JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

W.-H. YOUNG

L'intégration double par rapport à une courbe

Journal de mathématiques pures et appliquées 8^e série, tome 4 (1921), p. 207-220.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1921_8_4__207_0>

L'intégration double par rapport à une courbe;

PAR W.-H. YOUNG.

1. La théorie de l'aire d'une courbe avec ses généralisations au cas de plusieurs dimensions, qui forme le sujet de ma première Communication au Congrès ([1]), conduit tout naturellement à la théorie de l'intégration multiple par rapport à une courbe, ou plus généralement, de *l'intégration multiple par rapport à une variété courbe*. C'est essentiellement en envisageant l'aire comme cas particulier d'une telle intégrale que nous nous sommes libéré des restrictions imposées par l'intuition géométrique. Selon celle-ci, le concept de l'aire se rapporte exclusivement au cas où la courbe ou variété fondamentale est *simple*, c'est-à-dire privée de points multiples. Cependant, l'apparence d'une telle courbe ou variété dans nos recherches ne dépend en aucune façon de la présence ou de l'absence de points multiples, et le besoin de légitimer un procédé analytique qui, dans des cas spéciaux, conduit à l'aire, existe tout aussi bien que la courbe présente de telles singularités on non. A la notion géométrique de l'aire, qui est celle d'une portion du plan délimitée par la courbe, vient s'opposer celle d'un procédé de sommation et de passage à la limite qui conduit à la propriété vectorielle de l'aire telle que nous l'avons définie.

C'est ce dernier point de vue qui fait ressortir la nature de l'aire comme cas particulier d'une classe de vecteurs liés à la courbe et possédant nettement le caractère d'intégrales doubles.

([1]) *Congrès int. de Math. à Strasbourg* (*Comptes rendus*, PRIVAT, 1921, p. 123-129).

Le point de vue où nous nous plaçons nous affranchit de la nécessité de donner au terme *champ d'intégration* une signification géométrique ([1]). L'intuition fait ici faillite, comme souvent ailleurs. Nous verrons qu'en nous servant de l'expression *champ d'intégration* dans un sens purement analytique, on arrive tout naturellement à la notion d'*intégrale double par rapport à une courbe qui possède une aire*, dans le sens où j'emploie ce dernier mot.

2. Nous supposerons tout d'abord que la fonction $f(x,y)$ à intégrer est *continue par rapport à l'ensemble* (x, y). Nous esquisserons alors une théorie complète de l'intégrale d'une telle fonction, en suivant le plan que voici :

Définir l'intégrale d'une telle fonction, en démontrer l'existence, l'exprimer au moyen d'une intégrale de Stieltjes, enfin démontrer la formule du changement de variable dans l'intégrale.

Nous passerons ensuite aux fonctions $f(x, y)$ *bornées et parfaitement générales*, puis aux fonctions *non bornées*, avec certaines restrictions indispensables à *la convergence absolue de l'intégrale*.

3. Quant à la courbe C à laquelle nous voulons lier l'intégrale double, nous commencerons par la supposer la plus élémentaire possible, soit un triangle, pour passer de là à des polygones d'une généralité de plus en plus étendue, à l'aide d'un premier principe qui s'énonce comme suit :

Si une courbe C *est la somme de deux courbes* C_1 *et* C_2, *l'intégrale de* $f(x, y)$ *par rapport à* C *est la somme des intégrales de* $f(x, y)$ *par rapport à* C_1 *et à* C_2.

L'intégrale par rapport à un triangle étant définie comme ordinaire, nous serons ainsi conduit à l'intégrale double au sens habituel tant que le polygone ne possédera pas de points multiples. Mais, dès que

---

([1]) Je ne veux pas dire par là que ces résultats ne sont pas susceptibles d'une interprétation géométrique. Au contraire, on peut se représenter la courbe comme déterminant en un point quelconque de l'espace considéré un nombre caractéristique, fini ou infini, qui représente en quelque sorte la *multiplicité de l'espace* et qui, telle la tangente dans une courbe, peut devenir indéterminée.

le polygone se coupera, nous serons en présence d'une nouvelle intégrale.

4. Pour passer des polygones aux courbes proprement dites, nous nous baserons sur un principe reconnu déjà dans les temps anciens. Il est fondé sur *l'ordre linéaire des points de la courbe*.

Nous inscrivons dans la courbe C un polygone P_m dont les sommets se suivent dans l'ordre indiqué : cet ordre, nous le supposons caractérisé par un paramètre t, tel que l'écart $t_i - t_{i-1}$ de deux sommets consécutifs soit inférieur à 2^{-m}. La position des différents sommets n'entre pas en ligne de compte, seulement leur ordre linéaire sur la courbe et le fait que l'ensemble de tous les sommets, pour $m = 1, 2, \ldots$, est partout dense sur la courbe.

Le principe en question s'énonce alors :

Si une fonction $f(x, y)$ possède une intégrale double W par rapport à la courbe C, l'intégrale double V_m de $f(x, y)$ par rapport au polygone P_m tend vers une limite unique et bien déterminée quand m tend vers l'infini, et cette limite coïncide avec W.

Ce principe suggère ~~lui-même~~ la définition à laquelle nous parvenons maintenant. *Chaque fois que ces intégrales auxiliaires V_m tendent vers une limite unique et bien déterminée, indépendante du choix des sommets des P_m, cette limite sera prise comme définition de l'intégrale double de $f(x, y)$ par rapport à la courbe.*

On voit sans raisonner que cette définition s'accorde non seulement avec le second principe mais aussi avec le premier, et que dans tous les cas ordinaires elle coïncide avec la définition habituelle.

5. On arrive aussi sans difficulté à identifier notre intégrale double avec celle en usage dans le cas général d'une courbe divisant le plan en deux parties distinctes, pourvu que la courbe soit *semi-rectifiable*. Selon le sens donné à ce terme dans ma Communication au Congrès de Strasbourg, nous pouvons supposer que les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ exprimant les coordonnées du point mobile sur la courbe sont continues et que $y(t)$ est une fonction à variation bornée.

Cette identification est une conséquence du théorème d'existence de notre intégrale. Ce théorème pourrait s'énoncer comme suit :

THÉORÈME. — *Si la courbe fondamentale* C *est semi-rectifiable, l'intégrale double existe et peut s'exprimer comme intégrale de Stieltjes le long du contour* C,

$$(1)\qquad \iint_C f(x,y)\,dx\,dy = \int_C F(x,y)\,dy = \int_{t_0}^{t_1} F[x(t), y(t)]\,dy(t)\ldots,$$

où

$$F(x,y) = \int f(x,y)\,dx.$$

La démonstration de cette formule dans le cas d'un triangle s'appuie sur un raisonnement bien connu : on fait une redistribution des termes dans la sommation double dont l'intégrale est la limite, de façon à calculer celle-ci par une répétition du procédé d'intégration linéaire. Le premier principe nous donne ensuite la même formule dans le cas d'un polygone quelconque.

6. Dans le cas d'une courbe C semi-rectifiable, l'intégrale de Stieltjes le long de la courbe est par définition la limite d'une somme ayant pour terme général le produit d'une valeur quelconque de $F(x, y)$ sur l'arc compris entre deux sommets consécutifs du polygone par la différence des y de ces deux sommets. Ce terme diffère de l'intégrale le long de la corde d'une quantité inférieure à e fois la différence des y des deux extrémités, si m est suffisamment grand pour que $F(x, y)$ ait, dans un cercle contenant l'arc en question, une oscillation inférieure à e. Par suite de la continuité uniforme de $F(x, y)$, nous en concluons que, si m est suffisamment grand, la différence entre la somme en question et l'intégrale $\int_{P_m} F(x, y)\,dy$ ne dépasse pas e fois la variation totale de y. Il s'ensuit que l'intégrale $\int_{P_m} F(x,y)\,dy$, et par conséquent l'intégrale $\iint_{P_m} f(x, y)\,dx\,dy$ qui lui est égale, ont pour limite unique $\int_C F(x, y)\,dy$. Cela démontre l'existence de notre intégrable double $\iint_C f(x, y)\,dx\,dy$ et en donne en même temps la valeur $\int_C F(x, y)\,dy$.

Notre théorème d'existence (n° 5), ainsi démontré, est en particulier valable lorsque la courbe C semi-rectifiable est *simple*. Nous pouvons dans ce cas prendre pour P_m un polygone également simple, d'après un théorème démontré dans le *Cours d'Analyse* de M. de la Vallée Poussin ([1]). Il s'ensuit que, définie d'après la méthode de M. Jordan, l'intégrale double par rapport à la courbe diffère d'une quantité arbitrairement petite de l'intégrale double par rapport au polygone P_m. Par conséquent, la limite de cette dernière intégrale, c'est-à-dire l'intégrale définie de la nouvelle manière, est identique à l'intégrale de M. Jordan.

7. Nous avons trouvé l'expression de notre intégrale au moyen d'une intégrale de Stieltjes; il est important, cependant, de pouvoir l'exprimer au moyen d'une intégrale double ordinaire. On y parvient moyennant une transformation continue

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v),$$

dans laquelle notre courbe C est l'image du périmètre

$$(u - a)(u - c)(v - b)(v - d) = 0$$

du rectangle fondamental $(a, b; c, d)$. La formule à obtenir est courante dans la théorie ancienne des changements de variables dans une intégrale double, soit

$$(2) \qquad \int\int_C f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^c \int_b^d f[x(u, v)\, y(u, v)] \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv.$$

Dans une Communication à la London Mathematical Society, à paraître sous peu, j'ai démontré la validité de cette formule de transformation sous les conditions suivantes :

1° La formule pour l'aire ([2]) est valable pour chaque rectangle contenu dans le rectangle fondamental $(a, b; c, d)$;

2° Quand le rectangle fondamental est divisé par des parallèles aux

([1]) 3e édition, 1914, t. I, n° 344, p. 379.

([2]) L'aire $= \displaystyle\int_a^c \int_b^d \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv$.

axes des u et des v, et puis subdivisé en semi-rectangles par des diagonales parallèles, les triangles du plan des (x, y) ayant pour sommets les images des sommets de ces semi-rectangles vérifient la condition que la somme des valeurs absolues de leurs aires est inférieure à une constante B, où B est indépendante du mode de division adopté.

Ces deux conditions se trouvent vérifiées, en particulier, si

$$\left|\frac{\partial x}{\partial u}\right| \leq L(u), \qquad \left|\frac{\partial y}{\partial u}\right| \leq L(u), \qquad \left|\frac{\partial x}{\partial v}\right| \leq M(v), \qquad \left|\frac{dy}{dv}\right| \leq M(v),$$

où $L(u)$ et $M(v)$ sont des fonctions sommables d'une seule des variables (u, v); ou, plus généralement, si, pour un ensemble dénombrable et partout dense des u,

$$\left|\frac{\partial x(u, v)}{\partial v}\right| \leq M(v), \qquad \left|\frac{\partial y(u, v)}{\partial v}\right| \leq M(v),$$

et les variations totales de $x(u, v)$ et de $y(u, v)$ par rapport à u, pour v constante, sont bornées.

D'autre part, je prétends que les conditions (II) de ma première Communication au Congrès suffisent pour entraîner la validité de la formule de transformation. Ces conditions sont les suivantes :

a. Que $x(u, v)$, $y(u, v)$ soient des fonctions absolument continues par rapport à u et par rapport à v;

b. Que $\frac{dx}{du}, \frac{dy}{dv}$ aient ce que j'ai appelé *des sommabilités associées* [1] par rapport à (u, v);

c. De même pour $\frac{dx}{dv}, \frac{dy}{du}$.

La démonstration de ce théorème, que je présenterai à la Royal Society, suit pas à pas celle que j'ai déjà donnée pour la validité de la formule pour l'aire sous les conditions (II).

---

[1] Le cas où $x(u, v)$ et $y(u, v)$ ont des *sommabilités associées* embrasse les cas habituels, tels : 1° une des fonctions est bornée et l'autre est sommable; 2° l'une a sa $(1+p)^{\text{ième}}$ puissance et l'autre sa $\left(1+\frac{1}{p}\right)^{\text{ième}}$ puissance sommable. La définition générale est celle-ci : deux fonctions $x(u, v)$ et $y(u, v)$ ont des *sommabilités associées* par rapport à (u, v) si elles sont sommables et s'il y a une fonction monotone croissante $V = V(U)$ ayant une dérivée positive,

8. Passons maintenant du cas où la fonction $f(x, y)$ à intégrer est continue au cas général d'une fonction bornée. Pour obtenir la définition de l'intégrale d'une telle fonction, nous appliquerons la méthode des suites. Nous avons là un nouvel exemple de la puissance de cette méthode si simple, et à mon avis si indispensable dans toute théorie vraiment générale d'intégration.

Soit

$$f_1(x, y),\quad f_2(x, y),\quad \ldots,\quad f_n(x, y),\quad \ldots$$

une suite monotone de fonctions bornées, pour chacune desquelles nos formules sont supposées démontrées, et soit $f(x, y)$ sa fonction limite supposée bornée. En intégrant par rapport à x, nous aurons une nouvelle suite monotone de fonctions bornées

$$F_1(x, y),\quad F_2(x, y),\quad \ldots,\quad F_n(x, y),\quad \ldots$$

dont la fonction limite

$$\lim_{n=\infty} F_n(x, y) = \lim_{n=\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(x, y)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx = F(x, y)$$

est également une fonction bornée.

En considérant x et y comme fonctions du paramètre t sur la courbe, nous pouvons intégrer terme à terme par rapport à $y(t)$, et nous aurons

$$\lim_{n=\infty} \int_{t_0}^{t} F_n[x(t), y(t)]\,dy(t) = \int_{t_0}^{t} F[x(t), y(t)]\,dy(t).$$

---

et telle qu'en désignant par $U = U(V)$ la fonction inverse de $V = V(U)$, les deux fonctions

$$Q(u, v) = \int_{y(\alpha, \beta)}^{y(u, v)} U(z)\,dz,$$

$$R(u, v) = \int_{x(\alpha, \beta)}^{x(u, v)} V(z)\,dz$$

sont des fonctions sommables par rapport à (u, v). Le produit de deux fonctions à sommabilités associées est une fonction sommable [*Proc. Roy. Soc.*, (A), t. LXXXVII, p. 225].

A l'aide de notre hypothèse, nous en concluons que l'intégrale

$$\int\int_C f_n(x, y)\,dx\,dy$$

a une limite unique égale à

$$\int_{t_0}^{t} F[x(t), y(t)]\,dy(t).$$

Ainsi notre définition de l'intégrale par suites monotones réussit parfaitement et nous conduit à la même intégrale de Stieltjes que dans le cas de fonctions continues, soit

$$\int\int_C f(x, y)\,dx\,dy = \int_C F[x(t), y(t)]\,dy(t).$$

D'autre part, si x et y sont envisagées comme fonctions de (u, v), notre première suite monotone de fonctions bornées peut être multipliée par la fonction sommable $\frac{d(x, y)}{d(u, v)}$ et intégrée terme à terme par rapport à (u, v), d'où

$$\lim_{n=\infty}\int_a^c\int_b^d f_n[x(u, v), y(u, v)]\frac{d(x, y)}{d(u, v)}\,du\,dv$$
$$= \int_a^c\int_b^d f[x(u, v), y(u, v)]\frac{d(x, y)}{d(u, v)}\,du\,dv.$$

Mais, d'après notre hypothèse, l'intégrale du premier membre est égale à

$$\int_C f_n(x, y)\,dx\,dy;$$

celui-ci, d'après ce qui vient d'être démontré, a pour limite unique

$$\int_C f(x, y)\,dx\,dy.$$

La formule de transformation

$$\int\int_C f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^c\int_b^d f[x(u, v), y(u, v)]\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,du\,dv,$$

déjà établie pour les fonctions continues, se trouve ainsi étendue tout d'abord aux fonctions l et u (*semi-continues*) et ensuite aux fonctions lu, ul, lul, ulu et à toutes les fonctions des classes suivantes, c'est-à-dire à toutes les fonctions mesurables bornées.

[*Remarquons, entre parenthèses, que le fait que $f(x, y)$ est bornée, n'entre pas dans tout ce raisonnement, sauf pour entraîner l'existence et la convergence absolue des intégrales finales.*]

Il n'est pas nécessaire, cependant, pour arriver à cette généralisation, d'appliquer la méthode des suites à toutes ces classes de fonctions séparément; c'est ce qui justifie notre définition au moyen de suites; il suffit d'étendre notre raisonnemenat ux fonctions lu et ul, pour en déduire directement que notre théorème s'applique à une fonction $f(x, y)$ bornée et mesurable générale, et cela grâce aux deux théorèmes suivants :

I. *Étant données deux fonctions bornées ne différant que sur un ensemble de mesure nulle, leurs intégrales par rapport à l'une des deux variables ne diffèrent, considérées comme fonctions de l'autre variable, que sur un ensemble de mesure nulle de valeurs de cette dernière variable.*

II. *Si les conditions imposées à la correspondance $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ entraînent la validité de la formule de transformation quand $f(x, y)$ est une fonction lu bornée, et si l'on considère dans le plan des (x, y) un ensemble S' de mesure nulle, l'image S de celui-ci dans le plan des (u, v) a cette propriété que $\frac{d(x, y)}{d(u, v)}$ y est nul presque partout.*

Dans le cas particulier où l'on a $x = u$, ou bien $y = v$, l'énoncé II se réduit à celui d'un théorème sur les fonctions d'une seule variable qui a été donné par M. de la Vallée Poussin dans son *Cours d'Analyse* (1). De ce cas particulier on déduit facilement, à l'aide de I, le théorème :

(1) 3e édition, t. I, no **268**, p. 281.

Une fonction lu qui est nulle presque partout a son intégrale double par rapport à C égale à zéro.

La démonstration de II se ramène maintenant à un cas particulier du théorème déjà démontré sur les changements de variables : le cas où la fonction à intégrer est une *lu* bornée, nulle presque partout.

En effet, un ensemble quelconque étant la somme d'un ensemble de mesure nulle et d'un ensemble zéro ([1]), nous pouvons, dans notre raisonnement, supposer que l'ensemble Q des points de S, pour lesquels on a

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} > e \quad (e > 0),$$

est un ensemble zéro. L'ensemble de mesure nulle dont nous faisons ainsi abstraction n'altère pas la validité du raisonnement. L'image Q′ de Q sera également un ensemble zéro, parce que la correspondance est continue; sa mesure sera zéro, car Q′ fait partie de S′. Par conséquent, la fonction $q(x,y)$, qui a la valeur 1 aux points de Q′ et zéro ailleurs, est une *lu* bornée, nulle presque partout. On a donc

$$0 = \int\int_C q(x,y)\,dx\,dy = \int_a^c \int_b^d q[x(u,v),\,y(u,v)]\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\,du\,dv$$
$$= \int\int_Q \frac{d(x,y)}{d(u,v)}\,du\,dv \geqq m(Q)e.$$

Mais cela n'est possible que si la mesure $m(Q)$ de Q est nulle.

Ce raisonnement étant valable pour tout $e > 0$ et pouvant être répété pour $e < 0$, à condition de remplacer le signe $>$ par le signe $<$, nous en concluons que le déterminant fonctionnel $\frac{d(x,y)}{d(u,v)}$ est nul presque partout dans l'ensemble S, ce qui démontre le théorème II entièrement.

9. Passons maintenant à la démonstration alternative de notre théorème sur les changements de variables pour le cas où $f(x,y)$ est

---

([1]) S est un ensemble zéro s'il est la limite d'une série de sous-ensembles fermés S_1, S_2, …, S_n, dont chacun est contenu dans le suivant.

une fonction bornée et mesurable parfaitement générale, en supposant démontré seulement le cas où la fonction est une *lu* bornée.

Il est bien connu qu'il existe une fonction $h(x, y)$, qui est une *lu* bornée, et une fonction $g(x, y)$, qui est une *ul* bornée, telles que

$$g(x, y) \leqq f(x, y) \leqq h(x, y),$$

l'égalité ayant lieu entre ces trois fonctions, sauf sur un ensemble de mesure nulle. La fonction

$$h(x, y) - g(x, y)$$

sera une *lu*, nulle presque partout, d'où immédiatement l'égalité suivante

$$\iint_C g(x, y)\, dx\, dy = \iint_C h(x, y)\, dx\, dy.$$

Par suite, l'intégrale de notre fonction f existe et est égale aux deux intégrales précédentes. En outre, d'après nos hypothèses,

$$\int_{t_0}^{t_1} G(x, y)\, dy(t) = \int_{t_0}^{t_1} H(x, y)\, dy(t)$$

et

$$\int_a^c \int_b^d g[x(u, v), y(u, v)] \frac{d(x, y)}{d(u, v)}\, du\, dv$$
$$= \int_a^c \int_b^d h[x(u, v), y(u, v)] \frac{d(x, y)}{d(u, v)}\, du\, dv.$$

Nous pouvons, dans la première de ces deux formules, remplacer G ou H par F, et dans la seconde nous pouvons remplacer g ou h par f, puisque nous savons que ces trois fonctions de (u, v) ne diffèrent qu'aux points d'un ensemble où $\frac{d(x, y)}{d(u, v)}$ est nul presque partout. Donc

$$\iint_C f(x, y)\, dx\, dy = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y)\, dy(t) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \frac{d(x, y)}{d(u, v)}.$$

Notre théorème sur les changements de variables se trouve ainsi démontré pour toute fonction $f(x, y)$ bornée.

10. Considérons finalement une fonction $f(x, y)$ mesurable non bornée que nous prendrons en premier lieu $\geqq 0$. Dans quelles circonstances peut-on dire qu'elle possède une intégrale double par rapport à notre courbe?

D'après ce qui a été déjà remarqué, il n'y aura aucune difficulté pourvu que les intégrales absolument convergentes

$$F(x, y) = \int f(x, y)\,dx, \quad \int F[x(t), y(t)]\,dy(t)$$

existent; et la formule du changement de variables sera valable si

$$\int_a^c \int_b^d f(x, y)\,\frac{d(x, y)}{d(u, v)}\,du\,dv$$

existe et converge absolument.

L'existence de l'intégrale $\int\int_C f(x, y)\,dx\,dy$ est donc assurée pourvu que

$$(a) \qquad f(x, y) \geqq 0$$

soit une fonction sommable de x *et que* $F[x(t), y(t)]$ *possède une intégrale par rapport à* $y(t)$, ce qui exige qu'elle possède une intégrale par rapport à la variation totale de $y(t)$. L'existence résulte également si

$$(b) \qquad f[x(u, v), y(u, v)]\,\frac{d(x, y)}{d(u, v)}$$

est une fonction sommable de (u, v).

Dans le premier cas, notre intégrale double est donnée par la formule (1). Dans le second cas, elle peut être exprimée par (2); cependant, la formule (1) est aussi valable dans ce cas, si $f(x, y)$ est sommable par rapport à x.

11. Il est nécessaire d'ajouter que la condition (b) est parfaitement déterminée dans le cas où $f(x, y)$ est une fonction finie. Le symbole

$$f[x(u, v), y(u, v)]\,\frac{d(x, y)}{d(u, v)}$$

représente alors une fonction maniable au point de vue de l'intégration. En effet, les conditions posées rendent le déterminant fonctionnel fini presque partout dans le plan des (u, v).

Mais dans le cas général il faut, pour que la condition (b) soit parfaitement bien déterminée, définir la valeur du symbole aux points où le symbole devient indéterminé de la forme $\infty \times 0$. Or il convient de donner au symbole la valeur zéro en tout point où le déterminant fonctionnel est nul, même si $f[x(u, v), y(u, v)]$ y prend une valeur infinie, car notre raisonnement exige que le symbole représente la limite des produits

$$f_n[x(u, v), y(u, v)]\frac{d(x, y)}{d(u, v)},$$

dans lesquelles les fonctions f_n sont bornées.

Donc si notre fonction $f(x, y)$ est sommable, ou même si elle est finie presque partout, sans être sommable, alors $f[x(u, v), y(u, v)]$, étant finie sauf sur un ensemble où $\frac{d(x, y)}{d(u, v)}$ est nul presque partout, notre symbole sera fini presque partout et représente une fonction maniable.

12. Enfin, si $f(x, y)$ n'est pas toujours >0 (ou <0), nous exigerons que la fonction positive $|f(x, y)|$ possède une intégrale double par rapport à notre courbe. D'après ce qui précède, il suffit que

$$(a) \qquad \int |f(x, y)|\, dx$$

existe et possède une intégrale par rapport à $y(t)$.

D'autre part, la condition (b) donnée pour la validité de la formule pour la transformation des variables, évidemment nécessaire, est suffisante, que la fonction soit positive ou non. Cette condition est que

$$f[x(u, v), y(u, v)]\frac{d(x, y)}{d(u, v)}$$

soit sommable. Sous cette condition, la fonction mesurable $f(x, y)$, *sans être soumise à aucune autre hypothèse*, possède une intégrale double par rapport à notre courbe : cette intégrale, étant la différence des intégrales des deux fonctions positives

$$|f(x, y)| \pm f(x, y)$$

[pour lesquelles la condition (b) est remplie *ipso facto*], est donnée par la formule

$$(2) \qquad \iint_{C} f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^c \int_b^d f[x(u, v),\ y(u, v)] \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv,$$

et, *si $f(x, y)$ est sommable par rapport à x*, elle s'exprime également au moyen de la formule

$$\iint_{C} f(x, y)\, dx\, dy = \int_t^{t'} F[x(t), y(t)]\, dy(t).$$