JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JEAN DIEUDONNÉ

Sur l'approximation en moyenne par les polynomes trigonométriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 17, nº 1-4 (1938), p. 203-211.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1938_9_17_1-4_203_0>

Sur l'approximation en moyenne par les polynomes trigonométriques;

PAR J. DIEUDONNE.

1. Soient R^n l'espace numérique à n dimensions; μ une mesure de Radon positive [1] définie dans cet espace, et telle que tout ensemble mesurable borné ait une mesure finie. Étant donné un ensemble mesurable borné $\mathcal{E} \subset R^n$, rappelons que l'espace $L^p(\mathcal{E}, \mu)$ est l'espace des fonctions f définies dans $\mathcal{E}$, à valeurs complexes et telles que [2]

$$\|f\|^p = \int_{\mathcal{E}} |f|^p \, d\mu < +\infty \qquad (p \geqq 1).$$

On sait que cet espace est linéaire, normé (en prenant $\|f\|$ pour norme) et complet : de plus, les fonctions continues dans un ensemble fermé contenant $\mathcal{E}$, et les polynomes à n variables constituent dans L^p des ensembles *partout denses* [c'est-à-dire qu'étant donnés une fonction quelconque f de L^p et un nombre $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction continue (ou un polynome) φ tel que

$$\|f - \varphi\| < \varepsilon].$$

(1) Dans un espace R^n, une mesure de Radon est une fonction complètement additive d'ensemble $\mu(E)$, définie pour tous les ensembles mesurables-B; les ensembles mesurables-μ sont les ensembles mesurables-B et les sous-ensembles des ensembles mesurables-B de mesure-μ nulle.

(2) Deux fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure-μ nulle sont considérées comme *identiques*.

Que peut-on dire d'analogue relativement à l'ensemble des *polynomes trigonométriques* de n variables ([1]), de périodes données $T_1, T_2, \ldots, T_n$: on peut toujours, en faisant une substitution linéaire, supposer $T_1 = \ldots = T_n = 1$, comme nous le ferons dans tout ce qui suit.

2. La transformation ([2])

$$y_{2k} = \cos 2\pi x_k, \qquad y_{2k+1} = \sin 2\pi x_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

fait correspondre à R^n le tore à n dimensions T^n plongé dans R^{2n} : l'image *biunivoque* de T^n dans R^n est l'intervalle I_0 défini par les inégalités

$$0 \leq x_k < 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ou tout intervalle déduit de I_0 par une translation arbitraire.

Nous dirons que deux points de R^n sont *congrus* s'ils se déduisent l'un de l'autre par une translation dont les composantes sont des *entiers*; même définition pour deux ensembles congrus. R^n est évidemment la somme de I_0 et de tous les ensembles I congrus à I_0, qui n'ont aucun point commun deux à deux.

$\mathcal{E}$ étant borné, est contenu dans la réunion d'un nombre fini d'intervalles I, soient $I_1, I_2, \ldots, I_m$. A tout ensemble $E \subset T^n$ correspondent m ensembles congrus deux à deux et sans points communs $E_1, E_2, \ldots, E_m$, tels que $E_k \subset I_k$.

Pour définir sur T^n une mesure μ_1, remplaçons d'abord dans R^n la mesure μ par une mesure μ', définie par la condition $\mu' e = \mu e$ si $e \subset \mathcal{E}$, $\mu' e = 0$ si e n'a aucun point commun avec $\mathcal{E}$.

---

(1) Rappelons qu'on entend par là une somme d'un nombre fini de termes de la forme

$$A e^{2\pi i\left(\frac{m_1 x_1}{T_1} + \frac{m_2 x_2}{T_2} + \ldots + \frac{m_n x_n}{T_n}\right)}$$

($m_1, m_2, \ldots, m_n$ entiers positifs, négatifs ou nuls).

(2) La méthode employée ici n'est autre qu'une légère modification de l'artifice classique de M. Lebesgue pour déduire du théorème de Weierstrass le théorème analogue sur l'approximation des fonctions continues périodiques par les polynomes trigonométriques.

Il est clair que cette définition ne modifie pas l'espace $L^p(\mathcal{E}, \mu)$. Considérons alors un ensemble $E \subset T^n$; il sera dit mesurable-μ_1 si les ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_m$ sont mesurables-μ', et l'on posera

$$\mu_1 E = \mu' E_1 + \mu' E_2 + \ldots + \mu' E_m. \tag{2}$$

On peut ensuite étendre cette mesure à tout l'espace R^{2n} en prenant $\mu_1 E = 0$ pour tout ensemble E sans point commun avec T^n. Cette mesure est évidemment une mesure de Radon dans R^{2n}, les ensembles $E_1, \ldots, E_m$ étant mesurables-μ si E est mesurable-B dans R^{2n}.

Cela étant, l'ensemble des polynomes en $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ est partout dense dans l'espace $L^p(T^n, \mu_1)$.

Or, par la transformation (1), toute fonction f de $L^p(T^n, \mu_1)$ devient une fonction *périodique* [1] de $L^p(\mathcal{E}, \mu)$, et inversement, car on a, d'après (2)

$$\int_{T^n} |f|^p \, d\mu_1 = \int_{I_1 + I_2 + \ldots + I_m} |f|^p \, d\mu' = \int_{\mathcal{E}} |f|^p \, d\mu.$$

Comme un polynome en $y_1, \ldots, y_{2n}$ devient un polynome trigonométrique en $x_1, \ldots, x_n$, on voit que *l'ensemble des polynomes trigonométriques est dense par rapport à l'ensemble Φ des fonctions périodiques de* $L^p(\mathcal{E}, \mu)$. *Par suite, la condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des polynomes trigonométriques soit partout dense dans* $L^p(\mathcal{E}, \mu)$, *est que l'ensemble Φ soit partout dense dans* $L^p(\mathcal{E}, \mu)$.

3. Un premier cas où Φ est partout dense dans $L^p(\mathcal{E}, \mu)$, est celui où $\mathcal{E}$ ne contient pas de couples de points congrus, car toute fonction définie sur $\mathcal{E}$ peut alors être considérée comme périodique; Φ est donc ici *identique* à $L^p(\mathcal{E}, \mu)$.

Ce cas est celui où $\mathcal{E}$ n'a aucun point commun avec tous les ensembles congrus à $\mathcal{E}$. Désignons en général par K l'intersection de $\mathcal{E}$ et des ensembles congrus à $\mathcal{E}$: un second cas où Φ est partout dense dans $L^p(\mathcal{E}, \mu)$ est *le cas où* K *est de mesure-μ nulle*. En effet, les espaces $L^p(\mathcal{E}, \mu)$ et $L^p(\mathcal{E} - K, \mu)$ sont alors identiques, et $\mathcal{E} - K$ ne contient aucun couple de points congrus.

---

(1) Dans tout ce qui suit, nous entendons par « fonction périodique » une fonction de périodes $T_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Lorsque μ est *la mesure de Lebesgue de* R^n, nous allons voir que cette dernière condition est aussi *nécessaire* pour que Φ soit partout dense dans $L^p(\mathcal{E}, \mu)$.

Supposons en effet que l'on ait $\mu K > 0$. Remarquons que, si deux points de $\mathcal{E}$ sont congrus, on passe de l'un à l'autre par une des translations $\mathfrak{T}$ qui amène un des intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_m$ sur un autre de ces intervalles; le nombre N de ces translations est pair, car si $\mathfrak{T}$ est l'une d'elles $\mathfrak{T}^{-1}$ en est une autre, et l'on a évidemment $N \leqq m(m-1)$. Soient $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_N$ les ensembles déduits de $\mathcal{E}$ par les translations $\mathfrak{T}$; K est la réunion des ensembles $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, et, par suite, il existe au moins un de ces ensembles de mesure *positive*. Soit e cet ensemble, $\mathfrak{T}$ la translation correspondante : l'ensemble $\mathfrak{T}^{-1} e = e'$ fait encore partie de K et l'on a

$$\mu e' = \mu e > 0.$$

Soit $e'' = e \cap e'$. Montrons que chacun des ensembles $e - e''$ et $e' - e''$ est de mesure positive. Soit, en effet, M un point quelconque de e; $\mathfrak{T}^{-1} M = M_1$ appartient à e'; si M_1 est dans e'', $\mathfrak{T}^{-1} M_1 = \mathfrak{T}^{-2} M = M_2$ appartient à e', et ainsi de suite; comme e est borné, il existe donc un indice r tel que pour tout point M de e, $\mathfrak{T}^{-s} M = M_s$ appartienne à e' mais non à e'', avec $s \leqq r$. Autrement dit, e est contenu dans la réunion des r ensembles sans points communs deux à deux

$$e_2 = \mathfrak{T} e_1, \qquad e_3 = \mathfrak{T}^2 e_1, \qquad \ldots, \qquad e_{r+1} = \mathfrak{T}^r e_1,$$

où $e_1 = e' - e''$. Comme la mesure de chacun de ces ensembles est égale à μe_1, on a donc $\mu e_1 \geqq \frac{\mu e}{r} > 0$.

Remarquons enfin que $e_2 = \mathfrak{T} e_1 \subset e$ d'après la définition; e_1 et e_2 sont donc deux ensembles congrus *sans point commun*, contenus dans $\mathcal{E}$ et tels que

$$\mu e_1 = \mu e_2 > 0.$$

Considérons alors la fonction caractéristique f de l'ensemble e_1, qui appartient à $L^p(\mathcal{E}, \mu)$. Si, à tout nombre $\varepsilon > 0$ correspondait une fonction périodique φ telle que

$$\int_{\mathcal{E}} |f - \varphi|^p \, d\mu < \varepsilon,$$

on en déduirait en particulier

$$\int_{e_1} |1-\varphi|^p d\mu < \varepsilon, \qquad \int_{e_2} |\varphi|^p d\mu < \varepsilon,$$

et comme φ est périodique et que e_1 et e_2 sont congrus,

$$\int_{e_1} |\varphi|^p d\mu < \varepsilon.$$

Mais, d'après l'égalité de Minkowski

$$\mu e_1 = \int_{e_1} d\mu = \int_{e_1} |1-\varphi+\varphi|^p d\mu$$
$$\leq \left[\left(\int_{e_1} |1-\varphi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{e_1} |\varphi|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p < 2^p \varepsilon,$$

ce qui est absurde puisque ε est arbitrairement petit et $\mu e_1 > 0$.

4. La démonstration précédente, s'appuyant essentiellement sur *l'invariance de la mesure de Lebesgue par le groupe des translations de* R^n, ne s'étend pas à une mesure μ quelconque. D'ailleurs, en général, la proposition démontrée *tombe en défaut* pour une mesure quelconque : c'est ce que montre l'exemple simple où $n=1$, $\mathcal{E}$ étant l'intervalle fermé $[0,1]$, où l'on suppose que l'extrémité $x=0$ a pour mesure $\mu(0)=1$ et l'extrémité $x=1$ a une mesure nulle. L'ensemble K se compose ici des deux points 0 et 1 et n'est pas de mesure nulle; cependant, $\mathcal{E}$ est la somme de l'intervalle semi-ouvert $\mathcal{E}_1=[0,1]$ et du point 1, de mesure nulle; donc $L^p(\mathcal{E}, \mu)$ et $L^p(\mathcal{E}_1, \mu)$ sont identiques, et comme $\mathcal{E}_1$ ne contient pas de couple de points congrus, Φ est partout dense dans $L^p(\mathcal{E}_1, \mu)$.

Les circonstances que nous rencontrons dans ce cas particulier sont en réalité générales; nous allons en effet démontrer le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble Φ soit partout dense dans $L^p(\mathcal{E}, \mu)$ est qu'on puisse décomposer $\mathcal{E}$ en une somme de deux ensembles disjoints

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2,$$

tels que $\mathcal{E}_1$ ne contienne aucun couple de points congrus, et que $\mu\mathcal{E}_2 = 0$.

Il est immédiat que la condition est *suffisante* : il suffit de reprendre le raisonnement fait dans le cas particulier ci-dessus.

Pour montrer que la condition est *nécessaire*, nous désignerons par $\mathcal{L}$ la famille de tous les sous-ensembles E de $\mathcal{E}$ ne contenant aucun couple de points congrus. Nous allons tout d'abord établir que, si Φ est partout dense dans $L^p(\mathcal{E}, \mu)$, on a

$$\underline{\text{Borne}}\, \mu(\mathcal{E} - E) = 0, \tag{3}$$

lorsque E parcourt tous les ensembles de la famille $\mathcal{L}$. L'égalité (3) est évidente si $\mu\mathcal{E} = 0$. Nous pouvons donc supposer $\mu\mathcal{E} > 0$. Supposons que l'on ait

$$\underline{\text{Borne}}\, \mu(\mathcal{E} - E) = k > 0. \tag{4}$$

Nous allons voir qu'on aboutit à une contradiction. Soit δ un nombre positif arbitraire; par hypothèse on peut trouver un ensemble E de $\mathcal{L}$ tel que

$$k \leqq \mu(\mathcal{E} - E) \leqq k + \delta.$$

Soit f la fonction caractéristique de E. Par hypothèse, à tout nombre $\varepsilon > 0$ correspond une fonction φ de Φ telle que

$$\|f - \varphi\|^p = \int_E |1 - \varphi|^p \, d\mu + \int_{\mathcal{E}-E} |\varphi|^p \, d\mu \leqq \varepsilon,$$

d'où

$$\int_E |1 - \varphi|^p \, d\mu \leqq \varepsilon, \tag{5}$$

$$\int_{\mathcal{E}-E} |\varphi|^p \, d\mu \leqq \varepsilon. \tag{6}$$

Soit e le sous-ensemble de E sur lequel $|1 - \varphi| \leqq \frac{1}{2}$. On a donc

$$\int_{E-e} |1 - \varphi|^p \, d\mu \geqq \left(\frac{1}{2}\right)^p \mu(E - e)$$

et, d'après (5),

$$\mu e \geqq \mu E - 2^p \varepsilon.$$

Soit e_1 le sous-ensemble de $\mathcal{E} - E$ formé des points congrus à ceux de e; comme φ est périodique, on a, sur e_1,

$$|1 - \varphi| \leqq \frac{1}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad |\varphi| \geqq \frac{1}{2};$$

donc

$$\int_{e_1} |\varphi|^p \, d\mu \geqq \left(\frac{1}{2}\right)^p \mu e_1$$

et, d'après (6), il en résulte

$$\mu e_1 \leqq 2^p \varepsilon,$$

d'où

$$\mu(\mathcal{E} - \mathrm{E} - e_1) \geqq k - 2^p \varepsilon.$$

Or, à tout point de $\mathcal{E}$ correspondent au plus $m - 1$ points de $\mathcal{E}$ qui lui soient congrus. On peut donc (1) trouver un ensemble

$$e_2 \subset \mathcal{E} - \mathrm{E} - e_1,$$

ne contenant aucun couple de points congrus et tel que

$$\mu e_2 \geqq \frac{1}{m} \mu(\mathcal{E} - \mathrm{E} - e_1) \geqq \frac{k - 2^p \varepsilon}{m}.$$

Cela étant, il est clair que l'ensemble $\mathrm{E}_1 = e + e_2$ est un ensemble de la famille $\mathcal{L}$; or, on a

$$\mu \mathrm{E}_1 = \mu e + \mu e_2 \geqq \mu \mathrm{E} + \frac{k}{m} - \left(1 + \frac{1}{m}\right) 2^p \varepsilon,$$

d'où

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{E} - \mathrm{E}_1) &\leqq \mu(\mathcal{E} - \mathrm{E}) - \frac{k}{m} + \left(1 + \frac{1}{m}\right) 2^p \varepsilon \\ &\leqq k\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \delta + \left(1 + \frac{1}{m}\right) 2^p \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme ε et δ sont arbitraires, on peut supposer qu'on les a choisis de sorte que

$$\delta + \left(1 + \frac{1}{m}\right) 2^p \varepsilon < \frac{k}{m},$$

d'où

$$\mu(\mathcal{E} - \mathrm{E}_1) < k$$

contrairement à l'hypothèse (4).

La relation (3) étant établie, il existe une suite d'ensembles E_1,

(1) L'intersection de $\mathcal{E} - \mathrm{E} - e_1$ avec un des intervalles $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots, \mathrm{I}_m$ répondra certainement à la question.

$E_2, \ldots, E_r, \ldots$ de la famille $\mathcal{L}$ tels que

$$\mu(\mathcal{E} - E_r) \leqq \frac{M}{2^r},$$

en posant $M = \mu\mathcal{E}$.

Remarquons maintenant que l'intersection d'ensembles de la famille $\mathcal{L}$ est encore un ensemble de la famille $\mathcal{L}$, et posons ([1])

$$F_r = \underset{k \geqq r}{\mathfrak{D}} E_k,$$

On a

$$E_r - F_r = \underset{k \geqq 1}{\mathfrak{S}} [E_r \cap (\mathcal{E} - E_{r+k})].$$

Or

$$\mu[E_r \cap (\mathcal{E} - E_{r+k})] \leqq \mu(\mathcal{E} - E_{r+k}) \leqq \frac{M}{2^{r+k}},$$

d'où

$$\mu(E_r - F_r) \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \mu[E_r \cap (\mathcal{E} - E_{r+k})] \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{2^{r+k}} = \frac{M}{2^r};$$

et, par suite,

$$\mu(\mathcal{E} - F_r) = \mu(\mathcal{E} - E_r) + \mu(E_r - F_r) \leqq \frac{M}{2^{r-1}}.$$

D'autre part $F_r \subset F_{r+1}$ quel que soit r; désignons par $\mathcal{E}_1$ la réunion des ensembles F_r; $\mathcal{E}_1$ est un ensemble de $\mathcal{L}$, car deux points quelconques de $\mathcal{E}_1$ appartiennent à un même F_r et ne peuvent donc être congrus. De plus, on a

$$\mu(\mathcal{E} - \mathcal{E}_1) \leqq \mu(\mathcal{E} - F_r) \leqq \frac{M}{2^{r-1}},$$

quel que soit r, d'où $\mu(\mathcal{E} - \mathcal{E}_1) = 0$, ce qui démontre le théorème.

5. Il est facile maintenant de se débarrasser de l'hypothèse que $\mathcal{E}$ est *borné*, que nous avons supposée vérifiée jusqu'ici. Rangeons en effet les intervalles I en une suite $I_1, I_2, \ldots, I_m, \ldots$ dont la réunion est l'espace R^n, et soit $\mathcal{E}^{(m)}$ l'intersection de $\mathcal{E}$ et de I_m.

([1]) On rappelle que $\underset{i \in H}{\mathfrak{D}} E_i$ et $\underset{i \in H}{\mathfrak{S}} E_i$ désignent respectivement l'intersection et la réunion d'une famille d'ensembles E_i, où l'indice i parcourt un certain ensemble H : ici H se compose de tous les entiers supérieurs à une certaine valeur.

Remarquons que si Φ est partout dense dans $L_p(\mathcal{E}, \mu)$, il est aussi partout dense dans $L^p(E, \mu)$ quel que soit le sous-ensemble E de $\mathcal{E}$.

D'après le théorème précédent, en retranchant de $\mathcal{E}^{(1)} + \mathcal{E}^{(2)}$ un ensemble de mesure nulle convenable $\mathcal{E}_2^{(2)}$, il reste un ensemble $\mathcal{E}_1^{(2)}$ ne contenant aucun couple de points congrus; de même on peut retrancher de $\mathcal{E}_1^{(2)} + \mathcal{E}^{(3)}$ un ensemble de mesure nulle $\mathcal{E}_2^{(3)}$, de sorte que l'ensemble restant $\mathcal{E}_1^{(3)}$ ne contienne aucun couple de points congrus, et ainsi de suite. On retranche ainsi successivement de $\mathcal{E}$ une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle, dont la réunion $\mathcal{E}_2$ est encore de mesure nulle; et, par construction, l'ensemble $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} - \mathcal{E}_2$ ne contient aucun couple de points congrus. Autrement dit, le théorème du paragraphe 4 subsiste sans modification.

Par contre, on ne peut en déduire que l'ensemble des polynomes trigonométriques est partout dense dans $L^p(\mathcal{E}, \mu)$ que si $\mu\mathcal{E}$ est *finie*, car la démonstration du paragraphe 2 s'appuie sur le fait que l'ensemble des *polynomes* est partout dense dans $L^p(T^n, \mu_1)$, ce qui cesse d'être exact lorsque $\mu_1 T^n$ n'est plus finie.