui n'appartient pas à la classe de Pantazzi admet une déformation continue et s'applique sur un quadruple de Pantazzi.* L'ensemble de ces quadruples déformés compose une sous-classe des quadruples déformables de M. Pantazzi.

J'emploie la méthode des dérivées extérieures de M. Cartan.

1. Configurations T. — Soit $M_1 M_2 M_3 M_4$ un quadrilatère gauche [M] qui décrit une configuration (T). Nous désignerons par une seule lettre grasse $\mathbf{M}_i$ l'ensemble des quatre coordonnées homogènes d'un sommet M_i et nous l'appellerons, avec M. Cartan, *point analytique*. La multiplication des quatre coordonnées par un facteur arbitraire change le point analytique sans altérer le *point géométrique;* c'est ce que l'on appelle *normalisation* du point M_i.

Chaque sommet M_i décrit une surface; les coordonnées de M_i sont fonctions de deux variables indépendantes et leurs différentielles déterminent des points analytiques $d\mathbf{M}_i$ qui vérifient les équations

$$d\mathbf{M}_i = \omega_i^1 \mathbf{M}_1 + \omega_i^2 \mathbf{M}_2 + \omega_i^3 \mathbf{M}_3 + \omega_i^4 \mathbf{M}_4. \tag{1}$$

Les expressions ω_i^k sont les coordonnées de $d\mathbf{M}_i$ par rapport au tétraèdre $[\mathbf{M}]$.

La dérivation extérieure de l'équation (1) nous donne

$$(\omega_i^k)' = \sum^{\alpha} [\omega_i^\alpha \omega_\alpha^k]. \tag{2}$$

Inversement, si les 16 formes de Plaff ω_i^k satisfont au système (2), les équations (1) forment un système complètement intégrable et déterminent les déplacements projectifs du quadrilatère [M], déplacements dépendant de deux variables indépendantes, mais le quadrilatère ne décrit pas en général une configuration (T), vu que les arêtes ne touchent pas les surfaces (M_i), lieux des sommets M_i. *Pour que la configuration* [M] *soit* (T), *il faut et suffit que les déplacements infiniment petits* dM_i *soient situés dans le plan* $M_{i-1} M_i M_{i+1}$, *c'est-à-dire que* ω_i^{i+2} *soit égal à zéro.* Les expressions ω_i^k vérifient donc, pour déterminer la configuration générale (T), les équations (2) et (3) qui suivent :

$$(3)\qquad \omega_1^3=0,\qquad \omega_2^4=0,\qquad \omega_3^1=0,\qquad \omega_4^2=0.$$

Le système (2), (3) *n'est pas complet*. La dérivation extérieure des équations (3) nous fournit de nouvelles équations; pour le moment nous n'étudierons pas ce système (2), (3); dans le Mémoire des *Annales de Pise* déjà cité, j'ai montré que *les configurations* (T) *renfermant une congruence donnée dépendent en général de deux fonctions arbitraires d'un argument.*

2. Conditions d'applicabilité de deux configurations (T). — Soient $[M]$, $[\overline{M}]$ deux configurations (T) projectivement différentes, déterminées par les composantes respectives ω_i^k, $\overline{\omega}_i^k$ qui vérifient les équations (2), (3).

Si la configuration $[\overline{M}]$ est applicable par une déformation projective du premier ordre sur la configuration $[M]$, une certaine homographie Π peut être associée à chaque couple d'éléments homologues $\mathbf{M}$, $\overline{\mathbf{M}}$, et fait coïncider ces éléments et les éléments infiniment voisins jusqu'aux infiniment petits du premier ordre inclus.

Désignons par $(\mathbf{M}_i\mathbf{M}_k)$ la droite analytique M_iM_k, c'est-à-dire les six mineurs de la matrice composée des coordonnées homogènes M_i, M_k. Si l'homographie Π transforme $[\overline{M}]$ en $[N]$, la condition d'applicabilité de $[\overline{M}]$ sur $[M]$ s'écrit sous la forme

$$(4)\qquad \begin{aligned}&(\mathbf{N}_i\mathbf{N}_{i+1})+d(\mathbf{N}_i\mathbf{N}_{i+1})+\ldots\\ &\quad=(\lambda_i+d\lambda'_i+\ldots)\{(\mathbf{M}_i\mathbf{M}_{i+1})+d(\mathbf{M}_i\mathbf{M}_{i+1})+\ldots\},\end{aligned}$$

où $\lambda_i+d\lambda'_i+\ldots$ est un facteur de proportionnalité, l'équation (4) est vérifiée jusqu'aux infiniment petits du premier ordre inclus.

On a donc

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}&\mathbf{N}_i\mathbf{N}_{i+1}=\lambda_i(\mathbf{M}_i\mathbf{M}_{i+1}),\\ &d(\mathbf{N}_i\mathbf{N}_{i+1})=\lambda_i\,d(\mathbf{M}_i\mathbf{M}_{i+1})+d\lambda'_i\,(\mathbf{M}_i\mathbf{M}_{i+1}).\end{aligned}\right.$$

Or, les points géométriques N_i et M_i coïncident en vertu de la définition de l'applicabilité. Une normalisation convenable des sommets $\overline{\mathbf{M}}_i$ fait coïncider les points analytiques $\mathbf{N}_i$ et $\mathbf{M}_i$ et la première équation (5) donne

$$\lambda_i=1.$$

En appliquant la règle de différentiation des déterminants, on a

$$d(\mathbf{M}_i\mathbf{M}_{i+1}) = (d\mathbf{M}_i,\ \mathbf{M}_{i+1}) + (\mathbf{M}_i,\ d\mathbf{M}_{i+1}).$$

Utilisant les formules (1) pour les différentielles $d\mathbf{M}_i$, $d\mathbf{M}_{i+1}$, nous calculons les différentielles $d\mathbf{N}_i$, car les composantes $\overline{\omega}_i^k$ sont invariants par rapport à l'homographie Π; si l'on remplace les sommets $\mathbf{N}_i$ par $\mathbf{M}_i$ et si l'on rapproche les termes qui ont les mêmes parenthèses $(\mathbf{M}_i\mathbf{M}_k)$ dans les deux membres de la seconde équation (5), on obtient

$$(6_a)\qquad \overline{\omega}_i^i - \omega_i^i + \overline{\omega}_{i+1}^{i+1} - \omega_{i+1}^{i+1} = d\lambda_i';$$

$$(6_b)\qquad \overline{\omega}_{i+1}^{i+2} = \omega_{i+1}^{i+2}, \qquad \overline{\omega}_i^{i+3} = \omega_i^{i+3} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

L'équation (6_a) donne le facteur de proportionnalité $d\lambda_i'$. Quant aux équations (6_b) et (3), elles déterminent toutes les composantes $\overline{\omega}_i^k$ dont les indices i, k sont différents

$$(7)\qquad \overline{\omega}_i^k = \omega_i^k \qquad (i \gtrless k).$$

Deux configurations [M] *et* $[\overline{\mathrm{M}}]$ *sont projectivement applicables si, choisissant convenablement la normalisation des sommets* $\overline{\mathbf{M}}_i$, *les équations* (7) *sont vérifiées.*

3. Configurations (T) déformables. — Désignons par Ω_i les différences

$$(8)\qquad \Omega_i = \overline{\omega}_i^i - \omega_i^i.$$

Si les configurations [M] et $[\overline{\mathrm{M}}]$ sont projectivement différentes, les quatre expressions Ω_i ne sont pas toutes nulles. Si l'on choisit la normalisation des sommets $\mathbf{M}_i$, de sorte que le déterminant des 16 coordonnées $\mathbf{M}_i$ soit égal à l'unité, les quatre expressions ω_i^i, et par suite $\overline{\omega}_i^i$, vérifient les relations

$$\Sigma\omega_i^i = 0, \qquad \Sigma\overline{\omega}_i^i = 0;$$

on a donc

$$(9)\qquad \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4 = 0.$$

Les composantes ω_i^k vérifient les équations (2) [et les composantes $\overline{\omega}_i^k$, les équations analogues]. En retranchant les équations d'un système des équations de l'autre, on obtient, en vertu de (7),

$$(\Omega_i)' = 0; \tag{10_a}$$

$$[\Omega_i - \Omega_k, \omega_i^k] = 0. \tag{10_b}$$

La configuration [M] est déformable, c'est-à-dire admet une configuration déformée $[\overline{\mathrm{M}}]$, applicable sur [M], mais projectivement différente de [M], si l'on peut trouver des expressions Ω_i, non toutes égales à zéro, qui satisfont aux équations (9), (10_a), (10_b).

Les équations (10_b) montrent que chaque expression ω_i^k est proportionnelle à la différence $\Omega_i - \Omega_k$; comme ω_k^i est proportionnelle à la même différence, les deux expressions ω_i^k et ω_k^i sont linéairement dépendantes, sauf si la différence $\Omega_i - \Omega_k$ est nulle.

Or, il est facile de voir que les équations $\omega_i^k = 0$ et $\omega_k^i = 0$ déterminent respectivement les développables de deux congruences opposées dont les arêtes de rebroussement sont situées sur les surfaces (M_i), (M_k) respectivement.

Si l'on porte dans les équations (1), par exemple, $\omega_i^{i+1} = 0$ ou $\omega_{i+1}^i = 0$, on obtient

$$d\mathbf{M}_i = \omega_i^i \mathbf{M}_i + \omega_i^{i+3} \mathbf{M}_{i+3};$$
$$d\mathbf{M}_{i+1} = \omega_{i+1}^{i+1} \mathbf{M}_{i+1} + \omega_{i+1}^{i+2} \mathbf{M}_{i+2}.$$

Par suite, le rayon $\mathrm{M}_i \mathrm{M}_{i+3}$ touche sur la surface (M_i) la ligne $\omega_i^{i+1} = 0$, le rayon $\mathrm{M}_{i+1} \mathrm{M}_{i+2}$ sur (M_{i+1}) la ligne $\omega_{i+1}^i = 0$. Si les expressions ω_i^k, ω_k^i sont proportionnelles, les développables des congruences opposées de la configuration se correspondent *directement* (c'est-à-dire que les arêtes de rebroussement des développables homologues sont situées sur les nappes focales d'une même congruence de la configuration). Or, suivant le beau théorème de M. Fubini [*Annali di Math.*, (4), t. 1, 1924, p. 241-257], *deux congruences opposées d'une configuration* (T) *dont les développables se correspondent directement, forment un couple stratifiable conjugué.* Il existe deux familles de surfaces dont les plans tangents aux points de rencontre avec un rayon arbitraire d'une congruence passent par le rayon homologue de l'autre et qui sont conjuguées ou harmoniques à chaque congruence du couple. Une configuration (T) dont les deux couples de congruences opposées sont stratifiables conjuguées, est un quadruple conjugué.

Il en résulte qu'*une configuration* (T) *déformable dont les quatre formes Ω_i sont différentes entre elles est un quadruple conjugué.*

Or, si trois différences, par exemple

$$\Omega_4 - \Omega_1 = \varphi, \qquad \Omega_3 - \Omega_2 = \psi, \qquad \Omega_1 - \Omega_2 = \chi, \tag{11$_a$}$$

sont connues, on obtient la quatrième par la formule

$$\Omega_4 - \Omega_3 = \varphi + \chi - \psi. \tag{11$_b$}$$

Si les quatre expressions Ω_i sont égales entre elles, toutes les quatre sont nulles et la déformation est banale. Si deux différences sont égales à zéro, par exemple φ et ψ, les deux autres étant égales à χ et non nulles, les quatre formes ω_4^3, ω_3^4, ω_1^2, ω_2^1 sont proportionnelles à χ. Or, en vertu de (2) et (3), on a

$$d(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_4) = (\omega_1^1 + \omega_4^4)(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_4) + \omega_1^2(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4) + \omega_4^3(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3);$$
$$d(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4) = (\omega_2^2 + \omega_3^3)(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3) + \omega_2^1(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3) + \omega_3^4(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4).$$

Donc, si χ est nulle, les rayons $M_1 M_4$ et $M_2 M_3$ ne varient pas; si χ varie, ils décrivent chacun une surface gauche et non pas une congruence : la *configuration dégénère*.

Si une seule différence, par exemple φ, est nulle, les six formes ω^3 et ω_3^2, ω_2^1 et ω_1^2, ω_4^3 et ω_3^4 sont deux à deux proportionnelles; de la sorte, six familles de développables de congruences opposées se correspondent deux à deux. Or, il est facile de voir que la septième et la huitième famille se correspondent également. Si les développables des congruences opposées $(M_1 M_4)$ et $(M_2 M_3)$ se correspondent, ces congruences, en vertu du théorème de M. Fubini, forment un couple stratifiable conjugué; toutes les deux sont R, donc W. Les asymptotiques des nappes focales (M_2) et (M_3) se correspondent; à chaque système conjugué de (M_2) correspond un système conjugué de (M_3). Or, deux familles de développables, une de chaque congruence $(M_1 M_2)$ $(M_4 M_3)$ se correspondent : donc les deux réseaux focaux des deux congruences sur (M_2) et sur (M_3) se correspondent; les secondes familles de développables se correspondent aussi et *la configuration est un quadruple conjugué*.

4. Quadruples conjugués. — Étudions maintenant un quadruple conjugué quelconqne [M]. C'est une configuration (T) dont les développables des congruences opposées se correspondent directement. Il est déterminé par les composantes ω_i^k qui vérifient les équations (2) et (3) et les équations

$$(12) \qquad \omega_2^1 = \alpha_1 \omega_1^2, \qquad \omega_2^3 = \alpha_2 \omega_3^2, \qquad \omega_4^1 = \alpha_3 \omega_1^4, \qquad \omega_4^3 = \alpha_4 \omega_3^4,$$

qui expriment que les développables en jeu se correspondent ; les quantités α_i sont des facteurs de proportionnalité. Or, en dérivant extérieurement les équations (3), on obtient, à l'aide des équations (2) et (12),

$$\alpha_2 [\omega_1^2 \omega_3^2] + \alpha_4 [\omega_1^4 \omega_3^4] = 0;$$
$$\alpha_1 [\omega_1^2 \omega_1^4] + \alpha_2 [\omega_3^2 \omega_3^4] = 0;$$
$$\alpha_1 [\omega_3^2 \omega_1^2] + \alpha_3 [\omega_3^4 \omega_1^4] = 0;$$
$$\alpha_3 [\omega_1^4 \omega_1^2] + \alpha_4 [\alpha_3^4 \omega_3^2] = 0.$$

On a donc

$$(\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3) [\omega_1^2 \omega_3^2] [\omega_1^4 \omega_3^4] = 0.$$

Or, si $[\omega_1^2 \; \omega_3^2]$ est nul, les expressions ω_1^2, ω_3^2 sont linéairement dépendantes, et par suite, en vertu de (12), ω_2^1 et ω_2^3 aussi ; si ω_2^1 est nulle, ω_2^3 l'est aussi et le point M_2 reste immobile ; si ω_2^1 est différent de zéro, M_2 décrit une courbe et la configuration dégénère. Si $[\omega_1^4 \; \omega_3^4]$ est nul, ω_4^1 et ω_4^3 sont proportionnelles, la surface (M_4) dégénère.

Si le quadruple ne dégénère pas, on a donc

$$(13) \qquad \alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3 = 0.$$

Or, si l'on multiplie chaque point analytique $\mathbf{M}_i$ par une fonction ρ_i, chaque composante ω_i^k $(i \gtrless k)$ est multipliée par $\frac{\rho_i}{\rho_k}$; donc, par un choix convenable des facteurs ρ_i, on réduit trois des quantités α_i à l'unité et, en vertu de (13), le quatrième aussi se réduit à l'unité.

Les équations (2) prennent alors la forme

$$(14_a) \qquad (\omega_i^k)' = 0, \qquad [\omega_i^{i+1} \omega_{i+2}^{i+1}] + [\omega_i^{i+3} \omega_{i+2}^{i+3}] = 0;$$
$$(14_b) \qquad (\omega_i^i)' = 0, \qquad [\omega_i^i - \omega_k^k, \omega_i^k] = 0.$$

Il est facile de voir que les équations (10_a), (10_b) coïncident avec (14_a), (14_b) si l'on y suppose

$$(15) \qquad \Omega_i = c\,\omega_i^i, \qquad c = \text{const.}$$

Donc les équations (15) nous fournissent une solution du système (9), (10_a), (10_b) qui contient une constante arbitraire c. La déformation projective qui lui correspond n'est pas banale, à moins que les expressions ω_i^i ne soient toutes nulles. Or il est facile de voir que, si les quantités ω_i^i sont toutes nulles, la quadrique dont l'équation par rapport au tétraèdre [M] est

$$x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0, \tag{16}$$

ne varie pas quand le tétraèdre se déplace; en effet, les coordonnées locales x_i d'un point P sont déterminées par l'équation

$$\mathbf{P} = x_1\mathbf{M}_1 + x_2\mathbf{M}_2 + x_3\mathbf{M}_3 + x_4\mathbf{M}_4. \tag{17}$$

Si P est fixe, et si le point analytique $\mathbf{P}$ ne varie pas, $d\mathbf{P}$ est nul; si l'on différentie (17), en remplaçant les différentielles de $\mathbf{M}_i$ par les expressions (1) et si l'on ordonne par rapport aux $\mathbf{M}_i$, on obtient les formules qui donnent les différentielles des coordonnées locales pour un déplacement infinitésimal du tétraèdre

$$\delta x_i = x_1\omega_i^1 + x_2\omega_i^2 + x_3\omega_i^3 + x_4\omega_i^4. \tag{18}$$

Il est facile de voir que l'équation (16) admet les variations infiniment petites δx_i déterminées par (18) si les équations (3) et en outre (19)

$$\omega_i^i = 0, \qquad \omega_i^k = \omega_k^i \tag{19}$$

sont vérifiées.

Or, les plans tangents de la quadrique (16) aux points d'intersections avec un rayon du quadruple passent par le rayon opposé, de sorte qu'elle entre deux fois dans chaque famille de surfaces qui stratifient le quadruple; chaque congruence du quadruple découpe sur elle des réseaux qui sont à la fois de Kœnigs, Moutard et Darboux. *Les équations* (3), (19) *caractérisent donc les quadruples de M. Pantazzi*. Or, si l'on a choisi $c = -1$ dans les formules (15), les composantes $\overline{\omega}_i^k$ de la configuration déformée deviennent nulles, *donc le quadruple s'applique sur celui de Pantazzi*.

Inversement, si un quadruple de Pantazzi est déformable, les quadruples déformés ont leurs composantes ω_i^i différentes de zéro.

Comme les quadruples de Pantazzi dépendent de deux fonctions arbitraires d'un argument, tandis que les autres ne dépendent que de constantes arbitraires, il est évident que les *quadruples de Pantazzi sont, en général, indéformables.*

5. Déformation de la seconde espèce. — M. Terracini a été conduit à étudier *les déformations de la seconde espèce, où l'homographie associée à chaque couple de rayons homologues est remplacée par une corrélation.*

Il est facile d'étendre cette définition à la déformation des configurations (T); elle nous conduit aux mêmes quadruples conjugués. Il est évident que l'applicabilité de seconde espèce d'une configuration $[\overline{M}]$ sur une autre $[M]$ est équivalente à l'applicabilité classique de $[\overline{M}]$ sur une configuration $[M']$ déduite par polaires réciproques de $[M]$.

Considérons la corrélation qui fait correspondre à chaque point $[M'_i]$ de $[M']$ le plan $M_{i+1}\,M_{i+2}\,M_{i+3}$ de $[M]$ dont les coordonnées ponctuelles et tangentielles sont respectivement égales.

En différentiant le déterminant

$$\mathbf{M}'_i = (\mathbf{M}_{i+1}\mathbf{M}_{i+2}\mathbf{M}_{i+3})$$

on obtient, en vertu de (1) et (3), les équations

$$(20)\qquad d\mathbf{M}'_i = \sum^{\alpha} \mathbf{M}'_\alpha \pi_i^\alpha;$$

$$(21)\qquad \pi_i^i = -\omega_i^i, \qquad \pi_i^k = \omega_k^i.$$

La condition d'applicabilité projective de $[M]$, $[\overline{M}]$ de seconde espèce, ou celle de $[M']$, $[\overline{M}]$ de la première, se traduit en vertu de (7) par les équations

$$\overline{\omega}_i^k = \pi_i^k,$$

ou bien, en vertu de (21) par les équations

$$(22)\qquad \overline{\omega}_i^k = \omega_k^i.$$

Or, si l'on désigne par Ω_i la somme

$$(23)\qquad \Omega_i = \overline{\omega}_i^i + \omega_i^i,$$

la dérivation extérieure des équations (22), (23) nous conduit aux mêmes équations (10_a), (10_b).

On en déduit les mêmes conclusions : *chaque configuration* (T) *déformable de seconde espèce est un quadruple conjugué; chaque quadruple qui admet une déformation de la première espèce en admet une de la seconde et vice versa.*

Il est à remarquer que les *quadruples de M. Pantazzi sont les seuls qui soient identiques à leurs réciproques*, comme cela se déduit aussitôt des formules (21).