JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. POINCARÉ

Sur l'intégration algébrique des équations linéaires et les périodes des intégrales abéliennes

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 9 (1903), p. 139-212.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1903_5_9__139_0>

Sur l'intégration algébrique des équations linéaires et les périodes des intégrales abéliennes;

PAR M. H. POINCARÉ.

§ 1. — Introduction.

Le présent Mémoire est le développement d'une Note que j'ai présentée à l'Académie des Sciences en 1883 (*Comptes rendus*, t. XCVII, 1883, 2ᵉ semestre, p. 984 et 1189).

Quand une fonction algébrique satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels, les intégrales abéliennes jouissent de certaines propriétés curieuses et il y a entre leurs périodes quelques relations intéressantes.

On est conduit en passant, à ce résultat, qu'étant donné un groupe fini H quelconque, on peut toujours trouver (sauf un nombre fini d'exceptions) un groupe fini de substitutions linéaires isomorphes à H, et dont les coefficients soient entiers.

M. Frobenius, en 1896 et dans les années suivantes, a publié une série de Mémoires sur les caractères des groupes. Ses résultats peuvent être utilement appliqués à la question qui nous occupe et je crois devoir les rappeler rapidement; je profite d'ailleurs de l'occasion pour les rapprocher d'autres résultats obtenus par M. Cartan et pour faire voir combien les théories de ces deux savants mathématiciens s'éclairent mutuellement.

§ 2. — Intégrabilité algébrique des équations linéaires.

Soit

$$\sum \frac{d^q y}{dx^q} P_q(x) = 0 \tag{1}$$

une équation linéaire dont les coefficients P_q sont des polynomes entiers. Supposons que l'intégrale générale de cette équation soit algébrique et soit

$$\theta(x, y) = 0 \tag{2}$$

l'équation algébrique qui définit cette intégrale générale. Bien entendu, ce polynome θ, outre les variables x et y, contiendra n constantes arbitraires d'intégration si l'équation (1) est d'ordre n.

L'équation (1) pourrait être intégrée par le procédé général. Posons

$$x = \varphi(z),$$

où $\varphi(z)$ est une fonction fuchsienne correspondant au groupe fuchsien G.

Si cette fonction fuchsienne est convenablement choisie (et cela peut se faire d'une infinité de manières), y sera une fonction zétafuchsienne de z.

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des intégrales de (1) au nombre de n et linéairement indépendantes. On aura

$$y_1 = \zeta_1(z), \qquad y_2 = \zeta_2(z), \qquad \ldots, \qquad y_n = \zeta_n(z),$$

les ζ étant des fonctions zétafuchsiennes. Quand z subira une substitution du groupe G, les ζ_i subiront une substitution linéaire appartenant au groupe H de l'équation linéaire (1). Le groupe H sera donc isomorphe à G.

Mais ici l'intégrale générale étant supposée algébrique, le groupe H sera d'*ordre fini*, de sorte que l'isomorphisme sera *mériédrique*.

Parmi toutes les substitutions de G, il y en aura donc qui correspondront dans H à la substitution identique. L'ensemble de ces substitutions formera un groupe G′ qui sera un groupe fuchsien et qui sera un sous-groupe invariant du groupe G. Le groupe G n'est donc pas simple.

Ce groupe fuchsien G′ engendrera un système S′ de fonctions fuchsiennes; il est aisé de voir que le système S′ contiendra le système S des fonctions fuchsiennes engendrées par le groupe G; que x et y ou toute fonction rationnelle de x et de y est une fonction fuchsienne du système S′. Il en est de même de toute fonction rationnelle de $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

J'ai dit que le polynome θ contenait, outre les variables x et y, des constantes arbitraires d'intégration. Selon les valeurs que l'on attribuera à ces n constantes, trois cas pourront se présenter :

1° Ou bien les diverses déterminations de la fonction algébrique y pourront s'exprimer linéairement à l'aide de m d'entre elles, le nombre m étant $< n$; par conséquent, l'intégrale générale de l'équation (1) n'est pas une combinaison linéaire des diverses déterminations de la fonction algébrique y;

2° Ou bien l'intégrale générale de (1) est une combinaison linéaire des diverses déterminations de y; mais le groupe de l'équation algébrique $\theta(x, y) = 0$ est plusieurs fois transitif;

3° Ou bien enfin l'intégrale générale de (1) est une combinaison linéaire des diverses déterminations de y et le groupe de l'équation algébrique $\theta = 0$ est simplement transitif.

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un système de n intégrales de (1) linéairement indépendantes.

Posons

$$u = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n.$$

Faisons décrire à x un contour fermé quelconque; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ subiront une transformation linéaire T, à savoir celle des transformations du groupe H qui correspond à ce contour; les y se changeront donc en $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$, et u se changera en

$$u' = \alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2 + \ldots + \alpha_n y'_n.$$

Peut-il arriver que u' soit identique à u? Les y' sont des fonctions linéaires des y; on aura donc

$$u' = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_n y_n,$$

les β étant des fonctions linéaires des α. Pour que $u = u'$, il faudrait que

$$\alpha_1 = \beta_1, \qquad \alpha_2 = \beta_2, \qquad \ldots, \qquad \alpha_n = \beta_n.$$

Cela peut arriver pour certaines valeurs des α, mais ces relations ne peuvent être satisfaites identiquement, quels que soient les α, à moins que l'on n'ait

$$y'_1 = y_1, \qquad y'_2 = y_2, \qquad \ldots, \qquad y'_n = y_n,$$

c'est-à-dire que la transformation linéaire T ne se réduise à la substitution identique.

Ainsi u' sera différent de u, à moins que les u ne satisfassent à un système X de relations algébriques.

Soient T_1, T_2, ..., T_p les transformations non identiques du groupe H; elles sont en nombre fini; à chacune d'elles correspond un système de relations algébriques entre les α. Si les α ne satisfont à aucun de ces systèmes, la fonction u n'est transformée en elle-même par aucune des transformations T, c'est-à-dire que si x décrit un contour fermé et que u revienne à sa valeur initiale, la transformation T sera identique et toutes les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ reviendront à leurs valeurs initiales.

Or u est une fonction algébrique de x, susceptible de plusieurs déterminations.

Si, x décrivant un contour fermé, l'une de ces déterminations revient à sa valeur initiale, il en sera de même de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et, par conséquent, de toutes les autres déterminations de u. Donc le groupe de la fonction algébrique u est simplement transitif.

Nous pouvons donc supposer que les constantes d'intégration aient été choisies de telle sorte que le groupe de l'équation algébrique

$$\theta(x, y) = 0$$

soit simplement transitif.

Mais pouvons-nous toujours choisir les α de telle façon que l'intégrale générale de (1) soit une combinaison linéaire des diverses déterminations de u?

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, le nombre des déterminations linéairement indépendantes de $u = \Sigma\alpha_i y_i$ sera $m < n$.

Donc u satisfera à une équation linéaire d'ordre m à coefficients rationnels. D'ailleurs, comme $y_1, y_2, \ldots, y_n$ reviennent à leur valeur initiale quand u revient à sa valeur initiale (pourvu que les α aient été choisis comme je viens de le dire), les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ seront des fonctions rationnelles de x et de u. Donc l'intégrale générale de (1) sera une fonction rationnelle de x et de l'intégrale générale d'une équation d'ordre moindre.

Je dirai alors que l'équation (1) est *imprimitive*.

Nous supposerons dans ce qui va suivre que l'équation (1) est *primitive* et que les constantes aient été choisies de telle sorte que la fonction algébrique y admette n déterminations linéairement indépendantes et que son groupe soit simplement transitif.

La question de l'intégrabilité algébrique des équations linéaires est liée à celle des groupes finis contenus dans le groupe linéaire. M. Klein a résolu complètement la question en ce qui concerne le deuxième ordre. M. Jordan, dans le Tome 84 du *Journal de Crelle*, puis dans les *Mémoires de l'Académie de Naples*, a donné une méthode générale pour la recherche des groupes finis contenus dans le groupe linéaire et a appliqué sa méthode au troisième ordre.

Une question se pose toutefois. Étant donné un groupe fini contenu dans le groupe linéaire à n variables, existe-t-il toujours une équation linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre intégrable algébriquement et correspondant à ce groupe? Cette question, comme on devait s'y attendre, doit être résolue affirmativement.

Disons quelques mots d'abord de la constitution des groupes discontinus. Je suppose un groupe discontinu dérivé d'un nombre fini p de substitutions fondamentales

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_p.$$

On obtiendra toutes les substitutions de ce groupe en combinant ces p substitutions.

A chacune de ces combinaisons

$$S_i^{\alpha_i} S_k^{\alpha_k} S_h^{\alpha_h} \ldots,$$

où α_i, α_k, α_h sont des entiers positifs ou négatifs, correspondra une substitution du groupe, mais toutes ces combinaisons ne sont pas toujours distinctes. Il peut y avoir deux de ces combinaisons qui seront identiques, auquel cas il y aura une de ces combinaisons qui se réduira à la substitution identique.

1. On aura donc un certain nombre de relations de la forme

$$S_i^{\alpha_i} S_k^{\alpha_k} S_h^{\alpha_h} \ldots = 1. \tag{3}$$

Ce sont *les relations de structure* du groupe.

Toutes ces relations ne sont pas distinctes; elles peuvent toutes se déduire d'un certain nombre d'entre elles que l'on appelle *relations fondamentales*. Je renverrai pour plus de détails au § 5 de mon Mémoire *Sur les groupes fuchsiens* (*Acta mathematica*, t. I).

Quelles sont pour un groupe fuchsien les relations de structure et en particulier les relations fondamentales? Je me bornerai à rappeler le résultat que j'ai obtenu à la page 16 du Mémoire cité. Décomposons le demi-plan en polygones générateurs R_0, R_1, ..., R_q, ...; à chacun des côtés de R_0 correspondra une substitution du groupe fuchsien, de telle sorte que les substitutions qui correspondent à deux côtés conjugués soient inverses l'une de l'autre. A chaque côté de R_q nous ferons correspondre la même substitution qu'au côté correspondant de R_0.

Décrivons un contour fermé qui traverse nécessairement les régions R_1, R_2, ..., R_h et en sort par les côtés C_1, C_2, ..., C_h auxquels correspondent les substitutions S_1, S_2, ..., S_h; nous aurons alors

$$S_1 S_2 \ldots S_h = 1,$$

et nous obtiendrons ainsi toutes les relations de structure du groupe.

Pour obtenir toutes les relations fondamentales, il suffira de décrire des contours fermés infinitésimaux autour des divers sommets de R_0.

Les divers sommets d'un même cycle donneront d'ailleurs la même relation, de sorte qu'il y aura autant de relations fondamentales que de cycles.

Appliquons cette règle à un groupe fuchsien du genre o. Soient

$$\alpha_0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p\alpha_{p+1}\beta_p\beta_{p-1}\ldots\beta_2\beta_1\alpha_0$$

les $2p+2$ sommets du polygone R_0. Le côté $\alpha_i\alpha_{i+1} = C_i$ sera conjugué du côté $\beta_i\beta_{i+1} = C'_i$ et la substitution S_i transformera C_i en C'_i. Les sommets formeront $p+2$ cycles, à savoir

$$\alpha_0, \quad \alpha_1\beta_1, \quad \alpha_2\beta_2, \quad \ldots, \quad \alpha_p\beta_p, \quad \alpha_{p+1},$$

et je supposerai que la somme des angles des sommets de ces cycles soit respectivement

$$\frac{2\pi}{n_0}, \quad \frac{2\pi}{n_1}, \quad \frac{2\pi}{n_2}, \quad \ldots, \quad \frac{2\pi}{n_p}, \quad \frac{2\pi}{n_{p+1}}.$$

Alors les relations fondamentales correspondant à ces différents cycles seront

$$(4)\qquad S_0^{n_0} = (S_1S_0^{-1})^{n_1} = (S_2S_1^{-1})^{n_2} = \ldots = (S_pS_{p-2}^{-1})^{n_p} = S_p^{n_{p+1}} = 1.$$

Cela posé, quel rapport y a-t-il entre les relations de structure de deux groupes isomorphes? Il est clair que si l'isomorphisme est holoédrique les relations seront les mêmes; mais si l'isomorphisme est mériédrique l'un des deux groupes aura toutes les relations de structure de l'autre et en admettra, en outre, encore d'autres. Réciproquement, cette condition est suffisante pour que les deux groupes soient mériédriquement isomorphes.

Cela posé, soit H un groupe d'ordre fini contenu dans le groupe linéaire; supposons que ce groupe soit dérivé de $p+1$ substitutions

$$S_0, \quad S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_p.$$

Ce groupe étant d'ordre fini, une quelconque de ses substitutions sera d'ordre fini.

Ce sera le cas, en particulier, pour les substitutions

$$S_0, \quad S_1S_0^{-1}, \quad S_2S_1^{-1}, \quad \ldots, \quad S_pS_{p-1}^{-1}, \quad S_p^{-1}.$$

Il existera donc des entiers $n_0, n_1, \ldots, n_{p+1}$, tels que

$$(4\ bis) \qquad S_0^{n_0} = (S_1 S_0^{-1})^{n_1} = (S_2 S_1^{-1})^{n_2} = \ldots = (S_p S_{p-1}^{-1})^{n_p} = (S_p^{-1})^{n_{p+1}} = 1.$$

Ces relations ne seront d'ailleurs pas les seules relations de structure du groupe H.

Cela posé, nous pouvons construire un polygone fuchsien R_0 de genre o, de telle façon que les sommes des angles des sommets des différents cycles soient respectivement

$$(5) \qquad \frac{2\pi}{n_0}, \quad \frac{2\pi}{n_1}, \quad \ldots, \quad \frac{2\pi}{n_{p+1}}.$$

Soit G le groupe fuchsien correspondant. Ses substitutions fondamentales $S_0, S_1, \ldots, S_p$ satisferont aux relations (4) qui seront ses seules relations fondamentales.

Donc le groupe H admettra les *mêmes* relations de structure que G et encore d'autres; donc H est mériédriquement isomorphe à G. Il existera donc dans G un sous-groupe fuchsien G' formé des substitutions de G auxquelles correspond dans H la substitution identique.

D'un autre côté, reportons-nous au paragraphe 5 du Mémoire : *Sur les fonctions zétafuchsiennes* (*Acta mathematica*, t. V), nous verrons que, le groupe G étant de la première famille et le groupe H contenu dans le groupe linéaire à n variables étant isomorphe à G, nous pouvons construire n fonctions zétafuchsiennes

$$\zeta_1(z), \quad \zeta_2(z), \quad \ldots, \quad \zeta_n(z)$$

qui subissent une substitution linéaire du groupe H quand la variable z subit la substitution correspondante du groupe fuchsien G. Ces fonctions ζ sont en même temps des fonctions fuchsiennes admettant le groupe fuchsien G'. Si donc on pose

$$y = \zeta(z),$$

y va satisfaire à une relation algébrique

$$(2) \qquad \theta(x, y) = 0$$

et à une équation différentielle d'ordre n à coefficients rationnels.

Ainsi, à la question posée plus haut, on doit faire une réponse affirmative; on peut même remarquer qu'elle comporte une infinité de solutions dépendant d'un grand nombre d'arbitraires :

1° On peut choisir de plusieurs manières dans le groupe H les substitutions auxquelles on fera jouer le rôle de

$$S_0, \quad S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_p;$$

2° Il y a une infinité de polygones R_0 de genre 0 et de $2p+2$ sommets tels que la somme des angles des différents cycles admettent les valeurs (5). Il reste encore $p-1$ arbitraires, et c'est ce que je puis traduire en disant que je peux choisir arbitrairement les $p+2$ points singuliers de la fonction algébrique définie par l'équation (2) ou, ce qui revient au même, ceux de l'équation linéaire (1).

Soit m le nombre des déterminations de y, ce sera en même temps le degré en y de l'équation $\theta = 0$ et l'ordre du groupe H. Je désigne par q le genre de la relation (2).

Proposons-nous de calculer q. La surface du polygone R_0 sera

$$2\pi\left(p - \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_1} - \ldots - \frac{1}{n_{p+1}}\right).$$

Soit R'_0 le polygone générateur du groupe G'; sa surface sera évidemment

$$2\pi m\left(p - \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_1} - \ldots - \frac{1}{n_{p+1}}\right) = 2\pi m\left(p - \sum \frac{1}{n_i}\right).$$

On aura, d'autre part,

$$q = \frac{\nu + 1 - \mu}{2},$$

2ν étant le nombre des côtés de R'_0 et μ le nombre de ses cycles.

D'un autre côté, la surface de R'_0 sera

$$2\pi\left(\nu - 1 - \sum \frac{1}{\alpha_i}\right),$$

en supposant que la somme des angles des μ cycles soit

$$\frac{2\pi}{\alpha_1}, \quad \frac{2\pi}{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad \frac{2\pi}{\alpha_\mu}.$$

Or $\nu = \mu - 1 + 2q$, nous pouvons donc écrire pour cette surface

$$2\pi\left[2q - 2 + \sum\left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right)\right].$$

L'autre expression peut de même s'écrire

$$2\pi m\left[-2 + \sum\left(1 - \frac{1}{n_i}\right)\right].$$

Donc

$$m\left[-2 + \sum\left(1 - \frac{1}{n_i}\right)\right] = \left[2q - 2 + \sum\left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right)\right]. \tag{6}$$

Considérons un des cycles de R_0 dont la somme des angles sera $\frac{2\pi}{n_i}$. Soit A l'un de ses sommets; envisageons les différents transformés de A par les substitutions de G.

Considérons ceux de ces transformés qui sont intérieurs à R'_0 ou qui sont des sommets de R'_0; ces derniers se répartissent en cycles. Soit B un de ceux qui sont intérieurs à R'_0. Observons que R'_0 peut être décomposé en m polygones congruents à R_0 et que j'appellerai

$$R_0, \quad R_1, \quad \ldots, \quad R_{m-1}, \tag{7}$$

chacun d'eux étant transformé de R_0 par une des substitutions de G.

Si nous envisageons ceux de ces polygones qui ont un sommet en B, nous voyons que ce sommet est homologue à A ou à un des sommets du cycle auquel appartient A et que, parmi ces polygones, il y en aura n_i pour lesquels ce sommet sera homologue à A. Il y aura donc n_i substitutions de G qui changeront A en B.

Soit maintenant C un transformé de A qui soit un sommet de R'_0 et soit $\frac{2\pi}{\alpha_k}$ la somme des angles du cycle auquel appartient C. Parmi les m substitutions qui changent R_0 en l'un des polygones (7), il y en aura alors $\frac{n_i}{\alpha_k} = \beta_k$ qui changent A en C, ou un des sommets du même cycle.

D'où il suit d'abord que n_i est divisible par α_k.

Convenons alors de prendre pour le point B

$$\alpha_k = 1, \qquad \beta_k = n_i;$$

nous aurons

$$\sum \beta_k = m, \tag{8}$$

la sommation étant étendue à tous les points tels que B et C. Et, en effet, chacune des m substitutions qui changent R_0 en l'un des polygones (7) change A en l'un des points B ou C.

Remarquons que chaque cycle de R'_0 ne devra être représenté qu'une fois dans la somme $\sum \beta_k$, même si plusieurs points C appartiennent à ce cycle.

Toutes les considérations qui précèdent et, en particulier, les relations (6) et (8) s'appliqueraient à un sous-groupe *quelconque* de G. Mais il y a ici quelque chose de plus, car G′ est un sous-groupe *invariant*.

Il en résulte qu'une substitution quelconque de G change R'_0 en un polygone équivalent. Reprenons alors notre point A et ses transformés B et C. Soient C et C′ deux de ces transformés appartenant à deux cycles différents de R'_0.

Il y aura une substitution de G qui changera C en C′. Soit $\frac{2\pi}{\alpha}$ et $\frac{2\pi}{\alpha'}$ la somme des angles des deux cycles correspondants. Qu'est-ce que cela veut dire? Cela veut dire que, parmi les substitutions de G′, il y en aura une qui, *au point de vue non euclidien*, pourra être regardée comme une rotation d'un angle $\frac{2\pi}{\alpha}$ autour de C; donc, le sous-groupe étant invariant, la rotation d'angle $\frac{2\pi}{\alpha}$ autour de C′ devra appartenir à G′; de même, la rotation d'angle $\frac{2\pi}{\alpha'}$ autour de C devra appartenir à G′. Cela n'est possible que si $\alpha = \alpha'$.

Supposons maintenant que l'un des transformés de A soit un point B. Alors, la rotation d'angle $\frac{2\pi}{\alpha}$ autour de B appartiendra à G′; mais comme B est intérieur au polygone générateur de G′, cela n'est possible que si cette rotation se réduit à la substitution identique, c'est-à-dire si $\alpha = 1$.

Deux cas seulement sont donc possibles :

1° Ou bien aucun des transformés de A n'est intérieur à R'_0; dans ce cas, tous les α_k sont égaux entre eux, de même que tous les β_k; si k_i est le nombre des cycles correspondants, on aura

$$\beta_k = \frac{m}{k_i}, \qquad \alpha_k = \frac{n_i k_i}{m},$$

et, pour les cycles correspondants,

$$\sum\left(1 - \frac{1}{\alpha_k}\right) = k_i\left(1 - \frac{m}{n_i k_i}\right) = \frac{m}{\beta_k} - \frac{m}{n_i}.$$

2° Ou bien quelques-uns des transformés de A sont intérieurs à R_0, tous les α sont égaux à 1, de sorte qu'on a, pour les cycles correspondants,

$$\sum\left(1 - \frac{1}{\alpha_k}\right) = 0.$$

Nous distinguerons donc parmi les cycles de R_0, c'est-à-dire parmi les termes du premier membre de (6), deux cas :

1° Dans le premier cas, où $\beta_k = \frac{m}{k_i}$, $\alpha_k = \frac{n_i k_i}{m}$, on aura, en étendant la sommation aux cycles correspondants de R'_0,

$$\sum\left(1 - \frac{1}{\alpha_k}\right) - m\left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = \frac{m}{\beta_k} - m;$$

2° Dans le second cas, où $\alpha_k = 1$; $\beta_k = n_i$, on aura

$$\sum\left(1 - \frac{1}{\alpha_k}\right) - m\left(1 - \frac{1}{n_i}\right) = \frac{m}{n_i} - m = \frac{m}{\beta_k} - m.$$

Or la relation (6) peut s'écrire

$$-2m - \sum\left[\sum\left(1 - \frac{1}{\alpha_k}\right) - m\left(1 - \frac{1}{n_i}\right)\right] = 2q - 2;$$

nous aurons donc

$$(9) \qquad m\left[-2+\sum\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)\right]=2q-2,$$

les β étant des entiers.

Discutons cette relation à laquelle nous aurions peut-être pu parvenir plus rapidement par des considérations sur la division régulière des surfaces de Riemann.

Dans le cas de $q=0$, le second membre sera négatif et nous devrons avoir

$$\sum\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)<2.$$

Dans le cas de $q=1$, le second membre sera nul et nous devrons avoir

$$\sum\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)=2.$$

Dans le cas de $q>1$, le second membre sera positif, mais comme m est un entier plus grand que 1, nous devrons avoir

$$\sum\left(1-\frac{1}{\beta_k}\right)\leqq 2+\frac{2q-2}{m}\leqq q+1.$$

En tout cas $\sum\left(1-\frac{1}{\beta}\right)$ est limité; les β sont des entiers; nous pouvons laisser de côté les termes pour lesquels $\beta=1$ et qui sont nuls. Donc β est au moins égal à 1, de sorte que $1-\frac{1}{\beta}$ est compris entre $\frac{1}{2}$ et 1.

Soit ρ le nombre des termes de la somme $\sum\left(1-\frac{1}{\beta}\right)$, on aura

$$\rho>\sum\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\geqq\frac{\rho}{2}.$$

Dans le cas de $q=0$, on aura donc

$$\rho<4,$$

c'est-à-dire $\rho=1$, 2 ou 3.

D'autre part,

$$\rho > \sum\left(1-\frac{1}{\beta}\right) = 2 - \frac{2}{m} > 1.$$

Donc $\rho = 2$ ou 3. Si $\rho = 2$, on a

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} = \frac{2}{m},$$

équation qui n'admet d'autre solution que

$$\beta_1 = \beta_2 = m,$$

si l'on observe que l'équation (8) exige

$$\beta_1 \leqq m.$$

Si $\rho = 3$, on a

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \frac{1}{\beta_3} > 1,$$

qui admettent comme solutions

$$\beta_1 = \beta_2 = 2, \qquad \beta_1 = 2, \qquad \beta_2 = 3, \qquad \beta_3 = 3,\ 4 \text{ ou } 5.$$

On retrouve ainsi les groupes connus de Klein et on n'en trouve pas d'autres.

Dans le cas de $q = 1$, on a

$$\rho > \sum\left(1-\frac{1}{\beta}\right) > 2 \geqq \frac{\rho}{2},$$

d'où $\rho = 3$ ou 4, ce qui donne les solutions connues

$$\beta_1 = 2, \qquad \beta_2 = 3, \qquad \beta_3 = 6, \qquad \beta_1 = 2, \qquad \beta_2 = \beta_3 = 4,$$
$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 4.$$

Dans le cas de $q > 1$, on aura

$$q + 1 > \frac{\rho}{2}$$

et $\rho > 2$; avec

$$\sum \frac{1}{\beta} = \rho - 2 - \frac{2q-2}{m},$$

d'où

$$\frac{2q-2}{m} + \sum \frac{1}{\beta} = \rho - 2$$

(d'où d'abord $\rho > 2$).

Or

$$\beta < m, \qquad \text{d'où} \qquad \sum \frac{1}{\beta} > \frac{\rho}{m},$$

d'où

$$\frac{2q-2+\rho}{m} < \rho - 2,$$

ce qui donne une limite inférieure de m.

Or nous avons vu plus haut que β est un diviseur de m et égal à $\frac{m}{k_i}$, notre équation peut alors s'écrire

$$\sum k_i + 2q - 2 = m(\rho - 2).$$

Soient β_1 le plus grand des β et S la somme de tous les autres $\frac{1}{\beta}$, on pourra écrire

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{2q-2}{m} = \rho - 2 - S,$$

et, comme S est au plus égal à $\frac{\rho-1}{2}$,

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{2q-2}{m} > \frac{\rho-3}{2},$$

et, *a fortiori*, puisque $\beta_1 < m$,

$$\frac{2q-1}{\beta_1} > \frac{\rho-3}{2}.$$

Si $\rho > 3$, cette relation limitera β_1 et, par conséquent, tous les autres β; j'ajoute qu'elle limite ρ, car elle donne

$$\rho - 3 < 2q - 1,$$

puisque $\beta_1 \geqq 2$.

Si $\rho = 3$, on ne pourra avoir $\beta_2 = \beta_3 = 2$, auquel cas on aurait $S = 1$ et, par conséquent,

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{2q-2}{m} = 0.$$

Le cas le plus défavorable est donc

$$\beta_2 = 2, \qquad \beta_3 = 3,$$

d'où

$$S = \frac{5}{6}.$$

On a donc

$$S < \frac{5}{6},$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{2q-2}{m} > \frac{1}{6},$$

ce qui limite encore β_1 et, par conséquent, tous les autres β.

En résumé, *pour un genre q déterminé,* nos groupes H se ramèneront à un nombre fini de types.

§ 3. — Propriétés des intégrales abéliennes.

Reprenons la relation algébrique

$$\theta(x, y) = 0, \tag{2}$$

dont le degré est m et le genre q.

Toute fonction rationnelle de x et de y sera une fonction fuchsienne de z admettant le groupe G'; soit maintenant

$$\int R(x, y)\, dx \tag{3}$$

une des q intégrales abéliennes de première espèce de la courbe algébrique (2); ce sera une fonction uniforme de z; cette fonction sera toujours finie et elle se reproduira à une constante près quand z subira une des substitutions du groupe G'.

Si donc nous appelons cette fonction $K(z)$, nous aurons

$$K(zS) = K(z) + \omega,$$

où j'écris, pour abréger, zS au lieu de $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, la substitution

$$S = \left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

étant une des substitutions du groupe fuchsien G'. Quant à ω, c'est une constante qui n'est autre chose qu'une période de l'intégrale abélienne (3).

A chaque substitution de G' correspondra ainsi une période de (3); mais, bien entendu, pour certaines de ces substitutions, cette période sera nulle. Si ω correspond à S et ω' à S', on voit que $\omega + \omega'$ correspondra à SS', de même qu'à S'S, et $m\omega + n\omega'$ à $S^{m_1} S'^{n_1} S^{m_2} S'^{n_2} \ldots$, pourvu que $\sum m_i = m$, $\sum n_i = n$.

Soit maintenant σ une substitution de G n'appartenant pas à G'. Que sera-ce que $K(z\sigma)$? Ce sera évidemment encore une intégrale abélienne de première espèce.

Si nous changeons z en zS, $z\sigma$ se changera en $zS\sigma$, et il viendra

$$K(zS\sigma) = K(z\sigma) + \omega',$$

ω' étant la période de $K(z\sigma)$ correspondant à S.

Soient alors $S_1, S_2, \ldots, S_h$ les substitutions fondamentales de G'; soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h$ les périodes correspondantes de $K(z)$, $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_h$ celles de $K(z\sigma)$; nous aurons

$$K(zS_i) = K(z) + \omega_i,$$
$$K(zS_i\sigma) = K(z\sigma) + \omega'_i.$$

Si, dans cette dernière équation, je change z en $z\sigma^{-1}$, il vient

$$K(z\sigma^{-1}S_i\sigma) = K(z) + \omega'_i.$$

Or G' étant un sous-groupe invariant de G, la substitution $\sigma^{-1}S_i\sigma$ appartiendra aussi à G'; d'où il suit que ω'_i est une combinaison linéaire à coefficients entiers des ω_i.

Ainsi les périodes de l'intégrale abélienne de première espèce $K(z\sigma)$ seront des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes de l'intégrale abélienne de première espèce $K(z)$ et réciproquement.

Introduisons maintenant les intégrales abéliennes de seconde espèce; ces intégrales seront encore des fonctions uniformes de z, mais elles admettront des pôles. Soit $P(z, a)$ une de ces intégrales, exprimée en fonction de z; elle sera définie par les conditions suivantes :

1° Elle sera fonction méromorphe de z dans tout le cercle fondamental;

2° Elle admettra comme pôles simples les points

$$z = a \quad \text{et} \quad z = aS \quad (S \text{ étant une des substitutions de } G'),$$

et elle n'en admettra pas d'autres;

3° Le résidu de la fonction

$$P(z, a)$$

sera égal à 1 pour le pôle $z = a$;

4° On aura pour une substitution S quelconque de G :

$$P(zS, a) = P(z, a) + \varphi(a), \tag{3}$$

$\varphi(a)$ étant une constante ne dépendant que de a; de telle sorte qu'à chaque substitution de G' corresponde une période de l'intégrale P.

Ces conditions ne suffiraient pas pour déterminer P, puisque, si si elles sont remplies par P, elles le seront par $P + K$, K étant une intégrale de première espèce.

On peut achever de définir P (à une constante près) en s'imposant encore une condition :

5° p des périodes de P choisies une fois pour toutes, et que j'appellerai les *périodes de première sorte,* devront être nulles.

Étudions les propriétés de ces fonctions P.

Quels sont les résidus de P pour ses différents pôles? Soit

$$\frac{dx}{dz} = \psi(z),$$

et soit A le résidu de P pour le pôle $z = a\mathrm{S}$. Nous aurons

$$\mathrm{P}(z\mathrm{S}^{-1}, a) = \mathrm{P}(z, a) + \varphi_1(a),$$

$\varphi_1(a)$ étant la période qui correspond à la substitution S^{-1}; et pour z très voisin de $a\mathrm{S}$, le premier membre sera très voisin de $\frac{1}{z\mathrm{S}^{-1} - a}$ et le second de $\frac{\mathrm{A}}{z - a\mathrm{S}}$, on aura donc sensiblement

$$\frac{1}{z\mathrm{S}^{-1} - a} = \frac{\mathrm{A}}{z - a\mathrm{S}},$$

d'où

$$\mathrm{A} = \frac{\psi(a)}{\psi(a\mathrm{S})}.$$

Les conditions énoncées plus haut suffisent pour déterminer P à une constante près, car, si deux fonctions y satisfaisaient, elles auraient mêmes pôles et mêmes résidus; leur différence $\mathrm{D}(z)$ serait partout finie. On aurait d'ailleurs

$$\mathrm{D}(z\mathrm{S}) - \mathrm{D}(z) = \text{const.}$$

Donc $\mathrm{D}(z)$ serait une intégrale de première espèce et comme p des périodes devraient être nulles, cette intégrale se réduirait à une constante.

Cela posé, j'observe que, dans la relation (3), $\varphi(a)$ doit être une fonction uniforme de a, puisque, quand on se donne a, la fonction $\mathrm{P}(z, a)$ est entièrement déterminée à une constante près, et, par conséquent, la différence $\mathrm{P}(z\mathrm{S}, a) - \mathrm{P}(z, a)$ entièrement déterminée. De plus, cette fonction est toujours finie, puisque, quel que soit a, il suffit de donner à z une valeur différente des divers points aS pour que $P(zS, a)$ et $P(z, a)$ soient finis.

Soit maintenant T une substitution quelconque de G′ et considérons

$$P(z, aT).$$

Cette fonction admet comme pôle le point aS avec le résidu :

$$\frac{\psi(aT)}{\psi(aS)}.$$

On aura donc

$$P(z, aT) = \frac{\psi(aT)}{\psi(a)} P(z, a) + \text{const.},$$

et, par conséquent,

$$P(zS, aT) - P(z, aT) = \frac{\psi(aT)}{\psi(a)} [P(zS, a) - P(z, a)]$$

ou

$$\varphi(aT) = \frac{\psi(aT)}{\psi(a)} \varphi(a).$$

Considérons maintenant la fonction $\int \varphi(z)\, dz = G(z)$.

Remarquons que x prend la même valeur pour $z = a$ et pour $z = a\mathbf{T}$, de sorte que

$$dx = \psi(aT)\, d(aT) = \psi(a)\, da,$$

d'où

$$\varphi(aT)\, d(aT) = \varphi(a)\, da$$

ou, en intégrant,

$$G(aT) = G(a) + \text{const.}$$

Donc $G(z)$ *est une intégrale abélienne de première espèce.*

Soit maintenant σ une substitution de G n'appartenant pas à G′, et changeons σ en $z\sigma$ dans la relation (3), il viendra :

$$(3\,a) \qquad P(z\sigma S, a) = P(z\sigma, a) + \varphi(a).$$

Or, le sous-groupe G étant invariant, on aura

$$\sigma S = S'\sigma,$$

S' appartenant aussi à G', d'où

$$(3\ bis) \qquad P(zS'\sigma,\ a) = P(z\sigma,\ a) + \varphi(a),$$

ce qui veut dire d'abord que la période de l'intégrale $P(z\sigma, a)$ qui correspond à S' est égale à $\varphi(a)$; c'est-à-dire que les périodes de $P(z\sigma, a)$ sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de celles de $P(z, a)$.

Nous aurons d'autre part

$$(3\ ter) \qquad P(zS', a) = P(z, a) + \varphi'(a),$$

$\varphi'(a)$ étant la période correspondant à S', étant par conséquent une combinaison linéaire des périodes fondamentales de P.

Comparons maintenant les résidus des deux fonctions

$$P(z,\ a\sigma^{-1}), \quad P(z\sigma,\ a)$$

pour le pôle $z = a\sigma^{-1}$; pour z voisin de $a\sigma^{-1}$, ces deux fonctions se réduiront sensiblement à

$$\frac{1}{z - a\sigma^{-1}}, \qquad \frac{1}{z\sigma - a}.$$

Or on a sensiblement :

$$\frac{1}{z\sigma - a} = \frac{1}{z - a\sigma^{-1}}\,\frac{\psi(a)}{\psi(a\sigma^{-1})}.$$

On aura donc sensiblement :

$$(4) \qquad P(z\sigma,\ a) = \frac{\psi(a)}{\psi(a\sigma^{-1})}\,P(z\sigma,\ a\sigma^{-1}).$$

Je veux dire que la différence des deux membres reste finie ; comme chacun des membres est une intégrale de seconde espèce, la différence devra donc être une intégrale de première espèce. Devons-nous dire que cette intégrale se réduit à une constante? Il faudrait pour cela que toutes les périodes que nous avons appelées de première sorte fussent nulles. Supposons donc que S soit une substitution qui corresponde à une période de la première sorte; la fonction $\varphi(a)$ qui figure dans $(3a)$ et $(3\ bis)$ sera nulle. Les périodes de la première sorte du second membre de (4) seront donc nulles. En sera-t-il de même pour le premier membre et, par conséquent, pour la différence des deux membres? Aura-t-on, en d'autres termes,

$$P(zS\sigma, a) = P(z\sigma, a)?$$

Le premier membre peut s'écrire $P(z\sigma S'', a)$, où S'' appartient à G'; la période $\varphi''(a)$ correspondant à S'' devrait être nulle; elle devrait être de la première sorte.

La condition pour que nous ayons le droit de dire que la différence des deux membres de (4) est une constante serait donc que σ transformât toutes les périodes de la première sorte en périodes de la première sorte. Comme il n'en sera pas ainsi en général, tout ce que nous avons le droit de dire, c'est que cette différence est une intégrale de première espèce que j'appellerai $K(z, a, \sigma)$.

L'équation $(3\ bis)$ devient alors :

$$\begin{aligned} P(zS', a\sigma^{-1})\frac{\psi(a)}{\psi(a\sigma^{-1})} &+ K(zS', a, \sigma) \\ &= P(z, a\sigma^{-1})\frac{\psi(a)}{\psi(a\sigma^{-1})} + K(z, a, \sigma) + \varphi(a) \end{aligned}$$

ou

$$\varphi(a\sigma^{-1}, S')\frac{\psi(a)}{\psi(a\sigma^{-1})} + \theta(S', a, \sigma) = \varphi(a, S),$$

en désignant par $\varphi(a, S)$ et $G(a, S)$ les fonctions $\varphi(a)$ et $G(a)$ qui correspondent à la substitution S et par $\theta(S, a, \sigma)$ la période de $K(z, a, \sigma)$ qui correspond à S.

Comme x est une fonction fuchsienne de z admettant le groupe G, elle reprend la même valeur pour $z = a$ et pour $z = a\sigma^{-1}$; on peut donc écrire :

$$\varphi(a\sigma^{-1}, S')\, da\sigma^{-1} + \theta(S', a, \sigma)\, da = \varphi(a, S)\, da,$$

d'où

$$(5) \qquad \int \theta(S', a, \sigma)\, da = G(a, S) - G(a\sigma^{-1}, S') + \text{const.}$$

Le résultat s'énonce donc sous une forme plus simple quand on compare les intégrales de seconde espèce

$$P(z, a), \quad P(z\sigma, a).$$

Alors la période de la première de ces intégrales qui correspond à S serait égale à $\varphi(a)$, de même que la période de la seconde intégrale qui correspond à S'.

Donc les périodes fondamentales de $P(z\sigma, a)$ seraient des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes fondamentales de $P(z, a)$. Seulement, $P(z\sigma, a)$ ne rentrerait pas dans le type des intégrales $P(z, a)$, parce que ses périodes de première espèce ne seraient pas nulles en général.

Pour aller plus loin, cherchons la condition pour qu'il existe une fonction rationnelle $F(x, y)$ de x et de y qui satisfasse à une équation linéaire

$$(1) \qquad \sum \frac{d^q y}{dx^q} P_q(x) = 0$$

d'ordre n. Cette fonction rationnelle sera évidemment égale à une fonction fuchsienne $\Phi(z)$ admettant le groupe G'. Si alors σ est une substitution quelconque de G n'appartenant pas à G', $\Phi(z\sigma)$ satisfera à la même équation, de sorte que les m fonctions fuchsiennes $\Phi(z\sigma)$ ne seront pas linéairement indépendantes et s'exprimeront linéairement à l'aide de n d'entre elles. Il y aura donc entre ces m fonctions $m - n$ relations linéaires. Cette condition est d'ailleurs suffisante.

Soit alors β un des pôles de $\psi(z)$; soient

$$\sigma_1 = 1, \ \sigma_2, \ \sigma_3, \ \ldots, \ \sigma_m$$

m substitutions de G, distinctes par rapport à G', c'est-à-dire telles qu'aucune des combinaisons $\sigma_i \sigma_k^{-1}$ n'appartienne à G'. Considérons les pôles

$$\beta\sigma_1, \quad \beta\sigma_2, \quad \ldots, \quad \beta\sigma_m,$$

et soient

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_m$$

les résidus correspondants de $\Phi(z)$. Si l'un de ces points n'était pas un pôle de $\Phi(z)$, le résidu correspondant serait regardé comme nul.

Posons

$$b_i = a_i \psi(\beta\sigma_i),$$

de façon que

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_m$$

soient les résidus correspondants de la fonction rationnelle $F(x, y)$. Alors ces mêmes points seront encore des pôles pour $\Phi(z\sigma)$ avec les résidus

$$\frac{b_1(\sigma)}{\psi(\beta\sigma_1)}, \quad \frac{b_2(\sigma)}{\psi(\beta\sigma_2)}, \quad \ldots, \quad \frac{b_m(\sigma)}{\psi(\beta\sigma_m)},$$

les lettres $b_1(\sigma)$, $b_2(\sigma)$, ..., $b_m(\sigma)$ n'étant autre chose que les lettres b_1, b_2, ..., b_m placées dans un autre ordre. Il est aisé de voir ce que c'est que cet ordre. On aura

$$b_k(\sigma) = b_i$$

si l'on a

$$\sigma_i \sigma^{-1} = \sigma_k S,$$

S appartenant à G'.

En d'autres termes, les lettres $b_i(\sigma)$ ne sont autre chose que ce que deviennent les lettres b_i quand on les permute en leur faisant subir une des substitutions du groupe simplement transitif H de la relation algébrique (2).

Nous avons dit qu'il y a $m - n$ relations linéaires entre les fonctions $\Phi(z\sigma)$; il y aura les mêmes relations linéaires entre les résidus d'un même pôle, par exemple entre les $b_1(\sigma)$, les mêmes encore entre les $b_2(\sigma)$, les mêmes enfin entre les $b_m(\sigma)$.

Formons alors un déterminant à m lignes et m colonnes, où la $k^{\text{ième}}$ ligne sera formée par les $b_k(\sigma)$, de telle sorte que dans chaque ligne nous retrouvions les mêmes lettres b_1, b_2, ..., b_m dans un ordre différent. C'est ce que M. Frobenius appelle un *déterminant de groupe* (gruppendeterminant).

Il y aura les mêmes $m-n$ relations linéaires entre les éléments des diverses lignes de ce déterminant, c'est-à-dire que *le déterminant s'annulera ainsi que ses mineurs des* $m-n-1$ *premiers ordres.*

Nous venons de voir que la condition nécessaire pour qu'il y ait une fonction rationnelle $F(x, y)$ satisfaisant à une équation linéaire d'ordre n, c'est qu'il existe des nombres b_1, b_2, b_m dont le déterminant satisfasse à la condition que je viens d'énoncer. Je dis que cette condition est également suffisante.

Supposons en effet qu'elle soit remplie et soit $\Phi(z)$ une fonction fuchsienne quelconque; envisageons la combinaison

$$b_1 \Phi(z\sigma_1^{-1}) + b_2 \Phi(z\sigma_2^{-1}) + \ldots + b_m \Phi(z\sigma_m^{-1}) = \Theta(z).$$

Nous pouvons toujours choisir $\Phi(z)$ de telle façon que $\Theta(z)$ ne soit pas identiquement nulle; il suffit par exemple de supposer que $\Phi(z)$ admet le pôle $z=\beta$, sans admettre aucun des pôles

$$z = \beta\sigma_2, \qquad z = \beta\sigma_3, \qquad \ldots, \qquad z = \beta\sigma_m.$$

Cela posé, nous aurons

$$\Theta(z\sigma) = \sum b_i \Phi(z\sigma\sigma_i^{-1}) = \sum b_i \Phi(z\sigma_k^{-1}) = \sum b_k(\sigma)\Phi(z\sigma_k^{-1})$$

si l'on suppose

$$\sigma_i\sigma^{-1} = \sigma_k S = S'\sigma_k,$$

S et S' appartenant à G'.

Ainsi $\Theta(z\sigma)$ est formé comme $\Theta(z)$, sauf que les coefficients b_k sont remplacés par les coefficients $b_k(\sigma)$.

Or, par hypothèse, il y a, entre les quantités $b_k(\sigma)$, $m-n$ relations linéaires de la forme

$$(6) \qquad \sum A\, b_1(\sigma) = \sum A\, b_2(\sigma) = \ldots = \sum A\, b_m(\sigma) = 0.$$

On aura donc également les $m-n$ relations

$$\sum A\, \Theta(z\sigma) = 0,$$

ce qui veut dire que la fonction $\Theta(z)$ satisfera à une équation linéaire d'ordre n. C. Q. F. D.

Soit alors $K(z)$ une intégrale de première espèce quelconque; posons

$$G(z) = \sum b_i K(z\sigma_i^{-1});$$

$G(z)$ sera aussi une intégrale de première espèce et nous aurons

$$\begin{aligned} G(z\sigma) &= \sum b_i K(z\sigma\sigma_i^{-1}) \qquad = \sum b_i K(z\sigma_k^{-1}S) \\ &= \sum b_k(\sigma) K(z\sigma_k^{-1}S) = \sum b_k(\sigma) K(z\sigma_k^{-1}) + \text{const.}, \end{aligned}$$

car, S appartenant à G, on aura

$$K(zS) - K(z) = \text{const.}$$

On a donc, à cause des équations (6),

$$\sum A\, G(z\sigma) = \text{const.} \tag{7}$$

Observons, avant d'aller plus loin, qu'il résulte de nos définitions que

$$b_k(\sigma_k^{-1}\sigma_i) = b_1(\sigma_i) = b_i(\sigma_1) = b_i,$$

et d'ailleurs le sous-groupe G' étant invariant, on aura, pour une substitution S quelconque de G',

$$b_k(\sigma_i) = b_k(S\sigma_i) = b_k(\sigma_i S).$$

Soit alors

$$G(zS\sigma) - G(z\sigma) = \omega(\sigma).$$

Alors $\omega(\sigma)$ sera une constante, puisque ce sera une période de l'intégrale de première espèce $G(z)$ et l'on aura

$$\sum A\, \omega(\sigma) = 0,$$

en mettant en évidence les indices

$$\sum A_i \omega(\sigma_i) = 0. \tag{8}$$

Observons que $\omega(\sigma_1)$ est la période de $G(z)$ qui correspond à S, tandis que $\omega(b_i)$ est la période de $G(z)$ qui correspond à la substitution $\sigma_i^{-1} S \sigma_i$, laquelle appartient aussi au sous-groupe G'.

Donc $\omega(\sigma_k^{-1}\sigma_i)$ correspondra à la substitution $\sigma_i^{-1}\sigma_k S \sigma_k^{-1}\sigma_i$. Or je puis répéter le même raisonnement qui m'a conduit à l'équation (8) en remplaçant S par $\sigma_k S \sigma_k^{-1}$; j'obtiendrai

$$\sum A_i \omega(\sigma_k^{-1}\sigma_i) = 0.$$

Si alors je pose

$$\omega(\sigma_k^{-1}\sigma_i) = \omega_k(\sigma_i),$$

j'aurai, en supprimant les indices i,

$$\sum A\,\omega_1(\sigma) = \sum A\,\omega_2(\sigma) = \ldots = \sum A\,\omega_m(\sigma) = 0. \tag{9}$$

On voit qu'il y a entre les ω les mêmes relations qu'entre les b; les périodes de l'intégrale $G(z)$ peuvent donc jouer le rôle des b.

Tout ce qui précède deviendrait illusoire si $G(z)$ se réduisait à une constante.

Nous sommes donc conduit à nous poser la question suivante :

Peut-il arriver que, quelle que soit l'intégrale $K(z)$ choisie, on ait

$$\sum b_i K(z\sigma_i^{-1}) = \text{const.} \tag{10}$$

Soient alors a un nombre quelconque, $a\sigma_i^{-1}$ un de ses transformés, et soit

$$\frac{d(a\sigma_i^{-1})}{da} = c_i.$$

Soit $K'(z) = \frac{dK}{dz}$ la dérivée de K; nous aurons

$$\sum b_i \frac{d(z\sigma_i^{-1})}{dz} K'(z\sigma_i^{-1}) = 0,$$

ou, en faisant $z = a$,

$$\sum b_i c_i K'(a\sigma_i^{-1}) = 0,$$

quelle que soit l'intégrale $K(z)$ choisie ; nous aurons en particulier

$$\sum b_i c_i \varphi(a\sigma_i^{-1}) = 0,$$

$\varphi(a)$ étant la fonction qui figure dans la relation (3), puisque nous avons vu que cette fonction est la dérivée d'une intégrale de première espèce.

Posons alors

$$\sum b_i c_i P(z, a\sigma_i^{-1}) = H(z);$$

nous aurons, en vertu de la relation (3),

$$H(zS) - H(z) = \sum b_i c_i \varphi(a\sigma_i^{-1}) = 0,$$

c'est-à-dire que toutes les périodes de $H(z)$ seront nulles, c'est-à-dire que $H(z)$ sera une fonction fuchsienne de z et une fonction rationnelle de x et de y. Quant à ses pôles $z = a\sigma^{-1}$, ils correspondront tous à une même valeur de x, $x = x_0$, puisque x est une fonction fuchsienne de z admettant le groupe G, ne changeant pas par conséquent quand on change z en $z\sigma_i^{-1}$. Nous pouvons d'ailleurs supposer que x_0 est fini, puisque a est arbitraire. Tous les pôles sont d'ailleurs simples.

Il y a donc deux cas concevables :

1° Ou bien on peut choisir des intégrales de première espèce telles que, en formant avec leurs périodes un déterminant de groupe de la façon que nous avons dite, ce déterminant s'annule ainsi que ses mineurs des $m - n - 1$ premiers ordres.

2° Ou bien les nombres b sont tels que, pour toutes les intégrales de première espèce $K(z)$, on ait

$$\sum b_i K(z\sigma_i^{-1}) = \text{const.}$$

Nous verrons plus loin que les deux cas peuvent se réaliser.

Quoi qu'il en soit, nous devons retenir les résultats suivants :

1° Quand on passe de l'intégrale $K(z)$ à l'intégrale $K(z\sigma)$, les périodes de cette intégrale subissent une substitution linéaire. *L'ensemble de ces substitutions linéaires dont les coefficients sont des entiers forme un groupe isomorphe à* H.

2° Il y a entre les périodes des intégrales abéliennes un certain nombre de relations. On pourra obtenir de semblables relations de deux manières :

1° Si les nombres b ne sont pas tels que $\sum b_i K(z\sigma_i^{-1}) = \text{const.}$, on en obtiendra en écrivant que le déterminant de groupe formé comme nous l'avons dit est nul ainsi que ses mineurs des $m - n - 1$ premiers ordres.

2° On sait que, entre les périodes de deux intégrales quelconques de première espèce $K(z)$ et $K'(z)$, il y a une relation bilinéaire due à Riemann.

Si nous prenons $K'(z) = K(z\sigma)$, les périodes de $K'(z)$ seront des combinaisons linéaires à coefficients entiers de celles de $K(z)$. Si nous substituons ces combinaisons dans la relation de Riemann à la place des périodes de $K'(z)$, nous aurons entre les périodes de $K(z)$ une relation quadratique à coefficients entiers.

§ 4. — Étude d'un exemple particulier.

Avant d'aller plus loin, je veux appliquer ce qui précède à un exemple simple, et je choisirai un groupe qui a été étudié en détail par M. Klein. Je veux parler du groupe de la résolvante de Galois de l'équation modulaire du septième ordre. Le groupe de Galois de cette résolvante est isomorphe au groupe qui permute les lettres

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \infty$$

de la manière suivante. Une substitution quelconque de ce groupe changera la lettre z (où $z = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ou ∞) en z', où

$$z' \equiv \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \pmod{7},$$

α, β, γ, δ étant des entiers tels que

$$\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1 \pmod{7}.$$

Ce groupe (qui est alors isomorphe à notre groupe H) est d'ordre 168 et peut être considéré comme dérivé de deux substitutions fondamentales

$$\Sigma_2 = (z,\ z+1), \qquad \Sigma_3 = \left(z,\ \frac{5z+2}{z+2}\right).$$

Entre ces deux substitutions, nous avons les relations fondamentales

$$(1) \qquad \Sigma_2^2 = \Sigma_3^7 = (\Sigma_2 \Sigma_3)^3 = 1,$$

et nous en avons encore d'autres, parmi lesquelles je citerai seulement la suivante :

$$(\Sigma_2 \Sigma_3^3)^4 = 1.$$

Construisons maintenant le groupe fuchsien G, auquel H est mériédriquement isomorphe. Pour cela, nous n'aurons qu'à le faire dériver de deux substitutions fondamentales σ_2 et σ_3, entre lesquelles auront lieu les relations fondamentales suivantes, identiques aux relations (1) :

$$(1\ bis) \qquad \sigma_2^2 = \sigma_3^7 = (\sigma_2 \sigma_3)^3 = 1.$$

Le polygone fuchsien correspondant R_0 est un quadrilatère formé de deux triangles symétriques l'un de l'autre (je veux dire symétriques au sens de la Géométrie non euclidienne). Pour chacun de ces triangles, les trois angles sont :

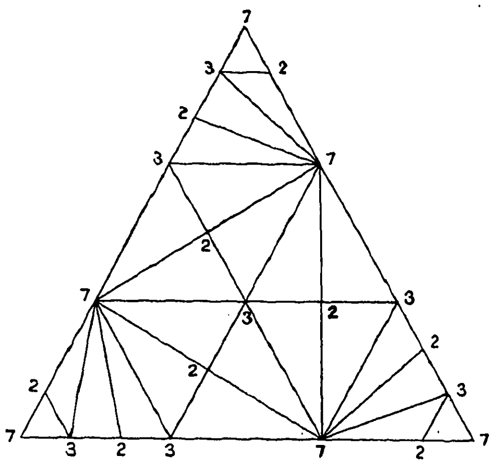
$$\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{7}.$$

Formons maintenant le sous-groupe G', ce sera encore un groupe fuchsien dont le polygone générateur R'_0 sera décomposable en

168 quadrilatères égaux à R_0 (toujours au point de vue non euclidien) ou en 336 triangles d'angles $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}$.

M. Klein a construit ce polygone qui a 14 côtés et est décomposable en 14 triangles équilatéraux égaux dont les angles sont égaux à $\frac{\pi}{7}$. Chacun de ces 14 triangles se décompose lui-même en 24 triangles dont les angles sont $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7}$.

Il suffira de représenter ici l'un de ces 14 triangles. J'ai fait cette représentation schématiquement en remplaçant les triangles curvi-



lignes par des triangles rectilignes; j'ai marqué chaque point par les chiffres 2, 3 ou 7, selon que les angles des triangles qui y aboutissent sont $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{7}$.

La décomposition de chaque triangle se déduit d'ailleurs aisément de celle du triangle contigu, si l'on observe que les deux figures représentant la décomposition de ces deux triangles sont symétriques par rapport au côté commun.

Il reste à définir la façon dont les quatorze côtés du polygone R'_0 sont conjugués.

Pour cela, numérotons ces côtés en faisant le tour du polygone dans le sens direct.

M. Klein a démontré que les côtés

$$1,10, \quad 3,12, \quad 5,14, \quad 7,2, \quad 9,4, \quad 11,6, \quad 13,8$$

sont conjugués.

On voit que les sommets forment deux cycles, l'un comprenant tous les sommets de rang pair, l'autre tous les sommets de rang impair. La somme des angles pour chacun de ces cycles est 2π. D'après la formule bien connue, le genre q est égal à 3.

Soit maintenant $K(z)$ une intégrale abélienne quelconque de première espèce engendrée par le groupe G' et étudions ses périodes.

Soit ε_1 l'intégrale prise le long des côtés 1 et 2,
ε_2 » 3 et 4,
ε_3 » 5 et 6,
ε_4 » 7 et 8,
ε_5 » 9 et 10,
ε_6 » 11 et 12,
ε_7 » 13 et 14.

Ce seront des périodes; car, quand on a parcouru deux côtés consécutifs du polygone, on est passé d'un sommet de rang pair à un sommet de rang impair, c'est-à-dire *appartenant au même cycle*. De plus, on a

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 = 0,$$

car l'intégrale prise le long du polygone entier doit être nulle.

Soient maintenant

$$\zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \zeta_3, \quad \zeta_4, \quad \zeta_5, \quad \zeta_6, \quad \zeta_7$$

les périodes qui correspondent aux substitutions qui changent respectivement les côtés

1 en 10, 2 en 12, 5 en 14, 7 en 2, 9 en 4, 11 en 6, 13 en 8,

nous aurons

$$\zeta_1 = -\varepsilon_6 - \varepsilon_7, \quad \zeta_2 = -\varepsilon_7 - \varepsilon_1, \quad \zeta_3 = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \zeta_4 = -\varepsilon_2 - \varepsilon_3,$$
$$\zeta_5 = -\varepsilon_3 - \varepsilon_4, \quad \zeta_6 = -\varepsilon_4 - \varepsilon_5, \quad \zeta_7 = -\varepsilon_5 - \varepsilon_6.$$

Soit maintenant une seconde intégrale $K'(z)$ ayant pour périodes ε' et ζ', de sorte que l'on ait

$$\zeta'_1 = -\varepsilon'_6 - \varepsilon'_7, \quad \ldots .$$

L'intégrale

$$\int K'\,dK,$$

prise le long du polygone entier devra être nulle, de sorte qu'on aura

$$\zeta'_1\alpha_1 + \zeta'_2\alpha_3 + \zeta'_3\alpha_5 + \zeta'_4\alpha_7 + \zeta'_5\alpha_9 + \zeta'_6\alpha_{11} + \zeta'_7\alpha_{13} = 0,$$

en désignant par α_i l'intégrale K prise le long du côté i, de telle sorte que

$$\alpha_1 + \alpha_{10} = \alpha_3 + \alpha_{12} = \ldots = 0.$$

$$\varepsilon_1 = \alpha_1 - \alpha_7, \qquad \varepsilon_2 = \alpha_3 - \alpha_9, \qquad \varepsilon_3 = \alpha_5 - \alpha_{11}, \qquad \varepsilon_4 = \alpha_7 - \alpha_{13},$$
$$\varepsilon_5 = \alpha_9 - \alpha_1, \qquad \varepsilon_6 = \alpha_{11} - \alpha_3, \qquad \varepsilon_7 = \alpha_{13} - \alpha_5.$$

En remplaçant les ζ' et les α en fonctions des ε' et des ε, on trouve :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon_1\varepsilon'_2 - \varepsilon_2\varepsilon'_1 + \varepsilon_1\varepsilon'_3 - \varepsilon_3\varepsilon'_1 + \varepsilon_1\varepsilon'_5 - \varepsilon_5\varepsilon'_1 + \varepsilon_1\varepsilon'_6 - \varepsilon_6\varepsilon'_1 + \varepsilon_2\varepsilon'_3 \\ - \varepsilon_3\varepsilon'_2 + \varepsilon_2\varepsilon'_6 - \varepsilon_6\varepsilon'_2 + \varepsilon_4\varepsilon'_5 - \varepsilon_5\varepsilon'_4 + \varepsilon_4\varepsilon'_6 - \varepsilon_6\varepsilon'_4 + \varepsilon_5\varepsilon'_6 - \varepsilon_6\varepsilon'_5 = 0, \end{array}\right.$$

que je pourrai écrire sous la forme symbolique :

$$(2\,bis)\quad (12)+(13)+(15)+(16)+(23)+(26)+(45)+(46)+(56)=0.$$

Je remarque que, si nous posons

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_3 - \varepsilon_6 = \gamma_1, \qquad \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 = \gamma_2, \qquad \varepsilon_4 = \gamma_3,$$
$$\varepsilon_5 + \varepsilon_6 = \gamma_4, \qquad \varepsilon_3 = \gamma_5, \qquad \varepsilon_5 = \gamma_5,$$

la relation (2) devient

$$\gamma_1\gamma'_2 - \gamma_2\gamma'_1 + \gamma_3\gamma'_4 - \gamma_4\gamma'_3 + \gamma_5\gamma'_6 - \gamma_6\gamma'_5 = 0,$$

c'est-à-dire que les périodes γ sont les *périodes normales*.

Examinons maintenant l'effet des diverses substitutions du groupe G. Parmi les points de notre polygone, nous distinguons, en particulier, les points (7), c'est-à-dire les points qui sont sommets de quatorze triangles avec un angle $\frac{\pi}{7}$; nous avons d'abord le centre de notre polygone, puis ses quatorze sommets; nous en avons, en outre, un sur chaque côté et un sur chacun des quatorze rayons allant du centre aux sommets. Mais les différents sommets de rang impair ne sont pas réellement distincts, puisqu'ils font partie d'un même cycle et qu'ils sont, par conséquent, *congruents*, c'est-à-dire transformables les uns dans les autres par une substitution du sous-groupe G'. De même pour les sommets de rang pair; de même enfin pour les deux points (7) situés sur deux côtés conjugués.

Nous aurons donc en tout vingt-quatre points (7) réellement distincts.

Considérons la substitution σ_3; c'est une rotation (au sens non euclidien) d'un angle $\frac{2\pi}{7}$ autour du centre du polygone. Cette rotation transforme les uns dans les autres les sommets de rang pair, de même que ceux de rang impair, de sorte qu'elle transforme chacun de ces sommets en un point congruent. Cela nous amène à distinguer parmi nos vingt-quatre points (7) ceux qui correspondent au centre et aux sommets du polygone; je les appellerai les *points* A.

Nous sommes donc conduits à répartir nos vingt-quatre points (7) en huit groupes comprenant chacun trois points (7) distincts; nous les appellerons les points A, les points B, ..., les points H.

Numérotons les sommets, les rayons du polygone dans le sens direct, comme nous avons fait pour les côtés; faisons de même pour les quatorze secteurs ou triangles dans lesquels on peut décomposer ce polygone, et cela de telle sorte que les sommets du côté 1 soient les sommets 1 et 2 et que le secteur 1 soit compris entre le côté 1 et les rayons 1 et 2.

Cela posé, les trois points B seront les points (7) qui se trouvent sur le côté 1 et sur les rayons opposés 6 et 13; les trois points C se trouveront sur le côté 3 et sur les rayons opposés 8 et 1; les trois points D se trouveront sur le côté 5 et sur les rayons opposés 10 et 3; et ainsi de suite.

Dans ces conditions, une rotation d'un angle multiple de $\frac{2\pi}{7}$ autour de l'un des points A change tout point A en un point A, et conserve, par conséquent, la lettre A, et permute circulairement les unes dans les autres les sept autres lettres; de même une rotation d'un angle multiple de $\frac{2\pi}{7}$ autour de l'un des points B conserve la lettre B et permute circulairement les unes dans les autres les sept autres lettres.

Plus généralement, une substitution quelconque de G permutera d'une certaine manière nos huit lettres; de telle sorte que, si elle change, par exemple, un point A en un point B, elle changera tous les autres points A en des points B.

Ces permutations de 8 lettres formeront un groupe qui ne sera autre chose que notre groupe $\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$ de 168 substitutions.

Nous distinguerons en particulier la substitution de σ_3 qui correspond à $(z, z+1)$, la substitution σ_2 qui correspond à $\left(z, \frac{5z+2}{z+2}\right)$, et la substitution σ_4 qui est une combinaison des deux premières et que je définirai comme il suit :

C'est une rotation d'un angle $\frac{2\pi}{3}$ autour du centre de figure du secteur 1, lequel secteur, représenté d'ailleurs sur la figure 1, est, comme nous le savons, un triangle équilatéral. Cette substitution conserve les lettres A et D et permute les autres de la façon suivante :

$$(A)(D)(GCB)(EFH).$$

Chacune des substitutions σ de G change R'_0 en un polygone R''_0 égal à R'_0 (au point de vue non-euclidien) et qui pourrait tout aussi bien que R'_0 engendrer le groupe fuchsien G'.

Soient toujours $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_7$ les périodes de l'intégrale

$$K(z) = K(z\sigma_1)$$

et soit σ une substitution quelconque de G; quelles seront les périodes correspondantes de l'intégrale de première espèce $K(z\sigma)$? Si z décrit une courbe quelconque, $z\sigma$ décrira la transformée de cette courbe par σ; si donc z décrit deux côtés contigus de R'_0, $z\sigma$ décrira les deux côtés contigus correspondants de R''_0; la première période de $K(z\sigma)$ sera donc l'intégrale K prise le long des deux côtés 1 et 2 du polygone R''_0.

En appliquant cette règle, on trouve que les 7 périodes de $K(z\sigma_3)$ sont

$$\varepsilon_2, \quad \varepsilon_3, \quad \varepsilon_4, \quad \varepsilon_5, \quad \varepsilon_6, \quad \varepsilon_7, \quad \varepsilon_1;$$

celles de $K(z\sigma_3^2)$ sont

$$\varepsilon_3, \quad \varepsilon_4, \quad \varepsilon_5, \quad \varepsilon_6, \quad \varepsilon_7, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \ldots$$

et ainsi de suite; celles de $K(z\sigma_4)$ sont (lire le Tableau dans le sens horizontal)

$$\begin{array}{ll}
\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6, & \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_7 + \varepsilon_1, \\
\varepsilon_6 + \varepsilon_7 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, & \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5, \\
\varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7, & \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\
\varepsilon_7 + \varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4; &
\end{array}$$

celles de $K(z\sigma_2)$ sont

$$\varepsilon_4 + \varepsilon_5, \quad \varepsilon_3 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7, \quad -\varepsilon_3, \quad -\varepsilon_2 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6,$$
$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6, \quad -\varepsilon_6, \quad \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_6;$$

celles de $K(z\sigma_2\sigma_3)$ seront

$$\varepsilon_5 + \varepsilon_6, \quad \varepsilon_4 + \varepsilon_7 + \varepsilon_1, \quad -\varepsilon_4, \quad -\varepsilon_3 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7,$$
$$\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7, \quad -\varepsilon_7, \quad \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_7,$$

et ainsi de suite.

Cela posé, reprenons la relation (2) et remplaçons $K'(z)$ successivement par $K(z\sigma_3)$, $K(z\sigma_3^2)$, $K(z\sigma_3^3)$, $K(z\sigma_2)$, $K(z\sigma_2\sigma_3)$, $K(z\sigma_4)$.

Nous pouvons supposer que K ait été choisi de telle sorte que les trois premières périodes soient 1, 0, 0; nous appellerons les trois suivantes x, y, z, de sorte que la septième sera $-1-x-y-z$.

Alors les six premières périodes seront :

pour $K(z)$,

$$1,\quad 0,\quad 0,\quad x,\quad y,\quad z;$$

pour $K(z\sigma_3)$,

$$0,\quad 0,\quad x,\quad y,\quad z,\quad -1-x-y-z;$$

pour $K(z\sigma_3^2)$,

$$0,\quad x,\quad y,\quad z,\quad -1-x-y-z,\quad 1;$$

pour $K(z\sigma_3^3)$,

$$x,\quad y,\quad z,\quad -1-x-y-z,\quad 1,\quad 0;$$

pour $K(z\sigma_2)$,

$$x+y,\quad -1-x-y,\quad 0,\quad -y-z,\quad 1+y+z,\quad -z;$$

pour $K(z\sigma_2\sigma_3)$,

$$y+z,\quad -y-z,\quad -x,\quad 1+x+y,\quad -1-x-y,\quad 1+x+y+z;$$

pour $K(z\sigma_4)$,

$$y+z,\quad -z,\quad -1-x-y,\quad 1+x+y,\quad -1-y\quad y+z+1.$$

On obtient ainsi, par la relation (2), six relations quadratiques en x, y, z qui sont (en changeant les signes au besoin)

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} x^2+2y^2+z^2+2yz+2xy+2y+x+1&=0,\\ x(x+y+z)&=y,\\ y^2+z^2+yz+x+2y+z+1&=0,\\ 0&=0,\\ (y+x)(z-1)-y(y+z)&=0,\\ y^2+xy+yz+x+y+1&=0.\end{aligned}\right.$$

Le point x, y, z doit donc se trouver sur cinq surfaces du second degré; or ces cinq surfaces n'ont que deux points communs qui nous sont donnés par

$$x = 1, \qquad z = -1, \qquad y^2 + y + 2 = 0.$$

L'équation en y admet deux racines

$$y = T = \tau + \tau^2 + \tau^4,$$
$$y = T' = \tau^3 + \tau^5 + \tau^6,$$
$$\tau = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7},$$

d'où

$$T + T' + 1 = 0, \qquad TT' = 2 \quad (^1).$$

Au groupe H vont se trouver liés deux groupes *linéaires* remarquables, qui lui sont isomorphes.

Le premier est celui qui lie les périodes de $K(z\sigma)$ à celles de $K(z)$; par sa nature même, il ne peut contenir que des substitutions à coefficients entiers. Comme le nombre des périodes est de sept, mais qu'il n'y en a que six distinctes, c'est un groupe linéaire à six variables.

Nous prendrons les périodes ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, ε_5, ε_6, et nous trouverons, pour la substitution correspondant à σ_2,

$$\sigma'_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

(1) Quelle est celle de ces deux racines qui convient? Il suffit de se rappeler que si K_1 et K_2 sont les parties réelle et imaginaire de K, l'intégrale $\int K_1\, dK_2$ prise le long du périmètre du polygone. Or cette intégrale, si $x = 1$, $z = -1$, sera trois fois la partie imaginaire de y; nous devons donc prendre $y = T$.

et, pour la substitution correspondant à σ_3,

$$\sigma_3' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Il est aisé de vérifier que le groupe dérivé de ces deux substitutions linéaires σ_2' et σ_3' est d'ordre 168 et isomorphe à H.

Le second groupe est celui que subissent les dérivées des intégrales abéliennes de première espèce; c'est un groupe linéaire à trois variables; c'est celui que M. Jordan avait d'abord oublié dans son énumération, que M. Klein avait deviné et que M. Jordan avait enfin retrouvé dans une analyse plus complète.

Nous avons vu quelles sont les périodes de nos diverses intégrales :

$K(z)$,
$$1, \quad 0, \quad 0, \quad 1, \quad T, \quad -1, \quad T';$$
$K(z\sigma_3)$,
$$0, \quad 0, \quad 1, \quad T, \quad -1, \quad T', \quad 1;$$
$K(z\sigma_3^2)$,
$$0, \quad 1, \quad T, \quad -1, \quad T', \quad 1, \quad 0;$$
$K(z\sigma_3^3)$,
$$1, \quad T, \quad -1, \quad T', \quad 1, \quad 0, \quad 0.$$

Nous tirons de là

$$K(z\sigma_3^3) = K(z) + (T+1)K(z\sigma_3) + TK(z\sigma_3^2) + \text{const.},$$

car il est aisé de vérifier que les périodes de

$$K(z\sigma_3^3) - K(z) - (T+1)K(z\sigma_3) - TK(z\sigma_3^2)$$

sont nulles.

Il résulte de là que quand z se change en $z\sigma_3$ les dérivées des trois intégrales $K(z)$, $K(z\sigma_3)$, $K(z\sigma_3^2)$ subissent la substitution linéaire

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & T+1 & T \end{vmatrix},$$

dont la période est 7 (les racines de l'équation en S sont τ, τ^2, τ^4).

Voici maintenant les périodes des intégrales suivantes :

$K(z\sigma_2)$,

$$T+1, \quad -T-2, \quad 0, \quad 1-T, \quad T, \quad 1, \quad -1,$$

$K(z\sigma_2\sigma_3)$,

$$T-1, \quad 1-T, \quad -1, \quad T+2, \quad -T-2, \quad T+1, \quad -T,$$

$K(z\sigma_2\sigma_3^2)$,

$$-T-2, \quad T+1, \quad -T, \quad T-1, \quad 1-T, \quad -1, \quad T+2;$$

d'où les relations

$$\begin{aligned} K(z\sigma_2) &= (T+1)K(z) \\ &\quad + (T-2)K(z\sigma_3) + (-T-2)K(z\sigma_3^2) + \text{const.}, \\ K(z\sigma_2\sigma_3) &= (T-1)K(z) \\ &\quad + (-2T-3)K(z\sigma_3) + (1-T)K(z\sigma_3^2) + \text{const.}, \\ K(z\sigma_2\sigma_3^2) &= (-T-2)K(z) \\ &\quad + (2-T)K(z\sigma_3) + (T+1)K(z\sigma_3^2) + \text{const.}, \end{aligned}$$

ce qui veut dire que quand z se change en $z\sigma_2$, les dérivées de nos trois intégrales subissent la substitution linéaire

$$\begin{vmatrix} T+1 & T-2 & -T-2 \\ T-1 & -2T-3 & 1-T \\ -T-2 & 2-T & T+1 \end{vmatrix},$$

dont la période est 2.

Considérons maintenant l'intégrale suivante :

$$J_m = \sum_{p=0}^{p=6} K(z\sigma_3^p)\tau^{mp},$$

où m prend l'une des valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Il est clair que si la première période de cette intégrale est ω, les autres seront

$$\omega\tau^{-m},\quad \omega\tau^{-2m},\quad \omega\tau^{-3m},\quad \omega\tau^{-4m},\quad \omega\tau^{-5m},\quad \omega\tau^{-6m}.$$

Mais il peut se faire que cette intégrale se réduise à une constante; c'est ce qui arrive si $\omega = 0$.

Or il est aisé de vérifier que $\omega = 0$ pour

$$m = 0,\qquad m = 1,\qquad m = 2,\qquad m = 4,$$

mais que $\omega \gtrless 0$ pour

$$m = 3,\qquad m = 5,\qquad m = 6.$$

Il y a donc des intégrales dont les sept périodes sont

$$\begin{array}{lllllll}
1, & \tau, & \tau^2, & \tau^3, & \tau^4, & \tau^5, & \tau^6,\\
1, & \tau^2, & \tau^4, & \tau^6, & \tau^8 = \tau, & \tau^{10} = \tau^3, & \tau^{12} = \tau^5,\\
1, & \tau^4, & \tau^8 = \tau, & \tau^{12} = \tau^5, & \tau^{16} = \tau^2, & \tau^{20} = \tau^6, & \tau^{24} = \tau^3,
\end{array}$$

mais il n'y en a pas dont les périodes soient

$$\begin{array}{lllllll}
1, & \tau^3, & \tau^6, & \tau^9, & \tau^{12}, & \tau^{15}, & \tau^{18},\\
1, & \tau^5, & \tau^{10}, & \tau^{15}, & \tau^{20}, & \tau^{25}, & \tau^{30},\\
1, & \tau^6, & \tau^{12}, & \tau^{18}, & \tau^{24}, & \tau^{30}, & \tau^{36},\\
1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1.
\end{array}$$

Une dernière remarque :

L'intégrale $K(z)$ n'a que deux périodes distinctes, 1 et T; elle est donc réductible aux intégrales elliptiques. Les périodes de $K(z\sigma)$, où σ est une substitution quelconque de G, sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers; il en est de même de celles de l'intégrale

$$U = \sum AK(z\sigma),$$

où les A sont des coefficients entiers quelconques et où la sommation s'étend aux 168 substitutions *distinctes* de G.

Les périodes de U sont donc des combinaisons linéaires à coefficients entiers de 1 et de T; cette intégrale est donc réductible aux intégrales elliptiques; *de sorte qu'il y a une infinité d'intégrales réductibles aux intégrales elliptiques.*

§ 5. — Théorèmes de Cartan et Frobenius.

Nous aurons besoin dans la suite de divers résultats obtenus par M. Cartan dans un Mémoire intitulé : *Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, t. XII) et par M. Frobenius dans une série de Mémoires publiés dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin de 1896 à 1901.

Rappelons ces résultats succinctement en insistant un peu sur certains points pour faire voir comment s'éclairent mutuellement les théorèmes de M. Cartan, d'une part, ceux de MM. Dedekind et Frobenius, d'autre part.

Considérons un système d'unités complexes

$$e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_r,$$

dont la multiplication soit associative et non commutative; ces unités donneront naissance à un système S de nombres complexes. Je supposerai qu'il y a dans ce système un *module*, c'est-à-dire un nombre complexe

$$a = \sum a_i e_i$$

tel que l'on ait

$$ax = xa = x,$$

quel que soit le nombre complexe x.

Soient maintenant

$$x = \sum x_i e_i, \qquad y = \sum y_i e_i$$

deux nombres complexes quelconques, et soit

$$z = xy = \sum z_i e_i.$$

Il est clair que les z_i seront des fonctions linéaires des y_i, de sorte qu'à chaque nombre complexe x correspondra une transformation linéaire $\mathrm{T}(x)$ qui transformera les y_i en z_i et dont les coefficients seront des fonctions linéaires et homogènes des x_i.

Soit maintenant l'équation

$$xy = \omega y,$$

où ω est un nombre ordinaire; je puis l'écrire

$$(x - \omega a)y = 0,$$

ce qui exige que le déterminant de la transformation $\mathrm{T}(x - \omega a)$ soit nul. Ce déterminant, je l'appellerai $\Delta(x - \omega a)$.

L'équation

$$\Delta(x - \omega a) = 0$$

est une équation de degré r en ω que M. Cartan appelle l'*équation caractéristique*.

Si l'une des racines de cette équation est nulle, il existera un nombre y qui, multiplié (à gauche) par x, donne un produit nul, de telle sorte que

$$xy = 0$$

et que x peut s'appeler un diviseur de zéro (à gauche); mais M. Cartan ayant démontré qu'un diviseur de zéro (à gauche) est en même temps un diviseur de zéro (à droite), nous pourrons dire simplement un *diviseur de zéro*.

Si *toutes* les racines sont nulles, M. Cartan dit que x est *pseudonul*.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre soit pseudo-nul, c'est qu'une de ses puissances entières soit nulle.

Cela posé, supposons qu'on prenne pour unités complexes r nombres complexes quelconques du système S au lieu de $e_1, e_2, \ldots, e_r$. Soient

$$e'_1, \; e'_2, \quad \ldots, \quad e'_r$$

ces nouvelles unités complexes qui seront des combinaisons linéaires des anciennes.

Soit

$$x = \sum x_i e_i = \sum x'_i e'_i, \qquad y = \sum y_i e_i = \sum y'_i e'_i,$$

$$z = xy = \sum z_i e_i = \sum z'_i e'_i.$$

Que deviendra la substitution $T(x)$ qui changeait les y_i en z_i? elle devra être remplacée par une substitution $T'(x)$ qui changera les y'_i en z'_i. Soit U la substitution linéaire qui change les y_i en y'_i; elle changera également les z_i en z'_i; de sorte qu'on aura

$$T'(x) = U^{-1} T(x) U.$$

c'es-à-dire que T′ est la transformée de T par U.

On peut choisir les nouvelles unités complexes de façon à réduire le système S à sa forme la plus simple. C'est ce que M. Cartan a réussi à faire.

Pour cela, il introduit la notion de sous-système; l'ensemble des combinaisons linéaires de q nombres complexes appartenant à S formera un sous-système σ de S si $q < r$; ce sous-système sera semi-invariant à droite si le produit (à droite) d'un nombre quelconque de σ par un nombre quelconque de S appartient à σ; on définit de même la semi-invariance à gauche; enfin on dit qu'un système est invariant s'il est semi-invariant à la fois à droite et à gauche.

Cela posé, M. Cartan a montré qu'un système simple, c'est-à-dire un système qui ne contient aucun sous-système invariant, ne peut être que ce qu'il appelle un p^2 ion, c'est-à-dire un système à p^2 unités

e_{ij} $(ij = 1, 2, \ldots, p)$ avec la loi de multiplication

$$e_{ij}e_{jl} = e_{il}, \qquad e_{ij}e_{lh} = 0 \qquad (j \gtrless l).$$

Parmi les systèmes qui ne sont pas simples, il distingue d'abord les systèmes semi-simples qui admettent toutes les unités de plusieurs p^2 ions, et cela de telle façon que le produit de deux nombres complexes appartenant à deux p^2 ions différents soit toujours nul.

Enfin les systèmes qui ne sont ni simples, ni semi-simples, admettront toutes les unités d'un système semi-simple et, en outre, un certain nombre d'unités pseudonulles, dont les combinaisons linéaires forment un sous-système invariant dont tous les nombres sont pseudonuls.

Reprenons le déterminant $\Delta(x)$ que nous avons défini plus haut, et décomposons-le en facteurs irréductibles. A chacun des p^2 ions correspondra un de ces facteurs, qui sera de degré p et qui sera élevé à une puissance égale à p si le système est semi-simple et supérieure à p dans le cas contraire.

Tels sont les résultats de M. Cartan. Voyons comment ils peuvent être appliqués à la théorie des groupes.

Considérons un groupe d'ordre fini G ; aux différentes substitutions faisons correspondre des unités complexes, dont la loi de multiplication soit la même que celle des substitutions. Je veux dire que, si les unités e_i, e_j, e_k correspondent respectivement aux substitutions σ_i, σ_j, $\sigma_i\sigma_j$, on ait

$$e_ie_j = e_k.$$

Cette loi est évidemment associative. Envisageons le système de nombres complexes S engendré par ces unités et, d'abord, formons l'équation caractéristique et le déterminant $\Delta(x)$ correspondant, ainsi que la substitution linéaire $T(x)$.

Soit

$$z = \sum x_ie_i, \qquad y = \sum y_ke_k, \qquad z = xy = \sum z_je_j,$$

il vient

$$z = \sum x_iy_ke_j, \qquad z_j = \sum x_iy_k \qquad (e_j = e_ie_k).$$

Convenons d'adopter la notation si commode de M. Frobenius et de poser

$$x_i = x_{j,k} \quad \text{si} \quad e_i = e_k^{-1} e_j;$$

la transformation $T(x)$ s'écrira

$$z_j = \sum x_{j,k} y_k,$$

de telle sorte que l'élément de la $k^{\text{ième}}$ colonne et de la $j^{\text{ième}}$ ligne dans $\Delta(x)$ sera $x_{j,k}$.

Ce déterminant $\Delta(x)$ sera donc un de ceux que M. Frobenius appelle *déterminants de groupe;* nous en avons vu plus haut un exemple au paragraphe 3.

Ainsi l'on voit déjà apparaître un lien entre les travaux de M. Cartan, ceux de M. Frobenius et la question qui nous occupe ici.

Observons qu'il y a dans le système S certains nombres ξ qui jouissent de la propriété d'être *commutables* à tous les nombres du système; je veux dire que l'on aura

$$\xi x = x \xi,$$

x étant un nombre quelconque du système S.

Nous savons, en effet, que les substitutions du groupe G se répartissent en un certain nombre de *classes,* de telle façon que toutes les transformées d'une même substitution par toutes les substitutions de G appartiennent à une même classe.

La somme de toutes les unités complexes correspondant aux diverses substitutions d'une même classe sera un nombre commutable; et tous les nombres commutables seront des combinaisons linéaires des nombres ainsi obtenus.

Ces nombres commutables formeront évidemment un sous-système de nombres complexes à multiplication commutative. C'est ce sous-système que M. Frobenius a étudié dans son premier Mémoire [*Ueber Gruppencharaktere* (*Sitzungsberichte* de Berlin, t. II, 1896)].

Cela posé, on peut se demander si le système S est semi-simple au sens de M. Cartan. La réponse doit être affirmative; en effet, s'il n'était pas semi-simple, il contiendrait un sous-système invariant pseudonul. Or, si un pareil sous-système existait, il contiendrait au moins un nombre commutable. Soit, en effet, $x = \sum x_i e_i$ un nombre quelconque de ce sous-système. Tous les coefficients x_i ne peuvent pas être nuls.

Supposons donc $x_k \gtrless 0$.

Soit σ_k la substitution de G qui correspond à l'unité e_k, et désignons par e_k^{-1} l'unité qui correspond à la substitution inverse σ_k^{-1}. Nous aurons

$$e_k e_k^{-1} = e_1,$$

e_1 étant l'unité qui correspond à la substitution identique. Le nombre

$$x e_k^{-1}$$

fait partie du sous-système, puisque ce sous-système est invariant. Dans ce nombre complexe, le coefficient de e_1 est égal à x_k. De même les nombres

$$e_j^{-1} x e_k^{-1} e_j$$

(où e_j est une quelconque de nos unités) feront partie du sous-système et le coefficient de e_1 sera égal à x_k. Enfin le nombre

$$y = \sum e_j^{-1} x e_k^{-1} e_j$$

fait partie du sous-système; *il devrait donc être pseudonul;* d'ailleurs le coefficient de e_1 est égal à $r x_k$ (r étant l'ordre du groupe G) et, par conséquent, différent de zéro. Donc le nombre y n'est pas nul. De plus, il est aisé de voir que ce nombre y est commutable.

Si donc il y avait un sous-système invariant pseudonul, il y aurait un nombre commutable pseudonul.

Or M. Frobenius a montré qu'il n'y avait pas de nombre commutable pseudonul, ou plutôt il a montré, ce qui revient au même, que le déterminant de certaines quantités qu'il appelle les $p_{\alpha\beta}$ n'est pas nul (*loc. cit.*, p. 990 et 991).

Donc le système S est semi-simple et réductible à un certain nombre de p^2 ions. Or on conclura immédiatement que chaque facteur irréductible du déterminant $\Delta(x)$ est affecté d'un exposant égal à son degré. C'est le théorème fondamental établi d'une manière un peu différente par M. Frobenius dans son second Mémoire [*Ueber die Prinfactoren der Gruppendeterminante* (*Sitz.* de Berlin, t. II, 1896)].

Chaque p^2 ion contient un nombre commutable et un seul; si, en effet, les unités $e'_{\alpha\beta}$ de ce p^2 ion sont choisies de telle sorte que

$$e'_{ij}e'_{jl} = e'_{il}, \qquad e'_{ij}e'_{hl} = 0 \qquad (j \gtrless h),$$

le nombre

$$e'_{11} + e'_{22} + \ldots + e'_{pp}$$

sera commutable à toutes les unités du p^2 ion, et il n'y en aura pas d'autres.

Il sera d'ailleurs commutable également aux unités des autres p^2 ions; car nous savons que le produit de deux nombres appartenant à deux p^2 ions différents est toujours nul.

On peut conclure de là qu'il y a précisément autant de p^2 ions (ou autant de facteurs irréductibles de Δ) qu'il y a de nombres commutables distincts, c'est-à-dire qu'il y a de classes de substitutions dans le groupe G.

Cela posé, on peut appliquer au système S les procédés de M. Cartan et choisir de nouvelles unités

$$e'_1, \quad e'_2, \quad \ldots, \quad e'_r,$$

de façon à réduire le système autant que possible. On aura

$$r = \sum p^2,$$

la sommation s'étendant aux différentes valeurs de p correspondant aux différents p^2 ions; et les unités de chaque p^2 ion seront choisies de telle sorte que

$$e'_{ij}e'_{jl} = e'_{il}, \qquad e'_{ij}e'_{hl} = 0 \qquad (j \gtrless h),$$

et que le produit de deux unités appartenant à deux p^2 ions différents soit nul.

Que devient alors la substitution linéaire $T(x)$; elle se transforme, comme on l'a vu, en

$$T'(x) = U^{-1}T(x)U,$$

U étant la substitution linéaire qui, dans un même nombre complexe, lie les coefficients des nouvelles unités e' à ceux des anciennes unités e; et alors on voit que la substitution $T'(x)$ se décompose en plusieurs substitutions linéaires simultanées.

Désignons les unités nouvelles e' par une notation à trois indices

$$e'_{\alpha\beta\gamma};$$

le premier indice représente le numéro du p^2 ion auquel appartient l'unité, les deux autres indices distinguent les unes des autres les diverses unités d'un même p^2 ion. La loi de multiplication est alors

$$e'_{\alpha\beta\gamma}e'_{\alpha\gamma\delta} = e'_{\alpha\beta\delta},$$

tous les autres produits étant nuls. Dans certains cas, le premier indice deviendra inutile et nous le supprimerons; quand il n'y aura que deux indices ce sera donc le premier indice qui aura été supprimé.

Cela posé, soit

$$x = \sum x_i e_i = \sum x'_{\alpha\beta\gamma}e'_{\alpha\beta\gamma}, \qquad y = \sum y'_{\alpha\beta\gamma}e'_{\alpha\beta\gamma},$$

$$z = xy = \sum z'_{\alpha\beta\gamma}e'_{\alpha\beta\gamma}.$$

Il s'agit d'étudier la transformation $T'(x)$ qui change les y' en z'. On trouve

$$z'_{\alpha\beta\gamma} = \sum x'_{\alpha\beta\delta}y'_{\alpha\delta\gamma},$$

la sommation s'étendant aux différentes valeurs de δ.

Ainsi les variables z' dépendront uniquement des variables y' qui ont même premier indice et même dernier indice, ce qui montre que la transformation $T'(x)$ se décompose en $\sum p$ transformations linéaires partielles à p variables.

J'observe que si je conserve l'indice α et que je change l'indice γ, les coefficients $x'_{\alpha\beta\delta}$ ne changent pas. Les variables $y'_{\alpha\delta\varepsilon}$ subissent donc *la même* transformation linéaire que les variables $y'_{\alpha\delta\gamma}$. Nos $\sum p$ substitutions linéaires partielles sont donc identiques p à p.

Nous devons nous poser maintenant une question. Quand arrive-t-il que le déterminant $\Delta(x)$ est nul ainsi que tous ses mineurs des $k - 1$ premiers ordres? En effet, nous avons vu au paragraphe **3** que le déterminant de groupe formé par les quantités que nous avons appelées $b_i(\sigma)$ devait satisfaire à cette condition.

Si le déterminant $\Delta(x)$ y satisfait, il en sera de même du déterminant de la substitution $T'(x)$ qui n'en est qu'un transformé.

Considérons notre $\alpha^{\text{ième}}$ p^2 — ion et supposons que ce soit un p_α^2 — ion. Supposons que le déterminant des p_α^2 quantités $x'_{\alpha\beta\gamma}$ soit nul ainsi que ses mineurs des $k_\alpha - 1$ premiers ordres, mais que les mineurs d'ordre supérieur ne soient pas tous nuls.

Envisageons l'équation $xy = 0$ qui peut s'écrire

$$\sum_\delta x'_{\alpha\beta\delta} y'_{\alpha\delta\gamma} = 0.$$

Considérons en particulier celles de ces équations qui se rapportent à une valeur donnée de α et à une valeur donnée de γ; elles sont au nombre de p_α correspondant aux différentes valeurs de l'indice β. Comme les mineurs du déterminant des x' sont nuls jusqu'à l'ordre $k_\alpha - 1$; parmi ces équations, $p_\alpha - k_\alpha$ seulement sont distinctes, de sorte que nos p_α inconnues $y'_{\alpha\delta\gamma}$ dépendront encore de k_α arbitraires; il en sera de même des p_α inconnues $y'_{\alpha\delta\varepsilon}$, de sorte que les p_α^2 inconnues y' relatives à notre $\alpha^{\text{ième}}$ p^2-ion dépendent de $k_\alpha p_\alpha$ arbitraires et que les r inconnues y' dépendent en tout de

$$\sum k_\alpha p_\alpha = k$$

arbitraires.

En d'autres termes, le déterminant de $T'(x)$ [et par conséquent aussi le déterminant $\Delta(x)$] sera nul, ainsi que ses mineurs des $k - 1$ premiers ordres.

En d'autres termes encore, l'équation $xy = 0$ admet k solutions distinctes, de sorte qu'on a

$$xy^{(1)} = xy^{(2)} = \ldots = xy^{(k)} = 0,$$

$y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(k)}$ étant k nombres complexes linéairement indépendants, c'est-à-dire que x est k fois diviseur de zéro.

Si nous multiplions x par r nombres complexes quelconques linéairement indépendants, les produits obtenus ne seront pas linéairement indépendants, puisque nous venons de voir que k de leurs combinaisons linéaires sont nulles; parmi ces produits, $r - k$ seulement seront distincts.

Donc x fait partie d'un sous-système semi-invariant à droite de $r - k$ nombres.

De même, x fera partie d'un sous-système semi-invariant à gauche de $r - k$ nombres. Mais il ne faudrait pas en conclure que x fait partie d'un sous-système invariant de $r - k$ nombres, car ces deux sous-systèmes semi-invariants ne sont pas identiques. Du reste, nous n'envisagerons ici que des sous-systèmes semi-invariants à droite.

Nous pourrons dire qu'un sous-système semi-invariant s de h nombres est *premier* quand il ne contiendra aucun sous-système semi-invariant de moins de h nombres, d'où il suit qu'on peut reproduire *tous* les nombres du sous-système s en multipliant un nombre *quelconque* x de ce sous-système par les divers nombres complexes y du système S. Car s'il n'en était pas ainsi, ceux des nombres de s qu'on obtiendrait en multipliant x par les divers nombres de S, ne reproduisant pas le sous-système s tout entier, formeraient un sous-système semi-invariant de moins de h nombres contenu dans s.

Dans un sous-système semi-invariant premier s, tous les coefficients $x'_{\alpha\beta\delta}$ qui ne sont pas nuls ont même premier indice α (et correspondent par conséquent à un même p^2 ion). Et, en effet, supposons qu'il y ait dans s des nombres où deux coefficients x' dont les premiers indices α et α' soient différents, et qui ne soient pas nuls. Multiplions ces nombres par des nombres complexes

$$y = \sum y'_{\alpha\beta\gamma} e'_{\alpha\beta\gamma},$$

où tous les coefficients y' soient nuls, sauf ceux dont le premier indice est α; dans les produits, les coefficients seront aussi tous nuls, sauf ceux dont le premier indice serait α, et ces produits formeront un sous-système semi-invariant contenu dans s; donc s ne serait pas premier.

Je dis maintenant que, dans le sous-système premier s, il y a, entre les p_α^2 coefficients $x'_{\alpha\beta\delta}$, des relations linéaires distinctes de la forme

$$(1) \qquad \sum A_\beta x'_{\alpha\beta\delta} = 0,$$

où les A_β sont des coefficients constants ne dépendant pas des x' ni du second indice δ, et que ces relations sont au nombre de $p_\alpha - 1$, de sorte que, finalement, le sous-système se compose de p_α nombres distincts.

Et, en effet, soit X un nombre quelconque de notre sous-système premier s; tous les nombres du sous-système pourront être obtenus en multipliant l'un quelconque d'entre eux par d'autres nombres complexes, sans quoi ceux qu'on pourrait obtenir de cette façon formeraient un sous-système semi-invariant contenu dans s.

Considérons les nombres $\mathrm{X}e'_{\alpha\beta\gamma}$; ils font tous partie de s, ils ne peuvent pas être tous nuls, et, en effet, si l'on pose

$$e_1 = \sum C_{\alpha\beta\gamma} e'_{\alpha\beta\gamma},$$

il vient

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}e_1 = \sum C_{\alpha\beta\gamma} \mathrm{X} e'_{\alpha\beta\gamma}.$$

Les termes où le premier indice n'est pas égal à α sont déjà tous nuls; si ceux où ce premier indice est α étaient également tous nuls, il faudrait que X fût nul.

Soit donc $\mathrm{X}e'_{\alpha\beta\gamma} \gtrless 0$; le sous-système s pourra être obtenu en multipliant $\mathrm{X}e'_{\alpha\beta\gamma}$ par un nombre complexe quelconque. On obtient ainsi le sous-système semi-invariant

$$\mathrm{X}e'_{\alpha\beta 1}, \quad \mathrm{X}e'_{\alpha\beta 2}, \quad \ldots, \quad \mathrm{X}e'_{\alpha\beta p},$$

qui se compose de p_α nombres et qui doit être identique à s.

Je dis maintenant que tout système semi-invariant non premier peut être décomposé en plusieurs sous-systèmes semi-invariants premiers n'ayant aucun nombre en commun et de telle façon que tout nombre du sous-système total puisse, d'une manière et d'une seule, être regardé comme une somme de nombres appartenant aux divers sous-systèmes composants.

Soit en effet X un nombre appartenant à un sous-système semi-invariant s non premier; nous aurons

$$X = \sum C_{\alpha\beta\gamma} X e'_{\alpha\beta\gamma}.$$

Or $Xe'_{\alpha\beta\gamma}$ appartient à s et appartient en même temps au sous-système premier formé des nombres $Xe'_{\alpha\beta\delta}$ ($\delta = 1, 2, \ldots, p_\alpha$).

Dans ses derniers Mémoires parus dans les *Sitzungsberichte* de Berlin de 1899 à 1901 et intitulés *Darstellung der Gruppen durch lineare Transformationen,* M. Frobenius cherche à former les groupes de substitutions linéaires isomorphes à un groupe fini donné. Ce problème pourrait être résolu en s'appuyant sur les principes suivants :

Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ des variables indépendantes et φ un polynome linéaire et homogène par rapport à ces variables. Soit σ_i une substitution quelconque de G et e_i l'unité complexe correspondante. Soit G′ un groupe de substitutions linéaires entre les n variables ξ, isomorphe à G, et σ'_i la substitution de G′ correspondant à σ_i; soit φe_i ce que devient le polynome φ par cette substitution.

S'il n'y avait entre les fonctions linéaires φe_i aucune relation linéaire, le groupe G′ pourrait être ramené à un groupe de permutations entre les φe_i, et, plus généralement, l'étude du groupe G′ peut se ramener à celle des relations linéaires entre les φe_i.

Soit $X = \sum X_i e_i$ un nombre complexe quelconque; nous poserons

$$\varphi X = \sum X_i \varphi e_i,$$

et alors les relations linéaires cherchées seront de la forme

$$\varphi X = 0.$$

Il nous suffira de remarquer que l'ensemble des nombres X qui satisfont à cette relation forme un sous-système semi-invariant à gauche, et que, inversement, étant donné un sous-système semi-invariant à gauche, on peut s'en servir de cette façon pour définir un groupe linéaire G′ isomorphe à G.

§ 6. — Applications du théorème de Frobenius.

Reprenons, comme dans les paragraphes 2 et 3 : 1° notre groupe fini H d'ordre m; 2° nos groupes fuchsiens G et G′ et les fonctions fuchsiennes correspondantes; 3° les intégrales de première espèce $K(z)$ et les intégrales de seconde espèce $P(z, a)$. Conservons les mêmes notations, de telle sorte que σ désigne une substitution de G et S une substitution de G′.

Envisageons d'autre part, comme au paragraphe 5, le système d'unités complexes

$$(1) \qquad e_1, \quad e_2, \quad \ldots, \quad e_m$$

correspondant au groupe H, de sorte qu'à chaque substitution de G corresponde une substitution de H et, par conséquent, une des unités (1). Supposons qu'on ait réduit le système de nombres complexes correspondant, que j'appellerai *le système* $\sum$, à sa forme canonique (en le décomposant en p^2 ions), et soient

$$e'_{\alpha\beta\gamma}$$

les nouvelles unités complexes, le triple indice ayant même signification que plus haut.

Nous emploierons les notations suivantes : soit $F(z)$ une intégrale abélienne quelconque combinaison des $K(z)$ et $P(z, a)$; considérons

$$F(z\sigma_i^{-1}),$$

σ_i étant une substitution de G. A cette substitution correspondra une unité complexe e_i, mais à cette unité correspondront plusieurs substitutions de G que j'appellerai σ_i, σ'_i, etc., et, par conséquent, plusieurs intégrales $F(z\sigma_i^{-1})$, $F(z\sigma_i'^{-1})$, etc.; mais *toutes ces intégrales ne différeront les unes des autres que par des constantes;* car on aura $\sigma'_i = \sigma_i S$, S appartenant à G'. Si donc je conviens de poser

$$F(z\sigma_i^{-1}) = F(z)e_i,$$

la fonction $F(z)e_i$ sera définie *à une constante près.*

Soit maintenant

$$X = \sum X_i e_i = \sum X'_{\alpha\beta\gamma} e'_{\alpha\beta\gamma},$$

je conviendrai de poser

$$F(z)X = \sum X_i [F(z)e_i].$$

Nous aurons

$$[F(z)e_i]e_k = [F(z\sigma_i^{-1})]e_k = F(z\sigma_k^{-1}\sigma_i^{-1}) = F(z)(e_i e_k),$$

puisque $\sigma_i \sigma_k$ correspond à $e_i e_k$; et plus généralement

$$[F(z)X]Y = F(z)(XY),$$

de sorte que je pourrai écrire simplement $F(z)XY$.

Autre remarque : si $F(z)$ est une intégrale de première espèce, ou se réduit à une fonction algébrique (je veux dire une fonction algébrique de x et de y et, par conséquent, une fonction fuchsienne de z), ou se réduit à une constante, il en sera de même de $F(z)X$.

Si nous rapprochons ces deux remarques, nous verrons que, si l'on considère une fonction $F(z)$ quelconque, l'ensemble des nombres X qui seront tels que la fonction $F(z)X$ jouisse de l'une de ces trois propriétés formeront un sous-système semi-invariant à droite; car il est clair que, si $F(z)X$ jouit d'une de ces propriétés, il en est de même de $F(z)XY$, quel que soit le nombre Y.

Par exemple, nous avons q intégrales de première espèce $K(z)$; supposons

$$q < m$$

et considérons les m intégrales :

$$(2)\qquad K(z\sigma_1),\quad K(z\sigma_2),\quad \ldots,\quad K(z\sigma_m);$$

il y aura entre elles au moins $m-q$ relations linéaires distinctes. Or une combinaison linéaire quelconque des intégrales (2) peut s'écrire d'après notre nouvelle notation

$$K(z)X,$$

X étant un nombre complexe du système $\sum$. Parmi ces combinaisons, il y en aura (pour le moins $m-q$) qui se réduiront à des constantes et les nombres X correspondants formeront un sous-système semi-invariant.

Supposons que, parmi les intégrales (2), il y en ait q' qui soient linéairement indépendantes; le nombre q' sera au plus égal au genre q; d'où $q' \leqq q$.

Quoi qu'il en soit, le sous-système semi-invariant formé par les nombres X tels que $K(z)X = \text{const.}$ comprendra précisément $m-q'$ nombres complexes linéairement indépendants.

Considérons maintenant l'ensemble des nombres X tels que l'on ait *à la fois* [pour toutes les intégrales (2)] :

$$K(z\sigma_1)X = \text{const.},\quad K(z\sigma_2)X = \text{const.},\quad \ldots,\quad K(z\sigma_m)X = \text{const.}$$

Cet ensemble formera un sous-système non plus semi-invariant, mais *invariant*, car il est clair qu'on aura

$$K(z)YX = \text{const.},\qquad K(z)YXZ = \text{const.},$$

Y et Z étant deux nombres complexes quelconques.

Cela posé, nous dirons qu'une intégrale de première espèce $K(z)$ *appartient* à un p^2 ion Π si l'on a

$$K(z)X = \text{const.},$$

X étant un nombre complexe quelconque faisant partie d'un p^2 ion autre que Π, et si la même relation n'a pas lieu pour *tous* les nombres complexes de Π.

Il résulte de cette définition que toute intégrale de première espèce peut être regardée comme la somme de plusieurs autres dont chacune *appartient* à un p^2 ion déterminé.

Soit, en effet,

$$K(z) = K(z\sigma_1) = K(z)e_1$$

cette intégrale, nous pouvons écrire :

$$e_1 = X_1 + X_2 + \ldots + X_p,$$

chacun des nombres X_i faisant partie d'un p^2 ion déterminé. Nous aurons alors

$$K(z) = K(z)X_1 + K(z)X_2 + \ldots + K(z)X_p.$$

Alors $K(z)X_i$ ou bien se réduira à une constante ou appartiendra au même p^2 ion que X_i; car on aura évidemment

$$K(z)X_iX_k = \text{const.},$$

si X_k fait partie d'un autre p^2 ion que X_i, puisque alors on aurait $X_iX_k = 0$, et, d'autre part, si X_i et X_k font partie du même p^2 ion, on n'aura pas la même relation, quel que soit X_k, puisqu'il y a un nombre X_k tel que $X_iX_k = X_i$.

Examinons maintenant ce qui se passe, s'il y a des p^2 ions auxquels n'appartient aucune intégrale de première espèce, et il y en aura forcément si $m > q$. Soit X un nombre d'un de ces p^2 ions et $K(z)$ une intégrale quelconque, on aura :

$$(3) \qquad K(z)X = \text{const.}$$

Considérons les périodes de nos intégrales; les périodes de $K(z\sigma_i^{-1})$ seront des combinaisons linéaires à coefficients entiers de celles de $K(z)$ et les coefficients entiers de ces combinaisons pourront être déterminés comme nous l'avons vu au paragraphe 3. Celles de $K(z)X$ seront encore des combinaisons linéaires de celles de $K(z)$; mais les coefficients ne seront plus entiers; ces coefficients toutefois seront aisés à déterminer, puisque ce seront à leur tour des combinaisons linéaires à coefficients entiers des coefficients X_i du nombre complexe

$$X = \sum X_i e_i.$$

Si alors ω est une période de $K(z)$ et si ωX est la période correspondante de $K(z)X$, alors, en vertu de (3), on aura :

$$\omega X = 0. \tag{4}$$

La relation (4) est une relation linéaire entre les périodes de $K(z)$ et, d'après nos hypothèses, ces relations doivent avoir lieu pour toutes les intégrales $K(z)$.

Or nous savons qu'il existe q intégrales admettant chacune $2q$ périodes.

Parmi ces périodes q peuvent être choisies arbitrairement; il y a donc entre les $2q$ périodes q relations qui restent vraies pour toutes les intégrales et il n'y en a que q.

Ces relations sont bien connues. Si $K(z)$ et $K'(z)$ sont deux intégrales quelconques, on sait qu'il y a entre les périodes de ces deux intégrales une relation bilinéaire à coefficients entiers, dite de Riemann, qui s'écrira, par exemple:

$$\omega_1\omega'_1 - \omega_2\omega'_2 + \omega_3\omega'_3 - \omega_4\omega'_4 + \ldots + \omega_{2q-1}\omega'_{2q} - \omega_{2q}\omega'_{2q-1} = 0,$$

si les ω_i sont les périodes normales de $K(z)$ et les ω'_i celles de $K'(z)$.

Si, dans ces relations bilinéaires, on prend pour $K'(z)$ successivement q intégrales de première espèce linéairement indépendantes, on aura, entre les périodes de $K(z)$, q relations linéaires distinctes et qui resteront les mêmes quelle que soit l'intégrale $K(z)$. *Il ne peut y avoir d'autre relation linéaire entre ces périodes.*

Donc, de deux choses l'une : ou bien la relation (4) sera une identité, et alors tous les coefficients de cette relation devront s'annuler, ce qui nous donnera *un certain nombre de relations linéaires à coefficients entiers entre les* X_i $\Big($c'est-à-dire entre les coefficients du nombre complexe $X = \sum X_i e_i\Big)$, *qui seront vraies pour tous les nombres complexes du p² ion considéré.*

Ou bien la relation (4) est l'une des relations dont nous venons de parler, que l'on obtient à l'aide d'une intégrale $K'(z)$ et dont les coefficients sont des périodes de cette intégrale $K'(z)$; et alors *il y aura une intégrale de première espèce dont les périodes seront des combinaisons linéaires à coefficients entiers des* X_i.

Pour savoir lequel de ces deux cas se présentera, je considère l'intégrale de seconde espèce $P(z, a)$ et je forme

$$P(z, a)X.$$

On démontrerait de la même manière : 1° que les nombres X tels que $P(z, a)X$, soit une fonction algébrique, forment un sous-système semi-invariant à droite; 2° que les nombres X tels que tous les $P(z\sigma, a)X$, soient des fonctions algébriques, forment un système invariant; 3° qu'une intégrale de seconde espèce quelconque peut toujours être décomposée en une somme d'une fonction algébrique et de plusieurs intégrales de seconde espèce appartenant chacune à un p^2 ion déterminé.

Il convient, bien entendu, de dire que $P(z, a)$ appartient au p^2 ion Π, si $P(z, a)X$ est algébrique quand X est un nombre complexe quelconque faisant partie d'un p^2 ion autre que Π et si cela n'est plus vrai quand X fait partie de Π (ou du moins pour tous les nombres complexes X faisant partie de Π).

Soit alors un p^2 ion auquel n'appartienne aucune intégrale de seconde espèce; soit $\varphi(a)$ l'une des périodes de $P(z, a)$ et $\varphi(a)X$ la période correspondante de $P(z, a)X$, on devra avoir

$$\varphi(a)X = 0, \tag{4 bis}$$

X étant un nombre quelconque du p^2 ion envisagé et quelle que soit l'intégrale $P(z, a)$.

La relation (4 *bis*) est une relation linéaire entre les périodes de $P(z, a)$ formée avec ces périodes comme la relation (4) l'était avec celles de $K(z)$. Mais ces périodes d'une intégrale de deuxième espèce peuvent être choisies arbitrairement.

Donc la relation (4 *bis*) est une identité, et il en est de même de la relation (4).

On est donc dans le premier cas et il y a entre les X_i des relations linéaires à coefficients entiers.

Soit maintenant un p^2 ion auquel n'appartienne aucune intégrale de première espèce et auquel appartienne pourtant une intégrale de deuxième espèce. Alors la relation (4) ne pourra être une identité, sans quoi il en serait de même de (4 *bis*) et $P(z, a)X$ serait algébrique quelle que soit $P(z, a)$, contrairement à l'hypothèse.

On est donc dans le second cas et il y a une intégrale de première espèce dont les périodes sont des combinaisons à coefficients entiers des X_i.

Nous devons donc distinguer trois sortes de p^2 ions :

Première sorte : *Tous les* $P(z, a)X$ *sont des fonctions algébriques.*

Deuxième sorte : *Tous les* $P(z, a)X$ *ne sont pas des fonctions algébriques, mais tous les* $K(z)X$ *sont des constantes.*

Troisième sorte : *Tous les* $K(z)X$ *ne sont pas des constantes.*

Plaçons-nous à un autre point de vue. Considérons les unités complexes (1) $e_1, e_2, \ldots, e_m$: elles seront liées aux unités complexes nouvelles $e'_{\alpha\beta\gamma}$ par des relations linéaires à coefficients constants. On aura, par exemple,

$$e'_{\alpha\beta\gamma} = \sum A_i e_i,$$

et les coefficients A_i seront des nombres *algébriques*. Supposons que pour l'un des p^2 ions, que j'appellerai le p^2 ion Π_α, les coefficients A_i qui entrent dans les expressions des unités $e'_{\alpha\beta\gamma}$ soient des fonctions rationnelles à coefficients entiers d'une certaine racine ζ d'une équation algébrique L à coefficients entiers.

Plus généralement, supposons que le p^2 ion Π_α puisse être engendré par p^2 unités fondamentales e'', qui pourront être différentes des unités canoniques $e'_{\alpha\beta\gamma}$, et que l'on ait

$$e'' = \sum A_i e_i,$$

les A_i étant des fonctions rationnelles de ζ.

Il suffit pour cela que le nombre commutable qui fait partie de Π_α ait ses coefficients rationnels en ζ. En effet, on obtiendra les nombres de Π_α en multipliant ce nombre commutable par un nombre complexe quelconque. Si nous multiplions ce nombre commutable par des nombres complexes entiers, les produits auront leurs coefficients rationnels en ζ et l'on pourra choisir les p^2 unités fondamentales parmi les produits ainsi obtenus.

Soient ζ', ζ'', ... les autres racines de cette équation L. Soit B_i ce que devient A_i quand on y remplace ζ par ζ'; il existera un autre p^2 ion Π_δ dont les unités fondamentales seront

$$\sum B_i e_i.$$

Les p^2 ions Π_α, Π_δ et ceux qu'on formerait avec ζ'', ..., comme on a formé Π_δ avec ζ', seront dits *conjugués*.

Il peut arriver, il est vrai, que Π_α, Π_δ et tous les p^2 ions conjugués se confondent en un seul et c'est ce qui arrive en particulier avec les quaternions ordinaires de Hamilton, si l'on veut faire dériver ces quaternions des unités canoniques $e'_{\alpha\beta\gamma}$; mais si l'on ne s'astreint pas à choisir ces unités canoniques comme unités fondamentales, on peut toujours supposer que tous les conjugués de Π_α sont distincts. Il suffit pour cela de prendre pour unités fondamentales p^2 produits du nombre commutable par des nombres complexes entiers.

Je dis que si un p^2 ion est de la première sorte, il en sera de même de tous ses conjugués.

En effet, la condition nécessaire et suffisante pour que Π_α soit de la première sorte, c'est que la relation (4), pour tous les nombres de ce p^2 ion, se réduise à une identité, c'est-à-dire que l'on ait *identiquement*, pour toutes les unités fondamentales de Π_α,

$$\omega e'' = 0,$$

quelle que soit la période ω choisie, c'est-à-dire enfin que l'on ait, pour toutes ces unités fondamentales, certaines relations

$$\sum m_i A_i = 0,$$

dont les coefficients m_i sont des entiers faciles à déterminer.

Mais, comme ces coefficients sont entiers, les relations devront subsister quand on y remplacera ζ par ζ'; on aura donc encore

$$\sum m_i B_i = 0,$$

de sorte que Π_δ sera encore de la première sorte.

Remarquons maintenant que le nombre des intégrales de première espèce appartenant à un p^2 ion (d'ordre p) est toujours un multiple de p. Et, en effet, partons d'une intégrale $K(z)$ quelconque et formons les diverses intégrales $K(z)X$, où X est un nombre complexe du p^2 ion considéré; il y en aura p^2, puisqu'il y a p^2 nombres X dans le p^2 ion, mais elles ne seront pas toutes distinctes; il peut y avoir en effet des relations de la forme

$$K(z)X = \text{const.} \tag{5}$$

Nous savons que les nombres X jouissant de cette propriété forment un sous-système semi-invariant à droite et il en est de même des nombres X jouissant de cette propriété et faisant partie de notre p^2 ion.

Or, les sous-systèmes semi-invariants faisant partie de ce p^2 ion peuvent être décomposés en un certain nombre de sous-systèmes semi-invariants *premiers* contenant chacun p nombres. Le nombre des relations (5) distinctes sera donc un multiple de p et il en sera de même par conséquent du nombre des intégrales $K(z)X$ *distinctes*.

Nous pouvons dire que les intégrales $K(z)$ *dérivent* de l'intégrale $K(z)$, où X est un nombre quelconque du p^2 ion.

Il en résultera que le nombre des intégrales distinctes qui dérivent d'une même intégrale et qui appartiennent à un même p^2 ion est un multiple de p.

Nous dirons qu'un système d'intégrales est *fermé*, si elles appartiennent à un même p^2 ion et si toutes les intégrales qui dérivent d'une intégrale du système font également partie du système. Nous dirons qu'un système fermé est *premier* s'il ne contient aucun système fermé plus petit.

Je dis alors qu'un système fermé premier quelconque se compose de

p intégrales. Je n'ai qu'à répéter les raisonnements que j'ai faits au paragraphe 5 à propos des sous-systèmes semi-invariants premiers. Le système étant premier, toute intégrale du système pourra être regardée comme dérivant de l'une quelconque d'entre elles $K(z)$, ou encore de $K(z)e'_{\alpha\beta\gamma}$ [à moins que $K(z)e'_{\alpha\beta\gamma}$ ne se réduise à une constante]; mais cela ne peut pas être vrai de tous les $K(z)e'_{\alpha\beta\gamma}$, sans quoi

$$K(z) = K(z)e_1 = \sum C_{\alpha\beta\gamma} K(z) e'_{\alpha\beta\gamma}$$

se réduirait à une constante. Mais les intégrales dérivant de $K(z)e'_{\alpha\beta\gamma}$ sont les intégrales

$$K(z)e'_{\alpha\beta\delta} \qquad (\delta = 1, 2, \ldots, p),$$

et elles sont au nombre de p. C. Q. F. D.

Je dis maintenant qu'un système fermé quelconque peut être décomposé en systèmes premiers. Car si $K(z)$ est une intégrale quelconque du système, on peut écrire

$$K(z) = K(z)e_1 = \sum C_{\alpha\beta\gamma} K(z) e'_{\alpha\beta\gamma}.$$

D'ailleurs nous pouvons toujours supposer que ces systèmes premiers sont distincts, c'est-à-dire qu'il n'y a entre les intégrales de ces systèmes premiers aucune relation linéaire, sans quoi on se servirait de ces relations linéaires pour éliminer les systèmes premiers qui ne seraient pas distincts des autres.

On en conclut aisément que le nombre des intégrales d'un système fermé quelconque et, en particulier, le nombre total des intégrales distinctes appartenant à un p^2 ion est toujours un multiple de p.

Examinons maintenant les relations entre les périodes. Soit

$$K(zS\sigma_i^{-1}) - K(z\sigma_i^{-1}) = \omega e_i,$$

S appartenant à G′ et

$$\omega X = \sum X_i(\omega e_i)$$

si $X = \sum X_i e_i$. Quels sont les nombres complexes X pour lesquels on a

$$\omega X = 0?$$

1° Je suppose d'abord que ωX reste nul *quelle que soit l'intégrale* K pour une substitution S donnée de G'; on aura

$$\omega' e_i = K'(zS\sigma_i^{-1}) - K'(z\sigma_i^{-1}),$$

et, si l'on prend $K'(z) = K(z\sigma_k^{-1})$,

$$\omega' e_i = K(zS\sigma_i^{-1}\sigma_k^{-1}) - K(z\sigma_i^{-1}\sigma_k^{-1}) = \omega e_k e_i,$$

$$\omega' X = \sum X_i(\omega e_k e_i) = \omega e_k X.$$

Comme on doit avoir $\omega' X = 0$, on aura

$$\omega e_k X = 0,$$

et, par conséquent,

$$\omega Y X = 0,$$

quel que soit le nombre complexe Y.

Les nombres X *formeront un sous-système semi-invariant à gauche.*

2° Je suppose que ωX reste nul pour une intégrale K donnée *pour toutes les substitutions* S de G'.

Alors

$$\omega X e_k = \sum X_i \omega e_i e_k = \sum X_i[K(zS\sigma_k^{-1}\sigma_i^{-1}) - K(z\sigma_k^{-1}\sigma_i^{-1})].$$

Mais, G' étant un sous-groupe invariant, on a

$$S\sigma_k^{-1} = \sigma_k^{-1}S',$$

S' appartenant à G', d'où

$$\begin{aligned}\omega X e_k &= \sum X_i[K(z\sigma_k^{-1}S'\sigma_i^{-1}) - K(z\sigma_k^{-1}\sigma_i^{-1})] \\ &= \sum X_i[K(zS'\sigma_i^{-1}) - K(z\sigma_i^{-1})].\end{aligned}$$

Or nous pouvons poser

$$K(zS'\sigma_i^{-1}) - K(z\sigma_i^{-1}) = \omega' e_i,$$

ω' étant une période telle que, d'après notre hypothèse, $\omega'X$ soit nul; on aura donc :

$$\omega X e_k = \sum X_i(\omega' e_i) = \omega' X = 0.$$

Donc ωe_k et ωXY seront nuls, Y étant un nombre complexe quelconque.

Les nombres X *formeront un sous-système semi-invariant à droite.*

Les nombres X pour lesquels $\omega X = 0$ pour toutes les intégrales $K(z)$ et pour toutes les substitutions S formeront évidemment un système invariant; ce système nous est déjà connu, puisqu'il est formé de tous les p^2 ions de la première sorte.

Nous avons vu au paragraphe 3 qu'au groupe H se rattachent deux groupes linéaires remarquables; étudions ces deux groupes de la façon que nous avons expliquée à la fin du paragraphe 5 et d'abord le groupe à coefficients entiers que subissent les périodes.

Il s'agit de rechercher les relations de la forme $\omega X = 0$, qui sont vraies pour toutes les intégrales $K(z)$ et pour une substitution S donnée; d'après ce que nous venons de voir, les nombres X formeront un sous-système semi-invariant à gauche, comprenant d'abord tous les p^2 ions de la première sorte et comprenant encore d'autres nombres complexes.

De plus, on peut supposer, vu la nature du groupe, que tous les nombres X sont entiers.

Convenons donc de dire qu'un ensemble de nombres complexes entiers forme un *sous-système entier semi-invariant à gauche* quand tout nombre du sous-système multiplié à gauche par un nombre *entier* quelconque du système total fait encore partie du sous-système. Alors les nombres X formeront un sous-système *entier* semi-invariant à gauche.

Il est clair que, si l'on considère un p^2 ion et tous ses conjugués, leur ensemble formera un sous-système invariant, et que les nombres entiers de ce sous-système formeront un *sous-système invariant entier*. Les sous-systèmes invariants entiers formés de cette façon avec les p^2 ions de la première sorte feront évidemment partie du sous-système des nombres X, mais ce sous-système comprend encore d'autres nombres complexes.

Ce sous-système des nombres X peut être décomposé en *sous-systèmes semi-invariants entiers premiers,* si j'appelle ainsi les sous-systèmes semi-invariants entiers qui n'en contiennent pas d'autre plus restreint.

Comment peut-on former les sous-systèmes semi-invariants entiers premiers? Considérons un sous-système semi-invariant premier *non entier;* soit Σ ce sous-système, il appartiendra à un certain p^2 ion Π et se composera de p nombres distincts (si p est l'ordre de Π).

Soient Σ', Σ'', ... les sous-systèmes *conjugués* de Σ (au sens arithmétique donné plus haut à ce mot). L'ensemble des systèmes Σ, Σ', Σ'', ... formera un nouveau sous-système semi-invariant qui (à l'inverse de ce qui arrive pour chacun des systèmes partiels Σ, Σ', ...) contiendra des nombres entiers. Les nombres entiers de ce système formeront un sous-système semi-invariant entier que j'appelle Σ_1.

Voici comment on peut former les nombres de ce sous-système. Soit X un nombre de Σ, dont les coefficients X_i seront les fonctions rationnelles de la quantité algébrique ζ envisagée plus haut; soient X', X'', ... les nombres conjugués de X, où ζ est remplacé par ζ', ζ'', ... Soit ensuite R une fonction rationnelle quelconque de ζ; soient R', R'', ... les fonctions correspondantes de ζ', ζ'', ... Le nombre complexe

$$(X) = XR + X'R' + X''R'' + \ldots$$

sera rationnel et, en le multipliant par un entier ordinaire convenable, on obtiendra un nombre entier complexe. On obtiendra de la sorte tous les nombres du sous-système Σ_1.

Maintenant, ce sous-système entier est-il premier? Il me suffit, pour le décider, de chercher si, en multipliant à gauche un nombre entier *quelconque* du sous-système par un nombre complexe convenable, on peut retrouver un nombre entier *quelconque* du sous-système.

Nous pouvons toujours supposer que tous les p^2 ions conjugués de Π sont distincts.

Dans ce cas, tous les nombres X, X′, X″, ... appartiennent à des p^2 ions distincts. Soient alors Y et Z deux nombres appartenant au même sous-système que X; soient S et U deux fonctions rationnelles de ζ; soient Y′, Y″, ..., Z′, Z″, ..., S′, S″, ..., U′, U″, ... leurs conjugués. Les nombres Y et X′ appartenant à des p^2 ions différents, les produits tels que YX′ seront nuls.

Cela posé, considérons les nombres complexes

$$\begin{aligned}(\mathrm{Y}) &= \mathrm{YS} + \mathrm{Y'S'} + \mathrm{Y''S''} + \ldots,\\ (\mathrm{Z}) &= \mathrm{ZU} + \mathrm{Z'U'} + \mathrm{Z''U''} + \ldots.\end{aligned}$$

On aura alors :

$$(\mathrm{YX}) = \mathrm{YXRS} + \mathrm{Y'X'R'S'} + \mathrm{Y''X''R''S''} + \ldots.$$

Or, le sous-système semi-invariant dont fait partie X étant premier, on peut choisir Y de façon que YX ou YXRS soit égal à un nombre quelconque du sous-système; nous supposerons donc

$$\mathrm{YXRS} = \mathrm{U},$$

d'où, en changeant ζ en ζ', ζ'', ...,

$$\mathrm{Y'X'R'S'} = \mathrm{Z'U'}, \qquad \mathrm{Y''X''R''S''} = \mathrm{Z''U''}, \qquad \ldots,$$

et enfin

$$(\mathrm{Z}) = (\mathrm{Y})(\mathrm{X}).$$

Or (Z) et (X) sont deux nombres *quelconques* du système Σ_1; on peut néanmoins trouver un nombre (Y) qui, multiplié par (X), reproduise (Z). Donc notre sous-système est premier. C. Q. F. D.

Ces considérations suffisent pour nous faire comprendre l'origine et la nature du groupe linéaire à coefficients entiers dont il s'agit.

Passons à l'autre groupe : quand on change z en $z\sigma_i$, les intégrales de première espèce $\mathrm{K}(z)$ subissent une substitution linéaire; nous avons posé

$$K(z\sigma_i^{-1}) = K(z)e_i, \qquad K(z)X = \sum X_i K(z)e_i.$$

L'étude du groupe en question revient à chercher les nombres X tels que $K(z)X = \text{const.}$; nous avons vu que ces nombres forment un sous-système semi-invariant à droite; ce sous-système comprend d'abord tous les p^2 ions de première et de deuxième sorte, puis un certain nombre de sous-systèmes semi-invariants premiers contenus dans les p^2 ions de la troisième sorte.

On s'étonnera peut-être que ce sous-système soit semi-invariant à droite, puisque nous avons vu à la fin du paragraphe 5 que les nombres complexes X qui servent à la définition d'un groupe doivent former un sous-système semi-invariant à gauche.

Il est aisé de voir d'où vient la différence. Supposons qu'on ait posé

$$K(z\sigma_i) = (K)e_i, \qquad (K)Y = \sum Y_i (K)e_i.$$

Nous nous serions retrouvés dans les mêmes conditions qu'à la fin du paragraphe 5, et les nombres Y auraient dû former un sous-système semi-invariant à gauche. C'est, en effet, ce qui arrive. Nous avons

$$(K)Y = \sum Y_i K(z\sigma_i), \qquad K(z)X = \sum X_i K(z\sigma_i^{-1}).$$

On aura donc $(K)Y = K(z)X$ si

$$Y = \sum X_i e_i^{-1}.$$

Soit maintenant :

$$X' = Xe_k = \sum X'_i e_i, \qquad Y' = \sum X'_i e_i^{-1};$$

il est aisé de voir que $Y' = e_k Y$, ce qui prouve que si les X forment un sous-système semi-invariant à droite, les Y formeront un sous-système semi-invariant à gauche.

A la fin du paragraphe 3, nous avons été amenés à considérer certains nombres que nous avons appelés b_i et avec lesquels nous avons formé un déterminant de groupe. Ces nombres devaient être choisis de telle façon que ce déterminant s'annule ainsi que ses mineurs jusqu'à un certain ordre. Nous avons distingué ensuite deux cas suivant que les sommes $\sum b_i \mathrm{K}(z\sigma_i^{-1})$ se réduisaient ou non à des constantes quelle que soit l'intégrale K choisie.

Je dis maintenant que les deux cas peuvent se présenter. Et, en effet, pour que notre déterminant s'annule ainsi que ses mineurs des premiers ordres, il suffit, par exemple, que le nombre $\sum b_i e_i$ appartienne à un p^2 ion. Alors le premier cas se présentera si ce p^2 ion est de la première ou de la deuxième sorte, et le second cas si le p^2 ion est de la troisième sorte.

§ 7. — Application à l'exemple du paragraphe 4.

Reprenons l'exemple du paragraphe 4, où le groupe H se composait de 168 substitutions. Ces 168 substitutions se répartissent en six classes (en groupant dans la même classe la substitution σ_i et ses transformées $\sigma_k^{-1}\sigma_i\sigma_k$); je désignerai ces six classes par les lettres E, P, Q, R, S, S_2 :

La classe	E	comprendra	1	substitution de période	1	(substitution identique σ_1).
»	P	»	24	»	7	
»	Q	»	24	»	7	
»	R	»	56	»	3	
»	S	»	42	»	4	
»	S_2	»	21	»	2	
			168			

Désignons alors par les lettres

$$\mathrm{E}=e_1,\quad \mathrm{P},\quad \mathrm{Q},\quad \mathrm{R},\quad \mathrm{S},\quad \mathrm{S}_2$$

les nombres complexes obtenus en faisant la somme des unités complexes correspondant aux diverses substitutions de la classe désignée par la même lettre. Ces six nombres seront commutables.

D'après M. Frobenius [*loco citato* (*Die Gruppencharactere*), *in fine*], le système des nombres complexes se décompose en six p^2 ions; chacun de ces p^2 ions contient un nombre commutable et un seul, et ce nombre suffit pour le caractériser, puisque tous les autres nombres du p^2 ion s'obtiennent en le multipliant par un nombre complexe quelconque. Nous avons donc six nombres commutables remarquables que j'appellerai

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \mathrm{E} + \mathrm{P} + \mathrm{Q} + \mathrm{R} + \mathrm{S} + \mathrm{S}_2,\\
\alpha_2 &= 7\mathrm{E} + \mathrm{R} - \mathrm{S} - \mathrm{S}_2,\\
\alpha_3 &= 3\mathrm{E} + \mathrm{TP} + \mathrm{T'Q} + \mathrm{S} - \mathrm{S}_2,\\
\alpha_4 &= 3\mathrm{E} + \mathrm{T'P} + \mathrm{TQ} + \mathrm{S} - \mathrm{S}_2,\\
\alpha_5 &= 8\mathrm{E} + \mathrm{P} + \mathrm{Q} - \mathrm{R},\\
\alpha_6 &= 6\mathrm{E} - \mathrm{P} - \mathrm{Q} + 2\mathrm{S}_2.
\end{aligned}$$

On a, comme au paragraphe 4,

$$2\mathrm{T} = -1 + \sqrt{-7}, \qquad 2\mathrm{T'} = -1 - \sqrt{-7}.$$

Je désignerai les six p^2 ions par les mêmes lettres que les nombres commutables correspondants et je trouverai que :

Pour α_1,
$$p = 1, \qquad p^2 = 1;$$
Pour α_2,
$$p = 7, \qquad p^2 = 49;$$
Pour α_3,
$$p = 3, \qquad p^2 = 9;$$
Pour α_4,
$$p = 3, \qquad p^2 = 9;$$
Pour α_5,
$$p = 8, \qquad p^2 = 64;$$
Pour α_6,
$$p = 6, \qquad p^2 = \underline{36};$$
$$168.$$

On voit que les nombres commutables α_1, α_2, α_5, α_6 sont rationnels, que les nombres α_3 et α_4 contiennent l'irrationalité $\sqrt{-7}$ et sont conjugués. Il en est donc de même des p^2 ions correspondants.

Nous savons qu'il y a trois intégrales abéliennes de première espèce et six intégrales de première et de deuxième espèces distinctes (c'est-à-dire telles qu'aucune de leurs combinaisons linéaires n'est algébrique).

Je vois d'abord que le p^2 ion α_1 est de première sorte, car il ne contient qu'un nombre α_1 qui est la somme de toutes les unités complexes, de sorte qu'on aura

$$\alpha_1 = \sum e_i, \qquad P(z, a)\alpha_1 = P(z\sigma_i^{-1}, a);$$

si donc

$$P(z, a) = \int Q(x, y)\, dx,$$

on aura, en appelant y_1, y_2, $\ldots$, y_m les diverses déterminations de y,

$$P(z, a)\alpha_1 = \sum \int Q(x, y_i)\, dx = \int R(x)\, dx,$$

R étant rationnel en x, de sorte que $P(z, a)\alpha_1$ sera algébrique.

C. Q. F. D.

Je dis que les p^2 ions α_2, α_5, α_6 ne peuvent être de la troisième sorte, sans quoi le nombre des intégrales de première espèce serait, pour α_2, un multiple de 7, pour α_5 un multiple de 8, pour α_6 un multiple de 6, ce qui est impossible, puisque le nombre total des intégrales de première espèce n'est que de trois.

Comme il faut qu'il y ait au moins un p^2 ion de la troisième sorte, ce ne pourra être que α_3 ou α_4; ils ne pourront l'être tous les deux, sans quoi il y aurait au moins trois intégrales appartenant à α_3, au moins trois à α_4, en tout au moins six et il n'y en a que trois.

L'un des deux p^2 ions est donc de troisième sorte; l'autre ne peut être de la première sorte, car si un p^2 ion est de la première sorte, il en est de même de tous ses conjugués; il sera donc de la deuxième sorte.

Le nombre des intégrales de première et de deuxième espèces qui appartiennent à α_3 est un multiple de trois; de même pour celles qui appartiennent à α_4. Le nombre de ces intégrales qui appartiennent à α_2 et à α_4 est donc au moins six et, comme le nombre total est six, il faut conclure que tous les autres p^2 ions sont de la première sorte.

En résumé, sur nos six p^2 ions, quatre sont de la première sorte, un de la deuxième et un de la troisième.

§ 8. — Remarques diverses.

Étant donné un groupe fini H, on peut, *d'une infinité de manières,* former les groupes fuchsiens G et G′. On engendrerait donc d'une infinité de manières les systèmes correspondants de fonctions fuchsiennes ou d'intégrales abéliennes.

La comparaison de ces différentes manières et de ces différents systèmes serait sans doute très intéressante.

Je me bornerai à la remarque suivante : on peut se demander à quoi correspondent les groupes linéaires à coefficients entiers que nous avons rencontrés; il suffit de se reporter à leur origine expliquée au paragraphe 3.

Soient G un groupe auquel H soit mériédriquement isomorphe, et G′ le sous-groupe invariant de G auquel correspond dans H la substitution identique; soient s_i une substitution de H et σ_i la substitution correspondante de G.

Supposons maintenant que G′ dérive de q substitutions fondamentales

$$S, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_q,$$

et soit S une combinaison quelconque de ces substitutions fondamentales. Alors

$$S' = \sigma_i^{-1} S \sigma_i$$

sera aussi une combinaison de ces substitutions fondamentales.

Soit maintenant G″ un groupe mériédriquement isomorphe à G′, défini comme il suit; il admettra toutes les relations de structure de G′, mais de plus toutes ses substitutions seront permutables. Si donc T est la substitution de G'' qui correspond à S et T' celle qui correspond à S', la substitution de G'' qui correspondra à SS' sera identique à celle qui correspondra à $S'S$, de sorte qu'on aura

$$TT' = T'T.$$

Il pourrait arriver que le groupe G'' ainsi défini se réduisît à la substitution identique, mais cela n'arrivera pas si G' est un groupe fuchsien de genre > 0.

Soient $T_1, T_2, \ldots, T_q$ les substitutions de G'' qui correspondent à S_1, $S_2, \ldots, S_q$; à S correspondra dans G'' une substitution

$$T = T_1^{\alpha_1} T_2^{\alpha_2} \ldots T_q^{\alpha_q},$$

où α_1 est la somme des exposants de S_1 dans la combinaison S; à $S' = \sigma_i^{-1} S \sigma_i$ correspondra

$$T' = T_1^{\beta_1} T_2^{\beta_2} \ldots T_q^{\beta_q},$$

où β_1 est la somme des exposants de S_1 dans la combinaison S'.

Il est aisé de voir que les β sont des combinaisons linéaires des α. A chaque substitution s_i de H correspondra donc une transformation linéaire à coefficients entiers dont l'ensemble formera un groupe isomorphe à H. Voilà la signification de ces groupes linéaires à coefficients entiers.

Faisons en passant une autre remarque; tout groupe fini contenu dans le groupe linéaire conserve une forme quadratique définie positive, ou bien une forme à indéterminées conjuguées.

Supposons en effet d'abord que le groupe soit réel, c'est-à-dire que toutes les substitutions du groupe aient leurs coefficients réels. Soient X_1 une forme linéaire quelconque de nos n variables, $X_2, X_3, \ldots, X_h$ ses transformées; alors le groupe conservera la forme quadratique définie positive

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_h^2,$$

qui ne peut être identiquement nulle.

Supposons que le groupe ne soit pas réel; soient G ce groupe, x_1,

$x_2, \ldots, x_n$ nos variables indépendantes; soit alors G_0 un groupe imaginaire conjugué du précédent portant sur les variables $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ imaginaires conjuguées des x.

Soit alors X_1 une forme linéaire quelconque des x; soient X_2, $X_3, \ldots, X_h$ ses transformées par le groupe G; soit X_1^0 une forme linéaire des x_0, imaginaire conjuguée de X_1; soient $X_2^0, \ldots, X_h^0$ ses transformées par les substitutions correspondantes de G_0. Alors la forme à indéterminées conjuguées

$$F = X_1 X_1^0 + X_2 X_2^0 + \ldots + X_h X_h^0$$

sera invariante.

Soient y_i et z_i les parties réelle et imaginaire de x_i; alors G pourra être regardé comme un groupe réel portant sur les $2n$ variables y et z, et F sera une forme quadratique définie de ces $2n$ variables, de sorte qu'on est ramené au cas précédent.

Cette remarque bien simple pourrait peut-être simplifier l'application du théorème de M. Jordan; elle ramène en effet la recherche des groupes finis contenus dans le groupe linéaire à l'étude géométrique de la division régulière d'une sphère à plus de trois dimensions.