JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

NIL GLAGOLEFF

Sur le problème général du calcul projectif

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 17, nº 1-4 (1938), p. 387-404.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_387_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur le problème général du calcul projectif;

Par Nil GLAGOLEFF.

(Moscou.)

---

1. Introduction. — Après les travaux remarquables de von Staudt (*Beiträge zur Geometrie der Lage*), de Lüroth (*Math. Annalen*, t. 8 et 9, 1874 et 1875), concernant le calcul des *wurfs* linéaires (¹), la notion de wurf a été généralisée par divers auteurs, tels que Kohn (*Math. Annalen*, t. 46, 1895), Schwann (*Math. Zeitschrift*, t. 3, 1919), Heyting (*Math. Annalen*, t. 98, 1928). M. Kohn a introduit dans l'espace projectif à n dimensions la notion de wurf, mais n'a pas traité le problème général du *calcul projectif des wurfs*. Récemment ont paru quelques articles concernant le calcul des wurfs plans (²) : dans le présent article, nous donnerons *la solution générale du calcul projectif des wurfs dans l'espace à n dimensions*, *les propriétés projectives caractéristiques de l'addition et de la multiplication*, *ainsi que des groupes de collinéations servant de base à ces opérations* (³).

(¹) *Wurf :* terme dû à von Staudt; c'est l'ensemble de quatre points d'une droite ou d'une conique.

(²) N. Glagoleff, *Calcul projectif des wurfs du plan* (*Bulletin de l'Association de Recherches scientifiques de la Faculté des Sciences de Moscou*, t. 1).

(³) Nous citerons encore comme articles se rapportant aux wurfs : Deputatow, *Zur Frage über das Wesen der fünfelementigen Würfe* (*Recueil math. de la Soc. math. de Moscou*, t. 33, 1926, et Bronstein, *Ueber imaginäre lineare Würfe* (*Recueil math. de Moscou*, t. 34, 1927).

2. Wurf dans l'espace projectif a n dimensions et opérations projectives entre wurfs. — Une collinéation dans l'espace projectif à n dimensions est définie par $(n+2)$ points et leurs $(n+2)$ points correspondants; dans chacun des deux groupes les $(n+2)$ points sont supposés indépendants, c'est-à-dire tels que K quelconques d'entre eux ne se trouvent jamais dans un espace projectif à $K-2$ dimensions; de la sorte, le nombre de points indépendants, qui ne sont pas projectivement équivalents à un même nombre de points *arbitraires* est au moins égal à $(n+3)$. Avec Kohn, nous appelons *wurf* de l'espace à n dimensions un système de $(n+3)$ points indépendants $P_1, P_2, \ldots, P_{n+3}$ (pris dans l'ordre indiqué). Nous appelons *sommets* de ce wurf les points $P_1, \ldots, P_{n+3}$; nous considérons comme *égaux* deux wurfs dérivant l'un de l'autre par collinéation; chaque espace projectif à n dimensions contient ∞^n wurfs distincts. Par une collinéation préalable, nous pouvons placer les $(n+2)$ premiers sommets du wurf général en des points indépendants $O_1, O_2, \ldots, O_{n+2}$ fixés une fois pour toutes et représenter chaque wurf S sous la forme

$$S = \{ O_1, O_2, \ldots, O_{n+2}, M \}.$$

Nous appelons $(O_1, O_2, \ldots, O_{n+2})$ *base* du wurf, M le *point déterminant* du wurf (ou encore point mobile). *Nous pouvons donc désigner dans chaque cas un wurf par le point* M *et considérer une opération entre les points déterminants comme l'image d'une opération entre les wurfs correspondants.*

En choisissant un point quelconque de l'espace, E, comme *module* d'une opération projective, nous dirons que *le point* P *est le résultat de l'opération* $M \alpha N$ *entre les points* M, N *si la collinéation qui change* E *en* M, *change* N *en* P *et nous écrirons symboliquement* $M \alpha N = P$; cette collinéation est la même pour toutes les positions de N. Or, dans le cas général, chaque collinéation peut être déterminée par ses points doubles et un couple de points correspondants, couple non situé sur les variétés planes invariantes qui réunissent les divers groupes de points doubles.

Nous devons remarquer, que, *si parmi les points doubles de la collinéation il y en a k,* $M_1, \ldots, M_k$ *qui définissent un espace projectif à $(k-1)$ dimensions dont tous les points sont aussi des points doubles,* *cet espace à* $(k-1)$ *dimensions ne contenant pas les* $n+1-k$ *autres points doubles*, $M_{k+1}, \ldots, M_{n+1}$, *la collinéation n'est pas transitive :* en effet si l'on réunit un point A, arbitraire, par un espace linéaire à $n-k+1$ dimensions, aux points $M_{k+1}, \ldots, M_{n+1}$, le correspondant de A est lui aussi dans cet espace linéaire et ne peut donc être pris arbitrairement : nous laisserons de côté les collinéations de cette espèce (de façon à pouvoir effectivement définir une collinéation par ses $n+1$ points doubles et un couple A, B de points homologues choisis *arbitrairement*).

En définissant l'opération projective $A\alpha B$ nous avons indiqué le module E, c'est-à-dire le point qui devient A par la collinéation correspondante : naturellement il faut, en dehors du couple (E, A), indiquer $n+1$ couples correspondants pour que la collinéation soit définie, par exemple les $(n+1)$ points doubles. Nous allons indiquer (et c'est là l'un des résultats fondamentaux de notre travail) les conditions *nécessaires et suffisantes pour que notre opération soit commutative et associative.*

Pour la clarté de l'exposé, donnons tout de suite deux exemples d'opération commutative et associative; nous les emprunterons à l'*addition* et à la *multiplication* des nombres complexes ordinaires.

Considérons *toutes les collinéations du plan projectif ayant pour points doubles tous les points d'une droite donnée et uniquement ceux-là.* Elles forment évidemment un *groupe* (qui est même *abélien*). Par une projectivité préalable nous pouvons supposer que la droite est devenue la droite de l'infini, de sorte que nous avons le groupe des *translations;* ayant choisi un point fixe, O, par exemple, qui joue le rôle de notre module E, l'opération $A\alpha B$ devient donc la translation $\overrightarrow{OA}$; écrire $A\alpha B = C$ revient donc à faire l'*addition* des imaginaires d'affixe A et B; la variation du point A conduit au groupe des translations. L'opération $A\alpha B$ est évidemment commutative et associative

$$[A\alpha B = B\alpha A,\ (A\alpha B)C = A\alpha(B\alpha C)],$$

ce qui revient à

$$A + B = B + A, \qquad (A + B) + C = A + (B + C).$$

Considérons maintenant toutes les collinéations du plan qui ont pour points doubles le point O et les points cycliques I et J; elles forment encore un groupe abélien : rotations autour de O et homothéties de pôle O; prenons pour module le point E à l'unité de distance sur l'axe Ox; l'opération $A\alpha B$ revient alors à la *multiplication* des imaginaires d'affixe A, B; écrire $A\alpha B = C$ revient, si l'on veut, à $AB = C$; elle est associative et commutative encore.

Si pour distinguer l'addition et la multiplication nous employons, au lieu de α, la lettre π pour le produit et σ pour la somme, nous avons un exemple d'opération (multiplication) *distributive* par rapport à l'autre (addition)

$$C\pi(A\sigma B) = (C\pi A)\,\sigma(C\pi B)$$

[ce qui revient ici à

$$C(A + B) = CA + CB].$$

Ces exemples vont nous servir pour définir l'*associativité et la commutativité d'une opération projective* $A\alpha B$ *dans un espace à n dimensions et la distributivité de l'opération* π *par rapport à l'opération* σ.

3. Associativité et commutativité. — Soit P_i^b un des points doubles de la collinéation qui accomplit l'opération $B\alpha M$ où M est un point quelconque de l'espace (à *n* dimensions). Prenons trois points arbitraires A, B et D; nous pouvons évidemment trouver le point C tel que $B\alpha C = D$; en écrivant maintenant que l'opération est commutative et associative, on a

$$(1)\qquad A\alpha B = B\alpha A, \qquad (A\alpha B)\alpha C = A\alpha(B\alpha C).$$

Supposons que A coïncide avec P_i^b : on aura donc

$$(P_i^b\alpha B = B\alpha P_i^b = P_i^b,$$
$$(P_i^b\alpha B)\alpha C = P_i^b\alpha(B\alpha C) \quad \text{ou} \quad P_i^b\alpha C = P_i^b\alpha D),$$

ou encore

$$C\alpha P_i^b = D\alpha P_i^b.$$

Cette égalité n'est évidemment possible que si P_i^b est un point double des collinéations qui accomplissent les opérations $C\alpha M$ et $D\alpha M$; B et D étant des points *arbitraires* de l'espace, le point P_i^b est point double de toutes les collinéations correspondant à notre opération projective pour tous les points de l'espace.

Donc, *pour obtenir une opération projective qui soit commutative et associative, il est nécessaire que toutes les collinéations correspondant à cette opération aient les mêmes points doubles*. Nous démontrerons un peu plus bas que cette condition est aussi *suffisante;* les collinéations en jeu forment donc un *groupe abélien* de transformations, que nous appellerons *groupe fondamental* de notre opération.

4. Distributivité. — Examinons maintenant dans quel cas l'opération π est *distributive* par rapport à une autre opération σ

$$C\pi(A\sigma B) = (C\pi A)\sigma(C\pi B), \tag{1}$$

π *et* σ *étant supposées chacune commutative et associative;* soient G_π et G_σ leurs groupes fondamentaux et

$$P_1,\quad P_2,\quad \ldots,\quad P_{n+1};\qquad S_1,\quad S_2,\quad \ldots,\quad S_{n+1}$$

leurs systèmes de points doubles; soient enfin E_p et E_s les modules de ces opérations. En posant $A\sigma B = D$, nous avons

$$(C\pi A)\sigma(C\pi B) = C\pi D. \tag{2}$$

A l'opération $A\sigma U$, où U est un point quelconque, correspond une certaine collinéation Σ_1 de G_σ telle que E_s ait A pour correspondant et B pour correspondant D; en soumettant tout notre espace à la collinéation Π qui correspond à l'opération $C\pi U$, nous produisons les échanges respectifs

$$\begin{array}{llll} E_s: & A & B & D \\ E'_s: & A' & B' & D', \end{array}$$

de sorte que nous avons

$$A' = C\pi A,\qquad B' = C\pi B,\qquad D' = C\pi D.$$

L'égalité (2) entraîne donc

$$A'\sigma B' = D'. \tag{3}$$

Cette dernière égalité entraîne l'existence d'une collinéation Σ_2 appartenant aussi au groupe G_σ, changeant E_s en A' et B' en D'; le point B étant un point arbitraire de notre espace, le changement de sa position ne change ni Σ_1 ni Π; nous pouvons donc prendre $(n+2)$ points indépendants B_1, B_2, ..., B_{n+2} et leur faire subir la collinéation Σ_1 ; ils se changent alors en certains points $D_1, D_2, \ldots, D_{n+2}$; la collinéation Π produit les échanges

$$\begin{matrix} B_1, & B_2, & \ldots, & B_{n+1}; & D_1, & D_2, & \ldots, & D_{n+2}, \\ B'_1, & B'_2, & \ldots, & B'_{n+1}; & D'_1, & D'_2, & \ldots, & D'_{n+2}. \end{matrix}$$

A chaque groupe de points B'_i, D'_i correspond une égalité (3) : il existe donc une collinéation Σ_2 du groupe G_s qui change E_s en A' et chacun des points $B'_1, B'_2, \ldots, B'_{n+2}$ en le point de même indice $D'_1, D'_2, \ldots, D'_{n+2}$. Mais une collinéation est définie complètement par $(n+2)$ couples de points correspondants; d'autre part la collinéation $\Pi\Sigma_1\Pi^{-1}$ change évidemment les points $B'_1, B'_2, \ldots, B'_{n+2}$ en $D'_1, D'_2, \ldots, D'_{n+2}$ (1); on en déduit

$$(4) \qquad \Sigma_2 = \Pi\Sigma_1\Pi^{-1} \quad \text{ou} \quad \Sigma_2\Pi = \Pi\Sigma_1.$$

C'est la conséquence la plus importante de la distributivité : voici les conséquences qu'on peut en tirer; en appliquant l'égalité (4) au point E_s, on a

$$(5) \qquad \Sigma_2\Pi(E_s) = \Pi\Sigma_1(E_s).$$

Mais $\Sigma_1(E_s) = A$, $\Pi(A) = A'$, $\Pi(E_s) = E'_s$; par suite l'égalité (5) se réduit à $\Sigma_2(E'_s) = A'$; or, nous avons déjà eu $A' = \Sigma_2(E_s)$, donc $\Sigma_2(E_s) = \Sigma_2(E'_s)$, ou encore $E_s = E'_s$, c'est-à-dire $\Pi(E_s) = E_s$; *le module* E_s *de l'opération* σ *doit donc coïncider avec un des points doubles des collinéations du groupe* G_π; en faisant un changement de notations si c'est nécessaire, on peut supposer que E_s coïncide avec P_{n+1} ; appliquons maintenant l'égalité (4) à chacun des points $S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}$; le point S_k donne $\Sigma_2\Pi(S_k) = \Pi\Sigma_1(S_k)$; mais $\Pi(S_k) = S'_k$, $\Sigma(S_k) = S_k$, de sorte que nous avons $\Sigma_2(S'_k) = \Pi(S_k) = S'_k$; *le point* S'_k *est donc un point double de la collinéation* Σ_2 ; on peut évidemment supposer que S'_k ne coïncide avec aucun des points $S_1, S_2, \ldots, S_{n+1}$, car la colli-

(1) En effet, il suffit d'indiquer les échanges

$$\begin{matrix} \Pi^{-1}\left\{\begin{matrix} B'_1 & B'_2 & \ldots & B'_{n+2} \\ B_1 & B_2 & \ldots & B_{n+2} \end{matrix}\right. \\ \Pi\left\{\begin{matrix} D_1 & D_2 & \ldots & D_{n+2} \\ D'_1 & D'_2 & \ldots & D'_{n+2} \end{matrix}\right. \end{matrix} \quad \left.\begin{matrix} B_{n+2} \\ D_{n+2} \end{matrix}\right\} \Sigma_1.$$

néation Π change quand C varie, et quand C varie, le point S'_k varie; de la sorte la collinéation Σ_2 a un nombre de points doubles supérieur à $n+2$, puisque non seulement $S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots, S_{n+2}$ sont doubles dans Σ_2, mais encore $S'_1, \ldots, S'_k, \ldots, S'_{n+2}$. Ce n'est possible que dans les deux cas suivants : ou bien Σ_2 est une identité, cas qui doit être exclu, ou bien, et c'est la seule hypothèse à conserver, *tous les points* $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$ *sont situés dans le même hyperplan* R_{n-1} *dont tous les points sont des points doubles de la collinéation* Σ_2 *et par suite de toutes les collinéations du groupe* G_σ. *La collinéation* Π *change des points de cet hyperplan en points* (*différents*) *du même hyperplan, et par suite l'hyperplan* R_{n-1} *passe par les points doubles* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ (*autres que* P_{n+1}) *de la collinéation* Π.

Nous appelons *addition* les opérations du type σ, *multiplication* les opérations du type π. Dans ce qui suit, nous ne considérons plus que des opérations de ces deux types.

5. Réciproque de l'associativité et de la commutativité pour l'addition. — Nous considérons un groupe G_σ de collinéations ayant toutes les mêmes points doubles $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$, situés dans un même hyperplan R_{n-1}. Considérons deux points arbitraires A et B qui ne se trouvent pas dans R_{n-1}; pour obtenir la somme $A+B$, nous construisons le point qui correspond à B dans une certaine collinéation Σ du groupe G_σ : dans cette collinéation le point A correspond au point O_s; pour cela, nous construisons le plan qui passe par les points O_s, A et B et coupe l'hyperplan R_{n-1} suivant une certaine droite s; en désignant les points de rencontre des droites O_sA et O_sB avec la droite s respectivement par M et N, nous obtenons pour point $A+B$ le point commun aux droites AN et BM; cette construction est symétrique par rapport à A et B et, par suite, nous avons $A+B=B+A$: *la commutativité est donc réalisée*. Il reste à démontrer l'associativité, c'est-à-dire $(A+B)+C=A+(B+C)$. Prenons trois points arbitraires A, B et C qui ne se trouvent pas dans R_{n-1}, et construisons l'espace linéaire à 3 dimensions R_3, qui contient A, B, C, O_s; l'espace R_3 coupe R_{n-1} suivant un certain plan ω et nous appelons respectivement M, N, P les points où les droites O_sA, O_sB, O_sC coupent le plan ω; le point $S_1=A+B$ est le point commun aux

droites AN et BM. Nous appelons Q le point d'intersection des droites O_sS_1 et MN; le point $S_2 = S_1 + C = (A + B) + C$ est le point d'intersection des droites S_1P et CQ. D'autre part nous pouvons construire le point $S'' = A + (B + C)$ de la manière suivante : en posant $B + C = S'$ nous obtenons pour S' le point commun aux droites BP et CN; si R est le point d'intersection des droites O_sS' et NP, le point S'' est le point de rencontre des droites $S'M$ et AR, et il est aisé de voir que S'' et S_2 coïncident; en effet, les triangles S_1QM et PCS' sont évidemment perspectifs; les côtés de S_1QM, à savoir S_1Q, QM, S_1M, coupent les côtés respectifs PC, CS' et PS' du triangle PCS' en des points O_s, N et B situés sur une même droite, de sorte que les droites S_1P, QC, MS' passent par un même point. De même, en considérant les triangles AMS_1 et $RS'P$, nous voyons que les droites AR, MS', S_1P passent par un même point, de la sorte les quatre droites S_1P, QC, MS' et AR passent par un même point, qui est aussi bien S_2 que S''. Nous voyons donc que l'associativité de l'addition projective est une conséquence immédiate du théorème de Desargues, exactement comme pour l'addition des nombres réels (*voir* Hilbert, *Grundlagen der Geométrie*).

6. Réciproque de l'associativité et de la commutativité pour la multiplication. — Soient $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ les points doubles des collinéations du groupe G_π qui définit la multiplication projective ayant le module E. Si donc $AB = C$, nous avons, par définition,

$$(P_1 P_2 \ldots P_{n-1} E B) = (P_1 P_2 \ldots P_{n+1} A C),$$

ce symbole signifiant que les deux groupes sont projectifs; donc, en vertu du théorème bien connu de von Staudt, nous avons

$$(P_1 P_2 \ldots P_{n+1} E A) = (P_1 P_2 \ldots P_{n+1} B C),$$

par suite $BA = C$: la commutativité de la multiplication est ainsi conséquence du théorème de von Staudt. Pour l'associativité, prenons dans notre espace trois points arbitraires Z_1, Z_2, Z_3, et soient

$$(1) \qquad Z_1 Z_2 = Z_{12}, \qquad Z_{12} Z_3 = Z_{12,3}, \qquad Z_2 Z_3 = Z_{23}, \qquad Z_1 Z_{23} = Z_{1,23}.$$

Nous voulons démontrer

$$Z_{1,23} = Z_{12,3}.$$

Des équations (1) nous déduisons, en utilisant la loi commutative,

$$(1_1) \qquad (P_1 P_2 \ldots P_{n+1} E Z_1) = (P_1 P_2 \ldots P_{n+1} Z_2 \; Z_{12} \;),$$

$$(1_2) \qquad (P_1 P_2 \ldots P_{n+1} E Z_3) = (P_1 P_2 \ldots P_{n+1} Z_{12} Z_{12,3}),$$

$$(1_3) \qquad (P_1 P_2 \ldots P_{n+1} E Z_3) = (P_1 P_2 \ldots P_{n+1} Z_2 \; Z_{23} \;),$$

$$(1_4) \qquad (P_1 P_2 \ldots P_{n+1} E Z_1) = (P_1 P_2 \ldots P_{n+1} Z_{23} Z_{1,23}).$$

De (1_1) et (1_4) nous déduisons

$$(2) \qquad (P_1 P_2 \ldots P_{n+1} Z_2 Z_{12}) = (P_1 P_2 \ldots P_{n+1} Z_{23} Z_{1,23}),$$

et, par suite, grâce à von Staudt,

$$(2') \qquad (P_1 P_2 \ldots P_{n+1} Z_2 Z_{23}) = (P_1 P_2 \ldots P_{n+1} Z_{12} Z_{1,23}).$$

De (1_2) et (1_3) résulte

$$(3) \qquad (P_1 P_2 \ldots P_{n+1} Z_{12} Z_{12,3}) = (P_1 P_2 \ldots P_{n+1} Z_2 Z_{23}).$$

La comparaison des égalités (2′) et (3) donne aussitôt

$$Z_{12,3} = Z_{1,23}.$$

7. Réciproque de la distributivité de la multiplication vis-a-vis de l'addition. — Nous supposons la multiplication définie par un groupe G_π de collinéations ayant les points doubles $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ et par le module E; l'addition est définie par l'hyperplan invariant R_{n-1} (dont tous les points sont invariants) et par le module O_s qui coïncide avec un des points $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$, par exemple avec P_{n+1}. Si $A + B = D$, il y a une collinéation Σ_1 de ce groupe G_σ qui change O_s en A et B en D; soient C un point arbitraire de notre espace et Π la collinéation qui correspond à la multiplication CM où M est un point quelconque. Supposons que Π change les points A, B, D en des points A′, B′, D′ : on a donc $CA = A'$, $CB = B'$, $CD = D'$. Considérons la collinéation $\Pi \Sigma_1 \Pi^{-1}$. Elle change évidemment O_s en A′, B′ en D′ et laisse invariants tous les points de l'hyperplan R_{n-1}. Par conséquent cette collinéation est une certaine collinéation du groupe G_σ, soit Σ_2; donc $A' + B' = D'$, ou encore $CA + CB = CD = C(A + B)$, de sorte que la distributivité est démontrée.

8. Exemples divers. — Si nous prenons le cas du plan projectif ($n = 2$), il y a 6 types de collinéations caractérisés par la disposition des points doubles :

1° trois points doubles réels et distincts;

2° un point double réel et deux autres distincts imaginaires conjugués;

3° un point double comptant pour la réunion de deux points doubles et un point complémentaire;

4° trois points doubles réunis en un seul;

5° un point double P isolé et une droite p dont tous les points sont doubles (homologie de pôle P et de directrice p; si p est la droite de l'infini, homothétie de pôle P);

6° une droite p dont tous les points sont doubles et un faisceau de droites doubles dont le centre P se trouve sur p (homologie dont le pôle est sur l'axe; si p est la droite de l'infini; c'est une translation).

De la sorte quand nous effectuons dans le plan ($n = 2$) une opération projective ω, $(A\omega B)$, cela signifie :

1° nous choisissons un type parmi ces six collinéations;

2° nous fixons le module E;

3° nous considérons la collinéation changeant E en A; le transformé C du point B est dit résultat de l'opération $A\omega B$ appliquée à A et B. Aux diverses opérations $A\omega B$, $A\omega D$, ... correspond la *même* collinéation Ω qui change E en A; mais aux opérations $B\omega C$, $M\omega N$, $P\omega Q$, ... appartiennent les diverses collinéations, caractérisées (quand on se borne aux opérations commutatives et associatives) toutes par les mêmes points doubles, différentiées les unes des autres par le point B, M, P, ... qui correspond à E; ces collinéations forment un groupe abélien. Si l'opération Π est distributive par rapport à l'opération σ, il en résulte que σ doit être du type 6 et l'opération Π d'un type 1, 2 ou 3. Si nous supposons que la droite p est la droite de l'infini, l'opération σ représente l'addition des nombres complexes, le groupe G_σ est celui des translations. Si les deux points doubles I et J de Π situés sur p sont les points cycliques, les opérations σ et Π sont isomorphes à l'addition et à la multiplication des nombres complexes ordinaires ($a+bi$, $i^2=-1$); si les points doubles I et J sont les points à l'infini des droites $x+y=0$ et $x-y=0$, les opérations σ et π sont isomorphes à l'addition et à la multiplication des nombres de Cayley ($a+jb$, $j^2=+1$); si I et J sont confondus avec le point à l'infini de la droite $x-y=0$, les opérations σ et π sont isomorphes à l'addition et à la multiplication des nombres de Cayley ($a+jb$, $j^2=0$).

De même, dans le cas $n=3$, les collinéations appartenant à l'addition σ sont des homologies, et quand le plan invariant est le plan de l'infini, on a les translations; les collinéations définies par la multiplication ont un point double isolé E qui est le module de l'addition σ, les autres points doubles étant dans le plan invariant de l'addition. Les opérations σ et π représentent dans ce cas l'addition et la multiplication des nombres hypercomplexes dans l'espace à 3 dimensions.

Ces divers exemples vont nous permettre de bien comprendre ce qui suit.

9. Les systèmes divers de nombres projectifs. — Nous appellerons maintenant *système de nombres projectifs* l'ensemble de tous les points de l'espace à n dimensions, pour lesquels sont définies les opérations de l'addition et de la multiplication, soumises à la loi commutative, associative et distributive. *Il est aisé de voir que le module de l'addition peut être considéré comme le zéro de ce système de nombres.* En effet, ce qui précède entraîne $O_s+A=A$ et $O_sA=O_s$.

Le module de la multiplication E joue le rôle de l'unité, car $AE=A$.

Tous les points de l'hyperplan R_{n-1} *jouent le rôle de l'infini, car pour chaque point* M *de cet hyperplan nous avons évidemment* $AM=M$, $A+M=M$.

Aux groupes divers G_π correspondent divers systèmes de nombres projectifs selon la situation des points doubles des collinéations π du groupe G_π. Nous voyons que *chaque système de nombres projectifs forme un corps algébrique.* A chaque disposition des points doubles de la multiplication correspond son corps algébrique.

Il est aisé de voir que ces *corps algébriques coïncident avec les corps algébriques des nombres hypercomplexes.*

Construisons dans notre espace projectif un *simplex* [1] à n dimensions ayant un sommet en O_s et les autres dans R_{n-1} (R_{n-1} est l'hyperplan invariant du groupe de l'addition). On peut décomposer chaque nombre projectif, qui est représenté par un point arbitraire A, en une somme de nombres projectifs qui sont représentés par les points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ convenablement choisis sur les arêtes O_sM_1, $O_sM_2, \ldots, O_sM_n$ de notre simplex.

Pour obtenir chacun de ces points, par exemple le point A_i sur l'arête O_sM_i, nous menons un hyperplan par le point A et les sommets du simplex $M_1, M_2, \ldots, M_{i-1}, M_{i+1}, \ldots, M_n$. Cet hyperplan coupe l'arête OM_i au point cherché A_i.

Il est aisé de déduire de cette construction l'égalité

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = A.$$

Si nous fixons une fois pour toutes la position du simplex $O_sM_1M_2\ldots M_n$, la position de chaque point A de l'espace est définie par les points $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, situés sur les arêtes du simplex. Établissons sur chacune des arêtes $O_sM_1, O_sM_2, \ldots, O_sM_n$ un calcul projectif de wurfs de Staudt en prenant pour zéro le point O_s, pour unité un point quelconque C_i de l'arête O_sM_i et pour l'infini le point M_i. Il est bien connu que l'ensemble des nombres projectifs (wurfs) ainsi obtenus sur chaque arête est isomorphe à l'ensemble de tous les nombres réels et que chaque point Z_i de l'arête O_sM_i peut être représenté comme le produit $Z_i = \lambda_i C_i$, où λ_i est un nombre réel convenablement choisi.

Ensuite il est aisé de voir que *l'addition des points* A *et* B *a pour conséquence l'addition des composantes* A_i *et* B_i, *c'est-à-dire*

$$(A + B)_i = A_i + B_i.$$

Si donc

$$A_i = \alpha_i C_i \qquad \text{et} \qquad B_i = \beta_i C_i,$$

on a

$$(A + B)_i = (\alpha_i + \beta_i) C_i.$$

---

[1] Simplex signifie le polyèdre qui a $(n+1)$ sommets indépendants; pour $n = 2$, c'est le triangle, pour $n = 3$, le tétraèdre.

On peut ainsi représenter chaque point A de l'espace sous la forme

$$A = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_n C_n,$$

et le considérer comme un nombre hypercomplexe ayant un système d'unités $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

En particulier le point E se représente sous la forme

$$E = \varepsilon_1 C_1 + \varepsilon_2 C_2 + \ldots \varepsilon_n C_n.$$

Si E ne se trouve pas sur une face du simplex fondamental, on peut prendre pour les points $C_1, C_2, \ldots, C_n$ situés sur les arêtes $O_s M_1$, $O_s M_2, \ldots, O_s M_n$, les composantes du point E; autrement dit on peut poser $C_i = E_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Dans ce cas nous avons $\varepsilon_i = 1 (i = 1, 2, \ldots, n)$ et par conséquent $E = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$.

Pour le calcul effectif du produit de deux points arbitraires A et B il n'est pas nécessaire de connaître les nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. *En vertu de la loi distributive, il suffit de connaître les produits des points* C_1, $C_2, \ldots, C_n$. Il est encore évident que chaque produit $C_i C_k$ peut être décomposé en ses composantes, c'est-à-dire peut être représenté sous la forme

$$C_i C_k = \sum_{\lambda=1}^{n} \omega_{ik}^{\lambda} C_{\lambda}, \qquad \text{où} \qquad \omega_{ik}^{\lambda} = \omega_{ki}^{\lambda}.$$

Les nombres ω_{ik}^{λ} sont *les nombres caractéristiques* du système des nombres projectifs. Ils sont définis par la position des points doubles des collinéations du groupe g_π dans l'hyperplan R_{n-1} et par la position du module de la multiplication E. A chaque disposition de ces points correspond son système de nombres hypercomplexes. Par exemple, si tous les points doubles $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ des collinéations du groupe de la multiplication G_π sont différents, on peut placer les sommets du simplex fondamental $M_1, M_2, \ldots, M_n$ aux points $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}$, $P_{i+1}, \ldots, P_{n+1}$. Pour le système correspondant des nombres caractéristiques, nous avons

$$\omega_{ik}^{\lambda} = 0 \qquad \text{si} \quad \lambda \neq i \quad \text{ou} \quad \lambda \neq k$$

et

$$\omega_{ii}^{i} = 1 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Nous considérerons comme équivalents deux systèmes de nombres hypercomplexes si les groupes de points doubles des multiplications de ces systèmes sont collinéaires entre eux.

Par exemple, dans l'espace à trois dimensions le système de nombres qui est caractérisé par les égalités

$$\omega_{ik}^{\lambda}=0, \quad \text{où} \quad \lambda \neq i \quad \text{et} \quad \lambda \neq k$$

et

$$\omega_{ii}^{i}=1 \quad (i=1, 2, 3, \ldots, n),$$

est équivalent à un système qui est caractérisé par les égalités

$$\begin{array}{llllll} \omega_{11}^{1}=1, & \omega_{11}^{2}=0, & \omega_{11}^{3}=0, & \omega_{12}^{1}=0, & \omega_{12}^{2}=1, & \omega_{12}^{3}=0, \\ \omega_{22}^{1}=0, & \omega_{22}^{2}=1, & \omega_{22}^{3}=0, & \multicolumn{3}{l}{\omega_{13}^{1}=\omega_{13}^{2}=\omega_{13}^{3}=\omega_{23}^{1}=\omega_{23}^{2}=\omega_{23}^{3}=0,} \\ \omega_{33}^{1}=0, & \omega_{33}^{2}=0, & \omega_{33}^{3}=1. & & & \end{array}$$

Nous obtenons ainsi par une méthode purement synthétique les systèmes de nombres hypercomplexes qui ont été obtenus par Study par la méthode analytique. A tous les systèmes de nombres projectifs correspond la même opération de l'addition. Les divers systèmes des nombres diffèrent entre eux par la position et le caractère des points doubles des collinéations du groupe de la multiplication. Prenons comme exemple les systèmes de nombres hypercomplexes à trois dimensions; cherchons quelles seront les valeurs correspondantes des nombres caractéristiques ω_{ik}^{λ}, ou, ce qui revient au même, des produits C_iC_k.

Faisons la construction dans l'espace euclidien en prenant l'origine du système des coordonnées pour module de l'addition; pour hyperplan invariant R_{n-1} prenons le plan de l'infini.

Système I. — Les quatre points doubles de la multiplication sont réels et différents. Un d'entre eux se trouve à l'origine O et les trois autres aux points à l'infini des axes OX, OY, OZ. Le module de la multiplication est le point E(1, 1, 1)

$$\omega_{11}^{1}=\omega_{22}^{2}=\omega_{33}^{3}=1; \qquad \omega_{ik}^{\lambda}=0 \quad \text{si} \quad \lambda \neq k \quad \text{ou} \quad \lambda \neq i.$$

Système II. — Deux points doubles de la multiplication sont réels, l'un deux se trouve à l'origine O, un autre au point à l'infini de l'axe OZ; les deux derniers points doubles sont imaginaires conjugués et coïncident avec les points cycliques du plan XOY; le module de la multiplication est le point E(1, 0, 1)

$$C_1C_1 = C_1, \quad C_2C_2 = -C_1, \quad C_3C_3 = C_3,$$
$$C_1C_2 = C_2, \quad C_1C_3 = 0, \quad C_2C_3 = 0.$$

Système III. — Un des points doubles de la multiplication se trouve à l'origine; un autre au point infini de l'axe Z; et les deux derniers points coïncident en un seul point, le point à l'infini de l'axe OY; le module de la multiplication est le point E(1, 0, 1)

$$C_1C_1 = C_1, \quad C_2C_2 = 0, \quad C_3C_3 = C_3,$$
$$C_1C_2 = C_2, \quad C_1C_3 = 0, \quad C_2C_3 = 0.$$

Système IV. — Un des points doubles se trouve à l'origine et les trois autres coïncident en un seul point, le point à l'infini de l'axe OZ; le module de la multiplication est le point E(1, 0, 0)

$$C_1C_1 = C_1, \quad C_2C_2 = C_3, \quad C_3C_3 = 0,$$
$$C_1C_2 = C_2, \quad C_1C_3 = C_3, \quad C_2C_3 = 0.$$

Système V. — Un des points doubles se trouve à l'origine et les trois autres sont les divers points de la droite à l'infini du plan YOZ (tous les points de cette droite sont donc invariants); le module de la multiplication est le point E(1, 0, 0)

$$C_1C_1 = C_1, \quad C_2C_2 = 0, \quad C_3C_3 = 0,$$
$$C_1C_2 = C_2, \quad C_1C_3 = C_3, \quad C_2C_3 = 0.$$

Tels sont les systèmes de nombres hypercomplexes dans l'espace à trois dimensions. Ces systèmes ont été trouvés analytiquement par Study.

Pour $n = 2$ nous obtenons trois systèmes de nombres qui sont équivalents à ceux de Cayley et qui ont été considérés dans mon article ([1]).

Pour $n = 1$ nous obtenons le système de wurfs linéaires de Staudt. Il est intéressant de remarquer que le théorème de Staudt sur lequel

([1]) Nil Glagoleff, *Sur la méthode générale de calcul projectif des wurfs d'un plan et applications* (*Bulletin de l'Association de Recherches scientifiques de la Faculté des Sciences de Moscou*, t. 1).

est fondée la loi commutative trouve dans ce cas la forme la plus simple : de

$$(ACMN) = (ACM'N'),$$

il suit

$$(ACMM') = (ACNN').$$

Si nous construisons la transformation projective hyperbolique correspondante sur la droite, il est aisé de remarquer que ce théorème est équivalent au théorème de Pascal-Pappus. Nous obtenons ainsi comme un cas particulier de ce qui précède le résultat bien connu de Hilbert : *la loi commutative de la multiplication des nombres réels équivaut projectivement au théorème de Pascal.*

10. Recherche de la possibilité de construire d'autres systèmes de nombres projectifs. — L'exigence que la loi distributive existe restreint la classe des collinéations de la multiplication. Toutes ces collinéations doivent avoir au moins un point double réel.

Cependant dans les *espaces de nombre impair de dimensions nous pouvons avoir des collinéations dont tous les points doubles sont imaginaires.*

Un groupe de telles collinéations à points doubles imaginaires communs peut aussi être pris comme groupe fondamental de l'opération projective. Il est aisé de voir qu'une telle opération est soumise à la loi commutative et à la loi associative. Mais il ne serait pas juste de la nommer addition ni multiplication, puisqu'elle n'est pas liée avec les autres opérations par la loi distributive.

C'est une opération projective essentiellement nouvelle qui peut être ajoutée aux opérations de l'addition et de la multiplication.

Cette opération sera liée avec les opérations de l'addition et de la multiplication de manière différente suivant la position de ses points doubles imaginaires.

Considérons par exemple le cas le plus simple, à savoir $n = 1$. Nous allons construire le système de nombres projectifs (de wurfs linéaires) sur une conique K^2. Soient A le module de l'addition, C son point double unique; A et C sont aussi les points doubles de la multiplication, B son module.

Dans le système des nombres réels correspondants nous avons $A = 0$, $B = 1$, $C = \infty$.

La troisième opération projective sera définie par la transformation projective elliptique sur K^2. Nous définissons les points doubles imaginaires de cette transformation en donnant l'axe de la perspective p de cette transformation. La droite p ne doit pas avoir de points communs réels avec la conique K^2. Construisons le pôle O de la droite AC et prenons pour l'axe p la droite passant par O et conjuguée harmonique du rayon OB par rapport au couple OA et OC. Le résultat de l'opération nouvelle entre les deux points M et N, comme il est aisé de calculer, est le suivant

$$M \alpha N = \frac{M + N}{B - MN}.$$

Ainsi dans l'espace à un nombre impair de dimensions le problème de calcul projectif a une solution plus générale que celui de calcul des nombres hypercomplexes.

Nous allons maintenant poser la question : n'est-il pas possible de généraliser encore le problème de calcul projectif?

Jusqu'ici nous avons pris à la base de chaque opération projective un groupe abélien de collinéations ayant en commun leurs points doubles.

Examinons donc s'il n'est pas possible de prendre comme base de l'opération projective un autre groupe de collinéations tel que cette opération reste toujours soumise à la loi commutative et associative. Dans ce qui précède chaque opération projective avait eu son module fixé E. Chaque opération avait été définie par un groupe de collinéations. Quand nous accomplissions l'opération $A \alpha B = C$, nous choisissions dans son groupe fondamental la transformation qui faisait correspondre le point A au point E; alors au point B correspondait le point C, résultat de cette opération. Examinons donc s'il n'est pas possible de supposer le module E variable de telle manière qu'à chaque position du point A corresponde son module E_A de façon que $AE_A = A$, tandis que pour les autres points de l'espace $ME_A \neq M$. La position du module de l'opération $A \alpha B$ est donc définie par la position du point A. Dans la collinéation qui définit l'opération $A \alpha B = C$, le point A correspond au point E_A et le point C au point B. On peut démontrer que dans ce cas l'opération projective ne peut pas être commutative et associative.

En effet, il est aisé de démontrer que si notre opération était commutative et associative, le module E_A resterait immobile.

Considérons trois points arbitraires A, B et D. Puisque pour chaque collinéation on peut trouver une collinéation inverse, il existe un et un seul point C tel que $B \alpha C = D$.

Soient

$$A \alpha B = B \alpha A \tag{11}$$

et

$$(A \alpha B) \alpha C = A \alpha (B \alpha C). \tag{12}$$

Prenons, en particulier, $A = E_B$, où E_B est le module de l'opération pour le point B.

Les égalités (11) et (12) nous donnent

$$E_B \alpha B = B \alpha E_B = B,$$
$$(E_B \alpha B) \alpha C = E_B \alpha (B \alpha C),$$

de là

$$B \alpha C = E_B \alpha (B \alpha C) = (B \alpha C) \alpha E_B,$$

ou encore

$$D \alpha E_B = D.$$

Le point E_B est donc le module de l'opération pour le point D. Comme les points B et D sont tout à fait arbitraires, le module E_B est le même pour tous les points de l'espace.

De tout ce qui précède nous déduisons : *nous ne pouvons poser, comme base des opérations projectives commutatives et associatives, ayant un module déterminé par la position du premier élément de l'opération, qu'un groupe abélien de collinéations ayant leurs points doubles communs.*