// JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. MARCHAUD

Sur les demi-sécantes et les semi-tangentes aux ensembles

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 12 (1933), p. 415-443.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1933_9_12__415_0>

Sur les demi-sécantes et les semi-tangentes aux ensembles;

PAR A. MARCHAUD.

INTRODUCTION.

Dans son Mémoire fondamental *Sur les nombres dérivés des fonctions continues*, M. A. Denjoy a donné une démonstration très élégante du théorème suivant [1], dû à M. H. Lebesgue [2] : une fonction continue d'une variable possédant en chaque point et pour un côté invariable un dérivé nul, médian ou extrême, est une constante. La démonstration de M. A. Denjoy est d'ailleurs valable si la fonction est continue en chaque point seulement du côté opposé au dérivé considéré. Je me propose de montrer que le théorème ainsi étendu est un cas particulier d'une proposition géométrique très générale dont la démonstration est simple et élémentaire. Cette proposition est relative aux ensembles que j'appelle *fermés d'un côté* et qui généralisent la notion de fonction d'une variable continue d'un côté.

Soient, dans l'espace euclidien à trois dimensions, un plan Π et un axe non parallèle Ox. Un ensemble de points à distance finie (mais pas nécessairement bornée) sera dit : *fermé du côté de* Ox *par rapport à la direction* Π, si toute suite de points de l'ensemble

---

(1) A. DENJOY, *Sur les nombres dérivés des fonctions continues* (*Journ. de Math. pures et appl.*, t. I, 1915, p. 175).

(2) H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 1re édit., p. 72.

d'abscisses croissantes possède un point d'accumulation (au moins) sur l'ensemble. On remarquera que Ox sert uniquement à choisir un côté par rapport à Π.

Un ensemble fermé (au sens ordinaire) est fermé des deux côtés par rapport à la direction Π, mais la réciproque n'est pas vraie en général.

Ceci posé, le théorème annoncé est le suivant :

Soient Π *un plan*, C *un demi-cône convexe situé d'un même côté par rapport à* Π *et* E *un ensemble fermé de ce côté par rapport à la direction* Π; *si* $\{A\}$ *est l'ensemble des points* A *de* E *tels que le demi-cône de sommet* A, *directement homothétique à* C, *ne contienne à son intérieur aucun point de* E, *cet ensemble* E *n'a aucun point extérieur au domaine formé par l'ensemble des demi-cônes inversement homothétiques à* C *ayant pour sommet les points de* $\{A\}$.

On peut évidemment remplacer dans la conclusion $\{A\}$ par tout ensemble le contenant.

L'énoncé précédent fait intervenir au même titre les points voisins ou non d'un point donné. C'est pourquoi nous en déduirons des conséquences relatives non seulement aux nombres dérivés des fonctions d'une variable et aux semi-tangentes [1] aux ensembles, mais aussi des propriétés relatives aux demi-sécantes. En voici une, par exemple, si à tout point M d'un continu, sauf peut-être à un nombre fini d'entre eux, on peut associer un point M' du continu tel que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ soit directement parallèle à une demi-droite fixe, le continu est un segment de droite.

Il n'est pas possible de remplacer dans ce dernier énoncé « demi-droite fixe » par « droite fixe ». D'ailleurs, comme on le verra, il sera toujours indispensable de faire une hypothèse d'orientation.

Indépendamment des conséquences directes du théorème général, on trouvera diverses extensions se rapportant à la théorie des équations différentielles.

La plupart des conclusions du présent Mémoire ont été communiquées à l'Académie des Sciences de Paris, le 14 mars 1932.

---

[1] On dit ordinairement « demi-tangente ». *Voir* plus loin nos **8** et **9**.

I. — Le théorème général.

1. Le théorème en question résultera presque immédiatement d'une propriété élémentaire des domaines sommes de demi-cônes homothétiques à un demi-cône *convexe* donné. Comme on l'a dit plus haut, il s'agira d'ensembles situés dans l'espace *euclidien à trois dimensions*.

Un demi-cône convexe C, de sommet O, est un ensemble fermé de demi-droites issues de ce point — ne remplissant pas un demi-espace — tel que si deux points A et B appartiennent à l'ensemble tout le segment AB en fait également partie. Il résulte de cette définition que si A et B sont intérieurs à C, il en est de même du segment AB. On sait qu'il existe des plans, passant par O, tels que C soit tout entier d'un même côté — au sens large — par rapport à chacun d'eux. Un demi-cône convexe peut se réduire à un dièdre.

Pour les applications que nous avons en vue, on pourrait se borner aux demi-cônes dont la frontière appartient à un cône du second degré (et même de révolution). Mais cette restriction n'apportant que des simplifications insignifiantes dans les démonstrations, il ne me paraît pas utile de la faire. D'ailleurs la notion de demi-cône convexe est bien connue et tout à fait intuitive [1].

2. Soit donc C un demi-cône convexe de sommet O. M étant un point quelconque de l'espace je désignerai par C(M) le demi-cône de sommet M directement homothétique à C, et par C'(M) le demi-cône opposé.

Considérons un ensemble quelconque $\{x\}$ de points x situés à distance finie — mais pas nécessairement bornée — et le domaine Δ_x constitué par l'ensemble des points de l'espace, *intérieurs* à l'un au moins des demi-cônes $C'(x)$. Δ_x ne contient que des points intérieurs.

---

[1] Sur les figures convexes on pourra consulter l'excellent Ouvrage de M. Bonnesen, *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes* (Gauthier-Villars, 1929).

Je dis que *si un point* P *n'appartient pas à* Δ_α, *il en est de même de tous les points intérieurs à* C(P).

Pour le démontrer on utilisera les propriétés suivantes, presque évidentes :

1° Si Q est intérieur à C(P), P est intérieur à C'(Q).

2° Si Q est intérieur à C'(α), tout point P intérieur à C'(Q) est intérieur à C'(α).

Établissons d'abord la première. C'(Q) est symétrique de C(P) par rapport au milieu I de PQ. Ce point est intérieur à C(P), donc à C'(Q). Par suite P est intérieur à C'(Q).

Considérons la seconde. Soit J le symétrique de α par rapport à Q. C'(α) est homothétique de C'(Q) par rapport à J dans le rapport 2. Le segment JP est donc tout entier intérieur à C'(Q) — car J est intérieur à C'(α) et par suite à C'(Q) —. Le segment JP' homothétique de JP (centre J, rapport 2) est alors tout entier intérieur à C'(α). P est donc intérieur à ce demi-cône [1].

Soit alors P un point n'appartenant pas à Δ_α, et Q un point intérieur à C(P). Si Q faisait partie de Δ_α il serait intérieur à un C'(α). Mais P étant intérieur à C'(Q) [propriété 1°], ce point serait intérieur à C'(α) [propriété 2°], ce qui n'est pas. C. Q. F. D.

3. Donnons-nous maintenant un ensemble E, que nous supposerons d'abord *fermé* (au sens ordinaire), et soit {A} *l'ensemble des points* A *de* E *tels que* C(A) *ne contienne à son intérieur aucun point de* E.

Prenons une demi-droite Ox *intérieure* à C (O est le sommet de C) et un plan Π passant par O et laissant C d'un même côté, au sens large. Choisissons sur Ox un point ω à une distance de O égale à ε, où ε désigne une longueur positive qui tendra vers zéro. Ceci posé, à chaque point A faisons correspondre le point α tel que $\overrightarrow{A\alpha} = \overrightarrow{O\omega}$. Les notations étant les mêmes que précédemment, il est immédiat

---

[1] On remarquera que l'hypothèse C *est convexe* n'est intervenue que dans la propriété 2°. Celle-ci est fausse pour un demi-cône non convexe, tandis que la propriété 1° reste vraie.

que tout point A est intérieur à Δ_α. Je vais montrer que E *tout entier est contenu dans ce domaine*.

En effet, désignons par E_α l'ensemble des points de E n'appartenant pas à Δ_α, c'est-à-dire qui ne lui sont pas intérieurs [n° 2]. L'ensemble E_α est fermé ([1]) et par suite sa projection e_α sur Ox parallèlement à II. La borne p de cet ensemble du côté de Ox est la projection d'un point P de E_α, et le demi-cône C(P) ne peut évidemment contenir de points de E_α à son intérieur. Mais P n'étant pas un point de $\{A\}$, C(P) doit contenir à son intérieur des points de E; il faut alors que ceux-ci soient intérieurs à Δ_α. Or ceci est impossible, car P n'est pas intérieur à Δ_α [n° 2]. Il y a contradiction. L'ensemble E_α est donc vide et ceci quel que soit ε ([2]).

Désignons par $\{C'(A)\}$ *le domaine constitué par l'ensemble des points de l'espace appartenant à l'un au moins des demi-cônes* $C'(A)$, *frontière comprise*, et par $\{C'(\alpha)\}$ le domaine obtenu, à partir du précédent, par la translation $O\omega$. Tout point extérieur à $\{C'(\alpha)\}$ est *a fortiori* extérieur à Δ_α. Soit alors M un point extérieur à $\{C'(A)\}$, on pourra prendre ε assez petit pour qu'il soit extérieur à $\{C'(\alpha)\}$; M ne peut donc appartenir à E. Il en résulte que cet ensemble E *n'a aucun point extérieur à* $\{C'(A)\}$.

4. Dans la démonstration du numéro précédent, nous sommes loin d'avoir utilisé complètement l'hypothèse, E *est fermé*. Cherchons à élargir le plus possible cette hypothèse. Il faut d'abord que *tous les points de* E *soient à distance finie*. Il faut encore que la borne p de e_α fasse partie de ce dernier ensemble, c'est-à-dire soit la projection d'un point P de E_α [sans quoi on ne pourrait affirmer que C(P) contient nécessairement des points de E]. Ceci aura lieu *si toute suite de points de* E *d'abscisses croissantes possède un point d'accumulation au moins sur* E (l'abscisse d'un point étant celle de sa projection), ou bien *si l'ensemble est contenu dans un nombre fini de plans parallèles à* II.

([1]) Car une suite de points non intérieurs à un domaine ne peut avoir de point d'accumulation intérieur à ce domaine.

([2]) On observera que notre procédé est en quelque sorte inverse de celui utilisé par M. A. Denjoy pour établir la proposition de M. Lebesgue signalée au début de ce travail.

C'est évident dans la seconde alternative. Considérons la première et soit toujours p la borne de e_2 du côté de Ox. Ce point est à distance finie, sans quoi il y aurait sur E une suite de points d'abscisses infiniment croissantes, suite qui ne peut avoir de point d'accumulation à distance finie. Il s'agit de montrer que p fait partie de e_p, c'est-à-dire que p est la projection d'un point P de E_2. Supposons qu'il en soit autrement, p est alors un point d'accumulation des projections d'une suite M_1, M_2, ... de points de E d'abscisses croissantes. Cette suite a par hypothèse un point d'accumulation appartenant à E. Comme les M_i sont non intérieurs à Δ_2, P ne peut être intérieur à ce domaine, il fait donc partie de E_2.

La démonstration du n° 3 se poursuit alors sans changement.

5. Ensembles fermés d'un côté. — L'étude précédente nous conduit tout naturellement à la notion d'*ensemble fermé d'un côté*. Nous considérerons uniquement des ensembles dont tous les points sont à *distance finie, mais pas nécessairement bornée*.

Un ensemble E *sera dit fermé du côté de* Ox *par rapport à la direction* H, où Ox désigne un axe non parallèle au plan donné H, *si toute suite de points de* E *d'abscisses croissantes possède un point d'accumulation au moins sur* E, et par extension, *s'il est contenu dans un nombre fini de plans parallèles à* H. L'abscisse d'un point est celle de sa projection sur Ox parallèlement à H.

On observera que Ox sert uniquement à *choisir un côté* par rapport à H. Dans l'espace à deux dimensions, H sera remplacé par une droite.

Un ensemble *fermé* au sens ordinaire est fermé des deux côtés par rapport à la direction H. La réciproque n'a pas lieu en général. Il suffit de considérer, par exemple, l'ensemble des droites du plan des xy, définies par les équations

$$x = 0, \qquad x = \pm \frac{1}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Cet ensemble est fermé des deux côtés par rapport à la direction Oy.

Il est immédiat qu'un ensemble fermé des deux côtés par rapport à la direction H et *possédant un point au plus dans tout plan parallèle à* H est fermé au sens ordinaire.

Ajoutons encore qu'un ensemble fermé du côté de Ox par rapport à la direction H est tout entier du côté opposé à Ox par rapport à un plan parallèle à H. (Il suffit pour le voir de considérer la projection de l'ensemble sur Ox). On peut dire si l'on veut que l'ensemble est borné du côté de Ox. Il ne l'est pas forcément du côté opposé.

6. Considérons une fonction $y = f(x)$, *finie* et *uniforme* dans l'intervalle (a, b). On dit qu'elle est *continue à gauche* dans l'intervalle (ouvert à gauche) si $f(x) \to f(x_0)$ quand $x \to x_0$, avec $x < x_0$, pour toute valeur x_0 de l'intervalle, distincte de a. Il résulte de cette définition que l'ensemble $\{(x, y)\}$ $a \leq x \leq b$ des points représentatifs de la fonction, est fermé du côté de Ox par rapport à la direction Oy. La réciproque est évidente.

On voit que la notion d'ensemble fermé d'un côté est la traduction géométrique et l'extension naturelle de celle de fonction continue du côté opposé.

Observons en passant que si $f(x)$ est *continue* (des deux côtés) dans l'intervalle, l'ensemble $\{(x, y)\}$ est *fermé* (au sens ordinaire) et réciproquement [1]. Cette remarque conduit à des démonstrations très simples pour les propriétés classiques des fonctions continues.

7. Si maintenant nous revenons aux résultats des nos 3 et 4 nous pouvons énoncer le *Théorème général :*

A. *Soient* H *un plan,* C *un demi-cône convexe situé d'un même côté par rapport à ce dernier, et* E *un ensemble fermé du côté de* C *par rapport à la direction* H; *si* $\{A\}$ *est l'ensemble des points* A *de* E *tels que le demi-cône de sommet* A *directement homothétique à* C *ne contienne à son intérieur aucun point de* E, *cet ensemble* E *n'a aucun point extérieur au domaine formé par l'ensemble des demi-cônes inversement homothétiques à* C *ayant pour sommets les points de* $\{A\}$.

---

[1] Une fonction *finie* continue des deux côtés est nécessairement *bornée*, ce qui n'a pas lieu pour une fonction continue d'un seul côté. Considérons, par exemple, la fonction $f(x)$ définie dans $(-1, +1)$ de la manière suivante :

$$f(x) = 0 \quad \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0, \qquad f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{si} \quad 0 < x \leq 1.$$

Dans le cas d'un ensemble plan on remplacera H par une droite et C par un angle moindre que deux droits.

L'ensemble $\{A\}$ contient toujours un point au moins, qui s'obtient immédiatement en projetant E sur un axe non parallèle à H et en considérant la borne droite de cette projection. (Bien entendu il s'agit toujours de projection parallèlement à H).

Il est évident qu'on peut, dans la conclusion du théorème, remplacer $\{A\}$ par un ensemble le contenant. Cette remarque nous servira plus loin [n° **10**].

Observons enfin *qu'il est essentiel de supposer que l'ensemble* E *est fermé du côté de* C. En effet, considérons la fonction $y = f(x)$, définie dans l'intervalle $(0, 1)$ de la manière suivante : $f(x) = 0$ si x est rationnel, $f(x) = 1$ si x est irrationnel, et prenons pour C un petit angle ayant pour sommet l'origine des coordonnées et pour bissectrice Ox. En tout point M(x, y) de l'ensemble $\{(x, y)\}$, sauf pour le point A$(1, 0)$, l'angle C(M) contient à son intérieur des points de $\{(x, y)\}$; néanmoins tous les points de cet ensemble d'ordonnée 1 sont extérieurs à l'angle C(A).

8. Jusqu'à présent nous avons considéré les points de l'ensemble E intérieurs à chaque demi-cône C(M). Il revient au même de faire intervenir les demi-droites d'origine M et passant par ces points. Nous mettrons alors le théorème général sous une forme qui se rapprochera davantage des théorèmes classiques sur les dérivées ou sur les tangentes, dont il est l'extension. Avant cela je vais préciser le sens de certaines expressions de manière à éviter toute ambiguïté dans les énoncés.

Demi-sécante. Demi-sécante limite. — M étant un point d'un ensemble E toute demi-droite issue de M passant par un autre point de l'ensemble est une *demi-sécante en* M *à l'ensemble*. Une demi-droite limite de demi-sécantes en M est une *demi-sécante limite* à l'ensemble à ce point.

Semi-tangente. — Toute demi-sécante limite ML est caractérisée par le fait qu'il y a des points de E à l'intérieur de chaque demi-cône de révolution d'axe ML et de sommet M. Lorsque ces demi-cônes renferment quel que soit leur angle des points de E aussi voisins qu'on veut de M, ML est une *semi-tangente* à l'ensemble en ce point.

Il ne peut évidemment y avoir de semi-tangente qu'en un point d'accumulation. L'ensemble des semi-tangentes en un tel point est appelé par M. G. Bouligand le *contingent* au point considéré. Je n'adopterai pas cette terminologie car toutes les demi-sécantes, limites ou non, interviendront souvent au même titre que celles, particulières, que sont les semi-tangentes.

On dit ordinairement « demi-tangente » au lieu de « semi-tangente ». Je préfère réserver la première expression au cas où l'ensemble est une courbe de Jordan en lui donnant le sens qui va être précisé.

9. Courbes de Jordan. Semi-tangentes a droite [à gauche]. Demi-tangentes a droite [à gauche]. — Considérons un arc de Jordan lieu du point $M(t)$ défini par la relation $\overrightarrow{OM(t)} = \vec{f}(t)$, où O désigne un point fixe et $\vec{f}(t)$ un vecteur fonction bornée *continue* de t dans un intervalle (α, β).

En un point $M(t_0)$, $t_0 \neq \beta$, une demi-droite Δ issue de ce point sera une *semi-tangente à droite* si tout demi-cône de révolution de sommet $M(t_0)$ et d'axe Δ contient *à son intérieur* des points $M(\theta)$, où θ est supérieur à t_0 et aussi voisin qu'on veut de cette valeur. Δ est semi-tangente pour le continu $\{M(t)\}$, $t_0 \leqq t \leqq \beta$, au point M_0 de ce continu avec lequel coïncide $M(t_0)$. La réciproque n'est vraie que si M_0 est point simple pour l'arc $M(t_0) - M(\beta)$.

Si en un point $M(t_0)$ l'ensemble des semi-tangentes à droite se réduit à une demi-droite *unique*, ce sera par définition *la demi-tangente à droite* en ce point.

Les semi-tangentes et demi-tangentes à gauche se définissent de la même manière.

Remarquons qu'il résulte de la définition adoptée que *si l'arc possède en tout point* $M(t)$, $\alpha < t < \beta$, une *semi-tangente* (pour un côté variable ou non), le point $M(t)$ *ne peut rester fixe* lorsque t décrit un *intervalle partiel* quelconque de (α, β) (¹). Cette remarque nous sera utile plus loin [nº 15].

(¹) En effet, si $M(t)$ restait fixe dans (t_1, t_2), un demi-cône quelconque de sommet $M(t_0)$, $t_1 < t_0 < t_2$, ne pourrait contenir à son *intérieur* des points de paramètre aussi voisin qu'on voudra de t_0.

Avec les définitions précédentes les semi-tangentes à droite et à gauche correspondent aux nombres dérivés et les demi-tangentes aux dérivées latérales, suivant l'expression de M. A. Denjoy.

10. Ces questions de terminologie réglées, revenons à un ensemble E fermé du côté de C par rapport à la direction de H, les notations étant les mêmes que précédemment. Supposons que, en chaque point M de E, sauf peut-être aux points d'un ensemble $\{B\}$, le demi-cône C(M) contienne à son intérieur une demi-sécante limite ou non, satisfaisant ou non à une certaine condition arbitrairement choisie. (Par exemple on pourra assujettir la demi-sécante limite ou non à être une semi-tangente en M, ou bien ne considérer que les demi-sécantes). L'ensemble $\{A\}$ des points A tels que le demi-cône C(A) ne renferme à son intérieur aucun point de E est évidemment contenu dans $\{B\}$. Nous pouvons donc, d'après une remarque faite au n° **7**, mettre le théorème général sous la forme suivante :

B. *Soient* H *un plan*, C *un demi-cône convexe de sommet* O *et* E *un ensemble fermé du côté de* C *par rapport à* H; *si l'ensemble* E *possède partout, sauf peut-être sur un sous-ensemble* $\{B\}$, *une demi-sécante limite ou non parallèle à une demi-droite issue de* O, *intérieure à* C, *et satisfaisant, si l'on veut, à une condition supplémentaire arbitraire, l'ensemble* E *n'a aucun point extérieur au domaine constitué par l'ensemble des demi-cônes inversement homothétiques à* C *ayant pour sommets les points de* $\{B\}$.

Comme on le voit les hypothèses faites sur E ne sont pas nécessairement locales. Il y a donc intérêt à ne pas se borner aux semi-tangentes.

II. — Applications.

11. Je vais donner maintenant quelques applications du théorème précédent. Les premières seront tout simplement des cas particuliers.

Supposons d'abord que *l'ensemble* $\{B\}$ *se réduise à un point unique* B.

α. Prenons pour C un dièdre dont une face est sur H, l'autre face appartenant à un plan Π_1, et appelons *dessus* de Π_1 le côté qui contient C. L'ensemble E n'a aucun point au-dessus du plan $\Pi_1(B)$, mené parallèlement à Π_1 par le point B — et ceci quelles que soient les demi-sécantes limites ou non dont il s'agit.

α_1. Plus particulièrement considérons uniquement des *semi-tangentes* et supposons de plus que l'ensemble E possède *au plus un point dans tout plan parallèle à* Π.

Soit M un point quelconque de E; l'ensemble E_M des points de E qui ne sont pas à droite (du côté de C) du plan $\Pi(M)$, mené par M parallèlement à Π, est fermé du côté de C par rapport à la direction de ce plan. Pour E_M l'ensemble $\{B\}$ se réduit à M, car une semi-tangente à E en un point quelconque de E_M, différent de M, est une semi-tangente à E_M (ce qui n'aurait pas lieu forcément pour une demi-sécante quelconque). L'ensemble E_M n'a donc aucun point au-dessus de $\Pi_1(M)$.

β. Prenons maintenant pour C un demi-cône de révolution d'axe Ox et d'angle φ — inférieur à l'angle de Ox avec Π (Ox désigne toujours un axe non parallèle à ce plan). M étant un point quelconque de E la corde MB fait avec sa projection sur Ox un angle au plus égal à φ.

β_1. Plus particulièrement considérons uniquement des *semi-tangentes* et supposons encore que l'ensemble E possède au plus un point dans tout plan parallèle à Π.

En raisonnant comme pour α_1 et en appliquant le résultat β, on voit que toute corde de E fait avec sa projection sur Ox un angle au plus égal à φ. Si E est un arc simple, cet arc est par suite rectifiable.

12. Traduits analytiquement, les résultats α_1 et β_1 du numéro précédent donnent, pour les fonctions d'une variable, les propositions suivantes :

α. Une fonction continue à gauche dans un intervalle ouvert à gauche, possédant partout dans l'intervalle ouvert à droite un dérivé droit, médian ou extrême non négatif [non positif] est non décroissante [non croissante] dans tout l'intervalle.

β. Si une fonction $f(x)$ continue à gauche en tout point d'un intervalle ouvert à gauche possède partout dans l'intervalle ouvert à droite un dérivé droit, médian ou extrême, de module au plus égal à une constante H, la fonction satisfait dans tout l'intervalle à la condition de Lipschitz

$$|f(x) - f(x_1)| \leq H|x - x_1|.$$

(Elle possède alors une dérivée bilatérale presque partout).

Pour $k = 0$ cette dernière proposition se réduit à celle de M. H. Lebesgue rappelée au début de ce travail.

Il est immédiat que les conclusions des propositions α et β du présent numéro subsistent quand on ne fait pas d'hypothèse sur les dérivés droits pour la borne gauche de l'intervalle, pourvu que la fonction soit continue à droite en ce point.

Ajoutons encore que les énoncés en question établis en supposant la fonction finie (mais pas nécessairement bornée — les points de E sont à distance finie mais pas forcément bornée) sont encore valables si la fonction prend des valeurs *infinies de signe déterminé*, en convenant que si $f(x_0) = +\infty\ [-\infty]$ un dérivé droit en x_0 ne peut être que $-\infty$ ou $0\ [+\infty$ ou $0]$. On démontre directement les propositions en question d'une manière très simple en utilisant l'idée qui nous a servi au n° **5**. Bien entendu une fonction égale constamment à $+\infty$, par exemple, sera considérée comme constante. D'une manière plus précise la conclusion de β sera la suivante : $f(x)$ est infinie de même signe dans tout l'intervalle, ou bien est bornée et satisfait à la condition de Lipschitz.

13. Revenons au cas d'un ensemble E quelconque, les notations étant toujours les mêmes, et supposons que E possède partout, sauf peut-être aux points d'un ensemble $\{D\}$, une demi-sécante limite ou non (satisfaisant si l'on veut à une condition supplémentaire arbitraire) directement parallèle à Ox.

Prenons pour C un demi-cône de révolution d'axe Ox et de petit angle ε. D'après le théorème du n° **10**, l'ensemble E n'a aucun point à l'extérieur du domaine formé par les demi-cônes inversement homothétique à C ayant pour sommet les points de $\{D\}$, et ceci quel que soit ε.

Si $\{D\}$ se réduit à un nombre fini de points, on en déduit immédiatement que l'ensemble E se trouve tout entier sur les demi-droites inversement parallèle à Ox ayant pour origine les points de $\{D\}$.

Lorsque $\{D\}$ est quelconque les choses sont un peu moins simples, mais on obtient encore un résultat intéressant. Désignons par $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}$ les projections respectives de E et $\{D\}$ sur π parallèlement à Ox. Je dis que $\mathcal{E}$ n'a aucun point *extérieur* à $\mathcal{D}$.

Supposons le contraire et soit $\mathcal{M}$ un point de $\mathcal{E}$ extérieur à $\mathcal{D}$. $\mathcal{M}$ est la projection d'un point M (au moins) de E. Considérons l'ensemble E_M des points de E dont l'abscisse (¹) est *supérieure ou égale* à celle de M, et soit $\{D\}_M$ la contribution de $\{D\}$ dans cet ensemble. $\mathcal{M}$ étant extérieur à $\mathcal{D}$ est *a fortiori* extérieur à la projection $\mathcal{D}_M$ de $\{D\}_M$. Or ceci est impossible. En effet, on peut évidemment supposer que π passe par M. $\mathcal{M}$ est alors confondu avec ce point. L'ensemble E_M est fermé du côté de Ox par rapport à la direction π et il possède partout une demi-sécante limite ou non directement parallèle à une demi-droite issue de O intérieure à C, sauf peut-être aux points de $\{D\}_M$. Il n'a donc aucun point extérieur au domaine Δ_ε formé par les demi-cônes inversement homothétiques à C ayant pour sommet les points de $\{D\}_M$, et ceci quel que soit ε. Mais la trace de Δ_ε sur π est une somme d'ellipses homothétiques ayant pour centre les points de $\mathcal{D}_M$ et quand $\varepsilon \to 0$ les diamètres de ces ellipses tendent uniformément vers zéro, car les sommets des cônes sont à une distance bornée de π [n° 5]. M ne peut donc être extérieur à $\mathcal{D}_M$. C. Q. F. D.

En définitive nous obtenons la proposition suivante :

α. *Soient π un plan, Ox un axe non parallèle et E un ensemble fermé du côté de Ox par rapport à la direction π; si E possède partout, sauf peut-être aux points d'un ensemble $\{D\}$, une demi-sécante limite ou non directement parallèle à Ox, et satisfaisant si l'on veut à une condition supplémentaire arbitraire, cet ensemble E se projette sur π, parallèlement à Ox, suivant un ensemble $\mathcal{E}$ qui n'a aucun point extérieur à la projection $\mathcal{D}$ de $\{D\}$.*

Si $\mathcal{E}$ est borné on a $\mathcal{E} + \mathcal{E}' = \mathcal{D} + \mathcal{D}'$, car $\mathcal{D}$ est contenu dans $\mathcal{E}$.

(¹) L'abscisse d'un point est toujours celle de sa projection sur Ox parallèlement à π.

De cette proposition on déduit que :

β. *Si $\mathcal{E}$ est un continu, il se réduit à un point dès que $\mathcal{O}$ possède un seul élément isolé.* E *se trouve alors sur une parallèle à* Ox.

Plus particulièrement encore :

γ. *Un continu possédant partout, sauf peut-être en un nombre fini de points, une demi-sécante limite ou non, parallèle à une demi-droite fixe et satisfaisant si l'on veut à une condition supplémentaire arbitraire, est un segment de droite.*

On peut supposer par exemple qu'il s'agit seulement de demi-sécantes.

Bien entendu les énoncés α et β s'appliquent *a fortiori* aux ensembles *fermés* ordinaires. Mais il n'est pas possible de supposer que les demi-sécantes limites ou non sont parallèles à *une droite* fixe, c'est-à-dire que leur orientation peut varier, même s'il s'agit des demi-tangentes à un arc simple. M. A. Denjoy a donné en effet un exemple de fonction continue d'une variable admettant partout un dérivé nul (d'un côté nécessairement variable), cette fonction n'étant pas constante [1]. Nous reviendrons sur ce point un peu plus loin.

14. Voici encore une application où interviendront cette fois les demi-sécantes parallèles à un plan fixe, ce qui nous conduira à l'extension probablement aussi large que possible du théorème classique sur les courbes à tangentes parallèles à un plan fixe.

Soient π et π_1 deux plans sécants et E un ensemble fermé d'un certain côté par rapport à la direction π. Supposons que E possède en tout point M, sauf peut-être sur un ensemble $\{D\}$, une demi-sécante limite ou non, parallèle à π_1 et située *du côté vers lequel* E *est fermé, par rapport au plan parallèle à π mené par* M. Comme plus haut on peut assujettir les demi-sécantes à une condition supplémentaire arbitraire.

Prenons un plan π_2 formant un trièdre de sommet O avec π et π_1. Soient Ox l'intersection de π_1 et π_2 orientée du côté vers lequel E est

[1] A. Denjoy, Mémoire cité, p. 209.

fermé, Oy et Oz celles respectives de π et π_1 et de π et π_2. Projetons E et $\{D\}$ sur π_2 parallèlement à Oy. Soient e et $\{d\}$ leurs projections. L'ensemble e est évidemment fermé du côté de Ox par rapport à la direction π et il possède partout une demi-sécante limite ou non (satisfaisant peut-être à une condition supplémentaire) parallèle à la demi-droite Ox. On peut donc lui appliquer le théorème α du numéro précédent. Mais les projections respectives de e et $\{d\}$ sur π parallèlement à Ox ne sont autres que celles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}$ de E et de $\{D\}$ sur Oz parallèlement à π_1. Par suite $\mathcal{E}$ n'a aucun point extérieur à $\mathcal{D}$. Ce résultat subsiste évidemment si l'on projette parallèlement à π_1 sur un axe quelconque.

On a donc obtenu la proposition suivante :

α. *Soient π et π_1 deux plans sécants et* E *un ensemble fermé d'un certain côté* (1) *par rapport à la direction π. Si l'ensemble* E *possède en tout point* M, *sauf peut-être sur un ensemble* $\{D\}$, *une demi-sécante limite ou non parallèle à π_1* ET SITUÉE DU COTE (1) PAR RAPPORT AU PLAN PARALLÈLE A π MENÉ PAR M (la demi-sécante peut si l'on veut être assujettie à une condition supplémentaire arbitraire): *l'ensemble* E *se projette parallèlement à π_1 sur un axe quelconque suivant un ensemble $\mathcal{E}$ qui n'a aucun point extérieur à la projection $\mathcal{D}$ de* $\{D\}$.

Lorsque $\mathcal{E}$ est borné on a

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}' = \mathcal{D} - \mathcal{D}'.$$

Si E est un continu il est alors nécessairement plan dès que $\mathcal{D}$ possède un seul point isolé, ce qui a lieu nécessairement lorsque $\{D\}$ se réduit à un nombre fini de points. Cette dernière remarque conduit au cas particulier :

β. *Un continu possédant partout, sauf peut-être en un nombre fini de points, une demi-sécante limite ou non parallèle à un plan fixe* FAISANT UN ANGLE AIGU AVEC UNE DEMI-DROITE FIXE DU PLAN, *est tout entier dans un plan parallèle au plan fixe.*

La demi-sécante peut, comme plus haut, satisfaire à une condition supplémentaire arbitraire. Par exemple *si à chaque point* M *d'un continu, sauf peut-être à un nombre fini d'entre eux, on peut associer* *un point M′ du continu tel que $\overrightarrow{MM'}$ soit parallèle à un plan fixe et fasse* UN ANGLE AIGU AVEC UNE DEMI-DROITE FIXE DU PLAN, *le continu est plan.*

Pour la raison indiquée plus haut [nº **13**] il n'est pas possible de se débarrasser de la restriction soulignée, même s'il s'agit d'un arc simple. On peut se demander si dans ce cas, et en se bornant aux semi-tangentes, la restriction précédente ne pourrait pas être remplacée par celle-ci, qui semble de même nature : *les semi-tangentes dont il s'agit sont relatives à un côté invariable.* La réponse est négative. M. G. Durand a construit en effet, tout récemment, au moyen de la fonction sans dérivée de Weierstrass, un exemple très élégant d'arc simple *gauche* possédant partout, et pour un côté invariable, une semi-tangente parallèle à une *droite* fixe (¹). La restriction relative à l'orientation des demi-sécantes tient donc à la nature des choses.

15. Je vais donner maintenant quelques applications spéciales aux courbes de Jordan et relatives aux semi-tangentes. J'établirai pour commencer une proposition préliminaire utile pour la suite.

Soit $\widehat{AB}$ un arc de Jordan, défini comme au nº **9**, et supposons que, *en chaque point* $M(t)$ *intérieur à l'arc,* $\alpha < t < \beta$, *il existe une semi-tangente*, pour un côté variable ou non, *faisant un angle aigu avec une demi-droite fixe* Ox. Pour simplifier l'écriture, je désignerai par t le point $M(t)$.

Remarquons d'abord que si deux points t_1 et t_2, $\alpha \leq t \leq \beta$, sont dans un même plan perpendiculaire à Ox, l'arc $\widehat{t_1 t_2}$ ne peut avoir de points hors du plan et situés du côté de Ox, sans quoi il y aurait entre t_1 et t_2 un point où aucune semi-tangente ne pourrait faire avec Ox un angle aigu (le point de $\widehat{t_1 t_2}$ le plus loin du plan du côté de Ox, ce point existe nécessairement, car $M(t)$ n'est fixe pour aucun inter-

(¹) Cet exemple, qui m'avait été obligeamment signalé par M. G. Bouligand, a été publié aux *Comptes rendus* depuis l'achèvement du présent Mémoire : G. Durand, *Sur l'application de la notion de contingent...* (*C. R. Acad. Sc.*, 194, p. 944). Dans cette Note l'auteur signale des conditions de planéité et de rectilignité *pour un arc simple*, qui sont des cas particuliers des résultats donnés ici aux nºˢ **13** et **14**.

valle [n° 9]). Pour la même raison $\widehat{t_1 t_2}$ ne peut être tout entier dans le plan.

Considérons alors la projection de l'arc sur Ox. D'après la remarque précédente, c'est un segment d (pas un point). L'extrémité droite de d (c'est-à-dire du côté de Ox) est nécessairement la projection d'une extrémité de l'arc, α par exemple. L'extrémité gauche de d est la projection d'un point t_1, et d'après ce qui précède ce point est unique. Je dis que $\widehat{\alpha t_1}$ se projette sur d d'une manière biunivoque. Il s'agit de montrer que tout plan π perpendiculaire à Ox et rencontrant d coupe $\widehat{\alpha t_1}$ en un seul point. C'est évident si π contient l'extrémité gauche de d. Supposons qu'il en soit autrement. Soit t_0 la borne inférieure des valeurs de t pour lesquelles l'arc $\widehat{t t_1}$ n'a aucun point dans π, l'arc $\widehat{t_1 t_0}$ n'a dans ce plan que t_0. Si $\widehat{\alpha\beta}$ rencontre π en un autre point t'_0, on a nécessairement $\alpha \leqq t'_0 < t_0$. D'après la remarque faite au début de ce numéro, $\widehat{t'_0 t_0}$ n'a pas de point à droite de π, $\widehat{\alpha\beta}$ ne peut donc avoir en t_0 une semi-tangente faisant avec Ox un angle aigu. Il y a contradiction : t_0 est bien unique.

En raisonnant sur $\widehat{t_0 \beta}$ comme on vient de le faire sur $\widehat{\alpha t_0}$, on arrive à la conclusion suivante :

Une courbe de Jordan, qui possède en chaque point, sauf peut-être aux extrémités, une semi-tangente faisant un angle aigu avec un axe fixe, est la somme de deux arcs simples bout à bout, chacun d'eux se projetant sur l'axe d'une manière biunivoque.

Il n'est pas forcé que la courbe elle-même soit une courbe simple, car les deux arcs peuvent se rencontrer en une infinité de points.

Si $t_1 = \beta$ la courbe est un arc simple, qu'on peut toujours décomposer en deux, ce qui fait que l'énoncé est bien général.

Supposons maintenant que l'arc possède pour tout point intérieur une semi-tangente faisant avec Ox un angle aigu, inférieur à un angle *aigu* fixe φ. Il résulte alors du n° **11**, 3, que les *arcs de l'énoncé précédent sont rectifiables.*

16. Nous allons maintenant supposer que l'arc possède, en chaque point intérieur, une semi-tangente variant continuement. D'une manière précise, *supposons qu'il existe un vecteur $\vec{V}(t)$, différent de zéro, fonction continue de t dans (α, β) et qui, pour chaque valeur de t, intérieure à cet intervalle, soit une semi-tangente à l'arc au point de paramètre t.* (En toute rigueur il faudrait dire : directement parallèle à une semi-tangente au point de paramètre t, mais il n'y a pas d'erreur possible).

Donnons-nous sur l'arc un point t_1. On peut trouver un arc partiel $\widehat{t't''}$ $(t' < t_1 < t'')$ tel que pour tout point intérieur cet arc ait une semi-tangente faisant avec $\vec{V}(t_1)$ un angle inférieur à $\frac{\pi}{4}$. Si t_1 est égal à α ou à β, t_1 sera une des extrémités de l'arc $\widehat{t't''}$. D'après le numéro précédent, $\widehat{t't''}$ est la somme de deux arcs simples rectifiables, chacun d'eux se projetant orthogonalement sur le support de $\vec{V}(t_1)$ d'une manière biunivoque. Mais si un tel arc possède en chaque point intérieur une semi-tangente faisant avec $\vec{V}(t_1)$ un angle aigu, ce ne peut être qu'une semi-tangente pour un côté invariable.

En vertu du lemme de Borel-Lebesgue on peut recouvrir $\widehat{\alpha\beta}$ avec un nombre fini d'arcs tels que $\widehat{t't''}$. Par suite *l'arc $\widehat{\alpha\beta}$ est la somme d'un nombre fini d'arcs simples rectifiables à l'intérieur de chacun desquels $\vec{V}(t)$ est semi-tangente pour un côté invariable.*

17. Pour aller plus loin il nous faut examiner le cas d'un arc possédant en chaque point intérieur une semi-tangente pour un côté invariable, celle-ci variant continuement. Conservons les notations précédentes et supposons que $\vec{V}(t)$ soit *semi-tangente à droite*, par exemple, pour $\alpha < t < \beta$. Je vais montrer que *$\vec{V}(t)$ est la demi-tangente à droite* pour $\alpha \leqq t < \beta$, et que $-\vec{V}(t)$ est *la demi-tangente à gauche* pour $\alpha < t \leqq \beta$.

Soit t_1 un point de l'arc, $\alpha < t_1 \leqq \beta$. Étant donné un angle ε on peut trouver $t' < t_1$ tel que pour toute valeur de t appartenant à (t', t_1), $\vec{V}(t)$ fasse avec $\vec{V}(t_1)$ un angle moindre que ε. En tout point de

$\widehat{tt_1}$, sauf peut-être en t_1, cet arc possède une semi-tangente faisant avec $\vec{V}(t_1)$ un angle moindre que ε : il est donc tout entier dans le demi-cône de révolution de sommet t_1, d'axe $-\vec{V}(t_1)$ et d'angle ε [n° **10** B]. ε pouvant être choisi aussi petit qu'on veut, il en résulte que $-\vec{V}(t)$ est la *demi-tangente à gauche* en t_1, et quel que soit $t_1 \neq \alpha$. Comme $-\vec{V}(t)$ varie continuement le même raisonnement prouve que $\vec{V}(t)$ est la *demi-tangente à droite*, quel que soit $t \neq \beta$.

18. Revenons alors à l'hypothèse du n° **16.** Il résulte des conclusions de ce numéro et de celles du n° **17**, que l'arc donné est la somme d'un nombre fini d'arcs partiels $(\alpha = t_0)\widehat{t_0 t_1}$, $\widehat{t_1 t_2}$, ..., satisfaisant aux conditions suivantes :

Quel que soit i, $\vec{V}(t)$ est la demi-tangente à $\widehat{t_i t_{i+1}}$ pour un côté invariable et $-\vec{V}(t)$ est la demi-tangente pour le côté opposé, et ceci pour *tout l'arc* $\widehat{t_i t_{i+1}}$.

Supposons d'abord que pour $\widehat{t_0 t_1}$, $\vec{V}(t)$ soit la demi-tangente à droite. Soit $\widehat{t_k t_{k+1}}$ le premier arc pour lequel $\vec{V}(t)$ soit demi-tangente à gauche : $-\vec{V}(t_k)$ est alors la demi-tangente à droite et la demi-tangente à gauche en t_k. $\vec{V}(t_k)$ ne peut donc être une semi-tangente à arc. Il faut par suite que $t_k = \beta$, et $\vec{V}(t)$ est la tangente à droite pour tout l'arc.

Supposons maintenant que $\vec{V}(t)$ soit demi-tangente à gauche pour $\widehat{t_0 t_1}$. Soit $\widehat{t_k t_{k+1}}$ le premier arc, s'il existe, pour lequel $\vec{V}(t)$ soit demi-tangente à droite. $\vec{V}(t_k)$ est demi-tangente pour les deux côtés, il y a rebroussement au point t_k. D'après le raisonnement précédent, $\vec{V}(t)$ est nécessairement demi-tangente à droite jusqu'à l'extrémité de l'arc.

En définitive nous avons obtenu la proposition suivante : *Soit* L *un arc de Jordan lieu du point* M(t) *lorsque t varie dans l'intervalle* (α, β).

S'il existe un vecteur $\vec{V}(t)$, *différent de zéro et continu dans* (α, β), *qui soit pour chaque point* $M(t)$, *intérieur à l'arc, une semi-tangente pour un côté variable ou non,* L *est la somme d'un nombre fini d'arcs simples rectifiables, il possède partout une tangente qui varie continuement avec le point de contact; d'une manière plus précise, il y a en chaque point intérieur deux demi-tangentes opposées, sauf peut-être en un point de rebroussement unique*, ce qui ne peut avoir lieu que si $\overset{\frown}{V}(t)$ est semi-tangente pour un côté variable.

On peut ajouter que si $\overset{\frown}{V}(t)$ est semi-tangente à droite au voisinage de l'origine de l'arc, celui-ci n'a pas de rebroussement.

On pourra rapprocher la proposition précédente du résultat suivant, dû à M. G. Valiron [1]. Si une courbe continue possède en chaque point une tangente orientée qui varie continuement, cette courbe est rectifiable, les coordonnées d'un point en fonction de l'arc ont des dérivées continues en chaque point dont la somme des carrés en axes rectangulaires est égale à 1. M. G. Valiron dit qu'il y a en un point une tangente orientée si les deux demi-tangentes en ce point existent et sont opposées. Comme on vient de le voir, ceci a lieu sauf peut-être en un point, pourvu que l'arc possède une semi-tangente continue.

19. Jusqu'à présent nous avons supposé le vecteur $\overset{\frown}{V}(t)$ continu dans les deux sens. Nous allons étudier le cas où il est continu d'un seul côté.

Conservant les notations précédentes supposons par exemple que $\overset{\frown}{V}(t)$ *soit continu à droite au point* t_1. On peut trouver sur l'arc donné un arc partiel $\widehat{t_1 t'}$ $(t_1 < t')$, tel que en tout point de cet arc $\overset{\frown}{V}(t)$ fasse avec $\overset{\frown}{V}(t_1)$ un angle inférieur à un angle donné ε. $\overrightarrow{V}(t)$ est certainement semi-tangente à $\widehat{t_1 t'}$ pour tout point intérieur à cet arc; celui-ci est donc rectifiable et se compose de deux arcs simples se projetant d'une manière biunivoque sur le support de $\overset{\frown}{V}(t_1)$ [n° **15**]. On peut évidemment choisir t' assez voisin de t_1 pour que $\widehat{t_1 t'}$ se réduise à un seul arc remplissant la condition précédente. Mais d'après le théo-

---

(1) G. Valiron, *Sur les courbes continues qui admettent une tangente en chaque point* (*Nouv. Ann. de Math.*, 6e série, t. II, 1917, p. 47).

rème B [n° 10], $\widehat{t_1 t'}$ se trouve tout entier dans le domaine constitué par les deux demi-cônes de révolution Γ_1 et Γ', d'angle ε, de sommets respectifs t_1 et t' et dont les axes sont inversement parallèles à $\overrightarrow{V}(t)$. Comme d'autre part $\widehat{t_1 t'}$ se projette d'une manière biunivoque sur le support de $\overrightarrow{V}(t)$, il est tout entier entre les plans perpendiculaires à $\overrightarrow{V}(t_1)$ menés par t_1 et t'. Ceci exige que l'un des demi-cônes contienne l'autre. Il y a deux cas à distinguer suivant que c'est Γ_1 ou Γ'.

Dans la première hypothèse $\widehat{t_1 t'}$ est tout entier dans Γ_1, comme ε est aussi petit qu'on veut, il en résulte que $-\overrightarrow{V}(t_1)$ est *la* demi-tangente à droite en t_1. Dans la seconde $\overrightarrow{V}(t)$ est semi-tangente à droite pour $t_1 \leqq t < t'$. Donc, quel que soit t'', $t_1 < t'' \leqq t'$, l'arc $\widehat{t_1 t''}$ est dans le demi-cône directement homothétique à Γ' de sommet t''. Il en résulte que la corde $t_1 t''$ fait avec $\overrightarrow{V}(t_1)$ un angle au plus égal à ε, et ceci pour tout point t'' de $\widehat{t_1 t'}$. Comme ε est aussi petit qu'on veut, on en déduit que $\overrightarrow{V}(t_1)$ est *la* demi-tangente à droite en t_1.

En définitive nous avons démontré que *si* $\overrightarrow{V}(t)$ *est continu d'un côté en un point, l'arc possède en ce point une demi-tangente pour le côté considéré, demi-tangente ayant même support que* $\overrightarrow{V}(t)$.

Supposons maintenant $\overrightarrow{V}(t)$ *continu à droite pour toute valeur de* t $(\alpha \leqq t < \beta)$. Il résulte immédiatement d'un théorème très général — et semble-t-il peu connu — de M. W. H. Young (¹), qu'*une fonction* $F(t)$ *continue à droite en tout point d'un intervalle, ouvert à droite, possède au plus une infinité dénombrable de points de discontinuité dans l'intervalle* [cette dernière propriété a été retrouvée récemment par M. T. Viola (²)].

(¹) W. H. Young, *La symétrie de structure des fonctions de variables réelles* (*Bull. des Sc. math.*, juillet 1928, p. 270).

(²) T. Viola, *Funzioni continue da una parte con particolare riguardo alla loro derivabilità unilaterale* (*Annali di Math.*, 4ᵉ série, t. IX, 1931, p. 251).

Signalons en passant que M. T. Viola étudie, dans ce travail, les dérivés droits d'une fonction continue à droite, tandis que nous avons considéré ici les dérivés droits d'une fonction continue à gauche.

On en déduit que l'ensemble (D) des valeurs de t pour lesquelles $\vec{V}(t)$ n'est pas continu est dénombrable. Donc en tout point du complémentaire de (D) l'arc possède une demi-tangente pour chaque côté [ayant même support que $\vec{V}(t)$]. Mais d'après un théorème de M. A. Denjoy (¹), étendu depuis par G. Durand (²), l'ensemble des points où deux demi-tangentes ne sont pas opposées est dénombrable [il fait partie de l'ensemble des *sommets* (¹)]. Nous avons donc établi le théorème suivant :

Soit L *un arc de Jordan lieu du point* $M(t)$ *lorsque* t *varie dans un intervalle* (α, β). *S'il existe un vecteur* $\vec{V}(t)$ *différent de zéro continu à droite en tout point* $\alpha \leqq t < \beta$, *qui soit pour chaque point intérieur à l'arc une semi-tangente en ce point* (pour un côté variable ou non), L *possède, sauf sur un ensemble au plus dénombrable, deux demi-tangentes opposées* [ayant même support que $\vec{V}(t)$] *et partout une demi-tangente à droite dont le support varie continuement à droite. De plus tout point de* L *est extrémité gauche d'un arc partiel rectifiable qui se projette d'une manière biunivoque sur le support de la demi-tangente à droite en ce point.*

20. Traduits analytiquement, les théorèmes des deux derniers numéros donnent des propositions relatives aux fonctions continues d'une variable. De celle du nº **18**, par exemple, on déduit que :

Si une fonction (finie) continue dans l'intervalle (a, b) possède en tout point intérieur à l'intervalle un dérivé droit [gauche], *fini ou non* mais continu, ce dérivé est *la* dérivée bilatérale.

En effet la semi-tangente correspondante varie continuement.

21. Comme dernière application je donnerai des propositions relatives aux fonctions finies continues d'un seul côté, propositions qui généralisent dans ce cas celles des nºˢ **18** et **19**. Elles se démontrent immédiatement à partir du théorème 3, du nº **12**, en utilisant le résultat de M. W. H. Young rappelé au nº **19**.

(¹) A. Denjoy, Mémoire cité, p. 144.

(²) G. Durand, *Sur un critère de dénombrabilité* (*Acta Math.*, t. 56, p. 367).

Soit $f(x)$ une fonction finie, continue à gauche dans l'intervalle (a, b), et $g(x)$ une fonction finie définie dans (a, b). On suppose que $g(x)$ est pour toute valeur de l'intervalle, distincte de b, un dérivé droit, médian ou extrême pour $f(x)$.

1° *Si $g(x)$ est continue* (des deux côtés) *dans l'intervalle, $f(x)$ est continue* (des deux côtés) *dans (a, b) et $g(x)$ est sa dérivée bilatérale*).

2° *Si $g(x)$ est continue à droite, $f(x)$ est continue* (des deux côtés) *dans (a, b) et $g(x)$ est sa dérivée bilatérale, sauf sur un ensemble au plus dénombrable; $g(x)$ est dans tout l'intervalle, ouvert à droite, la dérivée à droite.*

3° *Si $g(x)$ est continue à gauche, $f(x)$ est continue* (des deux côtés) *sauf sur un ensemble au plus dénombrable* (**D**), *$g(x)$ est sa dérivée bilatérale sauf peut-être sur* (**D**); *$g(x)$ est dans tout l'intervalle, ouvert à gauche, la dérivée à gauche.*

La démonstration utilise cette remarque que $g(x)$ étant finie, $g(x) - g(x_1)$ est un dérivé droit pour la fonction $f(x) - x\,g(x_1)$, où x_1 est une valeur fixe quelconque, $a \leqq x_1 < b$. D'une inégalité $|g(x) - g(x_1)| < \varepsilon$ on déduit alors, en vertu du théorème 3 du n° **12**,

$$\left| \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} - g(x_1) \right| \leqq \varepsilon.$$

L'hypothèse : $g(x)$ est finie, n'est pas seulement nécessaire à la démonstration, elle est indispensable à l'exactitude des conclusions. Considérons par exemple la fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle $(-1, +1)$ de la façon suivante :

$$f(x) = -\sqrt{-x} \qquad \text{pour} \qquad -1 \leqq x \leqq 0,$$
$$f(x) = 1 - \sqrt{x} \qquad \text{pour} \qquad 0 < x \leqq +1.$$

Cette fonction est finie et continue à gauche. Elle possède une dérivée continue non finie; elle est pourtant discontinue à droite pour $x = 0$.

III. — Extensions.

22. Voici une remarque relative au théorème du n° **18** qui nous conduira à des extensions de certains résultats précédents se rapportant à la théorie des équations différentielles. Considérons dans une région R de l'espace un champ continu de vecteurs. D'une manière précise, supposons qu'il existe en chaque point M de R un vecteur bien déterminé $\vec{V}(M)$, différent de zéro, fonction continue de M. Il résulte immédiatement du n° **18** que toute ligne de Jordan, appartenant à R, qui admet en chacun de ses points intérieurs le vecteur $\vec{V}(M)$ pour une de ses semi-tangentes, est ou bien un arc de ligne de force, ou bien la somme de deux tels arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{BC}$ raccordés de manière à former un point de rebroussement en B. La seconde alternative ne peut d'ailleurs se produire que si $\vec{V}(M)$ est semi-tangente par un côté variable.

Lorsque $\vec{V}(M)$ est constant, tout continu de R admettant en chacun de ses points M, sauf peut-être pour un nombre fini d'entre eux, le vecteur $\vec{V}(M)$ comme semi-tangente est un arc de ligne de force. C'est la proposition γ du n° **15**, quand on considère seulement les semi-tangentes. Il est naturel de se demander si elle ne pourrait pas, sous la forme précédente, s'étendre au cas où le champ $\vec{V}(M)$ est seulement continu. La réponse est négative. En effet, considérons une équation différentielle $y' = F(x, y)$, où F est continue, mais choisie de manière que l'équation n'admette pas une intégrale unique à gauche issue de l'origine. La région du plan limitée par la droite $x = -1$ et les intégrales à gauche supérieure et inférieure issues de l'origine est un continu admettant partout sauf en ce point le vecteur de composantes 1 et $F(x, y)$ pour semi-tangente.

Il faut remarquer que l'unicité des courbes intégrales n'est pas une condition suffisante pour assurer sans restriction l'extension de la proposition en question. Prenons pour R une couronne d'un plan II limitée par deux cercles de centre O, et pour vecteur $\vec{V}(M)$ le produit $\vec{a} \wedge \vec{OM}$, où $\vec{a}$ est un vecteur perpendiculaire à H. Dans ce cas la proposition est fausse si l'on ne supprime pas « peut-être » dans l'énoncé. Pour le voir il suffit de considérer dans R une couronne concentrique ; c'est un continu admettant partout $\vec{V}(M)$ pour semi-tangente.

23. Il serait intéressant de déterminer à quelles conditions doit satisfaire le champ pour que l'extension soit possible avec ou sans la suppression de « peut-être ». Je me bornerai ici à un cas particulier important pour lequel l'énoncé subsiste intégralement.

Soient $Oxyz$ trois axes de coordonnées. Prenons pour R le domaine $\{0 \leq x \leq 1\}$ et considérons le champ $\vec{V}(M)$ de composantes 1,

$$F(x, y, z) = F(M), \qquad G(x, y, z) = G(M),$$

où les fonctions F et G sont *bornées et continues* dans R. Supposons de plus que, quels que soient M et M' de même abscisse, on ait

$$\left.\begin{array}{l} |F(M) - F(M')| \\ |G(M) - G(M')| \end{array}\right\} \leq K \, |MM'|,$$

K désignant une constante. On sait que le système

$$\frac{dy}{dx} = F(M), \qquad \frac{dz}{dx} = G(M)$$

admet une intégrale et une seule passant par tout point de R, et que si (M) et (M_1) sont les courbes intégrales passant respectivement par M et M_1, la distance de deux points de même abscisse pris respectivement sur chacune de ces courbes est moindre que $H.|MM_1|$, où H désigne une constante.

M étant un point quelconque de R la courbe intégrale passant par ce point coupe le plan $x = 0$ et un point μ que j'appellerai la « projection » de M sur ce plan.

Ceci posé, considérons un ensemble E fermé du côté de Ox par rapport à la direction $x = 0$ et appartenant à R. Supposons que *en tout point* M *de* E, *sauf peut-être sur un ensemble* $\{D\}$, *le vecteur* $\vec{V}(M)$ *soit une semi-tangente à* E. Je vais montrer que *si* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{D}$ *sont les*

« *projections* » *respectives de* E *et de* (D) *sur* $x = 0$, $\mathcal{E}$ *n'a aucun point extérieur à* $\mathcal{D}$.

Autrement dit, que l'énoncé α du n° **15** subsiste intégralement (quand on se borne aux semi-tangentes). La démonstration sera du même genre que celle donnée plus haut pour le théorème général. J'établirai d'abord une proposition préliminaire.

24. Soit (μ) une courbe intégrale. Considérons le domaine Δ_ε balayé par le cercle $\Gamma(M)$, de centre M, de rayon εe^{kx}, dont le plan est parallèle à $x = 0$, quand le point M d'abscisse x parcourt (μ) depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Il est immédiat que l'*intérieur* de Δ_ε est l'ensemble des points balayés par l'intérieur de $\Gamma(M)$ pour $0 < x < 1$. La frontière de Δ_ε est constituée par la surface lieu de la circonférence $\Gamma(M)$ et les positions extrêmes du cercle.

Désignons par E_ε *l'ensemble des points de* E *non extérieurs à* Δ_ε. Je vais montrer que *si en un point* P_0 *de* E_ε, $\vec{V}(P_0)$ *n'est pas semi-tangente pour cet ensemble, il ne l'est pas non plus pour* E.

La question se pose seulement si P_0 a une abscisse $x_0 < 1$. Il s'agit de faire voir qu'il existe un demi-cône $\Sigma(P_0)$ de sommet P_0, contenant $\vec{V}(P_0)$ à son intérieur, $\Sigma(P_0)$ n'ayant au voisinage de son sommet aucun point extérieur à Δ_ε.

Désignons par M_0 le point de (μ) d'abscisse x_0. On a

$$|M_0P_0| \leq \varepsilon e^{kx_0}.$$

Prenons pour $\Sigma(P_0)$ le demi-cône balayé par le cercle $\gamma(P)$, dont le centre P, d'abscisse $x > x_0$, décrit $\vec{V}(P_0)$ et dont le rayon est $\varepsilon k(x - x_0)$, le plan de $\gamma(P)$ restant parallèle à $x = 0$. Il suffira de montrer que si x est assez voisin de x_0, $\gamma(P)$ est intérieur à $\Gamma(M)$, c'est-à-dire que l'on a

$$|MP| + \varepsilon k(x - x_0) < \varepsilon e^{kx}.$$

Évaluons $|MP|$, pour cela prenons le point d'intersection M' de la tangente en M_0 à (μ) avec le plan de $\Gamma(M)$ et considérons le vecteur $\overrightarrow{M'P'}$ égal à $\overrightarrow{M_0P_0}$. On a

$$|MP| \leq |MM'| + |M'P'| + |P'P|.$$

d'où

$$|\mathrm{MP}| \leq \varepsilon e^{4kx_0} + |\mathrm{MM}'| + |\mathrm{P}'\mathrm{P}|.$$

La courbe (μ) est définie par des fonctions $y(x)$ et $z(x)$ à dérivées continues; on a donc

$$|\mathrm{MM}'| = (x - x_0)\,\omega(x - x_0),$$

où $\omega(t)$ désigne un infiniment petit avec t. Reste à évaluer $|\mathrm{P}'\mathrm{P}|$. Pour cela remarquons que $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}}$ sont respectivement homothétiques à $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{M}_0)$ et $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P}_0)$ dans le rapport $x - x_0$. Ce qui permet d'écrire

$$|\mathrm{P}'\mathrm{P}| = (x - x_0)\,|\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{M}_0) - \vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P}_0)|.$$

Mais d'après les conditions auxquelles satisfait le champ

$$|\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{M}_0) - \vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P}_0)|$$

est moindre que $2k|\mathrm{M}_0\mathrm{P}_0|$, ce qui donne enfin

$$|\mathrm{P}'\mathrm{P}| < 2k(x - x_0)\varepsilon e^{4kx_0}.$$

En définitive on a

$$|\mathrm{MP}| < \varepsilon e^{4kx_0} + 2k\varepsilon(x - x_0)e^{4kx_0} + (x - x_0)\,\omega(x - x_0).$$

$\gamma(\mathrm{P})$ sera donc certainement intérieur à $\Gamma(\mathrm{M})$ si l'on a

$$\varepsilon e^{4kx_0} + 2k\varepsilon(x - x_0)e^{4kx_0} + (x - x_0)\,\omega(x - x_0) + k\varepsilon(x - x_0) < \varepsilon e^{4kx},$$

ou encore

$$\omega(x - x_0) < \varepsilon\left\{ e^{4kx_0}\left[\frac{e^{4k(x-x_0)} - 1}{x - x_0} - 2k\right] - k\right\}.$$

$\dfrac{e^{4k(x-x_0)} - 1}{x - x_0}$ est minimum pour $x - x_0 = 0$, d'autre part e^{4kx_0} est supérieur ou égal à 1. Le second membre de l'inégalité est donc au moins égal à $k\varepsilon$. L'inégalité sera par suite satisfaite si $\omega(x - x_0)$ est moindre que $k\varepsilon$. ε étant donné ceci aura lieu pourvu que x soit assez voisin de x_0, puisque ω est un infiniment petit.

25. Nous pouvons maintenant aborder la démonstration de la proposition énoncée au n° **23**. Supposons que $\mathcal{E}$ possède un point μ *extérieur* à $\mathcal{O}$. Considérons la courbe intégrale (μ) passant par ce point. En vertu de la continuité uniforme des courbes intégrales par rapport aux conditions initiales, on pourra prendre ε assez petit pour que le domaine Δ_ε ne contienne, frontière comprise, aucun point de $\{D\}$. Comme au numéro précédent, désignons par E_ε l'ensemble des points de E non extérieurs à Δ_ε. Cet ensemble contient au moins un point [sur (μ)], il est fermé du côté de Ox par rapport à la direction de $x = 0$. En raisonnant comme au n° **4**, on verrait qu'il existe sur E_ε un point P_0 (d'abscisse maximum) où cet ensemble ne peut admettre $\vec{V}(P_0)$ comme semi-tangente, puisque la composante de ce vecteur suivant Ox est égale à $+1$. Mais d'après le numéro précédent $\vec{V}(P_0)$ n'étant pas semi-tangente pour E_ε ne peut l'être pour E. Il y a donc contradiction puisque P_0 n'est pas un point de $\{D\}$. $\mathcal{E}$ n'a donc pas de point extérieur à $\mathcal{D}$.

26. De la proposition qui vient d'être établie on déduira des conséquences analogues à celles qui font l'objet des énoncés β et γ du n° **13**. Énonçons, par exemple, celle qui correspond à γ.

Soit

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y, z), \qquad \frac{dz}{dx} = G(x, y, z)$$

un système d'équations différentielles, dans lequel les fonctions F *et* G *sont bornées, continues et à nombres dérivés bornés par rapport à* y *et* z, *dans le domaine* $R = \{0 \leqq x \leqq 1\}$, *tout continu de* R *qui en chacun de ses points* (x, y, z), *sauf peut-être pour un nombre fini d'entre eux, admet le vecteur* $[1, F, G]$ *comme semi-tangente, est un arc de courbe intégrale.*

Si au lieu d'un continu on considérait un ensemble fermé de Ox, par rapport à la direction π, on pourrait affirmer seulement qu'il est situé sur un nombre fini d'intégrales.

27. Ajoutons pour terminer ce travail que toute transformation ponctuelle biunivoque de l'espace conservant les tangentes permettra d'étendre les théorèmes des n°s **13** et **14**, en s'y bornant aux ensembles fermés et aux semi-tangentes, à des cas plus généraux [1].

---

[1] Dans le cas où la transformation est homographique on pourra considérer des demi-sécantes quelconques limites ou non. Je n'insiste pas sur ces extensions faciles.

Rapportons l'espace à trois axes $OxOyOz$ et considérons, dans une région R, trois fonctions continues uniformes possédant chacune un gradient différent de zéro et continu. Supposons de plus que les trois gradients ne soient jamais coplanaires.

Par chaque point de R il passe une surface et une seule de chacune des familles

$$X = F(x, y, z), \quad Y = g(x, y, z), \quad Z = h(x, y, z),$$

où X, Y, Z sont des constantes. D'autre part la transformation

$$(x, y, z) \to (X, Y, Z)$$

est biunivoque et conserve les tangentes. On déduira alors des nos 13 et 14, en considérant des continus par exemple, que :

1° Si un continu de R admet comme semi-tangente en chacun de ses points, sauf peut-être pour un nombre fini d'entre eux, la tangente à la courbe $g = \text{const.}$, $h = \text{const.}$ passant par ce point et orientée du côté des f croissants [décroissants], le continu est un arc de courbe $g = \text{const.}$, $h = \text{const.}$

2° Si un continu de R admet en chacun de ses points, sauf peut-être pour un nombre fini d'entre eux, une semi-tangente, tangente à la surface $h = \text{const.}$ qui passe par ce point, cette semi-tangente étant par rapport au plan tangent à la surface $f = \text{const.}$, passant par le point considéré, du côté des f croissants [décroissants], le continu est tout entier sur une surface $h = \text{const.}$

On rapprochera le premier de ces énoncés de celui du n° **26**, plus général en ce sens que dans le cas du numéro cité, il n'est pas sûr qu'on puisse associer les courbes intégrales de manière à obtenir deux familles de surfaces $g = \text{const.}$, $h = \text{const.}$, satisfaisant avec $x = \text{const.}$ aux conditions précédentes.

28. Enfin on observera que les résultats du présent Mémoire s'étendent aisément au cas d'un espace euclidien quelconque.