JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

OTTON NIKODYM

Sur un théorème de M.S. Zaremba concernant les fonctions harmoniques

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 12 (1933), p. 95-108.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1933_9_12__95_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur un théorème de M. S. Zaremba concernant les fonctions harmoniques;

PAR OTTON NIKODYM
(Varsovie).

M. S. Zaremba démontre dans son travail : *Sur un problème toujours possible comprenant, à titre de cas particulier, le problème de Dirichlet et celui de Neumann* (*Journ. de Math.*, 9ᵉ série, t. VI, 1927, p. 127-163), un théorème important dont il se sert dans le traitement du problème de Dirichlet et de Neumann.

Le théorème en question est le suivant :

Soient D *un domaine ouvert* [1] *dans l'espace à trois dimensions,* $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P})$ *un champ de vecteurs défini dans* D *et tel que les intégrales*

$$\iiint_{\mathrm{D}} \vec{\mathrm{V}}(p)\, d\tau \quad \text{et} \quad \iiint_{\mathrm{D}} \{\vec{\mathrm{V}}(p)\}^2\, d\tau$$

existent. Dans ces conditions il existe une fonction $v(p)$ *définie et harmonique dans* D, *possédant un gradient déterminé dans tout point de* D, *et telle que : 1° les intégrales*

$$\iiint_{\mathrm{D}} \operatorname{grad} v(p)\, d\tau \quad \text{et} \quad \iiint_{\mathrm{D}} \{\operatorname{grad} v(p)\}^2\, d\tau$$

existent; 2° on a

$$\iiint_{\mathrm{D}} \{\vec{\mathrm{V}}(p) - \operatorname{grad} v(p)\} \cdot \{\operatorname{grad} h(p)\}\, d\tau = 0$$

[1] Nous le supposons borné.

pour toute fonction $h(p)$ harmonique dans D et possédant un gradient déterminé et de carré intégrable.

La fonction harmonique $v(p)$ est unique à une constante arbitraire et additive près.

L'auteur démontre le théorème d'abord pour le cas où D est une sphère, la démonstration s'appuyant sur la considération d'un système orthogonal et complet, de polynomes sphériques. Puis, il démontre par un procédé alterné que, si le théorème est vrai pour deux domaines, il en est de même pour leur somme.

Enfin M. Zaremba traite le cas général, en employant encore un algorithme infini.

Le but de mon travail est la simplification de la démonstration de M. Zaremba.

Je l'ai obtenue grâce à des méthodes bien connues de l'analyse moderne; empruntées à la théorie abstraite des ensembles et au calcul fonctionnel abstrait.

La simplification consiste non seulement dans l'écriture des symboles mais aussi dans la démonstration du théorème. Elle met en évidence la véritable nature du théorème, dont l'étroite solidarité avec les idées de compacité et de famille normale de fonctions harmoniques avaient été déjà dégagées en 1929 par M. G. Bouligand (1).

On verra que le théorème de M. Zaremba est une conséquence d'un lemme très simple et presque évident concernant les vecteurs abstraits.

Après avoir résumé les principes de la théorie des vecteurs abstraits, je démontre le lemme en question.

J'en déduis le théorème de M. Zaremba en utilisant des méthodes connues dont il s'est servi lui-même dans ses travaux.

Pour éviter des complications inutiles je me borne aux domaines bornés de l'espace à trois dimensions et au lieu de l'intégration selon Riemann j'emploie celle de M. Lebesgue (2).

---

(1) *Sur la continuité et les approximations en hydrodynamique* (*Journal de l'École Polytechnique*, 1929, p. 1-39).

(2) Les raisonnements qui vont suivre ont été présentés pendant la séance du 23 octobre 1931 à la Société polonaise de Mathématiques (Section de Varsovie).

1. Soit A une variété abstraite non vide dont les éléments seront appelés *vecteurs*. Supposons qu'il y ait deux opérations : l'*addition* de deux vecteurs et la *multiplication d'un vecteur par un nombre réel*,

$$a + b, \qquad \lambda a = a\lambda,$$

ces opérations étant toujours exécutables et donnant des vecteurs de la variété A. Supposons que lesdites opérations satisfassent aux conditions suivantes [1] :

1° $a + b = b + a$;
2° $a + (b + c) = (a + b) + c$;
3° Il existe un vecteur θ, appelé *nul* tel que $a + \theta = a$ quel que soit a;
4° Si $a + b = a + b'$, on a $b = b'$;
5° $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$;
6° $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;
7° $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$;
8° $1.a = a$.

Il en résulte qu'on peut opérer avec ces vecteurs de la même manière qu'avec les vecteurs ordinaires. Prenons une fonction bilinéaire [2] de deux vecteurs variables x, y, désignée par le symbole

$$(x, y)$$

admettant des valeurs réelles. Supposons (x, y) symétrique

$$(x, y) = (y, x),$$

et positivement définie, ce qui veut dire que

$$(x, x) \geqq 0$$

et que la relation $(x, x) = 0$ doit équivaloir à $x = \theta$.

Le nombre (x, y) sera appelé *produit scalaire* de x et y.

---

(1) *Cf.* S. BANACH, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales* (*Fund. Math.*, t. III, 1922, p. 134-135). — H. WEYL, *Raum-Zeit-Materie*, Berlin 1919, p. 15, 23-24.

(2) Cela veut dire qu'on a toujours

$$(\lambda a + \mu b, c) = \lambda(a, c) + \mu(b, c),$$
$$(c, \lambda a + \mu b) = \lambda(c, a) + \mu(c, b).$$

Appelons $\sqrt{(a, a)}$ la *norme* [1] *du vecteur* a, et désignons-la par le symbole $\|a\|$. Par la *distance de deux vecteurs* a, b nous allons comprendre le nombre $\|a-b\|$.

En ce qui concerne la notion de la distance de deux vecteurs, on peut remarquer que les propriétés usuelles exigées pour la notion de distance sont conservées. En effet on a

$$\|a-b\| = \|b-a\|; \tag{1}$$

$$\|a-b\| = 0 \text{ équivaut à } a = b; \tag{2}$$

$$\|a-b\| \leqq \|a-c\| + \|c-b\|. \tag{3}$$

La relation (3) résulte immédiatement de

$$\|a+b\| \leqq \|a\| + \|b\|$$

qui de son côté est une conséquence de l'inégalité suivante :

$$|(a, b)| \leqq \|a\| \cdot \|b\|,$$

cette dernière étant analogue à la célèbre inégalité de Cauchy-Schwarz, on la démontre de la même manière.

Nous dirons qu'une suite de vecteurs $\{a_n\}$ *converge vers* a, si $\|a_n - a\| \to 0$. Appelons deux vecteurs a, b *orthogonaux* si $(a, b) = 0$.

Appelons *variété vectorielle normale* une variété assujettie aux conditions spécifiées ci-dessus.

Une variété s'appelle *séparable*, s'il existe un ensemble dénombrable A_0 de vecteurs tel que tout vecteur de la variété est la limite d'une suite d'éléments de A_0 convenablement choisis. Une variété s'appelle *complète* si la condition de Cauchy est satisfaite, c'est-à-dire si la relation

$$\lim_{n, m \to \infty} \|a_n - a_m\| = 0$$

entraîne l'existence d'un vecteur a, tel que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a.$$

2. Théorème. — *Soient :*

---

[1] *Cf.* Banach, *loc. cit.*, et F. Riesz, *Ueber lineare Funktionalgleichungen* (*Acta math.*, t. 41, 1916, p. 72).

1° A *une variété vectorielle et normale;*

2° B *une sous-variété vectorielle et normale de* A (*ne se réduisant pas à l'élément unique nul* θ) *séparable et complète, pour laquelle la notion des opérations fondamentales ainsi que celle du produit scalaire sont empruntées de* A;

3° $a \in A$ (a est un élément de A).

Ces conditions remplies il existe un vecteur unique $b \in B$ *tel que la différence* $a - b$ *est orthogonale à chaque* y *appartenant à* B.

Démonstration. — La variété B étant séparable, il existe une suite infinie $\{b_n\}$ d'éléments de B et formant un ensemble partout dense dans B. Comme B ne se réduit pas au seul élément θ, il est évident qu'on pourra en extraire des $\{b_n\}$ une suite partielle $\{b'_n\}$ telle que

$$b'_1, \quad b'_2, \quad \ldots, \quad b'_m, \quad \ldots$$

sont linéairement indépendants (¹) quel que soit m, et par lesquels les b_n s'expriment linéairement.

En y appliquant le procédé connu de M. Schmidt (²), on pourra trouver des nombres réels β_{ik} tels que les vecteurs

$$\begin{array}{l} p_1 = \beta_{1,1} b'_1, \\ p_2 = \beta_{2,1} b'_1 + \beta_{2,2} b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n = \beta_{n,1} b'_1 + \beta_{n,2} b'_2 + \ldots + \beta_{n,n} b'_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

forment un système orthogonal et normé (³), ce qui s'exprime par les

---

(¹) Les vecteurs $x_1, \ldots, x_m$ (en nombre fini m) s'appellent *linéairement indépendants*, si la relation

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m = \theta,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont des nombres réels, entraîne

$$\lambda_1 = 0, \quad \ldots, \quad \lambda_m = 0.$$

(²) *Voir* par exemple A. WINTNER, *Spektraltheorie d. unendlichen Matrizen*, Leipzig, 1929, p. 11-12.

(³) Nous nous bornons au cas, où le système est infini. Le cas restant est trivial.

égalités

$$(1)\qquad \begin{cases} (p_i, p_k) = 0 & \text{pour } i \neq k \quad (i, k = 1, 2, \ldots), \\ (p_i, p_i) = 1 & (i = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Le système de vecteurs $\{p_n\}$ est complet dans B (¹), ce qui résulte du fait que $\{b_n\}$ est partout dense dans B. Cela étant, considérons le vecteur a et formons la série

$$(2)\qquad \sum_n x_n p_n,$$

où

$$(3)\qquad x_n = (a, p_n).$$

En tenant compte de ce que B est complet, on démontre aisément que (2) est convergente, et qu'on peut la multiplier par un vecteur en multipliant chaque terme séparément (²). Posons

$$(4)\qquad b = \sum_n x_n p_n;$$

on a $b \in$ B.

(¹) Le système $\{q_n\}$ d'éléments de B orthogonaux deux à deux s'appelle *complet* dans B, si les relations

$$(x, q_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad \text{où } x \in \text{B},$$

entraînent $x = \Theta$. La propriété d'être complet se démontre en s'appuyant sur la relation

$$\| p_i - p_k \| = 2 \qquad \text{pour } i \neq k.$$

(²) On procède d'une manière analogue comme dans la théorie de MM. F. Riesz et Fischer des développements orthogonaux. On a

$$0 \leqq \left\| a - \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \right\|^2 = \| a \|^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

d'où il résulte que $\sum_i x_i^2$ est convergente.

Comme on a

$$\left\| \sum_{i=n}^{n+k} x_i p_i \right\|^2 = \sum_{i=n}^{n+k} x_i^2,$$

Le vecteur b possède les propriétés exigées dans la thèse.

Pour démontrer cela, montrons d'abord que

$$(a-b,\, p_n)=0 \qquad (n=1,\, 2,\, \ldots). \tag{5}$$

On a

$$(a-b,\, p_n)=(a,\, p_n)-(b,\, p_n).$$

Mais

$$(a,\, p_n)=x_n$$

et

$$(b,\, p_n)=\sum_i x_i(p_i,\, p_n),$$

d'où il résulte, d'après (1), que

$$(b,\, p_n)=x_n.$$

Les équations (5) sont ainsi démontrées.

Soit maintenant y un vecteur arbitraire de B.

Le système $\{p_n\}$ étant complet, on a

$$y=\sum_i c_i p_i, \qquad \text{où } c_i=(y,\, p_i) \quad (^1) \qquad (i=1,\, 2,\, 3,\, \ldots),$$

d'où l'on a

$$(a-b,\, y)=\sum c_i(a-b,\, p_i)=0.$$

---

il s'ensuit que la suite

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right\}$$

est convergente.

Si $a_n \to a$, on a

$$(a_n,\, b)\to(a,\, b).$$

En effet, on a

$$(a,\, b)-(a_n,\, b)=(a-a_n,\, b),$$

d'où

$$|(a-a_n,\, b)|\leqq\|a-a_n\|\cdot\|b\|.$$

(1) Pour démontrer cela, on procède comme dans la théorie des développements orthogonaux ordinaires.

En effet, on démontre comme plus haut que la série $\sum(y,\, p_i).p_i$ est conver-

L'existence du vecteur b est établie. L'unicité de b se démontre aisément.

Le théorème est ainsi démontré.

3. Soit D un domaine ouvert et borné dans l'espace euclidien à trois dimensions. Considérons les champs $V(p)$ de vecteurs définis dans D et à carré sommable [1] d'après M. Lebesgue, comme éléments formant une variété A.

La somme de deux éléments de A et le produit d'un élément par un nombre se définissent par

$$V(p) + W(p), \quad \lambda V(p).$$

On voit que si V et W appartiennent à A, il en est de même pour $V + W$ et pour λV.

Appelons deux champs $V'(p)$ et $V''(p)$ *égaux*, s'ils ne diffèrent que dans un ensemble de points de mesure nulle. Désignons par θ le champ $V(p) = 0$ (l'élément nul de la variété A).

On voit aisément que toutes les propriétés 1°, 8° ont lieu. Par le

---

gente. Posons

$$y' = \sum_i (y, p_i) p_i.$$

En multipliant les deux membres par p_n ($n = 1, 2, \ldots$), on obtient

$$(y', p_n) = c_n.$$

Il en résulte que

$$(y' - y, p_n) = (y', p_n) - (y, p_n) = 0,$$

d'où $y' - y$ est orthogonal à toutes les fonctions p_n.

Comme p_n est un système complet, il s'ensuit que $y' - y = \theta$, donc $y' = y$.

[1] Cela veut dire qu'en posant

$$V(P) = V_1(P)i + V_2(P)j + V_3(P)k,$$

les intégrales

$$\iiint_D V_s \, d\tau, \quad \iiint_D V_s^2 \, d\tau \qquad (s = 1, 2, 3)$$

existent.

produit de V et W nous entendrons le nombre

$$(V, W) = \int\int\int_D [V_1(p) W_1(p) + V_2(p) W_2(p) + V_3(p) W_3(p)] d\tau.$$

L'intégrale en question existe en vertu de l'inégalité ordinaire de Schwarz. Le produit (V, W) jouit des propriétés exigées dans le paragraphe 1 :

$$(V, W) = (W, V),$$
$$(\lambda V' + \mu V'', W) = \lambda(V', W) + \mu(V'', W),$$
$$(V, V) \geqq 0,$$

et l'on voit aisément que l'équation $(V, V) = 0$ entraîne $V(p) = 0$ à un ensemble de p de mesure nulle près.

Le symbole $\| V \|$ et la notion de la limite d'une suite infinie $\{V_n\}$ peuvent être définis conformément au paragraphe 1. A est une variété vectorielle normale. Elle est séparable et complète. On le démontre comme pour le champ des fonctions d'une variable réelle et à carrés sommables (¹).

4. Cela étant, désignons par B l'ensemble de tous les champs vectoriels $U(p)$ de A, pour lesquels il existe une fonction $f(p)$ harmonique dans D qui peut y être même multiforme, mais ayant dans tout point de D un gradient déterminé

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k,$$

tel que presque partout dans D on ait

$$U(p) = \operatorname{grad} f(p).$$

En appliquant à B les opérations définies plus haut de l'addition, de la multiplication par un nombre et de la multiplication de deux éléments, on trouve facilement que B est une variété vectorielle normale. Elle est séparable comme étant un sous-ensemble de A.

Nous allons démontrer que B est complète.

(¹) *Voir* par exemple GIUSEPPE VITALI, *Geometria nello spazio Hilbertiano* (Bologna Zanichelli, 1929). — S. SAKS, *Zarys teorji całki*, p. 149 et suiv. (Warszawa, 1930).

Nous nous appuierons sur le lemme suivant :

Si $h(p)$ est une fonction harmonique dans l'intérieur et sur la frontière de la sphère S de rayon ρ et de centre p_0, on a

$$\int\int\int_S [h - h(p_0)]^2 d\tau \geq c(\rho) \int\int\int_S |\text{grad } h|^2 d\tau,$$

où $c(\rho)$ est une constante qui ne dépend que du rayon ρ.

Le lemme se démontre au moyen des polynomes sphériques classiques de Laplace. En effet, le théorème de Green nous permet de démontrer que pour les deux différents polynomes H', H''

$$(6) \qquad \int\int\int_S \text{grad } \mathrm{H}' \text{ grad } \mathrm{H}'' \, d\tau = 0,$$

$$(7) \qquad \int\int\int_S \mathrm{H}' . \mathrm{H}'' \, d\tau = 0.$$

Après avoir normé les polynomes en question afin d'avoir toujours [1]

$$\int\int\int_S |\text{grad } \mathrm{H}|^2 d\tau = 1,$$

on obtient au moyen du théorème de Green

$$\int\int\int_S \mathrm{H}^2 d\tau = \frac{\rho^2}{(2n-3)n},$$

dans le cas où le polynome H est de degré n.

On développe $h(p)$ en une série

$$\sum_i c_i \mathrm{H}_i(p) - h(p_0).$$

Si l'on calcule les valeurs des intégrales

$$\int\int\int_S [h - h(p_0)]^2 d\tau \quad \text{et} \quad \int\int\int_S |\text{grad } h|^2 d\tau$$

en tenant compte de (7) et (6), on obtient l'inégalité proposée.

---

(1) *Voir* le travail cité de M. S. Zaremba. Le système de polynomes sphériques dont on a besoin est complet, abstraction faite du polynome se réduisant à une constante.

Le lemme étant établi, considérons une suite $\{U_n\}$ d'éléments de B, telle que

$$\lim_{n, m \to \infty} \| U_n - U_m \| = 0.$$

La variété A étant complète, il en résulte qu'il existe un champ $U(p)$ de A tel que $\lim U_n = U$. Alors il s'agit de démontrer que $U(p)$ peut être considéré presque partout comme gradient d'une fonction harmonique dans D.

Soit $f_n(p)$ une fonction harmonique dans D telle que

$$\operatorname{grad} f_n(p) = U_n(p)$$

dans D (presque partout).

Les fonctions $f_n(p)$ peuvent être choisies de sorte que $\{f_n(p_0)\}$, où p_0 est un point fixe dans D, soit convergente.

Soit $S(p_0, \rho) = S$ une sphère de centre en p_0 et de rayon ρ dont la frontière est contenue dans le domaine D.

Soit $\varepsilon > 0$. En vertu de l'hypothèse il existe un nombre μ tel que, si n et m surpassent μ, on a

$$\| u_n - u_m \| < \varepsilon.$$

Fixons n et m pour un moment.

On a

$$\| u_n - u_m \|^2 = \iiint_D |\operatorname{grad}(f_n - f_m)|^2 \, d\tau.$$

Par conséquent

$$\iiint_S |\operatorname{grad}(f_n - f_m)|^2 \, d\tau < \varepsilon^2,$$

d'où, en vertu du lemme,

$$\iiint_S \{[f_n(p) - f_m(p)] - [f_n(p_0) - f_m(p_0)]\}^2 \, d\tau \leqq C(\rho_0) . \varepsilon^2,$$

$$\sqrt{\iiint_S [f_n(p) - f_m(p)]^2 \, d\tau} - \sqrt{\iiint_S [f_n(p_0) - f_m(p_0)]^2 \, d\tau} \, \Bigg|$$

$$\leqq \sqrt{\iiint_S \{[f_n(p) - f_m(p)] - [f_n(p_0) - f_m(p_0)]\}^2 \, d\tau} \leqq \sqrt{C(\rho)} . \varepsilon.$$

$$\sqrt{\iiint_S (f_n - f_m)^2 \, d\tau} \leqq \sqrt{C(\rho)} . \varepsilon + [f_n(p_0) - f_m(p_0)] \sqrt{D}.$$

Par conséquent la suite de fonctions harmoniques $\{f_n\}$ converge en moyenne carrée dans S. Il en résulte, d'après un lemme connu de M. St. Zaremba (¹) que $\{f_n\}$ converge uniformément dans tout ensemble fermé contenu dans la sphère ouverte S. On en déduit que la limite ordinaire

$$f(p) = \lim_{n \to \infty} f_n(p)$$

est une fonction harmonique dans S.

Comme $\{f_n\}$ est une suite uniformément convergente de fonctions harmoniques, il en est de même, comme on le sait, pour la suite $\{\operatorname{grad} f_n\}$ (²) et l'on a dans S

$$\operatorname{grad} f(p) = \lim_{n \to \infty} \operatorname{grad} f_n.$$

Je dis que

$$\operatorname{grad} f(p) = \mathrm{U}(p)$$

dans S presque partout.

(¹) *Voir* par exemple G. Bouligand, *Fonctions harmoniques* (*Mém. des Sc. Math.*, fasc. XI, p. 20-21).

(²) En effet, soit $h(p)$ harmonique dans la sphère $\mathrm{S}(p_0, \rho)$ et continue dans la sphère fermée. Soit M le maximum de $|h(p)|$ dans S fermée. On a

$$\iiint_{\mathrm{S}(p_0, \rho-\varepsilon)} \frac{\partial h}{\partial x}\, d\tau + \iint h \cos(n_i, x)\, d\omega = 0,$$

où $0 < \varepsilon < \rho$, d'où

$$\left|\iiint \frac{\partial h}{\partial x}\, d\tau\right| \leqq \iint |h|\, d\omega \leqq 4(\rho - \varepsilon)^2 \pi \mathrm{M}.$$

Il en résulte, d'après le théorème de la moyenne (de Gauss) appliqué à la fonction harmonique $\dfrac{\partial h}{\partial x}$

$$\left|\left[\frac{\partial h}{\partial x}\right]_{p_0}\right| \leqq \frac{3\mathrm{M}}{(\rho - \varepsilon)^2},$$

d'où

$$(1) \qquad \left|\left[\frac{\partial h}{\partial x}\right]_{p_0}\right| \leqq \frac{3\mathrm{M}}{\rho^2}.$$

L'inégalité (1), ainsi que les inégalités analogues pour $\dfrac{\partial h}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial h}{\partial z}$, permettent de démontrer la convergence en question.

En effet puisque

$$\lim_{n, m \to \infty} \iiint_D |U_n - U_m|^2 d\tau = 0,$$

on peut démontrer qu'il existe une suite $\{U_{k_n}\}$ extraite de la suite $\{U_n(p)\}$ et qui converge presque partout dans D dans le sens ordinaire vers $U(p)$.

On a ainsi presque partout

$$\lim U_{k_n}(p) = U(p).$$

Par conséquent

$$\lim \operatorname{grad} f_{k_n}(p) = U(p),$$

donc

$$\operatorname{grad} f(p) = U(p)$$

presque partout dans S.

Nous avons ainsi démontré que $U(p)$ peut être considéré dans S presque partout comme le gradient d'une fonction harmonique dans S.

En prolongeant la fonction harmonique $f(p)$ on obtient de proche en proche que le gradient de la fonction harmonique dans D, ainsi obtenu est presque partout égal à $U(p)$.

Cela prouve que B est complet.

5. Cela étant, nous nous trouvons dans les conditions du théorème général. Il en résulte que, quel que soit le champ vectoriel $V(p)$ à carré sommable dans D, il existe une fonction $f(p)$ harmonique dans D telle que

$$\iiint_D \{\operatorname{grad} f(p) - V(p)\}\{\operatorname{grad} g(p)\} d\tau = 0$$

pour toute fonction $g(p)$ harmonique dans D, ayant un gradient déterminé partout et à carré sommable dans D. C'est précisément le théorème de M. Zaremba.

Corollaire. — La variété B étant complète et séparable, il existe un système $\{v_m\}$, $m = 1, 2, \ldots$ complet d'éléments orthogonaux et normalisés. Il s'ensuit que tout champ vectoriel $U(p)$ de B peut être représenté par la somme

$$U = \sum_{i=1}^{\infty} c_i v_i$$

convergente, où

$$c_i = \int\int\int_D (U_1 v_{i1} + U_2 v_{i2} + U_3 v_{i3})\, d\tau,$$

les v_{i1}, v_{i2}, v_{i3} étant les composantes de $v_i(p)$.

Il en résulte que si $f_i(p)$ sont des fonctions harmoniques dans D, pour lesquelles on a presque partout

$$\operatorname{grad} f_i(p) = v_i(p)$$

et où

$$f_i(p_0) = 0,$$

p_0 étant un point fixe, *on a pour toute fonction harmonique* $f(p)$ *dans* D *et de gradient déterminé à carré sommable*

$$f(p) = f(p_0) + \sum_{i=1}^{\infty} C_i f_i(p),$$

la série étant uniformément convergente sur tout chemin fermé partant de p_0 *et ne sortant pas du domaine* D.

N. B. — Il faut suivre le chemin avec les déterminations (des fonctions multiformes en question), variant d'une manière continue.

Les fonctions $f_i(p)$ sont analogues aux polynomes sphériques. En effet, elles sont harmoniques dans D, et, en outre, on a

$$\int\int\int_D \{\operatorname{grad} f_i(p)\}\{\operatorname{grad} f_k(p)\}\, d\tau = 0 \text{ ou } 1$$

selon le cas, où $i \neq k$, ou $i = k$. Les coefficients c_i sont définis par la formule

$$c_i = \int\int\int \{\operatorname{grad} f(p)\}\{\operatorname{grad} f_i(p)\}\, d\tau.$$