JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

RENÉ LAGRANGE

Sur les fonctions de Legendre de première espèce et certaines fonctions associées

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 6 (1927), p. 165-227.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1927_9_6__165_0>

Sur les fonctions de Legendre de première espèce et certaines fonctions associées;

PAR M. RENÉ LAGRANGE (LILLE).

INTRODUCTION.

L'objet de ce travail est l'étude des fonctions de Legendre et de certaines fonctions associées à partir d'un mode d'introduction très simple, et l'établissement de certaines propriétés dont quelques-unes me paraissent nouvelles. Ce mode de définition conduit également, comme on le verra, aux coefficients de Bessel.

Voici à quel genre de définition appartient la méthode utilisée. Soit $\varphi(t; a_1, a_2, \ldots, a_r)$ une fonction de la variable indépendante t et des paramètres essentiels $a_1, a_2, \ldots, a_r$, et qui soit de forme invariante par rapport au groupe de transformations

$$t' = f(t; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s). \tag{1}$$

Autrement dit, on a identiquement

$$\varphi(t'; a'_1, a'_2, \ldots, a'_r) \equiv \varphi(t; a_1, a_2, \ldots, a_r), \tag{2}$$

compte tenu de (1) et d'équations de la forme

$$a'_i = f_i(a_1, a_2, \ldots, a_r; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{3}$$

Supposons que les paramètres a_i admettent, relativement au groupe (3), des invariants $x_1(a_1, a_2, \ldots, a_r)$, $x_2(a_1, a_2, \ldots, a_r)$, ..., $x_n(a_1, a_2, \ldots, a_r)$, et soit $R(t; a_1, a_2, \ldots, a_r)$ un invariant simple supplémentaire[1], fonction de t. Ceci posé, si $\varphi(t; a_1, a_2, \ldots, a_r)$ admet un développement suivant les puissances entières de

$$R(t; a_1, a_2, \ldots, a_r),$$

les coefficients de ce développement seront des fonctions de x_1, $x_2 \ldots, x_n$, et il est clair que les propriétés de la fonction φ permettront d'étudier celles de ces coefficients.

Ces considérations sont appliquées, dans ce travail, au groupe projectif à une variable, et aux fonctions

$$\varphi(t; a, b, c, a', b', c') = \varphi\left(\frac{a' t^2 + 2b' t + c'}{at^2 + 2bt + c}\right).$$

En particulier, la puissance $m^{\text{ième}}$ de ce rapport de deux trinomes en t conduit à la fonction de Legendre $P_m(z)$ et à ses dérivées.

Ce Mémoire comprend quatre Chapitres. Dans le premier Chapitre, je montre comment la définition de Legendre des polynomes $P_m(z)$ conduit à la représentation des fonctions de Legendre par une intégrale curviligne de forme très générale, invariante par transformation homographique de la variable d'intégration. On peut en déduire le développement de $P_m(z)$ suivant les puissances entières de la fraction $\frac{z-1}{z-z_0}$.

Le Chapitre II est consacré au mode de définition des fonctions de Legendre, cité plus haut. La fonction $J_m^n(z)$ ainsi introduite s'exprime à l'aide de la dérivée $|n|^{\text{ième}}$ de $P_m(z)$; elle vérifie une équation différentielle un peu plus générale que celle de Legendre. J'établis également certaines relations de récurrence entre plusieurs de ces coefficients.

Dans le Chapitre suivant, la fonction φ du rapport est supposée holomorphe au point zéro du plan de son argument. Les cas où φ est la la fonction exponentielle ou une puissance d'une fonction linéaire sont particulièrement simples, et conduisent à des relations intéressantes.

Enfin, dans le dernier Chapitre, les questions des deux Chapitres

---

(1) Il est clair que φ est fonction de R, x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

précédents sont reprises en supposant que l'un des trinomes du rapport est un carré parfait.

Les résultats obtenus, dont beaucoup sont connus, ce qui n'a rien d'étonnant étant donné les nombreuses et savantes études auxquelles a donné lieu ce sujet, semblent montrer cependant que l'idée directrice de ce travail peut être assez féconde.

CHAPITRE I.

SUR LA REPRÉSENTATION DES FONCTIONS DE LEGENDRE DE PREMIÈRE ESPÈCE PAR UNE INTÉGRALE CURVILIGNE.

1. Nous partirons de la définition courante des polynomes de Legendre. Lorsque $|h|$ est suffisamment petit la fonction $\frac{1}{\sqrt{1-2zh+h^2}}$ est développable en série de Maclaurin :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zh+h^2}} = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(z)\, h^m;$$

les coefficients, fonctions de z, sont les polynomes de Legendre lorsqu'on prend pour détermination du premier membre celle qui est égale à 1 pour $h = 0$, de sorte que $P_0(z) = 1$.

La représentation de ces polynomes par l'intégrale de Schläfli [1] se déduit de l'identification de $\frac{1}{\sqrt{1-2zh+h^2}}$ avec un résidu. Considérons, en effet, la fonction $\frac{1}{At^2+2Bt+C}$, où A, B, C sont indépendants de t. Elle admet deux pôles; soit l'un d'eux

$$\frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{A},$$

où le radical désigne l'une des deux déterminations possibles; le

[1] SCHLÄFLI, *Ueber die zwei Heine'schen Kugelfunctionen.*

résidu relatif à ce pôle est

$$\frac{1}{2\sqrt{B^2-AC}},$$

de sorte que si A, B, C sont des fonctions de h et de z, et si la détermination est choisie de façon que l'on ait identiquement

$$\sqrt{B^2-AC}=\sqrt{1-2zh+h^2}, \tag{1}$$

nous aurons

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zh+h^2}}=\frac{1}{\pi i}\int_{(C)}\frac{dt}{At^2+2Bt+C},$$

le contour (C) entourant le pôle en question, et non l'autre, et le parcours s'effectuant dans le sens direct.

Nous sommes ainsi conduits à développer l'intégrale suivant les puissances entières de h, et pour cela il est tout indiqué de prendre pour le trinome au dénominateur une fonction linéaire de h. Posons donc

$$\begin{aligned}A&=a-a'h,\\ B&=b-b'h,\\ C&=c-c'h,\end{aligned}$$

a, b, c, a', b', c' ne dépendant que de z. L'identité (1) est alors équivalente aux identités

$$\left\{\begin{aligned}&b^2-ac=b'^2-a'c'=1,\\ &ac'+ca'-2bb'=-2z;\end{aligned}\right. \tag{2}$$

si $|h|$ est suffisamment petit, on peut donc écrire le développement en série

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zh+h^2}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{h^m}{\pi i}\int_{(C)}\frac{(a't^2+2b't+c')^m}{(at^2+2bt+c)^{m+1}}\,dt,$$

le contour (C) étant assujetti à entourer le pôle

$$\tau_1=\frac{-b+1}{a},$$

et non

$$\tau_2=\frac{-b-1}{a}.$$

L'identification avec le développement qui définit les polynomes de Legendre donne de ces polynomes l'expression

$$(3) \qquad P_m(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{(C)} \frac{(a't^2+2b't+c')^m}{(at^2+2bt+c)^{m+1}}\,dt.$$

2. Les six paramètres a, b, c, a', b', c' sont assujettis à vérifier les seules équations (2); ils dépendent donc de trois fonctions arbitraires de z; effectivement, b^2-ac, $b'^2-a'c'$, $ac'+ca'-2bb'$ sont trois invariants essentiels des deux formes

$$\begin{aligned} P(x,y) &= ax^2+2bxy+cy^2,\\ Q(x,y) &= a'x^2+2b'xy+c'y^2, \end{aligned}$$

relativement au groupe linéaire

$$\begin{pmatrix} x & \alpha x+\beta y \\ y & \gamma x+\delta y \end{pmatrix} \qquad \alpha\delta-\beta\gamma=1.$$

Les deux premiers de ces invariants ont la valeur particulière 1, mais leur donner des valeurs différentes non nulles reviendrait à multiplier chaque forme par une constante, ce qui n'augmenterait pas la généralité de la question. Quant à l'unique invariant utile z, sa signification est élémentaire : $\frac{z-1}{z+1}$ est le rapport anharmonique des quatre zéros

$$\sigma_1=\frac{-b'+1}{a'}, \qquad \sigma_2=\frac{b'-1}{a'}, \qquad \tau_1=\frac{-b+1}{a}, \qquad \tau_2=\frac{-b-1}{a};$$

d'une manière précise, on a

$$R(\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)=\frac{z-1}{z+1}.$$

L'intégrale de Schläfli s'obtient avec les zéros

$$\sigma_1=1, \qquad \sigma_2=-1, \qquad \tau_1=z, \qquad \tau_2=\infty,$$

pour lesquels on a

$$a'=1, \qquad b'=0, \qquad c'=-1, \qquad a=0, \qquad b=1, \qquad c=-2z,$$

et, par suite,

$$P_m(z) = \frac{1}{2^{m+1}\pi i} \int_{(C)} \frac{(t^2-1)^m}{(t-z)^{m+1}}\, dt,$$

(C) entourant le pôle $t = z$.

Réciproquement on passe de l'expression de Schläfli à l'intégrale générale (3) par la transformation homographique générale de la variable d'intégration t.

3. Pour que l'intégrale (3) représente, quel que soit m, une fonction de Legendre de première espèce, il faut et il suffit que (C) soit un contour fermé, entourant les deux zéros τ_1 et σ_1, et non les deux autres, et, en outre, ne traversant pas l'arc de cercle $\tau_1 \sigma_2$ dont le prolongement passe par σ_1 (¹). Ce contour doit être également parcouru dans le sens direct.

Il resterait à spécifier la détermination choisie pour la fraction $\left(\frac{a't^2 + 2b't + c'}{at^2 + 2bt + c}\right)^m$, mais l'essentiel est évidemment non pas de prendre une détermination particulière, mais de ne pas en changer dans le cours d'une même question; les fonctions correspondant aux diverses déterminations possibles sont les multiples de $P_m(z)$ par les puissances entières de $e^{2m\pi i}$.

Ces remarques élémentaires faites, considérons l'une quelconque des fonctions $P_m(z)$ définies par (3); les points σ_1 et τ_1 jouent le même rôle, et sont intérieurs au contour d'intégration (C). Permutons alors les coefficients a, b, c avec a', b', c'; z est invariant, et la permutation des zéros τ_1, τ_2 respectivement avec σ_1, σ_2 n'introduit aucune discontinuité de situation par rapport à (C). On a donc encore

$$P_m(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{(C)} \frac{(at^2 + 2bt + c)^m}{(a't^2 + 2b't + c')^{m+1}}\, dt;$$

or ceci s'écrit

$$P_m(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{(C)} \frac{(a't^2 + 2b't + c')^{-m-1}}{(at^2 + 2bt + c)^{-m}}\, dt,$$

(¹) La transformation homographique de t qui transforme (3) en l'intégrale de Schläfli transforme cet arc de cercle en la coupure adoptée pour cette dernière intégrale, savoir l'axe des t réels négatifs.

d'où résulte l'identité fondamentale bien connue

$$P_m(z) = P_{-m-1}(z).$$

La marche suivie fournit donc la raison profonde de cette propriété essentielle des fonctions de Legendre de première espèce.

4. Une représentation classique des fonctions $P_m(z)$ est la représentation par l'intégrale de Laplace. Voici une méthode très simple pour la déduire de l'intégrale générale (3). Pour que (3) prenne la forme trigonométrique, il est tout indiqué de choisir pour contour d'intégration (C) le cercle trigonométrique. τ_1 et σ_1 seront seuls intérieurs à ce cercle si l'on prend

$$\tau_1 = 0, \qquad \tau_2 = \infty, \qquad \sigma_1\sigma_2 = 1, \qquad |\sigma_1| < 1.$$

Ces conditions, jointes à (2), donnent immédiatement les valeurs suivantes des six coefficients :

$$a = c = 0, \qquad b = 1, \qquad a' = c' = \sqrt{z^2-1}, \qquad b' = z,$$

$\sqrt{z^2-1}$ étant l'une quelconque des deux déterminations possibles. Il faut, en outre,

$$\left|\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right| = |\sigma_1^2| = \left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1,$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{R}(z) > 0.$$

Dans ces conditions, il vient

$$P_m(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)}\left[\frac{(t^2+1)\sqrt{z^2-1}+2zt}{2t}\right]^m \frac{dt}{t},$$

et le changement de variable $t = e^{i\varphi}$ fournit immédiatement la représentation voulue

$$P_m(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^m\, d\varphi.$$

5. On est conduit encore aisément à l'intégrale de Laplace en prenant

$$\tau_1 = -i, \qquad \tau_2 = i, \qquad \sigma_1\sigma_2 = 1, \qquad \mathcal{R}(i\sigma_1) > 0.$$

On peut alors prendre pour (C) l'axe réel parcouru de $+\infty$ à $-\infty$, fermé par le demi-cercle infini et inférieur, de centre O. L'intégrale le long de ce demi-cercle est infiniment petite. D'autre part, les équations (3) et les expressions des zéros donnent

$$a = c = i, \qquad b = 0, \qquad a' = c' = iz, \qquad b' = i\sqrt{z^2 - 1},$$

$\sqrt{z^2 - 1}$ désignant encore l'une quelconque des deux déterminations. Il vient ainsi

$$\begin{aligned} P_m(z) &= \frac{1}{\pi i}\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\left[iz(t^2+1) + 2it\sqrt{z^2-1}\right]^m}{[i(1+t^2)]^{m+1}}\, dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(z + \frac{2t}{1+t^2}\sqrt{z^2-1}\right)^m \frac{dt}{1+t^2}, \end{aligned}$$

qui prend la forme de Laplace par le changement de variable

$$t = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

D'ailleurs on a

$$\sigma_1 = \frac{-b' + 1}{a'} = \frac{-i\sqrt{z^2-1} + 1}{iz},$$

de sorte que la condition $\mathcal{R}(i\sigma_1) > 0$ s'écrit

$$\mathcal{R}\left(\frac{1 - i\sqrt{z^2-1}}{z}\right) > 0,$$

dont l'équivalence avec $\mathcal{R}(z) > 0$ est aisée à vérifier (¹).

Développement de $P_m(z)$ en série des puissances entières d'une fonction homographique de z.

6. En choisissant convenablement les zéros σ_1, σ_2, τ_1, τ_2, l'intégrale (3) peut être développée en série des puissances entières d'une fonction homographique de la variable z, les coefficients étant des polynomes hypergéométriques d'un même argument.

(¹) $\frac{1}{z} - i\sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}$ et $\frac{1}{z} + i\sqrt{1 - \frac{1}{z^2}}$, dont le produit est égal à 1, ont leurs parties réelles de même signe. Ce signe est donc celui de la partie réelle de leur somme $\frac{1}{z}$, donc de z.

Supposons que, de ces quatre zéros, seul σ_1 dépende de z; il résulte de

$$R(\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2) = \frac{z-1}{z+1} \tag{4}$$

qu'il en est une fonction homographique. Posons

$$\sigma_1 = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1);$$

l'identification, par rapport à z, des deux membres de (4), donne

$$\begin{gathered}\alpha + \beta = \tau_1(\gamma + \delta),\\ \alpha - \beta = \tau_2(\gamma - \delta),\\ (\alpha - \gamma\tau_1)(\sigma_2 - \tau_2) = (\alpha - \gamma\tau_2)(\sigma_2 - \tau_1),\end{gathered}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta},\\ \tau_2 &= \frac{\alpha - \beta}{\gamma - \delta},\\ \sigma_2 &= \frac{\alpha}{\gamma}.\end{aligned}$$

Les coefficients a et a' sont donnés par

$$\begin{aligned}\frac{2}{a'} &= \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{-1}{\gamma(\gamma z + \delta)},\\ \frac{2}{a} &= \tau_1 - \tau_2 = \frac{-2}{\gamma^2 - \delta^2},\end{aligned}$$

de sorte que, en posant

$$\frac{\delta}{\gamma} = -z_0,$$

il vient

$$\begin{aligned}a &= -\gamma^2(1 - z_0^2),\\ a' &= -2\gamma^2(z - z_0),\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}P_m(z) = \frac{1}{\pi i}\left[\frac{2(z - z_0)}{1 - z_0^2}\right]^m \frac{-1}{\gamma^2 - \delta^2}\qquad\qquad\\ \times \int_{(C)} (t - \sigma_1)^m (t - \sigma_2)^m (t - \tau_1)^{-m-1} (t - \tau_2)^{-m-1}\, dt.\end{aligned} \tag{5}$$

Remplaçons $t - \sigma_1$ par l'expression $(t - \tau_1) + (\tau_1 - \sigma_1)$, et supposons σ_1 suffisamment rapproché de τ_1 pour que (C) puisse être choisi de façon que l'on ait, le long de ce contour,

$$|t - \tau_1| > |\sigma_1 - \tau_1|;$$

(C) devant entourer τ_1 et σ_1 seuls, sans traverser la coupure $\tau_2\sigma_2$, il faut pour cela, et il suffit, que l'on ait simultanément

$$|\sigma_1 - \tau_1| < |\sigma_2 - \tau_1|,$$
$$|\sigma_1 - \tau_1| < |\tau_2 - \tau_1|.$$

Ces inégalités s'expriment à l'aide de z et z_0 seuls; on a en effet

$$\sigma_1 - \tau_1 = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} - \frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} = \frac{z - 1}{(\gamma + \delta)(\gamma z + \delta)} = \frac{z - 1}{z - z_0}\,\frac{1}{\gamma(\gamma + \delta)},$$

d'où l'on tire encore, en remarquant que σ_2 et τ_2 sont les valeurs que prend l'expression de σ_1 pour $z = \infty$ et $z = -1$,

$$\sigma_2 - \tau_1 = \frac{1}{\gamma(\gamma + \delta)},$$
$$\tau_2 - \tau_1 = \frac{2}{1 + z_0}\,\frac{1}{\gamma(\gamma + \delta)}.$$

Les deux inégalités en question s'écrivent donc

$$(6) \qquad \left|\frac{z - 1}{z - z_0}\right| < 1 \quad \text{et} \quad \left|\frac{2}{1 + z_0}\right|.$$

Cette hypothèse permet de développer, pour tous les points t du contour (C), $(t - \sigma_1)^m$ suivant les puissances entières et croissantes de $\sigma_1 - \tau_1$; (5) fournit ainsi le développement en série [1]

$$(7) \qquad P_m(z) = \left(\frac{2}{1 + z_0}\right)^m \left(\frac{z - z_0}{1 - z_0}\right)^m \frac{-1}{\gamma^2 - \delta^2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} A_k \left(\frac{z - 1}{z - z_0}\right)^k,$$

où l'on a posé

$$A_k = \left[\frac{-1}{\gamma(\gamma + \delta)}\right]^k \frac{1}{\pi i} \int_{(C)} (t - \tau_1)^{-k-1} (t - \sigma_2)^m (t - \tau_2)^{-m-1}\, dt,$$

---

[1] $\binom{m}{k}$ désigne, suivant une notion courante, le coefficient $\dfrac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}$ du développement du binome.

et le contour (C) étant assujetti à entourer le point τ_1, et non σ_2 et τ_2. Pour calculer cette intégrale, effectuons le changement de variable

$$t - \tau_1 = \frac{-\xi}{\gamma(\gamma+\delta)};$$

il vient alors

$$t - \sigma_2 = t - \tau_1 - (\sigma_2 - \tau_1) = -\frac{1+\xi}{\gamma(\gamma+\delta)},$$

$$t - \tau_2 = t - \tau_1 - (\tau_2 - \tau_1) = -\frac{2}{1+z_0}\,\frac{1 + \frac{1+z_0}{2}\xi}{\gamma(\gamma+\delta)},$$

et, par suite,

$$\left(\frac{2}{1+z_0}\right)^m \frac{-A_k}{\gamma^2-\delta^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\Gamma)} (1+\xi)^m \left(1 + \frac{1+z_0}{2}\xi\right)^{-m-1} \frac{d\xi}{\xi^{k+1}},$$

le contour (Γ) entourant l'origine $\xi = 0$ et non $\xi = -1$ ni

$$\xi = -\frac{2}{1+z_0}.$$

Cette dernière intégrale s'exprime simplement par un polynome hypergéométrique; c'est en effet le coefficient de ξ^k dans le développement, suivant les puissances entières croissantes de ξ, de la fonction $(1+\xi)^m \left(1 + \frac{1+z_0}{2}\xi\right)^{-m-1}$; sa valeur est donc

$$\left(\frac{2}{1+z_0}\right)^m \frac{-A_k}{\gamma^2-\delta^2} = \sum_{h=0}^{k} \binom{-m-1}{h}\binom{m}{k-h}\left(\frac{1+z_0}{2}\right).$$

On peut écrire

$$\binom{m}{k-h} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}\cdot\frac{k(k-1)\ldots(k-h+1)}{(m-k+1)(m-k+2)\ldots(m-k+h)}$$

et, par suite,

$$\binom{-m-1}{h}\binom{m}{k-h} = \binom{m}{k}\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+h)}{h!}$$
$$\times\frac{-k(-k+1)\ldots(-k+h-1)}{(m-k+1)(m-k+2)\ldots(m-k+h)};$$

il en résulte

$$\left(\frac{2}{1+z_0}\right)^m \frac{-A_k}{\gamma^2-\delta^2}$$
$$=\binom{m}{k}\sum_{h=0}^{k}\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+k).(-k)(-k+1)\ldots(-k+h-1)}{h!(m-k+1)(m-k+2)\ldots(m-k+h)}\left(\frac{1+z_0}{2}\right)^h$$
$$=\binom{m}{k}F\left(m+1,-k,m-k+1;\frac{1+z_0}{2}\right),$$

et (7) s'écrit enfin

$$(8)\quad P_m(z)=\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^m\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}^2F\left(m+1,-k,m-k+1;\frac{1+z_0}{2}\right)\left(\frac{z-1}{z-z_0}\right)^k.$$

Ce développement est absolument convergent dans le domaine défini par les inégalités (6).

7. Le développement (8) est valable quel que soit z_0, pourvu qu'il diffère de 1. Il prend deux formes particulièrement simples, et d'ailleurs classiques, pour $z_0=-1$ et $z_0=\infty$.

Pour $z_0=-1$, le polynome hypergéométrique se réduit à son premier terme, égal à 1, de sorte que l'on a

$$(9)\qquad P_m(z)=\left(\frac{z+1}{2}\right)^m\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}^2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^k.$$

Au contraire, pour $z_0=\infty$, le polynome hypergéométrique est équivalent à son dernier terme

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}{(m-k+1)(m-k+2)\ldots m}(-1)^k\left(\frac{1+z_0}{2}\right)^k,$$

de sorte que le terme général de (8) est équivalent à

$$\frac{-m(-m+1)\ldots(-m+k-1)(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}{k!\,k!}\left(\frac{1-z}{2}\right)^k;$$

(8) s'identifie donc, dans ce cas, avec le développement classique

$$(10)\qquad P_m(z)=F\left(-m,m+1,1;\frac{1-z}{2}\right).$$

8. Le domaine défini par les inégalités (6), et dans lequel nous sommes assurés que (8) converge absolument, a une forme très simple, mais qui dépend de la position de z_0 dans le plan. Avant d'examiner cette forme, vérifions directement que les conditions (6) sont suffisantes pour que (8) converge.

En revenant à l'intégrale qui définit A_k, et prenant pour (Γ) un cercle ayant pour centre l'origine, on a, pour toutes les valeurs de k,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} (1+\xi)^m \left(1 + \frac{1+z_0}{2}\xi\right)^{-m-1} \frac{d\xi}{\xi^{k+1}} \right| < \frac{C}{|\xi|^k},$$

C étant une certaine constante avec

$$|\xi| < 1 \quad \text{et} \quad \left| \frac{2}{1+z_0} \right|.$$

Le terme général de la série (7) est donc inférieur, en valeur absolue, à

$$C \binom{m}{k} \left| \frac{1}{\xi} \frac{z-1}{z-z_0} \right|^k,$$

et cette série est absolument convergente si $\left| \frac{z-1}{z-z_0} \right| < |\xi|$, c'est-à-dire lorsque $\left| \frac{z-1}{z-z_0} \right|$ est inférieur au plus petit des deux nombres 1 et $\left| \frac{2}{1+z_0} \right|$.

Deux cas sont à distinguer. Si $\left| \frac{2}{1+z_0} \right| < 1$, c'est-à-dire si le point d'affixe z_0 est extérieur au cercle de centre -1 et de rayon 2, les inégalités (6) se réduisent à

$$\left| \frac{z-1}{z-z_0} \right| < \left| \frac{-1-1}{-1-z_0} \right|,$$

qui exprime que z est intérieur au cercle passant par le point -1, et conjugué par rapport aux deux points 1 et z_0. Ce cercle délimite, en général, le domaine de convergence de la série (8), puisqu'il passe par le point -1, qui est en général point critique algébrique de $P_m(z)$. Dans le cas du développement (10), ce cercle devient le cercle de centre 1 et de rayon 2.

Lorsque z_0 est intérieur au cercle de centre -1 et de rayon 2, les conditions (6) se réduisent à

$$\left|\frac{z-1}{z-z_0}\right| < 1;$$

le domaine correspondant est le demi-plan limité par la perpendiculaire au milieu du segment $(1, z_0)$, et contenant le point 1. C'est ainsi que la série au second membre de (9) est convergente à droite de l'axe imaginaire; ce demi-plan constitue d'ailleurs, pour cette série, tout son domaine de convergence.

Enfin, lorsque z_0 est sur le cercle de centre -1 et de rayon 2, le domaine de convergence de (8) est constitué par un demi-plan limité à un diamètre de ce cercle.

On voit ainsi que l'on peut développer $P_m(z)$ sous la forme (8) en tout point du plan autre que $z = -1$.

CHAPITRE II.

SUR UNE SUITE DE FONCTIONS ASSOCIÉES AUX FONCTIONS $P_m(z)$.

9. Reprenons la fonction de t $\left(\frac{a't^2+2b't+c'}{at^2+2bt+c}\right)^m$, dont on choisit l'une des déterminations, et que l'on peut rendre uniforme en coupant le plan de la variable t par l'arc de cercle $\sigma_1\tau_1$ dont le prolongement passe par σ_2, et l'arc de cercle $\sigma_2\tau_2$ dont le prolongement passe par σ_1. Il est entendu que les notations du Chapitre précédent sont conservées, ainsi que les équations (2). Nous poserons

$$P(t) \equiv a\,t^2 + 2b\,t + c,$$
$$Q(t) \equiv a'\,t^2 + 2b'\,t + c',$$

et nous désignerons par ξ la fonction de t

$$\xi = R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2),$$

invariante par rapport au groupe projectif

$$(11) \qquad t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

La fonction $\left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)^m$ est, en particulier, uniforme dans toute couronne entourant les deux points τ_1, σ_1 et laissant les deux autres zéros à l'extérieur. Si l'on peut trouver une couronne de cette nature, et telle que cette fonction y soit développable en une série de Laurent relative à $R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)$, les coefficients de cette série étant indépendants de t et invariants par rapport à (11) ne contiendront a, b, c, a', b', c' que dans des expressions invariantes; ce seront donc des fonctions de z.

Pour obtenir la condition de possibilité d'un tel développement, plaçons-nous dans le plan de la variable ξ. Les images des quatre zéros sont

$$R(\tau_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2) = 0,$$
$$R(\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2) = \frac{z-1}{z+1},$$
$$R(\sigma_2, \sigma_2, \tau_1, \tau_2) = 1,$$
$$R(\tau_2, \sigma_2, \tau_1, \tau_2) = \infty;$$

il faut donc et il suffit qu'il existe dans ce plan une couronne circulaire entourant l'origine et $\frac{z-1}{z+1}$, et laissant à l'extérieur le point 1, c'est-à-dire

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1,$$

qui s'écrit encore

$$\mathcal{R}(z) > 0.$$

Cette condition étant supposée remplie, nous poserons

$$(12) \qquad \left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m^n(z)\, R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)^n,$$

et nous nous proposons d'étudier les coefficients $J_m^n(z)$.

Tout d'abord il résulte de leur définition (12) qu'on peut représenter $J_m^n(z)$ par l'intégrale curviligne

$$(13) \qquad J_m^n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \left(\frac{a't^2 + 2b't + c'}{at^2 + 2bt + c}\right)^m \frac{dR(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)}{R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)^{n+1}},$$

le contour (C) entourant la seule coupure $\tau_1\sigma_1$.

10. Lorsque z traverse l'axe imaginaire, (12) n'est plus valable en général, mais on peut toujours prendre (13) comme définition de $J_m^n(z)$. La fonction ainsi définie n'est d'ailleurs pas uniforme si m est quelconque, et admet pour points critiques les valeurs de z pour lesquelles $\frac{z-1}{z+1}$ coïncide avec $+1$ ou l'∞, c'est-à-dire les points $z=\infty$ et $z=1$. Elle admet donc les mêmes points critiques algébriques que $P_m(z)$. D'ailleurs on a, en particulier,

$$J_m^0(z) = P_m(z).$$

Ceci peut être mis en évidence en prenant ξ pour variable d'intégration t. Le calcul nous sera d'ailleurs utile plus loin. (13) s'écrit en effet

$$(14)\quad J_m^n(z) = \left(\frac{a'}{a}\right)^m \left(\frac{\sigma_2-\tau_1}{\sigma_2-\tau_2}\right)^n \frac{1}{a\pi i} \times \int_{(C)} (t-\sigma_1)^m (t-\sigma_2)^m (t-\tau_1)^{-m-n-1} (t-\tau_2)^{-m+n-1}\,dt,$$

de sorte que, dans le plan des ξ, τ_2 devenant infini et a nul, et a' devenant égal à $-(z+1)$, il vient

$$J_m^n(z) = (-z-1)^m \left[\lim_{a\to 0}(-a\tau_2)^{-m-1}\right] \frac{1}{\pi i}\int_{(C)} \xi^{-m-n-1}(\xi-1)^m \left(\xi - \frac{z-1}{z+1}\right)^m d\xi.$$

Or $b=1$, et

$$\lim_{a\to 0}(-a\tau_2) = \lim_{a\to 0}(b+1) = 2,$$

donc

$$(14')\qquad J_m^n(z) = \left(\frac{z+1}{2}\right)^m \frac{1}{2\pi i}\int_{(\Gamma)} \xi^{-m-n-1}(1-\xi)^m \left(\xi - \frac{z-1}{z+1}\right)^m d\xi,$$

le contour (Γ) entourant l'origine et $\frac{z-1}{z+1}$, mais non $\xi=1$; cette expression met bien en évidence les deux points critiques.

11. En se replaçant dans les conditions du paragraphe **4**, on peut donner à l'intégrale (13) la forme de Laplace. On a

$$\tau_1 = 0, \qquad \tau_2 = \infty, \qquad \sigma_1 = \frac{1}{\sigma_2} = -\sqrt{\frac{z-1}{z+1}},$$

$$a = c = 0, \qquad b = 1, \qquad a' = c' = \sqrt{z^2-1}, \qquad b' = z,$$

avec la condition $\mathcal{R}(z) > 0$, et il vient

$$J_m^n(z) = \frac{\sigma_2^n}{2\pi i}\int_{(C)} \left(\frac{\sqrt{z^2-1}(t^2+1)+2zt}{2t}\right)^m \frac{dt}{t^{n+1}},$$

(C) pouvant être le cercle trigonométrique, et $\sqrt{z^2-1}$ désignant l'une quelconque des deux déterminations du radical; il va sans dire que la détermination de $\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$ est donnée par

$$\sqrt{\frac{z+1}{z-1}} = \frac{\sqrt{z^2-1}}{z-1}.$$

Le changement de variable $t = e^{i\varphi}$ donne alors

$$J_m^n(z) = \frac{1}{2\pi}\left(-\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}\right)^n \int_0^{2\pi} (z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^m e^{-in\varphi}\,d\varphi,$$

d'où

(15) $$J_m^n(z) = \frac{1}{\pi}\left(-\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}\right)^n \int_0^{\pi} (z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^m \cos n\varphi\,d\varphi,$$

et cette formule est valable dans tout le demi-plan $\mathcal{R}(z) > 0$.

12. *Équations différentielles des fonctions* $J_m^n(z)$. — La fonction $J_m^n(z)$ est solution d'une équation différentielle hypergéométrique tout à fait analogue à l'équation de Legendre, et qui s'obtient aisément à partir de l'expression (14').

$J_m^n(z)$ est proportionnel à la fonction

$$y = \int_{(\Gamma)} \xi^{-m-n-1}(1-\xi)^m[(z+1)\xi-(z-1)]^m\,d\xi.$$

L'expression

$$E(y) \equiv A\frac{d^2y}{dz^2} + B\frac{dy}{dz} + Cy,$$

où A, B, C sont des fonctions de z, s'écrit

$$E(y) = \int_{(\Gamma)} \xi^{-m-n-1}(1-\xi)^m[(z+1)\xi-(z-1)]^m H(z,\xi)\,d\xi,$$

avec

$$H(z, \xi) = Am(m-1)(1-\xi)^2 \\ - Bm(1-\xi)[(z+1)\xi - (z-1)] + C(z+1)\xi - (z-1)]^2.$$

$E(y)$ sera nul si la quantité sous le signe peut être identifiée avec

$$\frac{d}{d\xi}\{\xi^{-m-n}(1-\xi)^{m+1}[(z+1)\xi - (z-1)]^{m-1}\}\,d\xi,$$

ce qui fournit l'identité en ξ

$$H(z, \xi) \equiv (m-1)(z+1)\xi(1-\xi) \\ - [(z+1)\xi - (z-1)][(m+1)\xi + (m+n)(1-\xi)].$$

En faisant, dans cette identité, $\xi = 1$, puis $\xi = \frac{z-1}{z+1}$, et enfin $\xi = 0$, on trouve

$$2Cm = -m(m+1),$$
$$2Am = z^2 - 1,$$
$$2Bm = 2(z+n),$$

et l'équation cherchée est

$$(16) \qquad (1-z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - 2(z+n)\frac{dy}{dz} + m(m+1)y = 0.$$

Pour $n = 0$, cette équation se réduit bien à l'équation de Legendre.

13. Les fonctions $J_m^n(z)$ se rattachent immédiatement à $P_m(z)$. Pour $n > 0$, il suffit de se reporter à l'expression (15), dont l'intégrale représente, à un facteur constant près, la fonction de Ferrer

$$P_m^n(z) = \sqrt{z^2-1}^{\,n}\,\frac{d^n P_m(z)}{dz^n}.$$

D'une manière précise, on a

$$\sqrt{z^2-1}^{\,n}\,\frac{d^n P_m(z)}{dz^n} = \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+n)}{\pi}\int_0^\pi (z+\sqrt{z^2-1}\cos\varphi)^m \cos n\varphi\, d\varphi,$$

de sorte que, pour les valeurs positives de n, on a

$$(17) \qquad J_m^n(z) = \frac{(-1-z)^n}{(m+1)(m+2)\dots(m+n)}\,\frac{d^n P_m(z)}{dz^n}.$$

Pour calculer $J_m^{-n}(z)$, n désignant encore un entier positif, nous utiliserons l'équation de définition (12). Changeons, dans cette équation, les signes des six coefficients a, b, c, a', b', c'. La valeur du premier membre n'est pas modifiée, ainsi que celle de z; par contre, les zéros σ_1 et σ_2 sont permutés entre eux, ainsi que τ_1 et τ_2. Il vient donc

$$\left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m^n(z)\, R(t, \sigma_1, \tau_2, \tau_1)^n;$$

or

$$R(t, \sigma_1, \tau_2, \tau_1) = R(t, \sigma_2, \tau_2, \tau_1)\, R(\sigma_2, \sigma_1, \tau_2, \tau_1) = \frac{R(\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)}{R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)},$$

et, par suite, le dernier développement s'écrit

$$\left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m^n(z)\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)^{-n}.$$

L'identification de ce dernier membre avec le second membre de l'identité primitive (12) donne enfin la relation cherchée

$$(18) \qquad J_m^{-n}(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n J_m^n(z).$$

Grâce à cette relation et (17), nous savons exprimer $J_m^n(z)$ à l'aide de la dérivée $|n|^{\text{ième}}$ de $P_m(z)$, quelque soit le signe de n; en désignant par n un entier positif, on a

$$(19) \qquad \left\{\begin{aligned} J_m^n(z) &= \frac{(-1-z)^n}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}\,\frac{d^n P_m(z)}{dz^n}, \\ J_m^{-n}(z) &= \frac{(1-z)^n}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}\,\frac{d^n P_m(z)}{dz^n}. \end{aligned}\right.$$

Remarquons encore que l'identité

$$P_{-m-1}(z) = P_m(z)$$

permet, grâce à (19), de rattacher $J_{-m-1}^n(z)$ à $J_m^n(z)$. n étant encore positif, on obtient immédiatement

$$(20) \qquad \left\{\begin{aligned} J_{-m-1}^n(z) &= (-1)^n \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{m(m-1)\ldots(m-n+1)} J_m^n(z), \\ J_{-m-1}^{-n}(z) &= (-1)^n \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{m(m-1)\ldots(m-n+1)} J_m^{-n}(z). \end{aligned}\right.$$

14. $J_m^n(z)$ s'exprime aisément à l'aide d'une fonction homographique de $\frac{1-z}{2}$ ou de $1-\frac{1}{z^2}$. L'expression en fonction du premier argument devant être obtenue comme cas particulier d'une formule plus générale, nous commencerons par établir l'expression en fonction du second argument ; il suffit évidemment de reproduire, à partir de (15), le calcul que l'on fait habituellement pour la fonction de Ferrer $P_m^n(z)$.

(15) s'écrit encore

$$J_m^n(z) = \frac{z^m}{\pi}\left(-\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}\right)^n \int_0^\pi \left(1+\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}\cos\varphi\right)^m \cos n\varphi\, d\varphi;$$

si, en outre, $\left|1-\frac{1}{z^2}\right| < 1$, on peut développer la puissance $m^{\text{ième}}$ sous le signe, et il vient

$$(21)\quad J_m^n(z) = \frac{z^m}{\pi}\left(-\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty}\binom{m}{p}\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}^{\,p}\int_0^\pi \cos^p\varphi \cos n\varphi\, d\varphi.$$

Les intégrales pour lesquelles $n+p$ est impair sont nulles. Si $n+p$ est pair, une formule connue de Cauchy donne

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos^p\varphi\cos n\varphi\, d\varphi &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p\varphi\cos n\varphi\, d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2^p(p+1)B\left(\frac{p+n}{2}+1, \frac{p-n}{2}+1\right)} \\ &= \frac{\pi . p!}{2^p\Gamma\left(\frac{p+n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p-n}{2}+1\right)}.\end{aligned}$$

On voit ainsi que les seuls coefficients non nuls du développement (21) sont ceux dont le rang $p \geqq |n|$, et est de la parité de n. En posant $|n| = n'$ et $p = n'+2s$, il vient

$$\begin{aligned}J_m^n(z) &= z^m\left(-\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}\right)^n\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}^{\,n'} \\ &\quad\times\sum_{s=0}^{\infty}\binom{m}{n'+2s}\frac{(n'+2s)!}{2^{n'+2s}\Gamma(n'+s+1)\Gamma(s+1)}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^s \\ &= \frac{z^m}{(-2z)^{n'}}\,\frac{(z+1)^{\frac{n+n'}{2}}}{(z-1)^{\frac{n-n'}{2}}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n'-2s+1)}{2^{2s}n'!(n'+1)(n'+2)\ldots(n'+s).s!}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^s.\end{aligned}$$

et enfin

$$(22)\quad J_m^n(z) = \binom{m}{n'} \frac{z^{m-n'}}{(-2)^{n'}} \frac{(z+1)^{\frac{n+n'}{2}}}{(z-1)^{\frac{n-n'}{2}}} F\left(\frac{n'-m}{2}, \frac{n'-m+1}{2}, n'+1; 1-\frac{1}{z^2}\right).$$

Si $n \geqq 0$, n' devient égal à n, et l'on a

$$(22')\quad J_m^n(z) = \binom{m}{n} z^{m-n} \left(\frac{-1-z}{2}\right)^n F\left(\frac{n-m}{2}, \frac{n-m+1}{2}, n+1; 1-\frac{1}{z^2}\right),$$

tandis que pour $-n$, il vient

$$(22'')\quad J_m^{-n}(z) = \binom{m}{n} z^{m-n} \left(\frac{1-z}{2}\right)^n F\left(\frac{n-m}{2}, \frac{n-m+1}{2}, n+1; 1-\frac{1}{z^2}\right).$$

La comparaison de ces deux dernières formules permet encore de retrouver la relation (18). Pour $n = 0$, on a, en particulier,

$$P_m(z) = z^m F\left(\frac{-m}{2}, \frac{-m+1}{2}, 1; 1-\frac{1}{z^2}\right).$$

Ces formules sont valables dans le domaine où $\frac{J_m^n(z)}{z^m}$ est uniforme, et où $\left|1-\frac{1}{z^2}\right| < 1$. Cette dernière inégalité exprime que z est intérieur à l'hyperbole équilatère de foyers $z = \pm 1$. Le domaine de validité de (22) est donc la partie intérieure droite de cette hyperbole. En particulier, en faisant $z = 1$, on obtient les valeurs

$$J_m^n(1) = (-1)^n \binom{m}{n} \qquad (n > 0),$$

$$J_m^{-n}(1) = 0 \qquad (n > 0).$$

Nous retrouverons ces développements dans le Chapitre suivant, par une méthode nouvelle et plus directe.

15. De même que $P_m(z)$, les fonctions $J_m^n(z)$ sont développables en série entière d'une fonction homographique de z, convergente dans le domaine défini par les inégalités (6). Il suffit de reprendre le calcul et les conditions du paragraphe **6**. La formule (14) s'écrit alors

$$J_m^n(z) = \left(\frac{2}{1+z_0}\right)^m \left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^m \frac{(\delta-\gamma)^{n-1}}{(\delta+\gamma)^{n+1}} \frac{1}{\pi i}$$
$$\times \int_{(C)} (t-\sigma_1)^m (t-\sigma_2)^m (t-\tau_1)^{-m-n-1} (t-\tau_2)^{-m+n-1}\, dt,$$

d'où, en développant $(t-\sigma_1)^m$ suivant les puissances entières croissantes de $\tau_1-\sigma_1$, ce qui est possible en vertu de (6),

$$\mathrm{J}_m^n(z)=\left(\frac{2}{1+z_0}\right)^m\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^m\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}\mathrm{A}_k\left(\frac{z-1}{z-z_0}\right)^k,$$

avec

$$\mathbf{A}_k=\frac{(\delta-\gamma)^{n-1}}{(\delta+\gamma)^{n+1}}\frac{[-\gamma(\gamma+\delta)]^{-k}}{\pi i}\int_{(\mathrm{C})}(t-\tau_1)^{-n-k-1}(t-\sigma_2)^m(t-\tau_2)^{-m+n-1}\,dt;$$

en remplaçant $t-\tau_1$, $t-\sigma_2$, $t-\tau_2$ en fonction de ξ, il vient enfin

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_m^n(z)=\left(\frac{2}{z_0-1}\right)^n\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^m\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}\left(\frac{z-1}{z-z_0}\right)^k\frac{1}{2\pi i}\\ \times\int_{(\Gamma)}(1+\xi)^m\left(1+\frac{1+z_0}{2}\xi\right)^{-m+n-1}\frac{d\xi}{\xi^{n+k+1}}.\end{aligned}$$

Les intégrales au second membre s'expriment encore simplement à l'aide de polynomes hypergéométriques de $\frac{1+z_0}{2}$. (Γ) entourant l'origine seule, l'intégrale divisée par $2\pi i$ a pour valeur le coefficient de ξ^{n+k} dans le développement de $(1+\xi)^m\left(1+\frac{1+z_0}{2}\xi\right)^{-m+n-1}$ suivant les puissances entières croissantes de ξ. Cette valeur est nulle si $k<-n$, ce qui n'est évidemment possible que si $n<0$; si $n+k\geqq 0$, on a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(\Gamma)}=\sum_{h=0}^{n+k}\binom{m}{n+k-h}\binom{-m+n-1}{h}\left(\frac{1+z_0}{2}\right)^h.$$

Le coefficient $\binom{m}{n+k-h}$ s'écrit encore

$$\begin{aligned}&\frac{m(m-1)\ldots(m-n-k+h+1)}{(n+k-h)!}\\ &\quad=\frac{m(m-1)\ldots(m-n-k+1)}{(n+k)!}\\ &\qquad\times\frac{(n+k-h+1)(n+k-h+2)\ldots(n+k)}{(m-n-k+1)(m-n-k+2)\ldots(m-n-k+h)}\\ &\quad=\binom{m}{n+k}(-1)^h\frac{(-n-k)(-n-k+1)\ldots(-n-k+h-1)}{(m-n-k+1)(m-n-k+2)\ldots(m-n-k+h)},\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\binom{m}{n+k-h}\binom{-m+n-1}{h}$$
$$=\binom{m}{n+k}\frac{\left\{\begin{array}{l}(m-n+1)(m-n+2)\ldots(m-n+h)\\ \times(-n-k)(-n-k+1)\ldots(-n-k+h-1)\end{array}\right\}}{h!\,(m-n-k+1)(m-n-k+2)\ldots(m-n-k+h)}.$$

Il vient donc

$$(23)\quad J_m^n(z)=\left(\frac{2}{z_0-1}\right)^n\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^m\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}\binom{m}{n+k}$$
$$\times F\left(m-n+1,\,-n-k,\,m-n-k+1;\,\frac{1+z_0}{2}\right)\left(\frac{z-1}{z-z_0}\right)^k.$$

Si $n+k<0$, il faut entendre $\binom{m}{n+k}$ comme désignant l'expression $\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(m-n-k+1)}$, de valeur nulle. Remarquons encore que, lorsque m est entier positif, la transformation précédente fait apparaître des facteurs $\binom{m}{n+k}$ nuls, multipliés par des polynomes hypergéométriques contenant des éléments infinis. Le développement (23) conserve évidemment toujours un sens, à condition de remplacer par leurs vraies valeurs ces produits indéterminés.

On peut encore transformer (23) à l'aide de l'identité classique

$$(24)\qquad F(a,\,b,\,c;\,x)=(1-x)^{c-a-b}F(c-a,\,c-b,\,c;\,x);$$

il vient en effet

$$F\left(m-n+1,\,-n-k,\,m-n-k+1;\frac{1+z_0}{2}\right)$$
$$=\left(\frac{1-z_0}{2}\right)^n F\left(-k,\,m+1,\,m-n-k+1;\,\frac{1+z_0}{2}\right),$$

et, par suite,

$$(23')\quad J_m^n(z)=(-1)^n\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^m\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}\binom{m}{n+k}$$
$$\times F\left(-k,\,m+1,\,m-n-k+1;\,\frac{1+z_0}{2}\right)\left(\frac{z-1}{z-z_0}\right)^k.$$

16. Pour la valeur particulière $z_0=-1$, les polynomes hypergéométriques au second membre de ces deux développements se réduisent à l'unité, et l'on a

$$(25)\qquad J_m^n(z) = (-1)^n \left(\frac{z+1}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} \binom{m}{n+k} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^k.$$

La relation (18) se déduit aisément de cette expression. n étant positif, considérons $J_m^{-n}(z)$; les coefficients $\binom{m}{-n+k}$ ne sont différents de zéro que pour $-n+k \geqq 0$; en posant $-n+k=s$, il vient donc

$$J_m^{-n}(z) = (-1)^n \left(\frac{z+1}{2}\right)^m \sum_{s=0}^{\infty} \binom{m}{n+s} \binom{m}{s} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^{n+s} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n J_m^n(z).$$

Un autre cas particulier important de la formule (23') est celui où z_0 augmente indéfiniment. Les polynomes hypergéométriques au second membre sont équivalents à

$$(-1)^k \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}{(m-n-k+1)(m-n-k+2)\ldots(m-n)} \left(\frac{1+z_0}{2}\right)^k,$$

de sorte que le terme général au second membre de (23') devient

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!} \cdot \frac{m(m-1)\ldots(m-n+k+1)}{(n+k)!} \times \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}{(m-n-k+1)(m-n-k+2)\ldots(m-n)} \left(\frac{z-1}{2}\right)^k.$$

Si $n>0$, ceci s'écrit

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} \cdot \frac{-m(-m+1)\ldots(-m+k-1)}{k!} \times \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k,$$

et, par suite,

$$(26)\qquad J_m^n(z) = (-1)^n \binom{m}{n} F\left(-m,\, m+1,\, n+1;\, \frac{1-z}{2}\right) \qquad (n>0).$$

On peut faire un calcul analogue pour $J_m^{-n}(z)$, $n>0$; en posant

$$-n+k=s,$$

il vient

$$J_m^{-n}(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{m}{n+s} \binom{m}{s}$$
$$\times \frac{(m+n+1)(m+n+2)\ldots(m+n+s)}{(m-s+1)(m-s+2)\ldots m} \left(\frac{1-z}{2}\right)^{n+s};$$

or le coefficient du terme général s'écrit encore

$$(-1)^s \frac{m(m-1)\ldots(m-n-s+1)}{(n+s)!} \cdot \frac{(m+n+1)(m+n+2)\ldots(m+n+s)}{s!},$$

ou

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} \cdot \frac{(-m+n)(-m+n+1)\ldots(-m+n+s-1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+s)}$$
$$\times \frac{(m+n+1)(m+n+2)\ldots(m+n+s)}{s!},$$

d'où résulte enfin

$$(26') \quad \begin{cases} J_m^{-n}(z) = \binom{m}{n} \left(\frac{1-z}{2}\right)^n F\left(n-m, m+n+1, n+1; \frac{1-z}{2}\right) & (n>0), \\ J_m^{n}(z) = \binom{m}{n} \left(\frac{-1-z}{2}\right)^n F\left(n-m, m+n+1, n+1; \frac{1-z}{2}\right) & (n>0). \end{cases}$$

Ces dernières formules se déduisaient d'ailleurs immédiatement de (26) grâce aux identités (18) et (24).

17. Pour les valeurs entières de m, supérieures ou égales à zéro, $J_m^n(z)$ est nul si $|n| > m$, et est un polynome de degré m en z pour $|n| \leqq m$. (26) et (26') en donnent l'expression suivant les puissances de $\frac{1-z}{2}$; on voit de plus que, n étant $\geqq 0$, $z=1$ est un zéro d'ordre n pour $J_m^{-n}(z)$ [1].

Examinons les $J_m^n(z)$ d'indice m entier négatif. Posons $m = -p$, et supposons $n \geqq 0$. Il résulte de (26) que, quel que soit $n \geqq 0$, c'est

[1] Cette propriété est vraie quel que soit m.

un polynome de degré $p-1$ en z; ce développement s'écrit d'ailleurs

$$J_{-p}^{n}(z)=\binom{p+n-1}{n}\Bigg\{1+\frac{(p-1)p}{1.(n+1)}\frac{z-1}{2}+\frac{(p-2)(p-1)p(p+1)}{2!\,(n+1)(n+2)}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{2}+\ldots+\frac{(2p-2)!}{(p-1)!(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{p-1}\Bigg\}.$$

L'expression de $J_{-p}^{n}(z)$ suivant les puissances de $\frac{z+1}{2}$ est également simple. Sachant que ce polynome doit vérifier l'équation différentielle (16), et connaissant le coefficient du terme $\left(\frac{z+1}{2}\right)^{p-1}$, égal à celui de $\left(\frac{z-1}{2}\right)^{p-1}$ dans le développement précédent, la méthode des coefficients indéterminés donne

$$J_{-p}^{n}(z)=\sum_{h=0}^{p-1}\binom{p+h-1}{h}\binom{n-h-1}{p-h-1}\left(\frac{z+1}{2}\right)^{h}.$$

Cete dernière expression montre encore que, pour $n<p$, $J_{-p}^{n}(z)$ admet $z=-1$ pour zéro d'ordre n. En posant $h=n+s$, on peut d'ailleurs écrire, dans ce cas,

$$(27)\quad J_{-p}^{n}(z)=(-1)^{p-n-1}\left(\frac{z+1}{2}\right)^{n}\sum_{s=0}^{p-n-1}\binom{p-1+n+s}{p-1}\binom{p-n-1}{s}\left(\frac{-z-1}{2}\right)^{s}$$
$$(0\leqq n<p).$$

Pour les valeurs positives de n, $J_{-p}^{-n}(z)$ n'est plus un polynome si $n\geqq p$; c'est ce que montre immédiatement (26'); c'est encore un polynome de degré $p-1$ si $n<p$, et l'on tire de (27), compte tenu de (18),

$$(27')\quad J_{-p}^{-n}(z)=(-1)^{p-n-1}\left(\frac{z-1}{2}\right)^{n}\sum_{s=0}^{p-n-1}\binom{p-1+n+s}{p-1}\binom{p-n-1}{s}\left(\frac{-z-1}{2}\right)^{s}$$
$$(0\leqq n<p).$$

Les expressions (27) et (27') peuvent encore se déduire de (19). Par contre, lorsque $n\geqq p$, les seconds membres des formules (19) sont indéterminés. On peut alors faire la remarque intéressante suivante.

$J_m^n(z)$ est une fonction continue de m; c'est ce qui résulte, par exemple, de la série (25), qui est une série d'interpolation en m, uniformément convergente dans tout domaine fini du plan de cet indice. On peut donc écrire, d'après (19),

$$\lim_{m \to -p} \frac{1}{m+p} \frac{d^n P_m(z)}{dz^n} = (-1)^{n-p+1} \frac{(p-1)!(n-p)!}{(z+1)^n} J_{-p}^n(z)$$
$$(0 < p \text{ entier} \leq n).$$

Cette remarque précise ainsi la façon dont $\frac{d^n P_m(z)}{dz^n}$ tend vers zéro lorsque m tend vers l'entier $p+1$ ou $-p$ $(0 < p \leq n)$.

18. *De quelques relations de récurrence entre les fonctions* $J_m^n(z)$. — Les fonctions $J_m^n(z)$ d'indice m donné peuvent se calculer à partir de celles d'indice $m-1$.

Remarquons tout d'abord que, si m est un nombre entier positif, les polynomes $J_m^n(z)$ correspondants sont au nombre de $2m+1$, et de degré m en z. En particulier, les trois polynomes du premier degré, d'indice $m=1$, sont

$$J_1^{-1}(z) = \frac{-z+1}{2}, \qquad J_1^0(z) = P_1(z) = z, \qquad J_1^1(z) = \frac{-z-1}{2}.$$

Cette remarque faite, il suffit de se reporter à la définition de ces fonctions pour exprimer les $J_{m+1}^n(z)$ à l'aide des $J_m^p(z)$. Remplaçons en effet, dans l'identité

$$\left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)^{m+1} = \frac{Q(t)}{P(t)} \cdot \left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)^m,$$

chacune des trois fractions par son développement (12); l'identification des coefficients, dans les deux membres, des puissances égales de $R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)$ donne

$$(28) \qquad J_{m+1}^n(z) = J_1^{-1}(z) J_m^{n+1}(z) + J_1^0(z) J_m^n(z) + J_1^1(z) J_m^{n-1}(z),$$

ou encore

$$(28') \qquad J_{m+1}^n(z) = \frac{1-z}{2} J_m^{n+1}(z) + z J_m^n(z) - \frac{1+z}{2} J_m^{n-1}(z).$$

Par un calcul que je ne ferai que résumer, on pourrait déduire directement de (28) et de (18) les formules (19), sans tenir compte des expressions connues des dérivées de $P_m(z)$. En effet, (18) suggère tout d'abord de poser

$$J_m^n(z) = (z+1)^n K_m^n(z) \qquad (n \geqq 0),$$
$$J_m^n(z) = (z-1)^{-n} K_m^n(z) \qquad (n \leqq 0),$$

de sorte que

$$K_m^n(z) = K_m^{-n}(z).$$

Pour $n=0$, (28′) s'écrit alors

(29) $$P_{m+1}(z) = (1-z^2) K_m^1(z) + z P_m(z),$$

et, pour $n > 0$, ce qu'il suffit évidemment de considérer,

(30) $$K_{m+1}^n(z) = \frac{1-z^2}{2} K_m^{n+1}(z) + z K_m^n(z) - \frac{1}{2} K_m^{n-1}(z).$$

On vérifie aisément, grâce à ces deux relations de récurrence, que, pour les premières valeurs entières de m, on a

(31) $$K_m^1(z) = \frac{-1}{m+1} \frac{dK_m^0(z)}{dz},$$

et l'on démontre la généralité de (31) à l'aide des représentations des deux membres par des intégrales de la forme (14′). Cette équation se généralise ensuite aisément pour les valeurs positives de n, et l'on démontre, de la même façon que pour $n=0$,

(32) $$K_m^n(z) = -\frac{1}{m+n} \frac{dK_m^{n-1}(z)}{dz} \qquad (n \geqq 0).$$

Le passage de cette relation de récurrence aux formules (19) est alors immédiat.

Remarquons en passant que l'élimination de $K_m^1(z)$ entre les relations (29) et (31) fournit, pour la fonction de Legendre de première espèce, la relation de récurrence

(33) $$P_{m+1}(z) - z P_m(z) = \frac{z^2-1}{m+1} \frac{dP_m(z)}{dz}.$$

19. Proposons-nous maintenant d'établir une relation de récurrence liant linéairement trois fonctions consécutives $J_m^n(z)$, $J_{m-1}^n(z)$, $J_{m-2}^n(z)$. Remplaçons ces fonctions par leurs expressions (14′) dans

$$E(z) \equiv A J_m^n(z) + B J_{m-1}^n(z) + C J_{m-2}^n(z),$$

A, B, C étant trois fonctions de z à déterminer. On trouve alors, à un facteur près,

$$E(z) \equiv \int_{(\Gamma)} H(z, \xi) \frac{(1-\xi)^{m-2}[(z+1)\xi-(z-1)]^{m-2}}{\xi^{m+n+1}} d\xi,$$

avec

$$\begin{aligned} H(z, \xi) = A(1-\xi)^2[(z+1)\xi-(z-1)]^2 \\ + 2B\xi(1-\xi)[(z+1)\xi-(z-1)]+4C\xi^2; \end{aligned}$$

$E(z)$ sera donc nul si l'on a identiquement

$$\begin{aligned} H(z, \xi) & \frac{(1-\xi)^{m-2}[(z+1)\xi-(z-1)]^{m-2}}{\xi^{m+n+1}} \\ & \equiv \frac{d}{d\xi} \frac{(1-\xi)^{m-1}[(z+1)\xi-(z-1)]^{m-1}(h\xi^2+2k\xi+l)}{\xi^{m+n}}, \end{aligned}$$

h, k, l étant des fonctions indéterminées de z, c'est-à-dire, en développant le second membre,

$$(34) \quad \begin{aligned} H(z, \xi) \equiv (h\xi^2+2k\xi+l) \{ & -(m-1)\xi[(z+1)\xi-(z-1)] \\ & +(m-1)(z+1)\xi(1-\xi) \\ & -(m+n)(1-\xi)[(z+1)\xi-(z-1)] \} \\ +2(h\xi+k)\xi(1-\xi)[(z+1)\xi-(z-1)]. & \end{aligned}$$

Donnons à ξ les valeurs ∞, puis 0; il vient

$$A(z+1) = h(n-m),$$
$$A(z-1) = l(n+m);$$

en prenant

$$A = n^2 - m^2,$$

il vient donc

$$h = (n+m)(z+1),$$
$$l = (n-m)(z-1);$$

l'identification, dans (34), des termes en ξ et ξ^3 donne ensuite

$$k = -nz,$$
$$B = m(2m-1)z,$$

et enfin, pour $\xi = 1$, on a

$$C = -m(m-1).$$

La relation de récurrence cherchée est donc

$$(35) \quad (m^2-n^2)J_m^n(z) - m(2m-1)zJ_{m-1}^n(z) + m(m-1)J_{m-2}^n(z) = 0,$$

qui se réduit, pour $n = 0$, à une relation bien connue entre trois fonctions consécutives $P_m(z)$.

20. Établissons encore une relation récurrente exprimant $\dfrac{dJ_m^n(z)}{dz}$ en fonction de $J_m^n(z)$ et $J_{m-1}^n(z)$. La méthode du paragraphe précédent, appliquée à l'expression

$$E(z) \equiv A\frac{dJ_m^n(z)}{dz} + BJ_m^n(z) + CJ_{m-1}^n(z),$$

donne, à un facteur près,

$$E(z) \equiv \int_{(\Gamma)} H(z, \xi)\frac{(1-\xi)^{m-1}[(z+1)\xi-(z-1)]^{m-1}}{\xi^{m+n+1}}\,d\xi$$

avec

$$H(z, \xi) = -Am(1-\xi)^2 + B(1-\xi)[(z+1)\xi-(z-1)] + 2C\xi;$$

pour annuler identiquement $E(z)$, il suffit de choisir A, B, C de façon que l'on ait identiquement

$$H(z, \xi)\frac{(1-\xi)^{m-1}[(z+1)\xi-(z-1)]^{m-1}}{\xi^{m+n+1}} \equiv \frac{d}{d\xi}\frac{(1-\xi)^m[(z+1)\xi-(z-1)]^m}{\xi^{m+n}},$$

c'est-à-dire

$$H(z, \xi) \equiv (n\xi - m - n)[(z+1)\xi-(z-1)] + m(z+1)\xi(1-\xi).$$

En donnant à ξ les valeurs 1, puis 0 et ∞, on a $C = -m$, puis $A = 1 - z^2$ et $B = mz - n$. On obtient ainsi la relation cherchée

$$(36)\qquad (z^2-1)\frac{dJ_m^n(z)}{dz} = (mz-n)J_m^n(z) - mJ_{m-1}^n(z).$$

Signalons encore la formule suivante, qui généralise (33), et se déduit immédiatement de (35) et (36):

$$(37)\qquad (z^2-1)\frac{dJ_{m-1}^n(z)}{dz} = \frac{m^2-n^2}{m}J_m^n(z) - (mz+n)J_{m-1}^n(z).$$

CHAPITRE III.

ÉTUDE ET APPLICATION DES SÉRIES $\sum_{m=0}^{\infty} a_m J_m^n(z)$.

21. *Ordre de grandeur de* $J_m^n(z)$ *lorsque m augmente indéfiniment.* — Cet ordre de grandeur est le même que celui de $P_m(z)$, à un facteur près dépendant de n, comme il résulte immédiatement des intégrales de Laplace qui représentent ces fonctions. Bien que le calcul ne soit pas nouveau, il n'est pas sans intérêt de le reproduire.

Désignons par 2α le grand axe de l'ellipse, de foyers ± 1, qui passe par z; si θ est l'anomalie excentrique de z, on a donc

$$z = \alpha \cos\theta + i\sqrt{\alpha^2 - 1}\sin\theta,$$
$$\pm\sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{\alpha^2 - 1}\cos\theta + i\alpha\sin\theta,$$

de sorte que la quantité $(z + \sqrt{z^2 - 1}\cos\varphi)$, qui se trouve sous le signe de l'intégrale (15), s'écrit

$$(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}\cos\varphi)\cos\theta + i(\sqrt{\alpha^2 - 1} \pm \alpha\cos\varphi)\sin\theta;$$

il s'agit de déterminer le maximum de

$$|z + \sqrt{z^2 - 1}\cos\varphi|^2 = \alpha^2 - \sin^2\theta \pm 2\alpha\sqrt{\alpha^2 - 1}\cos\varphi + (\alpha^2 - \cos^2\theta)\cos^2\varphi$$

dans l'intervalle $-1 \leqq \cos\varphi \leqq 1$, ou, ce qui revient au même, celui de

$$\alpha^2 - \sin^2\theta + 2\alpha\sqrt{\alpha^2 - 1}\cos\varphi + (\alpha^2 - \cos^2\theta)\cos^2\varphi$$

pour $0 \leqq \cos\varphi \leqq 1$. α étant > 1, ce maximum se produit pour $\cos\varphi = 1$, et a pour valeur

$$2\alpha^2 - 1 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2 - 1} = (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})^2.$$

En portant dans (15), sans oublier que $m \geqq 0$, on a donc

$$(38) \qquad |J_m^n(z)| < C\left|\frac{z+1}{z-1}\right|^{\frac{n}{2}}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})^m \qquad (m > 0).$$

C étant une constante indépendante de m et n.

22. Avant d'appliquer ce résultat, faisons une remarque élémentaire sur les séries entières. Considérons une telle série $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$, de rayon de convergence égal à ρ, et supposons-la convergente sur ce cercle, sa valeur absolue admettant sur ce cercle le maximum M.

Si cette dernière hypothèse n'était pas vérifiée, il suffirait de remplacer ρ par $\rho - \varepsilon < \rho$, ce qui ne modifierait en rien les résultats suivants.

Dans ces conditions, on sait que $|a_m| < \frac{M}{\rho^m}$, et que le reste

$$R_n(x) = \sum_{m=n}^{\infty} a_m x^m \qquad |x| \leqq \rho - \varepsilon$$

vérifie l'inégalité

$$|R_n(x)| < \frac{M}{1 - \left|\frac{x}{\rho}\right|} \left|\frac{x}{\rho}\right|^n.$$

Il résulte de là que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n(x) y^n$$

converge absolument pour $|xy| < \rho$, donc que le rayon de convergence de cette série entière en y est au moins $\frac{\rho}{|x|}$, qui est supérieur à 1.

Cette remarque faite, désignons par $\varphi(x)$ la somme de la série entière

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m,$$

de rayon de convergence ρ, et formons les séries

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m J_m^n(z). \tag{39}$$

D'après (38), ces séries convergent pour toutes les valeurs entières de n, pourvu que l'on ait

$$\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} < \rho; \tag{40}$$

ceci exige que ρ soit supérieur à 1, et est alors équivalent à

$$\alpha < \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right),$$

qui exprime que z est intérieur à l'ellipse de centre O, de foyers $z = \pm 1$, et d'axes $\rho + \frac{1}{\rho}$, $\rho - \frac{1}{\rho}$.

Remarquons en outre que, m ne prenant que des valeurs entières positives, $J_m^n(z)$ n'existe que pour $m \geq |n|$; en posant $|n| = n'$, on a donc

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty} a_m J_m^n(z)\right| = \left|\sum_{m=n'}^{\infty} a_m J_m^n(z)\right| < C\left|\frac{z+1}{z-1}\right|^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{\rho}\right)^{n'},$$

$$(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1} \leq \rho - \varepsilon),$$

C ne dépendant que de ε et du maximum M de $\varphi(x)$.

23. Ceci établi, reprenons la fraction $\frac{Q(t)}{P(t)}$ génératrice des fonctions $J_m^n(z)$, et, désignant toujours par ξ le rapport anharmonique

$$\xi = R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2),$$

formons la série double

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_m J_m^n(z)\xi^n. \tag{41}$$

Il résulte de ce qui précède que, en effectuant d'abord la sommation des valeurs absolues suivant les valeurs de m, on obtient une série simple relativement à l'indice n, dont le terme général est au plus de l'ordre de

$$\left(\sqrt{\left|\frac{z+1}{z-1}\right|}\,|\xi|\right)^n \left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{\rho}\right)^{n'};$$

elle converge donc (dans les deux sens) si

$$\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{\rho} < \sqrt{\left|\frac{z+1}{z-1}\right|}\,|\xi| < \frac{\rho}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}. \tag{42}$$

La série double (41) étant, dans ces conditions, absolument convergente, on peut permuter l'ordre des sommations, ce qui donne la somme

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m^n(z) \xi^n \right). \tag{43}$$

Or le coefficient de u_m, dans (43), est le développement de $\left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)^m$ en série de Laurent de ξ, et la valeur de (43) est

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m \left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)^m = \varphi\left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right). \tag{44}$$

En posant

$$\varphi_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m J_m^n(z), \tag{45}$$

on obtient donc, *sous les conditions* (42), *le développement de* $\varphi\left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)$ *en série entière de l'invariant* $R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)$, *la fonction* $\varphi(x)$ *étant supposée holomorphe à l'origine et dans un cercle de rayon supérieur à l'unité.* Ce développement est

$$\varphi\left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(z) R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)^n, \tag{46}$$

les coefficients $\varphi_n(z)$ étant donnés par (45).

Remarque. — Lorsque la fonction $\varphi(x)$ n'est holomorphe que dans un cercle, ayant pour centre l'origine, de rayon $\rho < 1$, on peut se ramener au cas que nous venons d'étudier en considérant la fonction $\varphi(xy)$ de y, x étant un point du cercle d'holomorphie. En effet, la série en y

$$\sum_{n=0}^{\infty} a \quad x^m y^m$$

est convergente dans le cercle

$$|y| < \frac{\rho}{|x|},$$

dont le rayon est bien > 1. En posant

$$\varphi_n(z; x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m J_m^n(z), \tag{47}$$

on a donc

$$(48) \qquad \varphi\left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(z;\, x) R(t,\, \sigma_2,\, \tau_1,\, \tau_2)^n,$$

les conditions de convergence de (48) étant

$$(49) \qquad \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{\rho}|x| < \sqrt{\left|\frac{z+1}{z-1}\right|}\,|\xi| < \frac{\rho}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}\,\frac{1}{|x|}.$$

En particulier, pour $z=0$, α est égal à 1, et (49) s'écrit

$$\frac{|x|}{\rho} < |\xi| < \frac{\rho}{|x|}.$$

24. Étudions plus particulièrement ce dernier cas. En désignant par $\varphi^{(m)}(x)$ la dérivée $m^{\text{ième}}$ de $\varphi(x)$, les coefficients (47) deviennent

$$\varphi_n(0;\, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(m)}(0) J_m^n(0)}{m!} x^m.$$

Il s'agit de calculer $J_m^n(0)$; on a immédiatement, d'après (14'),

$$J_m^n(0) = \frac{1}{2^{m+1}\pi i}\int_{(\Gamma)} (1-\xi^2)^m \frac{d\xi}{\xi^{m+n+1}},$$

(Γ) entourant l'origine, car il ne faut pas oublier que m est ici entier $\geqq 0$. Cette intégrale n'est donc différente de zéro que si

$$m = -n + 2s, \qquad 0 \leqq s \leqq m;$$

ceci est d'ailleurs équivalent à

$$m = |n| + 2s \quad \text{avec} \quad s \geqq 0.$$

En supposant $n \geqq 0$, on a donc

$$J_{n+2s}^n(0) = \frac{(-1)^{n+s}}{2^{n+2s}}\binom{n+2s}{s}$$

et

$$J_{n+2s}^{-n}(0) = (-1)^n J_{n+2s}^n(0).$$

Les coefficients $\varphi_n(o;\, x)$ admettent donc les développements

$$\varphi_n(o;\, x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s}\varphi^{(n+2s)}(o)}{2^{n+2s}s!(n+s)!} x^{n+2s} \qquad (n \geqq o) \tag{50}$$

avec

$$\varphi_{-n}(o;\, x) = (-1)^n \varphi_n(o;\, x), \tag{51}$$

et l'on a

$$\varphi\left(x\frac{\xi^2-1}{2\xi}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(o;\, -x)\xi^n. \tag{52}$$

25. En prenant pour $\varphi(x)$ la fonction exponentielle e^x, (52) coïncide avec l'équation de définition des coefficients de Bessel

$$e^{x\frac{\xi-\frac{1}{\xi}}{2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\xi^n, \tag{53}$$

de sorte que (50) en donne le développement en série entière connu

$$J_n(x) = \varphi_n(o;\, -x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{n+2s}}{2^{n+2s}s!(n+1)!} \qquad (n \geqq o),$$

avec

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Même pour $z \neq o$, e^x conduit aux coefficients de Bessel. L'équation (48) qui les définit est

$$e^{x\frac{Q(t)}{P(t)}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(z;\, x) R(t,\, \sigma_2,\, \tau_1,\, \tau_2)^n. \tag{54}$$

Prenons pour valeurs des coefficients de $\frac{Q(t)}{P(t)}$ les valeurs

$$a = c = o, \qquad b = 1, \qquad a' = -c' = \sqrt{1-z^2}, \qquad b' = z;$$

les conditions (2) sont bien satisfaites, et l'on a

$$\tau_1 = o, \qquad \tau_2 = \infty, \qquad \sigma_2 = -\sqrt{\frac{1+z}{1-z}},$$

et, par suite,

$$\zeta = -t\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}.$$

(54) s'écrit alors

$$(55)\qquad e^{x\frac{\sqrt{1-z^2}(t^2-1)+2zt}{2t}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(-\sqrt{\frac{1-z}{1+z}}\right)^n \varphi_n(z;x)t^n.$$

Or le premier membre de (55) s'écrit encore

$$e^{xz}e^{x\sqrt{1-z^2}\frac{t^2-1}{2t}},$$

qui, d'après (53), admet le développement

$$e^{xz}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x\sqrt{1-z^2})t^n.$$

L'identification de ce dernier développement avec le second membre de (55) donne enfin

$$(56)\qquad \varphi_n(z;x) = \left(-\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}\right)^n e^{xz}J_n(x\sqrt{1-z^2}).$$

Tels sont les coefficients les plus généraux associés à e^x.

26. Les généralités de ce chapitre, appliquées à la fonction

$$\varphi(x) = (\lambda + \lambda x)^m,$$

m étant quelconque, conduisent également à des résultats intéressants. Supposons d'abord z nul; on a ici, pour $n \geqq 0$,

$$\varphi_n(0;x) = \sum_{s=0}^{\infty}(-1)^{n+s}\frac{m(m-1)\ldots(m-n-2s+1)}{2^{n+2s}s!\,(n+s)!}\lambda^m x^{n+2s}\qquad |x|<1,$$

qui s'écrit encore

$$(57)\quad \varphi_n(0;x) = \binom{m}{n}\lambda^m\left(\frac{-x}{2}\right)^n F\left(\frac{n-m}{2}, \frac{n-m+1}{2}, n+1; -x^2\right),$$

et l'on a

$$\left(\lambda + \lambda x \frac{Q(t)}{P(t)}\right)^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(o;\, x) R(t,\, \sigma_2,\, \tau_1,\, \tau_2)^n. \tag{58}$$

Posons

$$Q'(t) \equiv \lambda P(t) + \lambda x Q(t) = a'' t^2 + 2 b'' t + c'';$$

on a

$$a'' = \lambda(a + x a'), \qquad b'' = \lambda(b + x b'), \qquad c'' = \lambda(c + x c'),$$

et, par suite, compte tenu de $z = o$,

$$\left\{\begin{array}{l} b''^2 - a'' c'' = \lambda^2(1 + x^2), \\ a c'' + c a'' - 2 b b'' = -2\lambda. \end{array}\right. \tag{59}$$

En choisissant λ de façon que $\lambda^2(1 + x^2) = 1$, les coefficients de $\frac{Q'(t)}{P(t)}$ vérifient les conditions (2), et l'on peut écrire

$$\left(\frac{Q'(t)}{P(t)}\right)^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m^n(\lambda) R(t,\, \sigma'_2,\, \tau_1,\, \tau_2)^n \qquad (\mathcal{R}(\lambda) > o), \tag{60}$$

où

$$\sigma'_2 = \frac{-b'' - 1}{a''}.$$

En identifiant dans les seconds membres de (58) et (60) les termes en $\left(\frac{t - \tau_1}{t - \tau_2}\right)^n$, on obtient la relation

$$J_m^n(\lambda) = \varphi_n(o;\, x) R(\sigma'_2,\, \sigma_2,\, \tau_1,\, \tau_2)^n. \tag{61}$$

En remplaçant x et $R(\sigma'_2,\, \sigma_2,\, \tau_1,\, \tau_2)$ par leurs valeurs, on retrouve ainsi l'expression (22') des fonctions $J_m^n(z)$. Tout d'abord, formons dans le cas général

$$(ab' - ba')^2 = a^2 + a'^2 - 2 a a' z,$$

$$\frac{\sigma_2 - \tau_1}{\sigma_2 - \tau_2} = \frac{a' b - a b' - a - a'}{a' b - a b' - a + a'} = \frac{(a' b - a b' - a')^2 - a^2}{(a' b - a b')^2 - (a - a')^2} = \frac{a' - a z + a b' - b a'}{a(1 - z)};$$

ce résultat devient ici

$$\frac{\sigma_2 - \tau_1}{\sigma_2 - \tau_2} = \frac{a' + a b' - b a'}{a},$$

$$\frac{\sigma'_2 - \tau_1}{\sigma'_2 - \tau_2} = \frac{a'' - a\lambda + a b'' - b a''}{a(1 - \lambda)} = \frac{\lambda x}{1 - \lambda}\, \frac{a' + a b' - b a'}{a},$$

de sorte que (61) s'écrit

$$J_m^n(\lambda) = \left(\frac{\lambda x}{1-\lambda}\right)^n \varphi_n(0; x).$$

En tenant compte de la valeur de x^2, et remplaçant, pour $n \geq 0$, $\varphi_n(0; x)$ par son expression (57), on retrouve bien (22'). On obtiendrait évidemment de même (22'').

27. Supposons maintenant que z soit différent de zéro. Les coefficients associés à $(\lambda + \lambda x)^m$ sont

$$\varphi_n(z; x) = \lambda^m \sum_{p=n'}^{\infty} \binom{m}{p} x^p J_p^n(z), \tag{62}$$

où $n' = |n|$, et l'on a

$$\left(\lambda + \lambda x \frac{Q(t)}{P(t)}\right)^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(z; x) R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)^n. \tag{63}$$

En conservant la signification de $Q'(t)$, a'', b'', c'', les équations (59) sont remplacées par

$$\left\{\begin{aligned} b''^2 - a''c'' &= \lambda^2(1 + 2zx + x^2), \\ ac'' + ca'' - 2bb'' &= -2\lambda(1 + zx); \end{aligned}\right. \tag{59'}$$

on choisira donc λ de façon que

$$\lambda^2(1 + 2zx + x^2) = 1, \tag{64}$$

et l'on posera

$$z' = \lambda(1 + zx). \tag{65}$$

Dans ces conditions, le développement en série de Laurent de $R(t, \sigma_2', \tau_1, \tau_2)$, σ_2' désignant toujours le zéro $\frac{-b''-1}{a''}$, est

$$\left(\frac{Q'(t)}{P(t)}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m^n(z') R(t, \sigma_2', \tau_1, \tau_2)^n,$$

et son identification avec (63) donne l'identité

$$J_m^n(z') = \varphi_n(z; x) R(\sigma_2', \sigma_2, \tau_1, \tau_2)^n. \tag{66}$$

Nous avons déjà calculé, dans le paragraphe précédent,

$$\frac{\sigma_2-\tau_1}{\sigma_2-\tau_2}=\frac{a'-az+ab'-ba'}{a(1-z)},$$

de sorte que

$$\frac{\sigma'_2-\tau_1}{\sigma'_2-\tau_2}=\frac{a''-az'+ab''-ba''}{a(1-z')}=\lambda x\frac{a'-az+ab'-ba'}{a(1-z')};$$

(66) s'écrit alors

$$J_m^n(z')=\left(\lambda x\frac{1-z}{1-z'}\right)^n\varphi_n(z;x),$$

et, par suite, compte tenu de (62),

$$J_m^n(z')=\lambda^{m+n}\left(x\frac{1-z}{1-z'}\right)^n\sum_{p=n}^{\infty}\binom{m}{p}x^pJ_p^n(z), \tag{67}$$

z' et λ étant donnés en fonction de z et x par (64) et (65). Ce développement est valable pour $|x|<1$ et z intérieur à l'ellipse de foyers ± 1 et de grand axe $|x|+\frac{1}{|x|}$; en outre la détermination $\frac{1+xz}{\sqrt{1+2zx+x^2}}$ de z' est celle dont la partie réelle est positive.

Il est utile de modifier légèrement la forme de (67) par le changement de x et λ en $\frac{1}{x}$ et λx; il vient alors

$$J_m^n(z')=\lambda^{m+n}\left(\frac{1-z}{1-z'}\right)^n\sum_{p=n}^{\infty}\binom{m}{p}x^{m-p}J_p^n(z), \tag{67'}$$

avec

$$\begin{cases}\lambda^2(1+2zx+x^2)=1,\\ z'=\lambda(x+z),\end{cases} \tag{68}$$

et avec les conditions E : $|x|>1$, z intérieur à l'ellipse de foyers ± 1 et de grand axe $|x|+\frac{1}{|x|}$, et $\mathcal{R}(z')>0$.

28. L'identité générale que nous venons ainsi d'obtenir conduit à des résultats très intéressants. Examinons-en d'abord quelques formes particulières.

En faisant $n=0$, (67') donne l'expression d'une fonction de Legendre en fonction de polynomes de Legendre; elle devient

$$P_m\left(\frac{x+z}{\sqrt{1+2zx+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+2zx+x^2}^m}\sum_{p=0}^{\infty}\binom{m}{p}x^{m-p}P_p(z),$$

avec, si m n'est pas entier $\geqq 0$, les conditions E. Cette dernière identité est d'ailleurs susceptible d'une forme symbolique remarquablement symétrique. Elle s'écrit en effet

$$(69)\qquad P_m\left(\frac{x+z}{\sqrt{1+2zx+x^2}}\right)=\left(\frac{x+P(z)}{\sqrt{1+2zx+x^2}}\right)^m,$$

la puissance au second membre étant symbolique, et exprimant qu'on doit effectuer le développement ordinaire suivant les puissances croissantes de $P(z)$, avec la convention que $P(z)^p$ signifie $P_p(z)$.

En particulier, $x=-\frac{1}{2z}$, avec $|z|<\frac{1}{2}$, donne

$$(70)\qquad P_m(1-2z^2)=[1-2(z)P(z)]^m,\qquad |z|<\frac{1}{2}.$$

$1-2z^2$ a bien sa partie réelle positive, et la seule condition de validité de (70) est donc, si m est quelconque,

$$|2z|(\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})<1,$$

ou, en remplaçant z par son expression $\alpha\cos\theta+i\sqrt{\alpha^2-1}\sin\theta$,

$$\left\{\begin{aligned}&\sin^2\theta>\frac{1+2\alpha^2+2\alpha\sqrt{\alpha^2-1}}{4},\\&1<\alpha^2<\frac{8}{9}.\end{aligned}\right.$$

Une forme encore intéressante de (67') s'obtient en prenant $z'=z$, ce qui se produit pour $x=-2z$, $\lambda=-1$; il vient alors

$$(71)\qquad J_m^n(z)=(-1)^{m+n}\sum_{p=n'}^{\infty}\binom{m}{p}(-2z)^{m-p}J_p^n(z),$$

avec les conditions $|z| > \frac{1}{2}$, $\mathcal{R}(z) > 0$, et

$$\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}}{|2z|} < 1,$$

ou encore

$$\sin^2\theta < \frac{1 + 2\alpha^2 - 2\alpha\sqrt{\alpha^2 - 1}}{4}, \qquad |\theta| < \frac{\pi}{2}.$$

Pour $n = 0$, (71) prend la forme symbolique particulièrement simple

$$\text{(72)} \qquad P_m(z) = [2z - P(z)]^m.$$

Donnons encore à x la valeur particulière $x = -\frac{1}{z}$, avec $|z| > 1$, et $z' = \sqrt{1 - z^2}$; (69) devient une formule connue

$$\text{(73)} \qquad P_m(\sqrt{1 - z^2}) = \left(\frac{1 - zP(z)}{\sqrt{1 - z^2}}\right)^m;$$

pour $z = \cos\theta$, cette dernière formule prend la forme symbolique

$$\sin^m\theta\, P_m(\sin\theta) = [1 - \cos\theta\, P(\cos\theta)]^m.$$

29. *Étude de la relation* (69). — Les équations (69) d'indices $m = 0, 1, 2, \ldots$, ne suffisent pas pour définir les polynomes de Legendre. Nous nous proposons de déterminer la famille la plus générale de fonctions qui soient solutions de ces équations. Remarquons tout d'abord que $m = 0$ donne

$$P_0(z) = 1;$$

cependant, pour plus de symétrie, nous poserons

$$P_0(z) = a_0.$$

D'ailleurs a_0 peut être une constante quelconque si l'on introduit, au premier terme du développement symbolique, la puissance d'ordre zéro de $P(z)$. C'est ce que nous supposerons.

Pour résoudre les équations (69), il est avantageux de leur donner la forme trigonométrique, en supposant z, z', x réels, avec

$$z = \cos\theta, \qquad z' = \cos\varphi, \qquad x = \frac{\sin(\theta - \varphi)}{\sin\varphi}.$$

Il vient alors

$$(74)\qquad P_m(\cos\varphi) = \left(\frac{\sin(\theta-\varphi)+\sin\varphi\, P(\cos\theta)}{\sin\theta}\right)^m,$$

et le développement symbolique au second membre est valable, pour m quelconque, par exemple pour $0 < 2\varphi < \theta < \frac{\pi}{2}\cdot$

Désignons, d'une manière générale, par $\Pi_m(\theta)$ les solutions du système d'équations fonctionnelles

$$(74')\qquad \Pi_m(\varphi) = \left(\frac{\sin(\theta-\varphi)+\sin\varphi\, \Pi(\theta)}{\sin\theta}\right)^m,$$

$\Pi_m(\theta)$ n'étant plus nécessairement une fonction paire de θ. Les premières valeurs entières positives $m = 0, 1, 2$ donnent

$$\begin{aligned}
\Pi_0(\theta) &= a_0,\\
\Pi_1(\theta) &= a_0\cos\theta + a_1\sin\theta,\\
\Pi_2(\theta) &= a_0\cos^2\theta + 2a_1\sin\theta\cos\theta + a_2\sin^2\theta,
\end{aligned}$$

expressions dans lesquelles les constantes a_0, a_1, a_2 ont les mêmes valeurs, mais arbitraires.

D'une manière générale, on est conduit à l'expression

$$(75)\qquad \Pi_m(\theta) = \sum_{s=0}^{m}\binom{m}{s} a_s \cos^{m-s}\theta\sin^s\theta \qquad (m = 0, 1, 2, 3, \ldots),$$

les constantes a_0, a_1, a_2, a_3, ... étant arbitraires. La démonstration se fait par récurrence, mais il est inutile de la reproduire, car le calcul n'est qu'un cas particulier de celui que nous allons effectuer pour m quelconque. Nous nous proposons, en effet, de vérifier l'identité formelle

$$(76)\qquad \sum_{s=0}^{\infty}\binom{m}{s} a_s\cos^{m-s}\varphi\sin^s\varphi \equiv \left(\frac{\sin(\theta-\varphi)+\sin\varphi\,\Pi(\theta)}{\sin\theta}\right)^m,$$

lorsqu'on remplace les $\Pi_k(\theta)$ au second membre, $k = 0, 1, 2, \ldots$, par leurs expressions (75); il en résultera que, quel que soit m, $\Pi_m(\theta)$ est donné par l'expression au premier membre de (76), en supposant évidemment les constantes a_s telles que ce développement soit convergent. En développant la puissance symbolique au second membre de (76), il vient

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}\sin^{m-k}(\theta-\varphi)\sin^k\varphi\sin^{-m}\theta\,\Pi_k(\theta)$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{k}\binom{m}{k}\binom{k}{t}a_t\sin^{m-k}(\theta-\varphi)\sin^k\varphi\cos^{k-t}\theta\sin^{-m+t}\theta;$$

en développant $(\sin\theta\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi)^{m-k}$ suivant les puissances croissantes de $\dfrac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\theta}$, ce qui est possible d'après les hypothèses faites sur θ et φ, il vient encore

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{k}\sum_{h=0}^{\infty}\binom{m}{k}\binom{k}{t}\binom{m-k}{h}(-1)^h a_t\cos^{m-k-h}\varphi\sin^{k+h}\varphi\cos^{k+h-t}\theta\sin^{t-k-h}\theta,$$

ou, en posant $k+h=s$,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{k}\sum_{s=k}^{\infty}\frac{\Gamma(m+1)(-1)^{s-k}a_t}{\Gamma(m-s+1)t!(k-t)!(s-k)!}\operatorname{tang}^{t-s}\theta\cos^{m-s}\varphi\sin^s\varphi;$$

enfin, en permutant les sommations relatives à k, s et t, ceci s'écrit

$$(77)\qquad \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{s}\sum_{k=t}^{s}\binom{m}{s}\frac{s!(-1)^{s-k}a_t}{t!(k-t)!(s-k)!}\operatorname{tang}^{t-s}\theta\cos^{m-s}\varphi\sin^s\varphi.$$

Or, en posant $k=s-j$, on a

$$\sum_{k=t}^{s}\frac{(-1)^{s-k}}{(k-t)!(s-k)!}=\sum_{j=0}^{s-t}\frac{(-1)^j}{j!(s-t-j)!}=\frac{1}{(s-t)!}\sum_{j=0}^{s-t}(-1)^j\binom{s-t}{j},$$

et cette dernière somme est nulle, sauf pour $s=t$, dans quel cas elle se réduit à l'unité, (77) s'identifie alors immédiatement avec le premier membre de (76).

30. Quelles sont les valeurs des constantes a_s qui correspondent aux fonctions de Legendre? Nous savons *a priori* que les coefficients d'indice impair doivent être nuls. D'ailleurs, pour calculer les a_s, il suffit d'écrire que

$$(78)\qquad \Pi_{-1}(\theta)=\Pi_0(\theta)=1;$$

il vient en effet $a_0 = 1$, et

$$1 = \frac{1}{\cos\theta} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s a_s \operatorname{tang}^s\theta,$$

ou, en remplaçant $\cos\theta$ en fonction de $\operatorname{tang}\theta$,

$$(1 + \operatorname{tang}^2\theta)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s a_s \operatorname{tang}^s\theta.$$

L'identification donne bien

$$a_{2s+1} = 0,$$

et, pour les coefficients d'indice pair,

$$a_{2s} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ s \end{pmatrix} = (-1)^s \frac{1.3\ldots(2s-1)}{2.4\ldots 2s}.$$

Il résulte de là l'expression suivante des fonctions de Legendre :

$$(79) \qquad \begin{aligned} \frac{P_m(\cos\theta)}{\cos^m\theta} &= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{m}{2s} \frac{1.3\ldots(2s-1)}{2.4\ldots 2s} \operatorname{tang}^{2s}\theta \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{m(m-1)\ldots(m-2s+1)}{(2.4\ldots 2s)^2} \operatorname{tang}^{2s}\theta. \end{aligned}$$

En résumé, les fonctions de Legendre de première espèce sont entièrement définies par le système d'équations fonctionnelles (74′) et (78).

D'autre part, on sait que l'on a alors

$$P_{-m-1}(\cos\theta) = P_m(\cos\theta);$$

en remplaçant les deux membres par leurs expressions (79), il vient

$$\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+2s)}{(2.4\ldots 2s)^2} \operatorname{tang}^{2s}\theta \\ &\quad = (1 + \operatorname{tang}^2\theta)^{-m-\frac{1}{2}} \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \frac{m(m-1)\ldots(m-2t+1)}{(2.4\ldots 2t)^2} \operatorname{tang}^{2t}\theta, \end{aligned}$$

et l'identification terme à terme donne

$$(-1)^s \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+2s)}{(2.4\dots 2s)^2}$$
$$= \sum_{t=0}^{s} \binom{-m-\frac{1}{2}}{s-t} \frac{m(m-1)\dots(m-2t+1)}{(1.4\dots 2t)^2}(-1)^t,$$

d'où l'identité

$$(80) \quad \frac{(m+1)(m+2)\dots(m+2s)}{2^s(s!)^2}$$
$$= \sum_{t=0}^{s} \frac{(2m+1)(2m+3)\dots(2m+2s-2t-1)}{(s-t)!} \, \frac{m(m-1)\dots(m-2t+1)}{2^t(t!)^2},$$

où m est quelconque, et s un entier $\geqq 0$.

31. *Étude de la relation* (67'). — Le changement de variables du paragraphe **29** donne à (67') la forme trigonométrique

$$J_m^n(\cos\varphi) = \left(\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\right)^{m+n} \left(\frac{1-\cos\theta}{1-\cos\varphi}\right)^n \sum_{p=n'}^{\infty} \binom{m}{p} \left(\frac{\sin(\theta-\varphi)}{\sin\varphi}\right)^{m-p} J_p^n(\cos\theta),$$

ou, en remplaçant m et p par $n'+m$ et $n'+s$,

$$J_{n'+m}^n(\cos\varphi)\, \frac{(1-\cos\varphi)^n}{\sin^{n+n'}\varphi}$$
$$= \frac{1}{\sin^m\theta} \sum_{s=0}^{\infty} \binom{n'+m}{n'+s} \sin^{m-s}(\theta-\varphi)\sin^s\varphi\, \frac{(1-\cos\theta)^n}{\sin^{n+n'}\theta} J_{n'+s}^n(\cos\theta).$$

On est ainsi conduit à poser

$$\Pi_m^n(\cos\theta) = \frac{(1-\cos\theta)^n}{\sin^{n+n'}\theta} J_{n'+m}^n(\cos\theta),$$

de sorte que, n étant $\geqq 0$,

$$(81) \quad \Pi_m^{-n}(z) = (-1)^n \Pi_m^n(z) = \frac{1}{(m+n+1)(m+n+2)\dots(m+2n)} \frac{d^n P_{m+n}(z)}{dz^n};$$

et ces fonctions vérifient le système d'équations

$$(82)\qquad \Pi_m^n(\cos\varphi) = \frac{i}{\sin^m\theta}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{n'+m}{n'+s}\sin^{m-s}(\theta-\varphi)\sin^s\varphi\,\Pi^n(\cos\theta);$$

on supposera encore, par exemple, que $0 < 2\varphi < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Le système (82) n'est pas caractéristique des $J_m^n(z)$, et l'on trouve par récurrence que les fonctions les plus générales $\Pi_m(\theta)$, d'indices $m = 0, 1, 2, \ldots$ définies par les équations fonctionnelles d'indices entiers $m \geqq 0$, sont

$$(83)\qquad \Pi_m(\theta) = \sum_{s=0}^{m}\binom{n'+m}{n'+s}a_s\cos^{m-s}\theta\sin^s\theta,$$

les a_s étant des constantes arbitraires, mais prenant les mêmes valeurs dans toute la famille des fonctions. Contentons-nous encore de vérifier que l'on a, pour m quelconque, l'identité formelle

$$(84)\qquad \begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\infty}\binom{n'+m}{n'+k}a_s\cos^{m-s}\varphi\sin^s\varphi\\ &\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n'+m}{n'+k}\sin^{m-k}(\theta-\varphi)\sin^{-m}\theta\sin^k\varphi\,\Pi_k(\theta),\end{aligned}$$

lorsque les $\Pi_k(\theta)$ au second membre sont remplacées par leurs expressions (83). En faisant cette substitution, et développant comme plus haut $\sin^{m-k}(\theta-\varphi)$, ce second membre s'écrit

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{k}\sum_{h=0}^{\infty}\binom{n'+m}{n'+k}\binom{n'+k}{n'+t}\binom{m-k}{h}(-1)^h a_t\tang^{t-k-h}\theta\cos^{m-k-h}\varphi\sin^{k+h}\varphi,$$

d'où, en posant $k+h=s$, puis permutant les sommations relatives à k, s, t,

$$\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=0}^{s}\sum_{k=t}^{s}\binom{n'+m}{n'+s}\frac{(n'+s)!(-1)^{s-k}a_t}{(n'+t)!(k-t)!(s-k)!}\tang^{t-s}\theta\cos^{m-s}\varphi\sin^s\varphi;$$

la même remarque qu'au paragraphe **29** permet de réduire immédiatement cette somme au premier membre de (84), et la famille la plus générale des fonctions telles qu'on ait [1]

$$(85)\qquad \Pi_m(\varphi) = \frac{1}{\sin^m\theta}\sum_{s=0}^{\infty}\binom{n'+m}{n'+s}\sin^{m-s}(\theta-\varphi)\sin^s\varphi\,\Pi_s(\theta)$$

est donc

$$(86)\qquad \Pi_m(\theta) = \sum_{s=0}^{\infty}\binom{n'+m}{n'+s}a_s\cos^{m-s}\theta\sin^s\theta.$$

Les constantes a_s ont des valeurs arbitraires, mais la famille ne contient de fonctions d'indice quelconque que si ces valeurs rendent convergents les développements (86).

52. Pour calculer les valeurs des a_s correspondant aux $\Pi_m^n(\cos\theta)$, écrivons les relations (20), en nous bornant, ce qui suffit évidemment, aux valeurs positives de n. En choisissant p de façon que $n+p = -n-m-1$, c'est-à-dire $p = -m-2n-1$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{\Pi_p^n(\cos\theta)}{\cos^p\theta} &= \frac{J_{n+p}^n(\cos\theta)}{\cos^p\theta}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)^n \\ &= (-1)^n\frac{(m+n+1)(m+n+2)\ldots(m+2n)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}\frac{J_{n+m}^n(\cos\theta)}{\cos^p\theta}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)^n \\ &= (-1)^n\frac{(m+n+1)(m+n+2)\ldots(m+2n)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}\cos^{2m+2n+1}\theta\,\frac{\Pi_m^n(\cos\theta)}{\cos^m\theta}.\end{aligned}$$

Remplaçons $\Pi_m^n(\cos\theta)$ et $\Pi_p^n(\cos\theta)$ par leurs expressions (86), et $\cos\theta$ en fonction de $\operatorname{tang}\theta$; les a_s vérifient donc les identités

$$(87)\qquad \begin{aligned}&\sum_{s=0}^{\infty}\binom{-n-m-1}{n+s}a_s\operatorname{tang}^s\theta \\ &\quad\equiv(-1)^n\frac{(m+n+1)\ldots(m+2n)}{(m+1)\ldots(m+n)}(1+\operatorname{tang}^2\theta)^{-m-n-\frac{1}{2}} \\ &\quad\quad\times\sum_{t=0}^{\infty}\binom{n+m}{n+t}a_t\operatorname{tang}^t\theta.\end{aligned}$$

[1] Il résulte d'ailleurs du calcul que cette conclusion est encore valable quel que soit le nombre n', à condition de donner à $\binom{m}{p}$ la signification générale $\dfrac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(m-p+1)}$.

Les valeurs de ces coefficients sont entièrement déterminées par les équations d'indice $m = 0$; il vient en effet

$$\sum_{s=0}^{\infty} \binom{-n-1}{n+s} a_s \operatorname{tang}^s\theta = (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{n!} (1+\operatorname{tang}^2\theta)^{-n-\frac{1}{2}} a_0,$$

et l'identification des deux membres donne

$$a_{2s+1} = 0,$$
$$a_{2s} = \left(\frac{-1}{4}\right)^s \binom{n+2s}{s} a_0.$$

a_0 est donné lui-même par la condition

$$J_m^n(1) = (-1)^n \binom{m}{n},$$

ou

$$H_m^n(1) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{n} a_0,$$

donc

$$a_0 = \left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

et

$$a_{2s} = \frac{(-1)^{n+s}}{2^{n+2s}} \binom{n+2s}{s}. \tag{88}$$

Portons ces valeurs dans (86); on trouve

$$\begin{aligned} H_m^n(\cos\theta) &= \sum_{s=0}^{\infty} \binom{n+m}{n+2s} \binom{n+2s}{s} \frac{(-1)^{n+s}}{2^{n+2s}} \cos^{m-2s}\theta \sin^{2s}\theta \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(m-2s+1)}{s!(n+s)!} \frac{(-1)^{n+s}}{2^{n+2s}} \cos^{m-2s}\theta \sin^{2s}\theta, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \frac{d^n P_m(\cos\theta)}{d(\cos\theta)^n} \\ = \frac{\cos^{m-n}\theta}{2^n} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(m-n-2s+1)}{s!(n+s)!} \left(\frac{\operatorname{tang}\theta}{2}\right)^{2s} \\ n \geqq 0). \end{aligned} \tag{89}$$

Reprenons enfin les équations (87) d'indice quelconque, et écrivons qu'elles sont vérifiées par les valeurs (88). Il vient

$$\begin{aligned}&\frac{(m+n+1)(m+n+2)\ldots(m+2n+2s)}{(n+2s)!}a_{2s}\\&\quad=\frac{(m+n+1)(m+n+2)\ldots(m+2n)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}\sum_{t=0}^{s}\binom{n+m}{n+2t}\binom{-m-n-\frac{1}{2}}{s-t}a_{2t},\end{aligned}$$

et l'on obtient enfin l'identité

$$\begin{aligned}(90)\quad&\frac{(m+2n+1)(m+2n+2)\ldots(m+2n+2s)}{2^s s!(n+s)!}\\&\quad=\sum_{t=0}^{s}\frac{(2m+2n+1)(2m+2n+3)\ldots(2m+2n+2s-2t-1)}{(s-t)!}\\&\qquad\times\frac{m(m-1)\ldots(m-2t+1)}{2^t t!(n+t)!},\end{aligned}$$

m étant quelconque, et n, s des entiers positifs.

Signalons que la formule (89) peut encore se déduire, pour m entier $\geqq 0$, de l'équation (56), en développant $J_n(x\sqrt{1-z^2})$ et e^{zx} en séries entières de x, et identifiant, dans les deux membres, les termes en x^m.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DU CAS LIMITE OU $\sigma_1 = \sigma_2$.

33. Jusqu'ici les quatre zéros τ_1, τ_2, σ_1, σ_2 ont constamment été supposés distincts. Nous nous proposons d'examiner ce que deviennent les fonctions $J''_m(z)$ et les résultats obtenus, lorsque deux d'entre ces zéros deviennent identiques; nous supposerons que ce sont deux zéros d'un même trinome, afin que la fraction $\dfrac{Q(t)}{P(t)}$ reste irréductible et il est clair qu'on ne diminue en rien la généralité en considérant les zéros de $Q(t)$ seul.

Reprenons donc la fraction $\dfrac{Q(t)}{P(t)}$, avec $b^2-ac=1$, mais

$$b'^2-a'c'=0.$$

Désignons toujours par $\tau_1 = \frac{-b+1}{a}$, $\tau_2 = \frac{-b-1}{a}$ les deux zéros, distincts, de $P(t)$, et par $\sigma = \frac{-b'}{a'}$ le zéro double de $Q(t)$. Posons encore (¹)

$$ac' + ca' - 2bb' = -2z,$$

de sorte que les trois invariants de

$$P(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$
$$Q(x, y) = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2,$$

relativement au groupe linéaire normal, sont

$$(91) \qquad \left\{ \begin{aligned} b^2 - ac &= 1, \\ b'^2 - a'c' &= 0, \\ ac' + ca' - 2bb' &= -2z. \end{aligned} \right.$$

Un invariant, fonction de t, relativement au groupe projectif

$$t' = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta},$$

est encore

$$\xi = R(t, \sigma, \tau_1, \tau_2);$$

si $\left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)^m$ est développable en série de Laurent de ξ, les coefficients H_m^n de ce développement sont fonctions de z. Ce sont ces fonctions, qui remplacent ici $J_m^n(z)$, que nous nous proposons d'étudier.

Tout d'abord, il est clair que si m n'est pas entier, il est impossible de trouver une couronne dans laquelle $\left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)^m$ soit uniforme; par contre, lorsque m est entier, cette fraction est holomorphe dans une couronne circulaire du plan de ξ, de centre $\xi = 0$. D'autre part, les deux invariants (91) qui dépendent de a', b', c' étant homogènes par rapport à ces coefficients et à z, ces coefficients a', b', c' sont proportionnels à z, et, par suite, on a

$$H_m^n(z) = H_m^n(1)\, z^m.$$

(¹) On suppose d'ailleurs $z \neq 0$, sans quoi $\frac{Q(t)}{P(t)}$ ne serait pas irréductible.

En posant $H_m^n(1) = I_m^n$, nous aurons donc, pour m entier, le développement

$$(92)\qquad \left[\frac{Q(t)}{P(t)}\right]^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_m^n z^m R(t, \sigma, \tau_1, \tau_2)^n,$$

dans une couronne entourant τ_1, mais non σ et τ_2.

Le calcul des I_m^n est immédiat en se plaçant dans le plan de la variable ξ; (92) devient alors

$$(93)\qquad \frac{(\xi-1)^{2m}}{(2\xi)^m} = (-1)^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_m^n \xi^n;$$

donc, en remplaçant le premier membre par son développement, dans une couronne de rayons inférieurs à 1,

$$\frac{(\xi-1)^{2m}}{(2\xi)^m} = \sum_{n=-m}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{2^m}\binom{2m}{m+n}\xi^n,$$

il vient

$$(94)\qquad I_m^n = \frac{(-1)^n}{2^m}\binom{2m}{m+n} \qquad (n \geqq -m).$$

Les I_m^n d'indice $n < -m$ sont tous nuls; il résulte également de (94) que l'on a

$$I_m^n = I_m^{-n}.$$

34. Lorsque m est positif, les valeurs des I_m^n se déduisent immédiatement des fonctions $J_m^n(z)$. Considérons en effet la fraction $\frac{Q(t)}{P(t)}$ des Chapitres précédents, génératrice des $J_m^n(z)$; m étant entier positif, le développement (12) est légitime dans toute couronne entourant τ_1 et non τ_2. a, b, c, a', b', c' satisfont aux équations (2), de sorte qu'en posant

$$\frac{a''}{a'} = \frac{b''}{b'} = \frac{c''}{c'} = \frac{1}{z}$$

il vient

$$b''^2 - a''c'' = z^{-2},$$

$$ac'' + ca'' - 2bb'' = -2,$$

et l'on a

$$z^{-m}\left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right)^m = \left(\frac{a''t^2+2b''t+c''}{at^2+2bt+c}\right)^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-m} J_m^n(z) \cdot R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)^n.$$

Lorsque z augmente indéfiniment, a', b', c' augmentent aussi indéfiniment de façon que a'', b'', c'' aient des limites, les deux zéros σ_1 et σ_2 viennent se confondre sans que le dernier développement cesse d'être valable, à cause de la forme très générale que prend ici la couronne. A la limite, $b''^2 - a''c'' = 0$, et, par suite,

$$(95) \qquad I_m^n = \lim_{z\to\infty} \frac{J_m^n(z)}{z^m} \qquad (m \text{ entier} \geqq 0).$$

La vérification de l'identité (95), où le premier membre est remplacé par l'expression (94), est aisée, même pour m non entier, à partir de l'expression (22) de $J_m^n(z)$:

$$J_m^n(z) = \binom{m}{n'} \frac{z^{m-n'}}{(-2)^{n'}} \frac{(z+1)^{\frac{n+n'}{2}}}{(z-1)^{\frac{n-n'}{2}}} F\left(\frac{n'-m}{2}, \frac{n'-m+1}{2}, n'+1; 1-\frac{1}{z^2}\right).$$

La série hypergéométrique au second membre reste convergente quand z augmente indéfiniment, car $m+\frac{1}{2}>0$, et il vient

$$\lim_{z\to\infty} \frac{J_m^n(z)}{z^m} = (-2)^{-n'}\binom{m}{n'} \frac{\Gamma(n'+1)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n'+m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n'+m}{2}+1\right)}$$

$$= (-2)^{-n'} \frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n'+1)\Gamma\left(\frac{n'+m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n'+m}{2}+1\right)}.$$

Or la formule connue

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\, 2^{1-2a}\Gamma(2a)$$

donne

$$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma(m+1) = \sqrt{\pi}\, 2^{-2m}\Gamma(2m+1),$$

$$\Gamma\left(\frac{n'+m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n'+m}{2}+1\right) = \sqrt{\pi}\, 2^{-n'-m}\Gamma(m+n'+1),$$

et, par suite,

$$\lim_{z \to \infty} \frac{J_m^n(z)}{z^m} = \frac{(-1)^n}{2^m} \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(m-n'+1)\Gamma(m+n'+1)} = I_m^n.$$

35. La définition de I_m^n par le développement (92) permet de représenter ce coefficient par l'intégrale curviligne

$$(96) \qquad I_m^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \left(\frac{Q(t)}{P(t)} \right)^m \frac{d\xi}{\xi^{n+1}},$$

le contour (C) entourant le point $t = \tau_1$, mais non τ_2 ni σ; la restriction relative à σ n'est d'ailleurs pas nécessaire si $m \geqq 0$. On suppose aussi $z = 1$.

En prenant pour t la variable ξ elle-même, (96) devient, comme au paragraphe **10**,

$$I_m^n = \frac{(-1)^m}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \frac{(\xi - 1)^{2m} d\xi}{2^m \xi^{m+n+1}},$$

(Γ) entourant l'origine seule ([1]). Lorsque m est positif, on peut prendre pour (Γ) le cercle trigonométrique, et poser $\xi = e^{i\varphi}$. Il vient alors

$$I_m^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos\varphi)^m e^{-in\varphi} d\varphi$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos\varphi)^m \cos n\varphi \, d\varphi,$$

ou encore

$$(97) \quad I_m^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos\varphi)^m \cos n\varphi \, d\varphi = \frac{(-1)^n}{\pi} \int_0^{\pi} (1 + \cos\varphi)^m \cos n\varphi \, \partial\varphi.$$

Ce résultat se vérifie directement par la formule de Cauchy déjà utilisée au paragraphe **14**, ce qui n'a rien d'étonnant si l'on remarque que, m étant positif, (97) est la forme limite de (21) quand z augmente indéfiniment.

36. Les relations de récurrence entre les I_m^n, qui se déduisent de

---

([1]) Cette formule résulte directement de (93).

l'identité

$$\left[\frac{Q(t)}{P(t)}\right]^{m+p} = \left[\frac{Q(t)}{P(t)}\right]^{m} \cdot \left[\frac{Q(t)}{P(t)}\right]^{p},$$

ne sont rien autre qu'une identité connue. On a en effet

(98) $$I_{m+p}^{n} = \sum_{h} I_m^h I_p^{n-h},$$

qui s'écrit, en remplaçant les I_r^s par leurs valeurs,

(98') $$\binom{2m+2p}{m+p+n} = \sum_{h} \binom{2m}{m+h}\binom{2p}{p+n-h},$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières de h qui n'annulent pas les termes du second membre.

37. n étant fixe, l'indice m de I_m^n ne peut augmenter indéfiniment que par des valeurs positives, et la valeur asymptotique de I_m^n résulte immédiatement de celle de la fonction Γ. On trouve immédiatement

$$I_m^n \sim \frac{(-1)^n 2^{m}}{\sqrt{\pi m}},$$

donc on peut écrire

(99) $$|I_m^n| < C 2^m,$$

C étant une constante indépendante de m. Ce dernier résultat peut également se déduire de l'inégalité (28).

Cela établi, considérons le développement en série entière de la fonction

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m,$$

holomorphe dans le cercle $|x| \leqq \rho$, sa valeur absolue admettant le maximum M sur la circonférence de ce cercle. La série

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m I_m^n x^m$$

converge alors, d'après (99), pour $|x| \leqq \frac{\rho}{2}$.

Nous pouvons étudier maintenant la série double

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_m I_m^n x^m \xi^n, \tag{100}$$

ξ ayant toujours la même signification. n étant fixe, la sommation par rapport à m ne s'exerce que sur des termes d'indice $m \geqq |n|$, dont la somme vérifie l'inégalité

$$\left| \sum_{m=|n|}^{\infty} a_m I_m^n x^m \right| < \frac{CM}{1 - \left|\frac{2x}{\rho}\right|} \left|\frac{2x}{\rho}\right|^{|n|} \qquad |x| < \frac{\rho}{2};$$

la sommation de toutes ces sommes, quand n prend toutes les valeurs possibles, fournit donc une série dont une majorante est, à un facteur constant près,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\frac{2x}{\rho}\right|^{|n|} |\xi|^n,$$

de sorte que la série double (100) est absolument convergente si

$$\frac{2|x|}{\rho} < |\xi| < \frac{\rho}{2|x|}; \tag{101}$$

cette double inégalité est d'ailleurs possible si $|x| < \frac{\rho}{2}$.

Dans ces conditions, on peut permuter l'ordre des sommations, ce qui donne, pour somme de (100), $\varphi\left(x \frac{Q(t)}{P(t)}\right)$, où l'on suppose que l'invariant (z) de $\frac{Q(t)}{P(t)}$ est égal à 1. En posant

$$\varphi_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m I_m^n x^m, \tag{102}$$

on a donc le développement

$$\varphi\left(x \frac{Q(t)}{P(t)}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) R(t, \sigma, \tau_1, \tau_2)^n \qquad (z = 1). \tag{103}$$

38. Appliquons ces considérations à $\varphi(x) = e^x$, et à la fraction

$$\frac{Q(t)}{P(t)} = \frac{i(t-i)^2}{2t} = 1 + \frac{i}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

(103) donne alors

$$(104)\qquad e^x e^{\frac{ix}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\,\mathrm{R}(t, i, 0, \infty)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\left(\frac{t}{i}\right)^n,$$

avec

$$\varphi_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{I}_m^n}{m!}\, x^m.$$

En changeant x en $-ix$, (104) s'écrit encore

$$(105)\qquad e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = e^{ix} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^n(-ix)}{i^n} t^n,$$

de sorte que, le premier nombre de (105) étant la fonction génératrice des coefficients de Bessel $\mathrm{J}_n(x)$, on a

$$\mathrm{J}_n(x) = \frac{e^{ix}\varphi_n(-ix)}{i^n}.$$

En remplaçant $\varphi_n(-ix)$ par son développement, et les I_m^n par leur valeur, il vient donc

$$(106)\qquad \mathrm{J}_n(x) = e^{ix} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^m m!}\binom{2m}{m+n} i^{m+n} x^m.$$

On vérifie de suite l'identité classique

$$\mathrm{J}_{-n}(x) = (-1)^n \mathrm{J}_n(x).$$

Supposons $n > 0$, et développons e^{ix}. Nous obtenons

$$\mathrm{J}_n(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^m \frac{\binom{2m}{m+n}}{m!\,q!}\, i^{m+n+q} x^{m+q},$$

ou, en posant $m+q=p$,

$$\mathrm{J}_n(x)=\sum_{p=n}^{\infty} i^{n+p}x^p\sum_{m=n}^{p}(-2)^{-m}\frac{\binom{2m}{m+n}}{m!(p-m)!};$$

enfin, en posant $p=n+r$, $m=n+q$, il vient

$$\mathrm{J}_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty} i^r x^{n+r}\sum_{q=0}^{r}\frac{(-1)^q}{2^{n+q}}\frac{\binom{2n+2q}{2n+q}}{(n+q)!(r-q)!}.$$

$\mathrm{J}_n(x)$ étant une fonction réelle de x, les coefficients des puissances impaires de i sont identiquement nuls, ce qui donne

$$(107)\qquad \sum_{q=0}^{2s+1}\left(\frac{-1}{2}\right)^q\frac{\binom{2n+2q}{2n+q}}{(n+q)!(2s+1-q)!}=0,$$

et il reste, en posant $r=2s$,

$$\mathrm{J}_n(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s x^{n+2s}}{2^n}\sum_{q=0}^{2s}\left(\frac{-1}{2}\right)^q\frac{\binom{2n+2q}{2n+q}}{(n+q)!(2s-q)!}.$$

La comparaison de ce développement avec le développement classique

$$\mathrm{J}_n(x)=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^s x^{n+2s}}{2^{n+2s}s!(n+s)!}$$

fournit une nouvelle série d'identités

$$(108)\qquad \sum_{q=0}^{2s}\left(\frac{-1}{2}\right)^q\frac{\binom{2n+2q}{2n+q}}{(n+q)!(2s-q)!}=\frac{1}{2^{2s}s!(n+s)!}.$$

Les identités (107) et (108) prennent une forme plus simple en multipliant leurs deux membres par $(n+2s+1)!$ ou $(n+2s)!$, savoir

$$(107')\qquad \sum_{q=0}^{2s+1}\binom{n+2s+1}{n+q}\binom{2n+2q}{q}\left(\frac{-1}{2}\right)^q=0,$$

$$(108')\qquad \sum_{q=0}^{2s}\binom{n+2s}{n+q}\binom{2n+2q}{q}\left(\frac{-1}{2}\right)^q=\binom{n+2s}{s}\frac{1}{2^{2s}}.$$

On démontrerait de même que ces identités sont valables pour n entier < 0.

39. Les coefficients associés à la fonction $\varphi(x)=(\lambda+\lambda x)^m$ sont ici

$$(109)\qquad \varphi_n(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\lambda^m\binom{m}{p}I_p^n x^p \qquad |x|<\frac{1}{2},$$

et, z étant toujours supposé égal à 1, on a

$$(110)\qquad \left[\lambda+\lambda x\frac{Q(t)}{P(t)}\right]^m=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi_n(x)\,R(t,\sigma,\tau_1,\tau_2)^n.$$

Ces coefficients s'expriment simplement à l'aide d'une fonction hypergéométrique. En remplaçant les I_p^n par leurs valeurs, et posant $p=n'+r\ (n'=|n|)$, (109) devient en effet

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x)&=\lambda^m\left(\frac{-x}{2}\right)^{n'}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{2n'+2r}{r}\binom{m}{n'+r}\left(\frac{x}{2}\right)^r\\
&=\lambda^m\left(\frac{-x}{2}\right)^{n'}\frac{m(m-1)\ldots(m-n'+1)}{n'!}\\
&\quad\times\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(2n'+2r)(2n'+2r-1)\ldots(2n'+1)}{r!(2n'+r)(2n'+r-1)\ldots(2n'+1)}\\
&\quad\times\frac{(m-n')(m-n'-1)\ldots(m-n'-r+1}{(n'+1)(n'+2)\ldots(n'+r)}\times\frac{x^r}{2^r}\\
&=\lambda^m\left(\frac{-x}{2}\right)^{n'}\binom{m}{n'}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left\{\begin{array}{c}(2n'+2r-1)(2n'+2r-3)\ldots(2n'+1)\\ \times(m-n')(m-n'-1)\ldots(m-n'-r+1)\end{array}\right\}}{r!(2n'+1)(2n'+2)\ldots(2n'+r)}x^r,
\end{aligned}$$

et enfin

$$(111)\qquad \varphi_n(x)=\lambda^m\binom{m}{n'}\left(\frac{-x}{2}\right)^{n'}F\left(n'+\frac{1}{2},\,n'-m,\,2n'+1;\,-2x\right).$$

Comme aux paragraphes **26** et **27**, considérons alors la fraction $\frac{Q(t)}{P(t)}$, dont le numérateur est

$$Q'(t) = \lambda P(t) + \lambda x Q(t)$$
$$= a'' t^2 + 2 b'' t + c''.$$

Les relations (59') sont remplacées ici par

$$b''^2 - a'' c'' = \lambda^2(1 + 2x),$$
$$ac'' + ca'' - 2 bb'' = -2\lambda(1 + x).$$

En choisissant $b''^2 - a'' c'' = 0$, on est conduit à supposer $m > -\frac{1}{2}$ afin que la fonction hypergéométrique de (111) soit continue pour $-2x = 1$; l'équation (111) devient alors, par un calcul analogue à ceux des paragraphes cités,

$$I_m^n = \binom{m}{n'} (-1)^n 2^{m-2n'} F\left(n' + \frac{1}{2}, n' - m, 2n' + 1; 1\right),$$

c'est-à-dire, d'après la valeur de I_m^n,

$$(112) \qquad \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m+n'} = \frac{1}{2^{2n'}} \binom{m}{n'} F\left(n' + \frac{1}{2}, n' - m, 2n' + 1; 1\right).$$

Ce résultat se vérifie immédiatement en exprimant le second membre à l'aide de la fonction Γ, et grâce à la formule connue

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\, 2^{1-2a} \Gamma(2a).$$

Ce cas étant écarté, supposons donc λ et x choisis de façon que

$$b''^2 - a'' c'' = 1,$$

c'est-à-dire

$$(113) \qquad \lambda^2(1 + 2x) = 1,$$

et posons

$$(114) \qquad z = \lambda(1 + x).$$

L'élimination de λ entre (113) et (114) donne $z^2 = \frac{(1+x)^2}{1+2x}$. Nous prendrons la branche

$$z = \frac{1+x}{\sqrt{1+2x}}$$

qui, pour $x = 0$, prend la valeur 1; cette branche est d'ailleurs uniforme à l'intérieur du cercle $|x| < \frac{1}{2}$ où le développement (109) de $\varphi_n(x)$ est valable. En outre, on vérifie aisément que les valeurs de z correspondant aux points x de ce cercle ont leur partie réelle positive.

En remplaçant $\left[\frac{Q'(t)}{P(t)}\right]^m$ par son développement

$$\left(\frac{Q'(t)}{P(t)}\right)^m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_m^n(z)\, R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)^n,$$

où $\sigma_2 = \dfrac{-b'' - 1}{a''}$, on obtient alors

(115) $$J_m^n(z) = \varphi_n(x)\, R(\sigma_2, \sigma, \tau_1, \tau_2)^n.$$

Un calcul déjà fait au paragraphe **26** donne

$$\frac{\sigma_2 - \tau_1}{\sigma_2 - \tau_2} = \frac{a'' - az + ab'' - ba''}{a(1 - z)} = \frac{\lambda x}{1 - z}\,\frac{ab' - ba' + a' - a}{a};$$

par contre, de $z = 1$ et $b'^2 - a'c' = 0$, résulte

$$(ab' - ba')^2 = a'^2 - 2aa',$$

de sorte que l'on a

$$\frac{\sigma - \tau_1}{\sigma - \tau_2} = \frac{a'b - ab' - a'}{a'b - ab' + a'} = \frac{(a'b - ab')^2 + a'^2 - 2a'(a'b - ab')}{(a'b - ab')^2 - a'^2}$$
$$= \frac{ab' - ba' + a' - a}{-a}.$$

(115) devient donc

$$J_m^n(z) = \left(\frac{\lambda x}{z - 1}\right)^n \varphi_n(x),$$

et, en remplaçant λ par $\dfrac{z}{1 + x}$ et $\varphi_n(x)$ par (111), on obtient enfin le développement

(116) $$J_m^n(z) = \frac{\binom{m}{n'}}{2^{n'}}\,\frac{z^{m+n}}{(1 - z)^n}\,\frac{x^{n+n'}}{(1 + x)^{m+n}}$$
$$\times F\left(n' + \frac{1}{2}, n' - m, 2n' + 1; -2x\right),$$

avec

$$z = \frac{1+x}{\sqrt{1+2x}}.$$

40. Voici quelques applications de ce dernier résultat. Remarquons tout d'abord qu'à l'intérieur du cercle $|x| < \frac{1}{2}$, x n'est pas une fonction uniforme de z; à une valeur z du domaine correspondant à ce cercle correspondent deux valeurs x et $x' = \frac{-x}{1+2x}$. En remplaçant x par x' dans le second membre de (116), il vient donc

$$\begin{aligned} J_m^n(z) = {} & \frac{\binom{m}{n'}}{2^{n'}} \frac{z^{m+n}}{(1-z)^n} \frac{x^{n+n'}(1+2x)^{m-n'}}{(1+x)^{m+n}} \\ & \times F\left(n' + \frac{1}{2}, n' - m, 2n'+1; \frac{2x}{1+2x}\right), \end{aligned}$$

dont l'identification avec (116) donne

$$\begin{aligned} & F\left(n' + \frac{1}{2}, n' - m, 2n'+1; -2x\right) \\ & \quad = (1+2x)^{m-n'} F\left(n' + \frac{1}{2}, n' - m, 2n'+1; \frac{2x}{1+2x}\right), \end{aligned}$$

qui est un cas particulier de la formule connue

$$F(a, b, c; x) = (1-x)^{-b} F\left(c-a, b, c; \frac{x}{x-1}\right).$$

La comparaison des expressions (22) et (116) de $J_m^n(z)$ conduit encore à une identité, due à Kummer. En supposant par exemple, $n \geqq 0$, il vient

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^n F\left(\frac{n-m}{2}, \frac{n-m+1}{2}, n+1; 1 - \frac{1}{z^2}\right) \\ & \quad = \frac{x^{2n}}{(1+x)^{m+n}} F\left(n + \frac{1}{2}, n-m, 2n+1; -2x\right), \end{aligned}$$

et, par suite, en remplaçant $1 - \frac{1}{z^2}$ par sa valeur $\frac{x^2}{(1+x)^2}$,

$$F\left(n + \frac{1}{2}, n - m, 2n + 1; -2x\right)$$
$$= (1 + x)^{m-n} F\left[\frac{n-m}{2}, \frac{n-m+1}{2}; n+1; \left(\frac{x}{x+1}\right)^2\right].$$

Cette identité, démontrée pour n entier positif et m quelconque, est donc vraie quels que soient m et n, et s'écrit encore

$$(117)\qquad F(a, b, 2a; x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-b} F\left[\frac{b}{2}, \frac{b+1}{2}, a + \frac{1}{2}; \left(\frac{x}{2-x}\right)^2\right].$$