JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BERTRAND GAMBIER

Transformations homographiques changeant une biquadratique en elle-même. Polygones de Poncelet

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 12 (1933), p. 309-336.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1933_9_12__309_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Transformations homographiques changeant une biquadratique en elle-même. Polygones de Poncelet;

PAR BERTRAND GAMBIER.

1. INTRODUCTION. — Le mathématicien allemand Harnack a étudié en détail, du point de vue de la réalité, les biquadratiques et signalé en passant les 32 *transformations homographiques qui changent une telle courbe en elle-même* (*Math. Annalen*, t. XII, 1877, p. 47-86). Il y a intérêt à retrouver ces transformations sans se servir des fonctions elliptiques, *à signaler les sous-groupes invariants contenus dans le groupe de ces 32 homographies, à signaler celles qui sont des involutions biaxiales et à montrer comment se trouvent échangées par ces diverses transformations les quadriques du faisceau ponctuel déterminé par la biquadratique*. Plus récemment, M. Hans Mohrmann (*Math. Zeitschrift*, t. 5, 1919, p. 268-283) a signalé la disposition curieuse présentée par quatre tangentes à la biquadratique, prélevées sur les seize tangentes aux points où le plan osculateur est stationnaire. A signaler aussi que Laguerre a énoncé une série de théorèmes géométriques élégants sur ces courbes. J'indiquerai aussi quelques propriétés des polygones de Poncelet en les rattachant à l'ordre d'idées adopté par M. Lebesgue (*Annales de Toulouse*, t. 13, 1921, p. 61-91).

2. INVARIANT D'UNE BIQUADRATIQUE; NOMBRE MAXIMUM D'HOMOGRAPHIES. — La transformation homographique générale de l'espace à trois dimensions dépend de 15 paramètres; la biquadratique générale B dépend de 16 paramètres; *donc démontrer qu'une biquadratique n'a qu'un invariant projectif ou démontrer qu'elle n'admet qu'un nombre fini de trans-*

formations homographiques en elle-même constituent deux problèmes équivalents.

Un procédé élémentaire prouve aussitôt l'existence d'un invariant projectif. La courbe B est supposée indécomposable et privée de point double; nous rapportons l'espace au tétraèdre conjugué commun au faisceau de quadriques déterminé par B; soient Q_1, Q_2 deux quadriques de ce faisceau

$$(Q_1) \qquad a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0$$
$$(Q_2) \qquad b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + b_3x_3^2 + b_4x_4^2 = 0$$

La quadrique $Q_1 - \lambda Q_2 = 0$ est un cône pour une valeur de λ telle que $a_i - \lambda b_i = 0$; or si l'on remplace les quadriques de base Q_1 et Q_2 par $\alpha Q_1 - \beta Q_2$ et $\gamma Q_1 - \delta Q_2$ on aurait à calculer μ de façon que $\alpha Q_1 - \beta Q_2 - \mu(\gamma Q_1 - \delta Q_2) = 0$ soit un cône, ce qui donne

$$\frac{\beta - \mu\delta}{\alpha - \mu\gamma} = \lambda$$

et cela prouve que *le birapport*

$$I = \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \frac{a_4}{b_4}\right)$$

est un invariant projectif propre à B *seule*. Si S_1, S_2, S_3, S_4 sont les sommets des 4 cônes signalés et si m_1, m_2, m_3, m_4 sont les points où le plan $S_2S_3S_4$ coupe B, *le birapport des génératrices* $S_1(m_1, m_2, m_3, m_4)$ *sur le cône* S_1 *est égal à* I (pour un choix convenable de la permutation m_1, m_2, m_3, m_4).

Cela se voit aussitôt en supposant Q_1 et Q_2 coïncidant avec les cônes S_1 et S_2 : $a_1 = b_2 = 0$; I se trouve égal à $\frac{a_3}{b_3} : \frac{a_4}{b_4}$ et l'on a à chercher sur la conique d'équation $a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 = 0$ le birapport des points où elle est coupée par les deux droites $b_3x_3^2 + b_4x_4^2 = 0$. On peut encore remarquer que si l'on considère quatre quadriques $Q_1 - \lambda_i Q_2 = 0$ du faisceau, le birapport des λ_i est égal au birapport *constant* des 4 plans tangents aux quadriques en un point *arbitraire* de B; d'après cela on voit que I est égal au birapport des plans déterminés par une tangente *arbitraire* de B et successivement les sommets des 4 cônes S_i.

Ce point établi, une homographie H changeant B en elle-même transforme un cône S_i en un cône S_j, i et j étant des entiers, égaux ou non, ayant une des valeurs 1, 2, 3, 4. Or le cône S_1, par exemple, ne peut s'échanger en lui-même (dans son ensemble) que de quatre façons différentes, car les 24 permutations différentes de m_1, m_2, m_3, m_4 s'associent par groupes de 4 pour donner un même birapport I (toutefois si I vaut -1, chaque groupe comprend 8 permutations, et si I vaut $-j$ ou $-j^2$ chaque groupe en comprend 12) : une fois S_1 fixé, sur une génératrice de S_1 il y a deux points de B qui peuvent ou rester chacun ce qu'il est ou s'échanger, de sorte qu'il y a huit façons au plus d'échanger B en elle-même de façon que le cône S_1 reste le cône S_1 : d'autre part une transformation H peut, au lieu de transformer S_1 en S_1, transformer au contraire S_2 (ou S_3 ou S_4) en S_1, et cela d'après ce qui précède de huit façons au plus : il y a donc au plus 32 transformations homographiques échangeant B en elle-même (accidentellement 64 si I vaut -1, ou 96 si I vaut $-j$ ou $-j^2$). Nous allons trouver effectivement le nombre annoncé : mais il est d'ores et déjà acquis que B *ne possède qu'un invariant projectif*.

Donnons une autre interprétation géométrique de I : si B est mise en perspective sur un plan P à partir d'un point M de cette courbe, on obtient une cubique plane non unicursale γ : si d'un point n de γ (perspective du point N de B), on mène les tangentes à γ autres que la tangente en n, ces quatre droites ont un birapport constant : c'est donc le birapport des quatre plans tangents à B menés par une corde MN (autres que les plans contenant MN et la tangente en M ou N) : deux cordes MN, MP *concourantes* en M sur B, ou bien encore PM et PQ concourantes en P sur B donnent le même birapport : donc deux cordes *quelconques* MN et PQ donnent le même birapport. On peut imaginer que MN devienne la tangente à B en M, d'où l'on mène à B les plans tangents (qui seront donc bitangents) autres que le plan osculateur à B au point de contact : enfin si le point M vient en l'un des points signalés plus haut tels que m_1, l'un des quatre plans bitangents menés par la tangente correspondante Sm_1 est le plan tangent au cône S_1 le long de Sm_1 et les trois autres sont les plans Sm_1m_2, Sm_1m_3, Sm_1m_4 : donc *le birapport constant relatif aux sécantes doubles de B est le rapport I précédemment indiqué.*

On doit remarquer que les points tels que m_1, en nombre 16, où B est coupée par les faces du tétraèdre conjugué, sont tels que *le plan osculateur est stationnaire* : en effet un plan mené par deux génératrices *distinctes* du cône S_1 coupe B en 4 points distincts ; si ces deux génératrices se confondent, on obtient un plan bitangent mené par une génératrice de S_1, les deux points de contact étant alignés avec S_1, et si la génératrice tend vers $S m_1$, les deux points de contact tendent tous deux vers m_1.

L'ordre d'idées développé ici conduit aussitôt aux résultats de M. Mohrmann ; en effet prenons quatre des 16 points qui précèdent, choisis de sorte que sur les tangentes correspondantes il n'y en ait pas qui soient sécantes ; ce système de quatre droites admet deux invariants projectifs I_1, I_2 qui sont aussi des invariants de B ; comme B n'a qu'un seul invariant, I_1 et I_2 sont des fonctions de I, ce qui entraîne une relation $f(I_1, I_2) = 0$; si trois des tangentes sont données, la quatrième appartient donc à un complexe déterminé ; on ne peut donc choisir arbitrairement les quatre droites, bien que leur donnée entraîne simplement 16 relations entre les 16 paramètres dont dépend B ; et alors, si l'on a choisi les quatre tangentes remarquables de façon que la fonction $f(I_1, I_2)$ soit nulle, il y a ∞^1 biquadratiques B qui satisfont aux conditions imposées.

5. Homologies involutives et involutions biaxiales conservant séparément chaque quadrique du faisceau. — On aperçoit immédiatement *huit* transformations involutives qui conservent chaque quadrique du faisceau :

1° *Transformation identique* ;

2° *Homologie involutive de pôle S_i et de plan associé $S_j S_k S_l$* ; il y a *quatre* homologies de cette espèce ; soit (S_i) cette homologie ;

3° *L'involution biaxiale définie par les droites $S_i S_j$ et $S_k S_l$* ; appelons-la soit $(S_i S_j)$, soit $(S_k S_l)$, car elle résulte indifféremment de la composition $(S_i)(S_j)$ ou $(S_j)(S_i)$ ou encore de la composition $(S_k)(S_l)$ ou $(S_l)(S_k)$.

Comme nous avions reconnu *a priori* (sauf pour $I^2 + 1 = 0$) que la biquadratique B ne peut avoir que huit transformations au plus la conservant et échangeant S_1 avec lui-même, nous les avons effectivement obtenues et il n'en existe pas d'autres : dès qu'un cône S_i est transformé en lui-même, il en est de même pour une quadrique quelconque. Les huit transformations forment un *groupe* : les trois involutions biaxiales et la transformation identique forment un *sous-groupe* du précédent : chacune des trois involutions biaxiales composée avec une autre donne la troisième : on peut *permuter* l'ordre : chacune est sa propre transformée par l'une quelconque des deux autres.

Soit Σ_p ($p = 1, 2, \ldots, 8$) l'une des 8 transformations qui précèdent : si par une voie quelconque on peut trouver une transformation homographique T conservant B mais échangeant S_1 avec S_2, et par suite S_3 avec S_4, il est clair que chaque opération $T\Sigma_p$ échange S_1 avec S_2 et comme il n'y en a que 8 possibles, nous avons toutes celles qui échangent S_1 avec S_2 : elles ne forment pas un groupe d'ailleurs, car $(T\Sigma_p)(T\Sigma_q)$ échange chaque cône avec lui-même, de sorte que

$$(T\Sigma_p)(T\Sigma_q) = \Sigma_r$$

et ceci suffit pour montrer que les 16 transformations Σ_p et $T\Sigma_p$ forment un groupe.

L'association S_1, S_3 puis S_1, S_4 fournit alors en prenant l'opération T' ou T'' obtenue à partir de T en substituant S_3 ou S_4 à S_2 les 32 transformations annoncées.

4. Involutions biaxiales échangeant les cônes par couples. — Mon collègue, M. P. Robert, m'a signalé la propriété suivante qui nous donnera sans effort la transformation T. Soient une quadrique Q et deux droites Δ, Δ' *non conjuguées par rapport à* Q, *non tangentes à* Q. Le plan polaire d'un point M de Δ coupe Δ' en M' : le rapport anharmonique de 4 points M est égal à celui des 4 points M' qui leur correspondent, donc MM' engendre une semi-quadrique Q', dont Δ et Δ' sont deux génératrices de la semi-quadratique complémentaire ; les deux points P et P' où MM' perce Q sont conjugués harmoniques par rapport à M et M', de sorte que *la biquadratique* B *commune à* Q *et* Q' *est invariante, en même temps que* Q', *par l'involution biaxiale d'axes* Δ *et* Δ'. Soit α un point commun à Q et Δ : le plan polaire de α par rapport à Q, ou le plan tangent à Q en α, coupe Δ' en α_1 ; la droite $\alpha\alpha_1$

perce Q, donc B, en deux points confondus en α; la droite $\alpha\alpha_1$ est donc à la fois génératrice de Q' et tangente à B : donc, d'après un théorème connu, le plan osculateur à B en α coïncide avec le plan tangent à Q' en α; ce plan contient Δ, donc le point β où Δ coupe de nouveau Q; pour la même raison le plan osculateur à B en β passe en α. *Cette relation entre α et β est caractéristique* : α et β sont distincts, puisque Δ est supposée non tangente à Q (dans le cas contraire on aurait une biquadratique à point double, Q et Q' étant tangentes entre elles au point où Δ touche Q). Nous verrons qu'il y a sur une biquadratique B (non unicursale, c'est-à-dire sans point double) 24 couples α, β; dans leur recherche, il faut d'abord éliminer sur les 64 points de B qui semblent répondre à la question les 16 points à plan osculateur stationnaire. Δ' coupe Q en deux nouveaux points α', β' de mêmes propriétés que α et β.

L'involution biaxiale d'axes Δ et Δ' change Q' en elle-même et change chaque quadrique Q_1 du faisceau (Q, Q') en une quadrique Q_2 du même faisceau; inversement Q_2 se transforme en Q_1; Q_1 *et* Q_2 *se correspondent involutivement*, c'est-à-dire que leurs équations étant $Q-\lambda_1 Q'=0$, $Q-\lambda_2 Q'=0$, les nombres λ_1 et λ_2 se correspondent involutivement : *la quadrique Q' est une quadrique double de cette involution*.

La *transformée* de cette involution (Δ, Δ') par l'homologie involutive S_1 est manifestement l'involution biaxiale $(\bar\Delta, \bar\Delta')$ dont les axes $\bar\Delta$ et $\bar\Delta'$ sont deux génératrices de la semi-quadrique complémentaire de Q'; cette nouvelle involution échange encore $Q-\lambda_1 Q'$ avec $Q-\lambda_2 Q'$. Nous avons aussi, évidemment,

$$(1)\qquad (\bar\Delta, \bar\Delta') = S_1(\Delta, \Delta')S_1 = S_2(\Delta, \Delta')S_2 = S_3(\Delta, \Delta')S_3 = S_4(\Delta, \Delta')S_4.$$

Ce résultat prouve que les deux opérations, séparément involutives S_1 et (Δ, Δ'), ne sont pas *permutables*; on peut écrire

$$(2)\qquad S_1(\Delta, \Delta') = (\bar\Delta, \bar\Delta')S_1, \qquad (\Delta, \Delta')S_1 = S_1(\bar\Delta, \bar\Delta').$$

L'opération $S_1(\Delta, \Delta')$ a pour inverse $(\Delta, \Delta')S_1$: elle n'est donc pas involutive. On peut encore écrire

$$(3)\qquad (\Delta, \Delta') = S_i(\Delta, \Delta')S_i,$$

$$(4)\qquad (S_iS_j)(\Delta, \Delta')(S_iS_j) = S_i[S_j(\Delta, \Delta')S_j]S_i = S_i(\bar\Delta, \bar\Delta')S_i = (\Delta, \Delta').$$

Ceci prouve que l'involution biaxiale (Δ, Δ') est *permutable* avec chaque involution biaxiale $S_i S_j$; les axes Δ, Δ' doivent donc ou *s'appuyer sur les arêtes opposées $S_i S_j$ et $S_k S_l$ ou bien former avec elles deux couples harmoniques d'une même semi-quadrique*. Conclusion : Δ, Δ' rencontrent par exemple $S_1 S_2$ et $S_3 S_4$ et offrent avec chacun des deux autres couples $S_1 S_3$, $S_2 S_4$ d'une part et $S_1 S_4$, $S_2 S_3$ de l'autre la seconde disposition.

Cette dernière remarque permet d'obtenir *a priori* tous les éléments désirés; nous pouvons prendre les équations des quadriques de base sous la forme

$$(Q_1) \qquad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0,$$
$$(Q_2) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

de façon que a_1, a_2, a_3, a_4 soient les racines de l'équation en λ relative au faisceau (Q_1, Q_2). Nous cherchons l'involution dont deux couples sont (a_1, a_2) et (a_3, a_4). Elle est définie par l'équation

$$(5) \qquad \lambda_1 \lambda_2 (a_1 + a_2 - a_3 - a_4) - (a_1 a_2 - a_3 a_4)(\lambda_1 + \lambda_2) + a_1 a_2 (a_3 + a_4) - a_3 a_4 (a_1 + a_2) = 0.$$

L'équation

$$(6) \qquad \lambda^2 (a_1 + a_2 - a_3 - a_4) - 2\lambda (a_1 a_2 - a_3 a_4) + a_1 a_2 (a_3 + a_4) - a_3 a_4 (a_1 + a_2) = 0$$

définit deux quadriques Q' et Q'_1 dont chacune peut jouer le rôle de la quadrique Q' qui a été utilisée ici. Sur chacune (comme sur toute quadrique du faisceau), il y a quatre génératrices du premier système tangentes à B *avec cette particularité propre à Q' que, α étant le point de contact de l'une de ces génératrices, la génératrice Δ, du second système de Q', issue de α, perce B en un autre point β, contact avec B d'une nouvelle génératrice du premier système de Q'*; les deux autres points α', β' analogues à α et β donnent l'axe Δ'.

Les génératrices de Q' du système opposé fournissent de même $\bar{\Delta}$ et $\bar{\Delta}'$; on peut supposer que Δ et $\bar{\Delta}$ se coupent sur $S_1 S_2$ et divisent harmoniquement $S_3 S_4$, puis que Δ' et $\bar{\Delta}$ se coupent sur $S_3 S_4$ et divisent harmoniquement $S_1 S_2$; de la sorte Δ et $\bar{\Delta}'$ se coupent sur $S_3 S_4$ et divisent harmoniquement $S_1 S_2$; Δ' et $\bar{\Delta}'$ se coupent sur $S_1 S_2$. Le lecteur fera sans peine la figure.

Nous avons mis ainsi en évidence des sous-groupes de quatre transformations : dans chacun, figure la transformation identique :

1° Involutions biaxiales (Δ, Δ'), $(\overline{\Delta}, \overline{\Delta}')$, $(S_1 S_2, S_3 S_4)$;

2° Involutions biaxiales (Δ, Δ'), $(S_1 S_4, S_2 S_3)$ et l'involution résultant de la composition des précédentes; les axes de cette involution sont nécessairement deux génératrices Δ_1 et Δ'_1 de Q'_1; les six droites (Δ, Δ'), $(S_1 S_4, S_2 S_3)$, Δ_1 et Δ'_1 sont sur une même semi-quadrique où chaque couple divise harmoniquement les deux autres; $S_1 S_2$ et $S_3 S_4$ sont deux génératrices de l'autre système;

3° Système analogue au précédent $(\overline{\Delta}, \overline{\Delta}')$, $(S_1 S_4, S_2 S_3)$, $(\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}'_1)$;

4° Système analogue au premier, comprenant;

$$(\Delta_1, \Delta'_1), \qquad (\overline{\Delta}_1, \overline{\Delta}'_1)(S_1 S_2, S_3 S_4);$$

5° Système analogue au second formé avec (Δ, Δ'), $(S_1 S_3, S_2 S_4)$, $(\overline{\Delta}_1, \Delta'_1)$;

6° Système analogue au second formé avec

$$(\overline{\Delta}, \overline{\Delta}'), \qquad (S_1 S_3, S_2 S_4), \qquad (\Delta_1, \Delta'_1).$$

En associant de même S_1 avec S_3 (et S_2 avec S_4), puis S_1 avec S_4, nous aurons le total des 32 homographies prévues. Chaque quadrique telle que Q' donne 8 points tels que α; il y a 6 quadriques analogues à Q' et nous avons ainsi les 48 points α annoncés.

Le rôle de la quadrique Q, qui a servi dans notre raisonnement, n'existe pas, en ce sens que Q peut être remplacée par n'importe quelle autre quadrique du faisceau, Q' ne changeant pas, non plus que Δ et Δ'. Cela tient à ce que le plan polaire d'un point M de l'espace par rapport à une quadrique variable du faisceau tourne autour d'une droite fixe que l'on peut obtenir en menant de M les deux sécantes doubles de B qui en sont issues; ici si M est sur Δ, les deux sécantes doubles sont précisément Δ et MM'; μ étant le conjugué de M relativement aux points α, β où Δ perce Q, la droite fixe associée à M est $M'\mu$.

Le premier sous-groupe indiqué donne la relation

$$(S_1 S_2, S_3 S_4) = (\Delta, \Delta')(\overline{\Delta}, \overline{\Delta}').$$

ce qui en vertu de (1) peut s'écrire

$$(S_1 S_2, S_3 S_4) = (\Delta, \Delta') S_1 (\Delta, \Delta') S_1 = [(\Delta, \Delta') S_1]^2,$$

et comme le premier terme est involutif, on aura ainsi

$$(S_1 S_2, S_3 S_4) = [S_1 (\Delta, \Delta')]^2.$$

On voit le lien de cette théorie avec la résolution de l'équation en λ relative au faisceau ponctuel déterminé par B. Si en effet on a déterminé les deux quadriques appelées Q' et Q'_1, et si on les prend comme quadriques de base, l'équation (6) est satisfaite pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$, de sorte que l'on a

$$(7) \qquad \begin{cases} a_1 + a_2 = a_3 + a_4, \\ a_1 a_2 (a_3 + a_4) = a_3 a_4 (a_1 + a_2). \end{cases}$$

La seconde équation, tenant compte de la première, s'écrit

$$(a_1 + a_2)(a_1 a_2 - a_3 a_4) = 0.$$

Si l'on prenait $a_1 a_2 = a_3 a_4$, on aurait par exemple $a_1 = a_3$, $a_2 = a_4$ et le faisceau serait défini par les deux équations

$$a_1 (x_1^2 + x_3^2) + a_2 (x_2^2 + x_4^2) = 0, \qquad (x_1^2 + x_3^2) + (x_2^2 + x_4^2) = 0,$$

de sorte que B se décomposerait en un quadrilatère gauche, cas écarté; on supposera donc $a_2 = -a_1$, $a_4 = -a_3$ de *sorte que l'équation en λ est bicarrée avec ce choix de quadriques fondamentales;* l'on reconnaît la méthode classique pour résoudre l'équation générale de degré 4.

Ce résultat prouve que les *quadriques* Q' *et* Q'_1 *sont chacune harmoniquement circonscrite à l'autre* (*donc aussi harmoniquement inscrite*). Ceci est évident géométriquement, car le quadrilatère gauche $\Delta\bar{\Delta}\Delta'\bar{\Delta}'$ dont les côtés sont génératrices de Q', réuni aux diagonales $S_1 S_2$ et $S_3 S_4$ forme un tétraèdre inscrit dans Q' et conjugué par rapport à Q'_1 : en effet le sommet $(\Delta, \bar{\Delta})$ situé sur $S_1 S_2$ a son plan polaire par rapport à toutes les quadriques du faisceau passant par la droite $S_3 S_4$; le plan polaire de ce point $(\Delta, \bar{\Delta})$ par rapport à Q'_1 passe par le point $(\Delta', \bar{\Delta}')$ situé sur $S_1 S_2$, car nous avons vu que $(S_1 S_4, S_2 S_3)$, (Δ, Δ'), (Δ_1, Δ'_1) sont six génératrices d'une même quadrique se divisant harmoniquement d'un couple à l'autre; donc le point $(\Delta, \bar{\Delta})$

a bien pour plan polaire relativement à Q'_1 la face opposée dans le tétraèdre qui vient d'être défini.

L'association $(S_1 S_3)$ définit de même les quadriques remarquables Q'', Q''_1 et l'association $(S_1 S_4)$ les quadriques Q''', Q'''_1. En supposant choisies Q' et Q'_1 comme quadriques de base, nous écrivons les équations de ces quadriques

$$(Q') \qquad a_1(x_1^2 - x_2^2) + a_3(x_3^2 - x_4^2) = 0,$$
$$(Q'_1) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$
$$Q'' = Q' - \sqrt{a_1 a_3}\,Q'_1, \qquad Q''_1 = Q' + \sqrt{a_1 a_3}\,Q'_1;$$
$$Q''' = Q' - i\sqrt{a_1 a_3}\,Q'_1, \qquad Q'''_1 = Q' + i\sqrt{a_1 a_3}\,Q'_1.$$

Il est bon de signaler un autre résultat pour les quadriques Q_1 et Q_2 qui se correspondent dans l'involution définie par l'équation (5). Nous supposerons cette fois choisies comme quadriques de base deux telles quadriques Q_1, Q_2 :

$$(Q_1) \qquad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0,$$
$$(Q_2) \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Les deux valeurs 0 et ∞ doivent donc être conjuguées par rapport aux racines de l'équation (5), ce qui entraîne que ces racines soient opposées, d'où

$$a_1 a_2 - a_3 a_4 = 0.$$

Darboux a montré que cette *relation est nécessaire* (¹) *et suffisante pour qu'il existe une certaine homologie biaxiale (et par suite une infinité simple) transformant* Q_1 *en* Q_2 *: ces homologies n'étant pas involutives (sauf celles que nous avons signalées), c'est l'homologie inverse qui transforme* Q_2 *en* Q_1*, de sorte que* B *ne se trouve transformée en elle-même par aucune de ces homologies biaxiales non involutives.*

Il est facile de montrer aussi que cette relation $a_1 a_2 - a_3 a_4 = 0$ *est la relation nécessaire et suffisante pour qu'il existe une quadrique* Σ *coupant chacune des quadriques* Q_1 *et* Q_2 *suivant quatre droites.* On constate en effet que Σ doit être quadri-tangente à Q_1 (4 conditions), quadri-tangente à Q_2 (4 conditions) : par suite l'ensemble des 3 qua-

(¹) Il faut en réalité écrire $(a_1 a_2 - a_3 a_4)(a_1 a_3 - a_2 a_4)(a_1 a_4 - a_2 a_3) = 0$. *Voir* DARBOUX, *Principes*, p. 78.

driques Q_1, Q_2, Σ dépend de $3 \times 9 - 8 = 19$ paramètres (¹); mais il ne faut pas croire que ces 19 paramètres se répartissent ainsi : 9 pour Q_1, 9 pour Q_2 et 1 pour Σ, comme il serait naturel de le penser; la répartition exacte est 9 pour Q_1, 8 pour Q_2 (à cause de la relation $a_1 a_2 - a_3 a_4) = 0$ et 2 pour Σ.

Nous avons ainsi trouvé 15 *involutions biaxiales échangeant* B *en elle-même* : les 3 involutions ($S_i S_j$, $S_k S_l$) et les 12 mises en évidence dans ce paragraphe : *pour les* 3 *premières les cordes joignant les points correspondants engendrent une surface algébrique de degré* 4 (car par chaque point de $S_1 S_2$ par exemple passent deux sécantes doubles s'appuyant sur $S_3 S_4$) : *pour les* 12 *dernières les cordes engendrent les* 6 *quadriques mises en évidence dans ce paragraphe : l'autre cas où les cordes joignant les points homologues engendrent une quadrique est fourni par les homologies de pôle* S_1, S_2, S_3 *ou* S_4. En décomposant chacune des quadriques non coniques en deux semi-quadriques, nous avons un total de 16 *semi-quadriques* (*dont* 4 *sont coniques*) *avec chacune une transformation involutive associée : désignons par* (q) *cet ensemble de transformations.*

Cette remarque va nous permettre de signaler un nouveau sous-groupe de 16 transformations homographiques contenu dans le groupe étudié ici : il faut remarquer que les 16 *transformations de l'ensemble* (q) *ne forment pas un groupe.*

Il est évident que chacune des 8 transformations Σ_p formant le groupe qui laissent inaltérée (dans son ensemble) chaque quadrique du faisceau peut être obtenue soit par *zéro*, soit par *une*, soit par *deux* transformations de l'ensemble (q). La transformation *identique* correspond à zéro : chaque homologie S_i à une, chaque involution ($S_i S_j$) à deux. D'autre part, en appelant T, T', T'' *une* involution biaxiale déduite de Q', Q'' ou Q''', les 24 transformations $T\Sigma_p$, $T'\Sigma_p$, $T''\Sigma_p$ achèvent de compléter notre groupe G de 32 homographies : donc

(¹) On peut choisir arbitrairement Σ (9 paramètres), 4 génératrices de Σ formant un quadrilatère gauche (4 paramètres), puis la quadrique Q_1 contenant ces 4 génératrices (1 paramètre), puis un nouveau quadrilatère gauche situé sur Σ et la quadrique Q_2 contenant ce quadrilatère : total $9 + 4 + 1 + 4 + 1 = 19$ paramètres, évidemment indépendants et tels que la variation de l'un change le résultat définitif Σ, Q_1, Q_2.

chaque transformation du groupe G peut être obtenue par la composition d'un nombre *pair* ou *impair* de transformations de (q) : donc *celles qui correspondent à un nombre pair forment un sous-groupe de* G, *soit* G' : remarquons que l'ensemble (q) se compose de 16 transformations *distinctes :* chacune d'elles, suivie de S_1 par exemple, donne 16 transformations distinctes, appartenant à G' : donc G' est obtenu en supprimant de G l'ensemble (q) et ceci prouve que *toute transformation de* G' *autre que la transformation identique peut être obtenue par deux transformations de* (q) *convenablement choisies, composées dans un ordre convenable*. On pourra remarquer encore que l'une quelconque des 32 homographies se traduit par l'une des quatre *involutions* suivantes sur la valeur de λ qui fixe une quadrique du faisceau : ou bien la substitution identique, ou bien l'involution qui échange S_1 avec S_2, S_3 avec S_4, a pour racines doubles les quadriques Q' et Q'_1, échange Q'' avec Q''_1 et Q''' avec Q'''_1 ou bien l'une des deux involutions analogues qui provient de l'association $(S_1 S_3)$ ou $(S_1 S_4)$.

5. Quadrilatères de Poncelet. — Le paragraphe précédent a permis de trouver le groupe G, à condition de supposer que la construction de M. Robert est applicable à une biquadratique B *quelconque*. Nous avons à nous préoccuper de la réciproque pour avoir un raisonnement parfaitement rigoureux. Cela va nous donner une application élégante de la théorie de Poncelet.

Si effectivement il existe deux droites Δ, Δ' de l'espèce indiquée, voici le résultat que nous avons en projetant la figure à partir de S_1 sur le plan $S_2 S_3 S_4$: B se projette suivant une conique σ, Δ et Δ' suivant deux droites δ, δ' : la droite MM' devient une corde mm' de σ partagée harmoniquement par δ, δ' et σ. Or on sait qu'étant données deux coniques σ, σ' (décomposées ou non), les droites partagées harmoniquement par σ et σ' enveloppent une conique γ tangente à chacune des tangentes à σ et σ' en leurs points communs. Si σ est une véritable conique, tandis que σ' dégénère en deux droites δ et δ', la conique γ est tangente à δ et δ' et aux tangentes à σ aux points où δ et δ' la coupent. Si donc a et a_1 sont les points où δ coupe σ, on remarque que σ et γ ont deux tangentes communes telles que la droite aa_1 joignant les points où elles touchent σ soit tangente à γ :

c'est le criterium bien connu pour que γ soit inscrite dans ∞^1 quadrilatères de Poncelet inscrits dans σ.

Réciproquement, si deux coniques σ, γ admettent ∞^1 quadrilatères de Poncelet inscrits dans σ et circonscrits à γ, prenons une tangente commune à σ et γ, touchant σ en a; de a menons la nouvelle tangente δ à γ; δ coupe σ en a_1; la tangente à σ en a_1 est aussi tangente à γ; les deux autres tangentes communes à σ et γ touchent σ en a', a'_1 et la droite δ' qui joint $a'a'_1$ est tangente à γ; la conique γ est donc, d'après ce qui précède, l'enveloppe des droites harmoniquement partagées par σ et le couple δ, δ'. En supposant la figure ramenée au type canonique où σ et γ sont deux cercles tels que le centre de γ soit situé sur σ, on voit que les deux droites δ, δ' se coupent en un point S_2 ayant même polaire par rapport à σ et γ.

Revenons à B mise en perspective sur le plan $S_2S_3S_4$ à partir de S_1; chaque quadrique du faisceau est coupée par ce plan suivant son contour apparent relatif à S_1 et les coniques ainsi obtenues forment un faisceau ponctuel, coupant la conique σ trace du cône S_1 aux 4 points m_1, m_2, m_3, m_4 déjà signalés, qui ont sur B un plan osculateur stationnaire: dans ce faisceau il y a *deux* coniques *remarquables* q' et q'_1 admettant avec σ une infinité de quadrilatères de Poncelet, tels que la diagonale joignant deux sommets opposés passe au point S_2. Cette conique q' (ou q'_1) est la section par le plan $S_2S_3S_4$ de la quadrique Q' (ou Q'_1) *remarquable* déjà citée; la droite S_3S_4 perce q' en deux points où l'on mène les tangentes δ et δ' à q'; ces deux droites sont les perspectives de deux génératrices Δ, Δ' du premier système sur Q' et de deux génératrices $\overline{\Delta}$, $\overline{\Delta}'$ du second : la figure étudiée au paragraphe précédent se trouve ainsi reconstituée.

Étant donné un point *m arbitraire* de la conique σ, nous en déduisons un *groupe* de 16 points comprenant :

1° Le point m lui-même;

2° Les nouveaux points d'intersection des droites mS_2, mS_3, mS_4 avec σ;

3° Les nouveaux points d'intersection avec σ de chaque tangente menée de m à l'une des 6 coniques *remarquables* q', q'_1; q'', q''_1; q''', q'''_1 mises en évidence.

Ce qui a été expliqué au numéro précédent met en évidence des sous-groupes de ce groupe de 16 points. Or chacun des 16 points m_i est la perspective de deux points M_i, $\overline{M}_i$ de B ($i = 0, 1, \ldots, 15$) de sorte que nous avons sur B un *groupe* de 32 points : chaque droite $m_i m_j$ est, quels que soient i, j (égaux ou non), ou tangente à l'une des 6 coniques remarquables ou passant par l'un des points S_2, S_3, S_4 (ou tangente à σ pour $i = j$). Dans l'espace la droite $m_i m_j$ est projection de 4 cordes de B (du moins pour $i \neq j$) : deux de ces cordes sont génératrices, soit de l'une des 12 semi-quadriques remarquables, soit de l'un des 3 cônes S_2, S_3, S_4 et se coupent, sur le plan $S_2 S_3 S_4$, au point où la droite $m_i m_j$ touche son enveloppe (conique remarquable ou point S_2, S_3, S_4) ; la tangente à σ en m_i, soit $m_i m_i$, est projection simplement de la génératrice $S_1 M_i \overline{M}_i$ du cône S_1, puis de deux tangentes à B. Étant donc donné un point M *arbitraire* de B, sa perspective m sur σ, puis les divers points m_i correspondants permettent donc de marquer 16 points $\overline{M}_i$ ($i = 0, 1, \ldots, 15$) tels que chaque droite $M\overline{M}_i$ soit génératrice de l'une des 12 semi-quadriques ou de l'un des 4 cônes : *ces points forment un groupe attaché au point* M (*qui n'en fait pas partie*) : ils correspondent au sous-groupe G′ qui a été étudié au numéro précédent. Les 16 points M_i ($i = 0, \ldots, 15$) forment aussi le *sous-groupe* G′ qui correspond au point M. Étant donnés deux points $M_i M_j$ ($i \neq j$ ou $i = j$) de ce groupe, on voit en utilisant $m_i m_j$ que l'on peut aller exactement de 16 façons de M_i à M_j en suivant un chemin $M_i \overline{M}_k M_j$ ($k = 0, \ldots, 15$) composé de deux segments $M_i \overline{M}_k$, $\overline{M}_k M_j$ génératrices des 12 semi-quadriques ou d'un des 4 cônes. Il est clair que l'homologie S_1 transforme chaque point M_i en le point $\overline{M}_i$; par suite chaque droite $M_i M_j$ ou $M_i \overline{M}_j$ ou $\overline{M}_i \overline{M}_j$, *suivie par continuité* lorsque M se déplace sur B, devient respectivement $\overline{M}_i \overline{M}_j$, ou $M_i M_j$ ou $M_i M_j$ quand M vient occuper la position $\overline{M}$: il y a lieu d'étudier les surfaces réglées lieu des droites $M_i M_j$; puisque $M_i M_j$ peut, par continuité, s'échanger avec $\overline{M}_i \overline{M}_j$, chacune de ces surfaces admet les homologies S_1, S_2, S_3, S_4 et les 3 involutions biaxiales qui en résultent. Si $j = i$, on obtient la surface développable dont B est arête de rebroussement : le degré de cette surface est manifestement égal au nombre des plans tangents à B menés par une droite quelconque [1]; or nous avons vu que par une sécante double MN de B on peut mener à B quatre plans tangents autres que les plans tangents contenant MN et la tangente en M ou N de sorte que cette droite MN perce la surface en M et N comptant chacun pour deux unités et en quatre points nouveaux : la surface est de degré 8.

Si les deux points M_i, M_j sont tels que la droite $m_i m_j$ passe par le point S_2, on obtient une surface réglée de degré 4, admettant $S_1 S_2$ et $S_3 S_4$ pour directrices doubles; en effet un plan quelconque issu de $S_3 S_4$ par exemple coupe deux quadriques du faisceau suivant deux coniques ayant pour triangle conjugué commun le triangle $S_3 S_4 \sigma$, où σ est le point commun à ce plan et à $S_1 S_2$: il y a donc deux sécantes communes issues de σ et ce sont les génératrices données par ce plan.

Si la droite $m_i m_j$ est tangente à l'une des coniques remarquables, q' par exemple, la droite $M_i M_j$ engendre une surface réglée R de degré 8; en effet $M_i M_j$ perce le plan $S_2 S_3 S_4$ au point V où elle se rencontre avec $\overline{M}_i \overline{M}_j$; d'après les propriétés du quadrilatère complet, les deux génératrices $M_i M_j$ et $\overline{M}_i M_j$ qui appartiennent à la quadrique Q' se coupent en un point U du plan $S_2 S_3 S_4$, qui est le point où $m_i m_j$ touche q', et les deux points U, V sont conjugués harmoniques par rapport aux traces de $M_i \overline{M}_j$ et $M_j \overline{M}_j$ qui sont les points où $m_i m_j$ perce la conique σ perspective de B. Or étant données deux coniques quelconques σ et q, si sur chaque tangente à q on prend le point V où cette tangente rencontre la polaire par rapport à σ de son point de contact U, on obtient un lieu de degré 4 et unicursal (les deux droites sécantes ont leurs équations rationnelles et de degré 2 par rapport au paramètre qui individualise chaque point de q) [2]; V décrit donc une courbe unicursale de degré 4 qui est la section *complète* de R par le plan $S_2 S_3 S_4$ (car les droites joignant deux à deux les points où B perce $S_2 S_3 S_4$ sont génératrices des surfaces de

---

(1) On peut encore procéder ainsi : étant donnés une droite D, et un point P de D, le cône de sommet P ayant B pour directrice est de classe 8, donc par D on peut mener 8 plans tangents à ce cône.

(2) On peut encore dire que V se déduit de U par une transformation biquadratique involutive consistant à associer à chaque point U du plan le point V où se coupent les polaires de U par rapport aux coniques du faisceau σ, q.

degré 4 étudiées auparavant) : donc R est de degré 8. On arrive au même résultat en étudiant la classe de R (égale au degré, comme on sait). Le contour apparent de R relatif à S_1 et au plan $S_2S_3S_4$ est évidemment la conique q', de sorte que le cône de sommet S_1 et base q' est enveloppe de plans tangents doubles et doit être compté deux fois : si la tangente *variable* à q' tend vers une tangente commune à q' et σ, les points m_i et m_j viennent se confondre et nous avons vu que les génératrices $M_i\overline{M}_j$ et $\overline{M}_iM_j$ de Q' deviennent alors tangentes à B ; donc cette fois c'est $\overline{M}_j$ qui coïncide avec M_i et M_j avec $\overline{M}_i$ pendant que les deux génératrices M_iM_j et $\overline{M}_i\overline{M}_j$ contenues dans le plan général $S_1m_im_j$ se confondent toutes deux avec $M_i\overline{M}_i$: donc chaque tangente commune à σ et q' donne un plan, passant par elle et S_1, touchant R le long d'une génératrice stationnaire, le cône S_1 étant tangent à R tout le long de cette génératrice qui n'est autre que l'une des quatre tangentes issues à B du point S_1 ; le cône S_1 coupe donc R suivant les quatre génératrices de R issues de S_1, comptant chacune pour deux unités, et suivant B, ligne double de R et simple de S_1, comptant donc pour huit unités : cela confirme bien le résultat 8 obtenu pour degré de R (en même temps que pour la classe, S_1 étant un point quadruple avec un cône circonscrit de classe deux comptant pour morceau de multiplicité deux, ce qui donne $4+4$ ou 8). La surface R admet donc 4 points quadruples, 4 sections planes doubles (dont chacune a pour points doubles les sommets du tétraèdre $S_1S_2S_3S_4$ qu'elle contient).

6. Digression sur les polygones de Poncelet, les résultats de Cayley et un mémoire de M. Lebesgue. — Dans ce qui précède nous avons systématiquement évité de nous servir des fonctions elliptiques. Il serait toutefois regrettable de ne pas raccorder les résultats qui précèdent à ceux que M. Lebesgue a obtenus (par une voie d'ailleurs purement géométrique) dans un mémoire élégant paru aux *Annales de Toulouse*, t. 13, 1921, p. 61-91, ayant pour but de présenter des résultats analytiques de Cayley. On peut supposer que chaque point de la biquadratique B a ses coordonnées exprimées au moyen d'un paramètre elliptique u tel que la condition nécessaire et suffisante pour que deux points soient alignés avec S_1 est que les u correspondants soient égaux et de signe contraire; par suite la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points soient dans un même plan est $u_1+u_2+u_3+u_4=0$. On peut par exemple supposer que les coordonnées homogènes du point courant de B sont $(\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u, 1)$ auquel cas la courbe est rapportée au tétraèdre conjugué $S_1S_2S_3S_4$, σ étant la conique $(0, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u, 1)$ dont chaque point correspond à deux u opposés; ou bien on peut prendre pour B la courbe $(pu, p', p'', 1)$, la conique σ étant la courbe $(p, 0, p'', 1)$.

Il est alors clair que la relation $u_1+u_2=a$, où a est une constante fixe, définit ∞^1 cordes engendrant une surface réglée Q, tandis que $u_3+u_4=-a$ définit une surface analogue $\overline{Q}$: Q et $\overline{Q}$ sont telles que *toute* génératrice de Q rencontre *toute* génératrice de $\overline{Q}$; *donc* Q *et* $\overline{Q}$ *sont deux semi-quadriques complémentaires*. Coupons cette quadrique par un plan tangent issu de S_1 : nous obtenons sur B quatre points M, N, $\overline{M}$, $\overline{N}$ de paramètres h, k, $-h$, $-k$ avec $a=h+k$; les deux génératrices MN et $\overline{MN}$ de système opposé se coupent dans le plan polaire de S_1, c'est-à-dire $S_2S_3S_4$, en un point U, appartenant à la conique q section de Q par $S_2S_3S_4$, situé sur la corde mn de σ au point où cette corde mn touche q. Les deux cordes de B, $M\overline{N}$ et $\overline{M}N$ se coupent, d'après les propriétés du quadrilatère complet sur la corde mn au point V conjugué de U par rapport à mn, de sorte que le point V engendre une courbe de degré 4, admettant $S_2S_3S_4$ comme points doubles (raisonnement déjà indiqué au numéro précédent). Quand la génératrice MN engendre Q, la corde $M\overline{N}$ et la corde $\overline{M}N$ engendrent donc une surface réglée R de degré 8; en effet cette surface R admet la courbe lieu de V pour ligne double, épuisant toute la section de R par le plan $S_2S_3S_4$; le cône de sommet S_1 et base q est enveloppe de plans bitangents à R; d'autre part soient t un point de contact avec σ d'une tangente commune à q et σ et T, $\overline{T}$ les points correspondants de B; on voit que M, N sont confondus avec T, $\overline{M}$ et $\overline{N}$ avec $\overline{T}$ et que $T\overline{T}$ est une génératrice *stationnaire* de R issue de S_1, avec plan tangent constant en tout point de cette génératrice, à savoir le plan déterminé par S_1 et la tangente commune à q et σ étudiée: S_1 est donc un point quadruple de R. D'autre part chaque homologie involutive S_1, S_2, S_3 ou S_4 change Q en $\overline{Q}$ de sorte que R se trouve échangée aussi en elle-même ; donc chaque point S_1, S_2, S_3, S_4 joue le même rôle par rapport à R ; on voit que la surface R étudiée ici (au fond en ne nous servant pas des fonctions elliptiques) comprend comme cas particulier celles que nous avions étudiées au paragraphe précédent (lieu de $M_i M_j$). Puisque M et $\overline{N}$ ont respectivement pour paramètre h et $-k$, on voit que la corde MN est définie (*avec une orientation*) par la relation $u_1 - u_2 = h + k$ ou $u_2 - u_1 = h + k$ pendant que chaque corde MN ou $\overline{MN}$ est définie par $u_1 + u_2 = h + k$ ou $u_1 + u_2 = -(h + k)$: la différenciation des deux semi-quadriques Q et $\overline{Q}$ a comme homologue l'orientation que l'on donne à chaque génératrice MN par la distinction des extrémités de cette génératrice sur B (qui est ligne double de R).

Une corde *quelconque* MN de B définit une semi-quadrique et une seule Q contenant B, puis une surface R et une seule : m, n étant les perspectives de M et N sur σ, la quadrique Q et la surface R ainsi obtenues ont pour contour apparent les deux coniques du faisceau étudié ici qui sont tangentes à mn ; la semi-quadrique Q donne la conique tangente à mn au point où MN perce mn et la surface R la conique touchant mn au point conjugué du précédent relativement à mn.

D'après ceci, imaginons trois points A_1, A_2, A_3 de paramètres x_1, x_2, x_3 sur B : les surfaces réglées R correspondant aux cordes $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ correspondent aux équations

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= x_1 - x_2 = d_1 \\ u_2 - u_3 &= x_2 - x_3 = d_2 \qquad (d_1 + d_2 + d_3 = 0), \\ u_3 - u_1 &= x_3 - x_1 = d_3 \end{aligned}$$

et l'on voit que les contours apparents de ces surfaces sont trois coniques q_1, q_2, q_3, *appartenant avec σ à un même faisceau ponctuel, admettant évidemment ∞^1 triangles circonscrits dont les sommets sont sur σ, tandis que les droites joignant chaque sommet au point de contact du côté opposé sont concourantes*, car les points conjugués harmoniques de ces derniers sur chaque côté sont sur la droite intersection du plan $A_1 A_2 A_3$ avec $S_2 S_3 S_4$. Les coniques définies par les équations $u_1 + u_2 = d_1$, $u_2 + u_3 = d_2$, $u_3 + u_1 = d_3$ admettent des triangles particuliers $A_1 A_2 A_3$ comme triangle *tangent*, pour employer l'expression de M. Lebesgue, mais elles n'en admettent que le nombre fini 4 [en effet on a $2(u_1 + u_2 + u_3) = 0$, égalité ayant lieu à un multiple près des périodes 2ω, $2\omega'$; puis $2(u_2 + u_3) = 2d_2$, donc $2(u_1 + d_2) = 0$, ce qui donne quatre positions pour le point A_1] sans qu'il y ait besoin d'établir une relation entre d_1, d_2, d_3.

Ceci se généralise : on peut, en supposant

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 0,$$

écrire

$$u_1 - u_2 = d_1, \qquad u_2 - u_3 = d_2, \qquad \ldots, \qquad u_n - u_1 = d_n.$$

On obtient ainsi n coniques $q_1, q_2, \ldots, q_n$ appartenant avec σ à un même faisceau ponctuel et admettant ∞^1 polygones dont les sommets sont sur σ et dont les côtés sont tangents successivement à q_1, q_2, $\ldots$, q_n; si a_1, a_2, $\ldots$, a_n sont les sommets consécutifs, on peut choisir a_1 arbitrairement et l'on voit que l'équation $u_1 - u_2 = d_1$ conserve une des deux tangentes issues de a_1 à q_1 et élimine l'autre; de même ensuite pour a_2, puis a_3, $\ldots$ et enfin a_n; on remarque que les équations

$$u_1 - u_2 = -d_1, \qquad u_2 - u_3 = -d_2, \qquad \ldots, \qquad u_n - u_1 = -d_n$$

donnent un second polygone analogue : en partant de a_1, le côté initial est cette fois la tangente issue de a_1 à q_1 qui avait été éliminée pour le polygone précédent. Dans l'espace on a ∞^1 polygones gauches inscrits dans B et dont les côtés *orientés* A_1A_2, A_2A_3, $\ldots$, A_nA_1 appartiennent aux surfaces réglées R_1 R_2, $\ldots$, R_n; en changeant simplement *l'orientation* de chacune de ces surfaces on déduit de ce polygone avec le même point de départ le polygone $A_1\overline{A_2}\overline{A_3}\ldots\overline{A_n}$; on peut, comme l'a fait M. Lebesgue, introduire les triangles successifs $A_1A_2A_3$; $A_1A_3A_4$; $A_1A_4A_5$; $\ldots$; $A_1A_{n-1}A_n$, ce qui revient à écrire

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 - u_2 = d_1, \\ u_2 - u_3 = d_2, \\ u_3 - u_1 = -(d_1 + d_2); \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} u_1 - u_3 = d_1 + d_2, \\ u_3 - u_4 = d_3, \\ u_4 - u_1 = -(d_1 + d_2 + d_3); \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \ldots, \\ \ldots, \\ \ldots; \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 - u_{n-1} = d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-2}, \\ u_{n-1} - u_n = d_{n-1}, \\ u_n - u_1 = -(d_1 + \ldots + d_{n-1}); \end{array}\right.$$

et dans chacun des triangles $a_1a_2a_3$; $a_1a_3a_4$; ...; $a_1a_{n-1}a_n$, on a trois coniques *fixes* admettant ∞^1 triangles *circonscrits* (les droites joignant chaque sommet au point de contact opposé étant concourantes); cette méthode introduit, outre les coniques q_1, q_2, ..., q_n, les coniques complémentaires, enveloppes des diagonales issues de a_1. On peut remarquer que l'on peut permuter à volonté l'ordre de succession des coniques q_1, ..., q_n, ce qui revient à écrire

$$u_1 - u_2 = d_\alpha, \qquad u_2 - u_3 = d_\beta, \qquad \ldots, \qquad u_n - u_1 = d_\lambda,$$

α, β, ..., λ étant une permutation quelconque des nombres 1, 2, ..., n. On peut aussi remarquer que, conservant le polygone $A_1A_2\ldots A_n$ ou sa perspective $a_1a_2\ldots a_n$, le changement de sens de parcours $a_na_{n-1}\ldots a_2a_1$ revient à changer de signe tous les nombres d, puis à renverser l'ordre de la permutation.

La donnée des $n-1$ coniques q_1, ..., q_{n-1} fixe, *au signe près*, les nombres d_1, d_2, ..., d_{n-1} : une fois le signe choisi pour chacun, la conique q_n en résulte d'une façon unique; il y a donc un ensemble de 2^{n-2} coniques q_n (le nombre n doit être au moins égal à 3).

Le succès de la méthode revient à ceci : en additionnant les égalités

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= d_1 \\ u_2 - u_3 &= d_2 \qquad (d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 0), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ u_n - u_1 &= d_n \end{aligned}$$

on obtient une identité : supposons donc que l'on change de signe certaines des quantités u_i : cela revient, dans la chaîne $A_1A_2\ldots A_n$ à remplacer certains points par leur homologique vis-à-vis de S_1; on aura par exemple

$$\left\{\begin{aligned} u_1 + u_2 &= d_1, \\ -u_2 - u_3 &= d_2, \\ u_3 - u_4 &= d_3, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ u_n - u_1 &= d_n; \end{aligned}\right. \qquad \text{ou bien} \qquad \left\{\begin{aligned} u_1 + u_2 &= d_1, \\ -u_2 + u_3 &= d_2, \\ -u_3 - u_4 &= d_3, \\ u_4 - u_5 &= d_4, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ u_n - u_1 &= d_n. \end{aligned}\right.$$

On voit que l'on a encore ∞^1 chaînes dans l'espace dont les maillons appartiennent, pour un nombre *pair*, à des semi-quadriques du faisceau et pour les autres à des surfaces R primitives (éventuellement changées d'orientation); quant au plan $S_2S_3S_4$, on a les *mêmes* polygones que précédemment *circonscrits* aux coniques $q_1, q_2, \dots, q_n$ et inscrits dans σ.

Si l'on considère maintenant un nombre *impair* de semi-quadriques $Q_1, Q_2, \dots, Q_{2n-1}$ du faisceau et les coniques $q_1, q_2, \dots, q_{2n-1}$ correspondantes, il existe *toujours* 4 polygones tangents à $q_1, q_2, \dots, q_{2n-1}$ et inscrits dans σ, c'est-à-dire dans l'espace 4 chaînes fermées dont les maillons sont successivement génératrices, dans cet ordre, des semi-quadriques en question. On a en effet à écrire

$$u_1 - u_2 = d_1, \qquad u_2 + u_3 = d_2, \qquad \dots, \qquad u_{2n-1} + u_1 = d_{2n-1}.$$

En ajoutant on obtient

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{2n} + u_{2n-1} = \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_{2n-1}}{2} + p\omega + q\omega',$$

où 2ω, $2\omega'$ sont les deux périodes de la fonction elliptique employée; p et q deux entiers égaux à o ou $+1$; on en déduit

$$d_1 - d_3 - \dots + d_{2n-1} + u_{2n-1} = \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_{2n-1}}{2} + p\omega + q\omega',$$

d'où les 4 polygones annoncés. On n'obtient jamais de polygones circonscrits correspondant aux semi-quadriques, car de tels polygones doivent correspondre à un nombre arbitraire de surfaces R et à un nombre pair de semi-quadriques.

Si le nombre de semi-quadriques est *pair*, cette fois on ne peut *jamais* obtenir de polygones tangents aux coniques $q_1, \dots, q_{2n}$, mais *pourvu que la somme* $d_1 + d_3 + \dots + d_{n-1}$ *soit égale à* $d_2 + d_4 + \dots + d_{2n}$ (*à un multiple près des périodes*) on peut obtenir ∞^1 polygones circonscrits aux coniques correspondantes dans le plan $S_2S_3S_4$ où ∞^1 chaînes formées de génératrices des semi-quadriques dans l'ordre annoncé, avec faculté d'ailleurs de permuter entre elles les semi-quadriques de rang pair, et entre elles celles de rang impair. En effet il n'y a qu'à écrire

$$\begin{array}{ll} u_1 + u_2 = d_1, & u_2 + u_3 = d_2, \\ u_3 + u_4 = d_3, & u_4 + u_5 = d_4, \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ u_{2n-1} + u_{2n} = d_{2n-1}, & u_{2n} + u_1 = d_{2n}. \end{array}$$

Et alors le procédé déjà employé, qui consiste à remplacer dans le circuit $A_1 A_2 \ldots A_{2n}$ tous les points de rang pair par leur homologique relativement à S_1, donne un nouveau circuit $A_1 \bar{A}_2 A_3 \bar{A}_4 \ldots A_{2n-1} \bar{A}_{2n}$; le nouveau circuit est formé de génératrices de surfaces réglées R_1, R_2, ..., R_{2n}; il en existe ∞^1 relatifs à ces surfaces; mais les polygones *circonscrits* aux coniques $q_1, q_2, \ldots, q_{2n}$ ne sont pas changés. Les nouveaux circuits de l'espace correspondent aux équations

$$u_1 - u_2 = d_1, \qquad u_2 - u_3 = -d_2, \qquad u_3 - u_4 = d_3, \qquad \ldots, \qquad u_{2n} - u_1 = -d_{2n}.$$

On peut aussi remarquer qu'un nombre *quelconque* de surfaces *orientées* $R_1, R_2, \ldots, R_n$ jointes aux mêmes surfaces, orientées en sens inverse $\bar{R}_1, \bar{R}_2, \ldots, \bar{R}_n$ donne toujours des polygones circonscrits à l'ensemble des coniques $q_1, q_2, \ldots, q_n$ où chacune est répétée deux fois.

Si l'on adopte l'ordre $R_1 \bar{R}_1 R_2 \bar{R}_2 \ldots R_n \bar{R}_n$, on obtient une solution banale, car partant de A_1 choisi au hasard sur B, on en part avec la génératrice $\overrightarrow{A_1 A_2}$, de R_1 et l'on revient immédiatement en A_1 avec $\overrightarrow{A_2 A_1}$ de $\bar{R}_1$, mais un ordre tel que $R_1 R_2 \ldots R_n \bar{R}_1 \bar{R}_2 \ldots \bar{R}_n$, donne un résultat tout de même intéressant : en particulier pour $n = 2$, l'ordre $R_1 R_2 \bar{R}_1 \bar{R}_2$ conduit au théorème sur le quadrangle dont M. Lebesgue s'est servi comme base de sa théorie géométrique.

La quadrique Q', que nous avons obtenue, nous donne un résultat intéressant : elle donne lieu à ∞^1 quadrilatères gauches inscrits dans B et dont les côtés sont alternativement génératrices du premier système et du second ; 2ω et $2\omega'$ étant les périodes de la fonction elliptique employée, chaque quadrilatère $A_1 A_2 A_3 A_4$ correspond par exemple aux équations

$$u_1 - u_2 = \frac{\omega}{2}, \qquad u_3 - u_4 = \frac{\omega}{2},$$
$$u_2 - u_3 = -\frac{\omega}{2}, \qquad u_4 - u_1 = -\frac{\omega}{2},$$

Q'_1 correspondrait alors à $\frac{\omega}{2} + \omega'$; Q'' et Q''_1 à $\frac{\omega'}{2}$ et $\frac{\omega'}{2} + \omega$ puis Q''' et Q'''_1 à $\frac{\omega + \omega'}{2}$ et $\frac{\omega - \omega'}{2}$. Le quadrilatère $A_1 A_2 A_3 \bar{A}_4$ correspondrait aux équations

$$u_1 - u_2 = \frac{\omega}{2}, \qquad u_3 - u_4 = \frac{\omega}{2},$$

$$u_2 - u_3 = \frac{\omega}{2}, \qquad u_4 - u_1 = \frac{\omega}{2},$$

ce qui prouve que l'on a affaire à la succession $(R'R'R'R')$ et non à une succession $(R'R'\overline{R}'R)$.

La partie délicate de la théorie est la suivante : en circulant progressivement sur le polygone circonscrit, chaque fois qu'on arrive à un sommet nouveau, comment discerner, sur les deux tangentes à mener à la conique correspondante, celle qui doit être choisie? On voit que la représentation par la biquadratique B permet de résoudre aisément cette difficulté.

Nous avons parlé des quadriques Q_1, Q_2 conjuguées harmoniques par rapport à Q' et Q'_1, s'échangeant entre elles par les involutions biaxiales (Δ, Δ') ou $(\Delta, \overline{\Delta}')$ ou (Δ_1, Δ'_1) ou (Δ_1, Δ'_1) : considérons les équations

$$u_1 - u_2 = a, \qquad u_3 - u_4 = a,$$

$$u_2 - u_3 = a - \omega, \qquad u_4 - u_1 = a - \omega.$$

Elles fournissent un quadrilatère gauche $A_1A_2A_3A_4$ dont les côtés opposés A_1A_2 et A_3A_4 appartiennent à la semi-quadrique a, les autres côtés A_2A_3 et A_4A_1 à la semi-quadrique $(a - \omega)$, les diagonales A_1A_3 et A_2A_4 appartenant à la surface dégénérée $R[u_1 - u_3 = \omega]$; en perspective le quadrilatère $a_1a_2a_3a_4$ a ses côtés respectivement tangents aux coniques q_1 et q_2 alternativement, les diagonales se coupant au point S_2. Le quadrilatère gauche $A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4$ correspond aux équations

$$u_1 - u_2 = a, \qquad u_3 - u_4 = a,$$

$$u_2 - u_3 = \omega - a, \qquad u_4 - u_1 = \omega - a,$$

de sorte que l'on a une succession de surfaces $(R_1R_2R_1R_2)$ et non $(R_1R_2\overline{R}_1\overline{R}_2)$.

Il est remarquable que les trois surfaces dégénérées R, de degré 4, ne peuvent être orientées, car les équations $u_1 - u_2 = \omega$ ou ω' ou $\omega + \omega'$ sont respectivement équivalentes à celles que l'on obtient en changeant le second membre de signe : ou plutôt il est indifférent d'orienter chaque génératrice dans un sens arbitraire, de sorte qu'en réalité la surface complète se compose de deux surfaces identiques, à l'orientation près, ce qui fournit alors le degré 8, avec B pour ligne double.

Signalons encore que nous avons obtenu un nouveau criterium de l'existence des quadrilatères de Poncelet inscrits dans σ et circonscrits à q' : en l'un des points m_1, m_2, m_3, m_4 communs à σ et q', par exemple en m_1, considérons la tangente $m_1 t$ à σ et le rayon $m_1 m_2$ comme premier couple d'une involution, $m_1 m_3$ et $m_1 m_4$ comme le second couple : la tangente à q' en m_1 est l'un des deux rayons doubles ; cela résulte de ce que nous avons dit sur l'échange involutif produit par l'involution biaxiale (Δ, Δ'), les cônes S_1, S_2 s'échangeant entre eux, ainsi que les cônes S_3 et S_4 ; dans l'énoncé que nous avons fourni, on supposera que les côtés du triangle conjugué $S_2 S_3 S_4$ sont respectivement sur $m_1 m_2$, $m_1 m_3$, $m_1 m_4$ et nous savons que l'un des criteriums donnés par Halphen est que les tangentes à q' en m_1 et m_2 concourent sur σ (ainsi que les tangentes à q' en m_3 et m_4) (¹). Les tangentes en m_1 aux coniques q_1, q_2 qui doivent admettre ∞^1 quadrilatères circonscrits (q_1, q_2, q_1, q_2) sont un couple de l'involution signalée.

Il résulte encore de ce qui précède qu'une surface R quelconque $(u_1 - u_2 = \varepsilon a)$ et une quadrique quelconque $Q(u_1 + u_2 = \varepsilon' b)$ se coupent suivant B qui compte pour huit unités et suivant huit génératrices obtenues en résolvant

$$u_1 + u_2 = \varepsilon' b,$$
$$u_1 - u_2 = a.$$

Si Q est l'un des cônes S_i, ces huit génératrices se réduisent à quatre génératrices de contact.

7. Traduction analytique. — Définissons B par les équations

$$(\mathrm{B}) \qquad \begin{cases} a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0. \end{cases}$$

(¹) Cette propriété se généralise ainsi pour le couple q_1, q_2 : les tangentes à q_1 en m_1 et à q_2 en m_2 concourent sur σ, ce qui en vertu de l'homologie S_2 entraîne aussitôt que les tangentes à q_1 en m_3 et à q_2 en m_4 concourent aussi sur σ : si q_1 et q_2 se confondent toutes deux entre elles avec q' on retrouve le criterium d'Halphen.

qui mettent en évidence les racines de l'équation en λ. L'équation de σ est, dans le plan $S_2S_3S_4$

$$(\sigma) \qquad (a_2 - a_1)x_2^2 + (a_3 - a_1)x_3^2 + (a_4 - a_1)x_4^2 = 0.$$

La quadrique Q_1 ayant pour équation

$$(Q_1) \qquad (a_1 - h)x_1^2 + (a_2 - h)x_2^2 + (a_3 - h)x_3^2 + (a_4 - h)x_4^2 = 0$$

donne une section q_1 par le plan $S_2S_3S_4$ d'équation

$$(q_1) \qquad (a_2 - h)x_2^2 + (a_3 - h)x_3^2 + (a_4 - h)x_4^2 = 0.$$

La condition pour qu'il existe une infinité de quadrilatères de Poncelet inscrits dans σ et circonscrits à q_1 est que l'équation en λ relative au faisceau $\sigma - \lambda q_1 = 0$ ait une racine égale à la somme des deux autres; écrivons *par exemple*

$$(1) \qquad \frac{a_3 - a_1}{a_3 - h} + \frac{a_4 - a_1}{a_4 - h} = \frac{a_2 - a_1}{a_2 - h}.$$

Nous retrouvons, comme vérification, l'équation (6) du paragraphe 4. Nous avons vu qu'il est commode de supposer que les deux quadriques mises plus haut en évidence pour définir B sont deux quadriques Q_1 et Q_2 conjuguées par rapport à Q'_1 et Q', autrement dit que l'équation (1) a ses racines égales et de signe contraire, ce qui donne

$$a_1 a_2 = a_3 a_4.$$

Il est alors facile de mettre en évidence les quadrilatères gauches formés alternativement de génératrices de Q_1 et Q_2 et inscrits dans B. Nous pouvons prendre, avec un léger changement de notations qui ne restreint pas la généralité

$$(Q_1) \qquad m^2x^2 + \frac{y^2}{m^2} - p^2z^2 - \frac{1}{p^2} = 0,$$

$$(Q_2) \qquad x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0,$$

et nous cherchons la condition de rencontre des génératrices (de système convenablement choisi)

$$\left\{\begin{aligned} x - z &= \mu(1 - y),\\ x + z &= \frac{1}{\mu}(1 + y);\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} pmx - p^2z &= \lambda_1\left(1 - \frac{py}{m}\right),\\ pmx + p^2z &= \frac{1}{\lambda_1}\left(1 + \frac{py}{m}\right).\end{aligned}\right.$$

On trouve aisément la relation

$$4(p^2m^2-1)+(m^2-p^2)\left(\frac{1}{\mu}-\mu\right)\left(\frac{1}{\lambda_1}-\lambda_1\right)=0,$$

ce qui prouve que, les deux génératrices μ et λ_1 se rencontrant, on a le quadrilatère

$$\mu,\quad \lambda_1,\quad \frac{-1}{\mu},\quad \frac{-1}{\lambda_1}.$$

On peut d'ailleurs changer simultanément le système sur Q_1 et Q_2, mais on ne peut changer le système sur une seule des deux quadriques. On peut d'ailleurs remarquer que la transformation involutive biaxiale qui échange Q_1 avec Q_2 transforme une *semi-quadrique* Q_1 en une *semi-quadrique* Q_2 : les quadrilatères gauches sont formés de génératrices appartenant à Q_1 par exemple et $\overline{Q}_2$, ou bien à $\overline{Q}_1$ et Q_2.

Nous pouvons, pour trouver les homographies qui échangent B avec elle-même, prendre encore pour Q_1 et Q_2 deux quadriques qui s'échangent par l'involution (Δ, Δ') et écrire leurs équations

$$(Q_1)\qquad A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2+D^2t^2=0,$$
$$(Q_2)\qquad A_1^2x^2+B_1^2y^2+C_1^2z^2+D_1^2t^2=0,$$

ce qui est une forme à peine différente de celle qui a été employée avant, en supposant

$$(2)\qquad \frac{A_1B_1}{AB}=\frac{C_1D_1}{CD}.$$

L'homographie

$$(3)\qquad x=\varepsilon\frac{B^2}{A_1^2}Y,\qquad y=\varepsilon'\frac{A^2}{B_1^2}X,\qquad z=\varepsilon''\frac{D^2}{C_1^2}T,\qquad t=\frac{C^2}{D_1^2}Z,$$

appliquée à Q_2 la change évidemment en Q_1 : appliquée à Q_1, on retrouve Q_2, en tenant compte de la relation (2). En prenant toutes les combinaisons de signe pour ε, ε', ε'' on trouve huit homographies formant l'*ensemble* étudié plus haut dont chacune échange S_1 avec S_2 et S_3 avec S_4.

Si l'on cherche les points doubles de l'homographie on trouve

$$\frac{\varepsilon B^2}{A_1^2}\frac{y}{x}=\frac{\varepsilon' A^2}{B_1^2}\frac{x}{y}=\frac{\varepsilon'' D^2}{C_1^2}\frac{t}{z}=\frac{C^2}{D_1^2}\frac{z}{t}.$$

Si l'on suppose x, y, z, t tous différents de zéro, on trouve

$$\frac{y}{x}=\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}\,\frac{AA_1}{BB_1},\qquad \frac{t}{z}=\sqrt{\varepsilon''}\,\frac{CC_1}{DD_1},\qquad \varepsilon\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}=\varepsilon'\sqrt{\varepsilon''}.$$

Ceci entraine par élévation au carré $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''=1$: on a donc *quatre* combinaisons seulement donnant une homographie biaxiale : les axes sont

$$(\Delta)\qquad \frac{y}{x}=\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}\,\frac{AA_1}{BB_1},\qquad \frac{t}{z}=\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}\,\frac{AA_1}{BB_1},$$

$$(\Delta')\qquad \frac{y}{x}=-\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}\,\frac{AA_1}{BB_1},\qquad \frac{t}{z}=-\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}\,\frac{AA_1}{BB_1},$$

les quatre combinaisons pour ε et ε' fournissent les quatre couples trouvés géométriquement.

En prenant au contraire $\varepsilon''=-\varepsilon\varepsilon'$ on a simplement quatre points invariants : d'abord les deux points

$$z=t=0,\qquad \frac{y}{x}=\pm\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}\,\frac{AA_1}{BB_1},$$

puis

$$x=y=0,\qquad \frac{t}{z}=\pm\sqrt{-\varepsilon\varepsilon'}\,\frac{AA_1}{BB_1}.$$

D'ailleurs en résolvant les équations (3) en X, Y, Z, T de façon à avoir l'homographie inverse, on a

$$(3')\qquad X=\varepsilon'\frac{B_1^2}{A^2}y,\qquad Y=\varepsilon\frac{A_1^2}{B^2}x,\qquad Z=\frac{D_1^2}{C^2}t,\qquad T=\varepsilon''\frac{C_1^2}{D^2}z.$$

En exprimant que les deux opérations inverses (3) et (3') coïncident on a

$$\frac{\varepsilon A^2B^2}{\varepsilon' A_1^2B_1^2}=\frac{\varepsilon' A^2B^2}{\varepsilon A_1^2B_1^2}=\frac{\varepsilon'' C^2D^2}{C_1^2D_1^2}=\frac{C^2D^2}{\varepsilon'' C_1^2D_1^2}$$

et ceci se réduit à la relation $\varepsilon\varepsilon'=\varepsilon''$ déjà trouvée ce qui est une vérification.

8. Cas spécial $I=-1$ ou $I=-j$. — Considérons par exemple la biquadratique d'équations

$$x^2-y^2=1,\qquad x^2-y^2=z^2.$$

Cette biquadratique coupe le plan $z = 0$ aux quatre points

$$\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \beta\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \gamma\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), \quad \delta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right).$$

La transformation homographique

$$x_1 = y, \quad y = -x, \quad z_1 = iz, \quad t_1 = t$$

donne pour les points α, β, γ, δ les transformés respectifs α_1, β_1, γ_1, δ_1 qui ne sont autres que δ, α, β, γ. Si les points étaient quelconques les deux birapports $(\alpha\gamma\beta\delta)$ et $(\delta\beta\alpha\gamma)$ sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$ seraient inverses et inégaux, mais ici, comme ils sont égaux à -1, ils sont à la fois inverses et égaux. Cette transformation homographique change évidemment B en elle-même et elle n'est pas comprise, d'après ce qui vient d'être expliqué sur le birapport $\alpha\gamma\beta\delta$, dans les 32 transformations du cas général. Donc cette transformation nouvelle, composée avec les 32 du cas général, donne ici les 64 transformations possédées par cette biquadratique spéciale.

On traiterait de même le cas où $\mathrm{I} = -j$, qui se rapporte par exemple à la biquadratique d'équations

$$y^2 = 4(x^3 - 1), \quad z = 6x^2,$$

biquadratique qui est réelle : on raisonne sur la conique $z = 6x^2$ et sur les points $x = 1, j, j^2, \infty$ de cette conique pour trouver les 96 transformations totales : il suffit de trouver *deux* transformations non comprises dans le cas général et distinctes. La multiplication complexe des fonctions elliptiques nous donne aussitôt le résultat : on peut poser soit

$$x = jX, \quad y = Y, \quad z = j^2 Z,$$

soit

$$x = j^2 X, \quad y = Y, \quad z = jZ,$$

et composer ces transformations avec les 32 homographies du cas général.