JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LÉOPOLD LEAU

Recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 5 (1899), p. 365-425.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1899_5_5__365_0>

Recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor;

PAR M. LÉOPOLD LEAU.

INTRODUCTION.

Le mode de représentation des fonctions analytiques le plus naturel et le plus important est fourni par leurs développements suivant les puissances croissantes des variables. On sait comment, guidé par cette idée, M. Méray a su donner aux théories fondamentales de l'Analyse une harmonieuse unité. Pourtant, la connaissance d'une fonction définie par une série de Taylor est peu avancée, même dans le cas d'un seul argument. En supposant le rayon de convergence fini et différent de zéro, la première question qui se pose est de savoir si la fonction peut être prolongée au delà de ce cercle et, s'il en est ainsi, de déterminer ses points singuliers. Or, l'étude de la série sur son cercle de convergence est un problème difficile. On a pu construire des séries admettant leur cercle comme coupure : l'exemple suivant, $\sum b^n z^{c^n}$, où c est un entier positif, a été donné par Weierstrass; mais c'est seulement en 1896 que M. Borel (¹) a établi cette belle propriété : en général, le cercle de convergence est une coupure.

(¹) *Comptes rendus* du 14 décembre.

Auparavant, M. Hadamard [1] avait cherché les singularités situées sur le cercle de convergence et obtenu d'importants résultats. Ses recherches ont été reprises et complétées [2] par M. Fabry, qui est parvenu à des propriétés nouvelles et d'un grand intérêt, grâce à d'habiles calculs, malheureusement assez complexes.

M. Le Roy [3] a repris la même question par une méthode différente. M. Lindelöf [4] a énoncé le principe général qui relie le problème posé à celui de la représentation conforme, et en a tiré parti surtout pour le calcul effectif des valeurs de la fonction en dehors du cercle de convergence. En outre de la propriété énoncée plus haut, M. Borel [5] a donné des indications diverses sur le même sujet et, en particulier, l'a rattaché à ses recherches sur la sommabilité des séries divergentes.

Enfin la question proposée par l'Académie des Sciences : *Chercher à étendre le rôle que peuvent jouer en Analyse les séries divergentes*, a été l'objet d'importants travaux d'une publication prochaine [6].

Le présent Travail a pour but l'étude des fonctions représentées par les séries de Taylor à une variable, tant sur le cercle de convergence qu'au dehors de ce cercle, et il se divise en deux Chapitres correspondants.

On y trouve des exemples variés de séries admettant leur cercle de convergence comme coupure et des types assez généraux de séries dont les singularités sont connues soit sur le cercle, soit même dans tout le plan. Ces résultats ne sont pas tous nouveaux : les méthodes diverses employées par M. Fabry, M. Le Roy et celles exposées ici, ont fourni des propriétés en partie communes. Voici l'idée directrice de ce Mémoire : On sait que, lorsqu'on veut se rendre compte de la conver-

---

(1) *Journal de Mathématiques*, 1892.

(2) *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XIII; *Acta mathematica*, t. XXII; *Journal de Mathématiques*, 1898.

(3) *Comptes rendus* du 31 octobre 1898, du 20 février 1899.

(4) *Acta societatis Fennicæ*, 1898.

(5) *Comptes rendus*, 5 octobre et 14 décembre 1896, 12 décembre 1898; *Acta mathematica*, t. XXI; *Journal de Mathématiques*, 1896.

(6) Depuis la rédaction du présent Travail, le Mémoire couronné de M. Borel, *Mémoire sur les séries divergentes*, a été publié dans les *Annales de l'École Normale*.

gence d'une série, il y a lieu de considérer non pas *simultanément*, mais *successivement* la suite des coefficients; de même, la possibilité du prolongement de la fonction, sur le cercle ou dans le plan, dépend non pas de la totalité des coefficients pris simultanément, mais d'*ensembles de pareils coefficients envisagés dans leur succession*. Ce fait rend possible *la comparaison d'une série donnée, avec d'autres séries plus simples, déjà connues*. Telle est la méthode employée.

Dans la seconde Partie, l'étude des fonctions dans le plan a été complétée par l'extension d'un théorème important dû à M. Hadamard [1].

CHAPITRE I.

ÉTUDE DES SÉRIES DE TAYLOR SUR LE CERCLE DE CONVERGENCE.

1. *Exposé de la méthode*. — Soit une fonction $f(z)$ donnée par une série de Taylor

$$\sum a_p z^p. \tag{1}$$

Nous supposons que le rayon de convergence de cette série est fini et, de plus, qu'il est égal à l'unité. Cette dernière hypothèse ne restreint pas la généralité de la question, puisqu'il suffit d'un changement de variable de la forme $z = kz'$ pour ramener tout autre cas à celui-là.

2. Prenons sur le cercle de convergence un arc PQ. Pour voir s'il y a sur cet arc des points singuliers de $f(z)$, il est naturel, d'après la notion même du prolongement analytique, de prendre sur le rayon

[1] *Acta mathematica*, t. XXII. — Une partie des résultats exposés ici ont été indiqués dans trois Notes insérées aux *Comptes rendus* du 24 octobre et du 7 novembre 1898 et du 27 mars 1899, et dans une Note du *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXVI, n° 10. Je ne développe pas dans ce Travail ce qui a trait à la sommation des séries divergentes.

bissecteur de l'arc PQ un point ω d'affixe b et de former la série

$$\sum \frac{1}{n!} f^{(n)}_{(b)} z^n. \tag{2}$$

Pour qu'il n'y ait pas de points singuliers entre P et Q, il faut et il suffit qu'on puisse choisir b assez petit pour que le rayon de convergence ρ de la nouvelle série soit au moins égal à l, l étant la distance ωP. D'ailleurs, l'inverse $\frac{1}{\rho}$ est, d'après un critérium de Cauchy, retrouvé par M. Hadamard qui en a fait d'heureuses applications, la plus grande des limites de l'expression

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|f^{(n)}_{(b)}\right|},$$

quand n croît indéfiniment.

L'expression ainsi introduite est d'une étude directe difficile. Elle fait intervenir une infinité de coefficients a. Cherchons donc s'il est possible de la remplacer par une autre plus simple sans modifier la plus grande de ses limites.

3. Nous nous appuierons sur la remarque suivante :

Soient $|u_n|^{\frac{1}{n}}$ et $|v_n|^{\frac{1}{n}}$ des variables dont les plus grandes limites sont respectivement α et β. Si α est plus grand que β, et si l'on pose

$$u_n = v_n + w_n,$$

la plus grande des limites de $|w_n|^{\frac{1}{n}}$ est α.

En effet :

1° λ étant supérieur à 1, s'il existait indéfiniment des n telles que

$$|w_n| > (\alpha\lambda)^n,$$

comme on aurait en même temps

$$|v_n| < (\beta\lambda)^n,$$

on en déduirait

$$|u_n| > (\alpha\lambda)^n\left[1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right],$$

ce qui est impossible, puisque $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$ tend vers o.

2° $\alpha\lambda$ étant compris entre β et α, si l'on finissait par avoir constamment

$$|w_n| < (\alpha\lambda)^n,$$

avec

$$|v_n| < (\alpha\lambda)^n,$$

on en conclurait

$$|u_n| < 2(\alpha\lambda)^n,$$

inégalité qui ne peut avoir lieu.

4. Cette remarque faite, formons le développement

$$(3) \qquad \frac{f^{(n)}(b)}{n!} = \sum_{p=n}^{p=\infty} \frac{p!}{n!(p-n)!}\, a_p b^{p-n}.$$

Si t désigne un nombre aussi peu supérieur à 1 que l'on veut, il existe une constante M telle que l'on ait

$$|a_p| < \mathrm{M}\, t^p,$$

quel que soit p.

Posons $p = nx$, et ne considérons que les valeurs de p à partir d'une valeur p' telle que $p' - n$ soit une variable infiniment grande en même temps que n.

Lorsque s croît indéfiniment, le rapport

$$\frac{s!}{s^s e^{-s}\sqrt{2\pi s}}$$

tend vers 1 ; il en résulte que

$$\frac{p!}{n!(p-n)!} = \frac{x^{nx}}{(x-1)^{n(x-1)}}\sqrt{\frac{x}{2\pi n(x-1)}} \times \mathrm{L}_n,$$

L_n tendant vers 1 pour n infini. Par suite, en posant

$$\frac{x^x}{(x-1)^{x-1}}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2n}} t^x |b|^{x-1} = \Phi(x),$$

on a

$$\left|\frac{p!}{n!(p-n)!} a_p b^{p-n}\right|^{\frac{1}{n}} \leqq \Phi(x) \sqrt[n]{\mathfrak{L}_n},$$

$\mathfrak{L}_n$ tendant vers o. $\sqrt[n]{\mathfrak{L}_n}$ reste donc inférieur à un nombre $\mathfrak{L}$.

Si x est au moins égal à un nombre ξ supérieur à 1, on aura *a fortiori*

$$\frac{\Phi(x+1)}{\Phi(x)} < \frac{\xi+1}{\xi-1} t |b|.$$

Posons

$$\frac{\xi+1}{\xi-1} t = \lambda,$$

de sorte que

$$\frac{\Phi(x+1)}{\Phi(x)} < \lambda |b|.$$

Si A est le maximum de $\frac{x^x}{(x-1)^{x-1}}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2n}}$ lorsque x croît de ξ à $\xi+1$ et que n est quelconque, la somme des termes du développement (3), pour lesquels $\frac{p}{n}$ est au moins égal à ξ, a un module inférieur à

$$n\mathfrak{L}[A t^\xi |b|^{\xi-1}]^n \{1 + \lambda^n |b|^n + \lambda^{2n} |b|^{2n} + \ldots\}.$$

Si $|b|$ est suffisamment petit, cette expression est inférieure à

$$\frac{n\mathfrak{L}}{1-|\lambda b|^n}(A t^\xi |b|^{\xi-1})^n,$$

et la racine $n^{\text{ième}}$ de celle-ci à un nombre fixe arbitraire c, plus petit que les valeurs possibles de $\frac{1}{\rho}$.

5. Dès lors, en vertu de la remarque faite au n° 3, cela n'influera pas sur la plus grande des limites de $\left|\frac{1}{n!} f^{(n)}_{(b)}\right|^{\frac{1}{n}}$, de laisser de côté tous

les termes que l'on vient de considérer : *on peut se borner à faire varier, dans la formation de la dérivée, p de n à n'*, $\frac{n'}{n}$ *restant supérieur à un nombre fixe plus grand que* 1, *pourvu que l'on choisisse* $|b|$ *assez petit.*

En d'autres termes, il existe des suites de nombres dépendant de b et d'un entier n,

$$\alpha_{n,n},\ \alpha_{n+1,n},\ \ldots,\ \alpha_{n',n},$$

telles que, dans les conditions énoncées, la solution du problème dépend de la plus grande des limites de

$$|\alpha_{n,n}a_n + \alpha_{n+1,n}a_{n+1} + \ldots + \alpha_{n',n}a_{n'}|^{\frac{1}{n}}.$$

Ce fait est important. M. Fabry a basé sur lui ses recherches dans le cas où l'arc considéré se réduit à un point. La démonstration que M. Borel a donnée du théorème que le cercle de convergence est en général une coupure repose sur une propriété toute semblable.

Des représentations conformes, autres que le prolongement analytique, donnent des résultats tout à fait analogues. Tel est, par exemple, le cas de celle que l'on obtient par une substitution de la forme

$$z = bz'e^{cz'},$$

où b et c désignent des constantes. Ce fait n'a rien de surprenant, et il est probablement général; mais, nous n'avons pas à l'utiliser.

6. L'expression introduite plus haut

$$\alpha_{n,n}a_n + \alpha_{n+1,n}a_{n+1} + \ldots + \alpha_{n',n}a_{n'}$$

joue dans l'extension des séries un rôle analogue à celui du terme général pour la convergence. Pour simplifier le langage, nous l'appellerons le *terme général étendu* de rang n de la série $\sum a_n z^n$, et n' sera son *indice*. Il est clair qu'il faudra préciser l'arc PQ du cercle de convergence, auquel il est relatif. Le cercle auxiliaire de centre ω (*voir* n° **2**) et qui passe par les points P et Q sera dit le *cercle associé à l'arc* et son rayon le *rayon associé*.

Terme général étendu, cercle et rayon associés dépendent de l'affixe b du point ω. Il sera souvent inutile de dire à quelle valeur de b l'on se sera arrêté, il suffira que $|b|$ soit assez petit; et l'*on entendra que cette dernière condition est satisfaite lorsque la position du centre* ω *ne sera pas spécifiée* (¹).

Voici une dernière définition : Nous appellerons $n^{\text{ième}}$ *ensemble des coefficients*

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

la suite

$$a_n, \quad a_{n+1}, \quad \ldots, \quad a_{n'}$$

de ceux qui figurent dans le terme général étendu de rang n.

L'étude directe du terme général étendu paraît peu pratique (²). Aussi allons-nous d'abord nous servir du résultat fondamental énoncé au nº 5, *sans même nous préoccuper de la nature des coefficients* α. Nous formerons des séries ayant des arcs de points singuliers ou admettant le cercle de convergence pour coupure.

Formation de séries ayant des singularités données sur le cercle de convergence.

7. *Dans le cas général, une série de Taylor admet son cercle de convergence comme coupure.* — La démonstration que M. Borel a, pour la première fois, donnée de cet important théorème s'appuie sur la considération d'une *fonction entière associée* à la fonction pro-

---

(¹) Il ne serait même pas nécessaire dans nombre de cas de dire si le terme général étendu a été obtenu plutôt par la substitution $z = b + z'$ que par une autre; mais si l'on ne faisait pas cette hypothèse on serait conduit à des complications de langage inutiles.

(²) Une des représentations conformes qui fournissent pour les α les valeurs les plus simples est $z = be^{cz'}$. Le coefficient complet de z'^n est, en effet,

$$\frac{c^n}{n!}\sum p\, a_p b^p p^n.$$

Cependant, même dans ce cas, le calcul pour certaines lois des a_p est difficilement abordable.

posée, et sur ce fait, que, pour de grandes valeurs de l'argument, le module maximum de la fonction auxiliaire diffère peu de celui de polynomes obtenus en ne conservant qu'une partie de ses termes. Cette dernière propriété est semblable à celle établie au n° 5. Celle-ci va nous permettre, sans le secours de la *fonction associée*, de donner du même théorème une démonstration qui a des analogies avec la première, mais qui est un peu plus simple.

Soit une série de Taylor

$$(1)\qquad f(z) = \sum a_p z^p,$$

dont le rayon de convergence est l'unité. Étudier cette série dans le voisinage de la valeur $e^{2i\pi\omega}$ revient à étudier la suivante :

$$(4)\qquad \sum a_p e^{2i\pi p\omega} z^p$$

dans le voisinage de $z = 1$. Relativement à ce point, le terme général étendu de la série (4) est

$$\sum_n^{n'} {}_p \alpha_{p,n} a_p e^{2i\pi p\omega} = u_n(\omega).$$

Si b est l'affixe du centre du cercle associé, il existe certainement un angle $2\pi\omega$ tel que la plus grande des limites de la suite

$$|u_n(\omega)|^{\frac{1}{n}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

soit $\frac{1}{1-b}$, valeur qui d'ailleurs ne peut être surpassée quel que soit ω. Donc, si U_n désigne le maximum du module de $u_n(\omega)$ quand ω varie de 0 à 2π, $\frac{1}{1-b}$ est la plus grande des limites de $U_n^{\frac{1}{n}}$. Soit ω_n la valeur ou une des valeurs de ω (de 0 à 1), faisant atteindre à $u_n(\omega)$ son maximum.

On peut former une suite d'ensembles de coefficients a sans parties communes et tels que la suite S correspondante de U_n ait effectivement $\frac{1}{1-b}$ pour *limite*. Or, si la série (1) est *quelconque*, sous la réserve que le rayon de convergence est égal à l'unité, les points $e^{2\pi i\omega_n}$ *n'ont aucun lien entre eux;* ces points forment un ensemble $\sum$ qui correspond à S. Dans le cas général, il y a une infinité de points de $\sum$ sur tout arc PQ de la circonférence de convergence. Or, s'il existait un pareil arc PQ, régulier pour la fonction (1), pour chaque valeur de ω relative à cet arc, le développement

$$(5) \qquad \sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(be^{2i\pi\omega}) z^n$$

serait convergent dans un cercle de rayon supérieur à un nombre k, supérieur lui-même à $1 - b$. Par suite, *pour toutes ces valeurs de* ω, on aurait à partir d'une certaine valeur de n

$$(6) \qquad \left|\frac{1}{n!} f^{(n)}(be^{2i\pi\omega})\right|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{k}$$

et aussi (¹)

$$(7) \qquad |u_n(\omega)|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{k'} \qquad \left(\frac{1}{k} < \frac{1}{k'} < \frac{1}{1-b}\right).$$

C'est là une conséquence en contradiction avec la distribution des points de $\sum$; le théorème est donc établi.

8. *Premier exemple de formation des séries.* — Soit

$$(1) \qquad \sum a_p z^p,$$

(¹) Si l'on se reporte au n° 4, on remarque en effet que la série (1) n'intervient dans la démonstration que par l'inégalité

$$|a_p| < M t^p,$$

de sorte que pour *toutes* les séries dont les modules ont une limite supérieure finie à l'intérieur d'un cercle fixe concentrique au cercle de convergence, il y a un *moment* à partir duquel la racine $n^{\text{ième}}$ de l'ensemble des termes négligés reste en valeur absolue inférieure à une *constante arbitrairement choisie.* Tel est évidemment le cas pour les séries (5) et l'on peut ainsi passer de l'inégalité (6) à l'inégalité (7).

une série pour laquelle le point d'affixe $+1$ est singulier. Le terme général étendu par rapport à ce point étant désigné par u_n, la plus grande des limites de la suite

$$|u_n|^{\frac{1}{n}}, \quad |u_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}, \quad |u_{n+2}|^{\frac{1}{n+2}}, \quad \ldots,$$

est $\frac{1}{1-b}$, b ayant la même signification qu'au numéro précédent. On ne changera pas cette limite maximum en ne conservant de la suite qu'une infinité de termes *convenablement choisis*. Cette restriction doit d'ailleurs être levée si la suite considérée a une limite, au sens ordinaire du mot. Il résulte de là que si, sans changer le rayon de convergence de la série proposée, nous modifions ses coefficients à l'exception de ceux qui figurent dans une infinité de termes u_n, le point $+1$ ne cessera pas d'être sur le cercle un point singulier.

Remarquons maintenant que si une série $\sum a_p z^p$ n'est pas régulière pour $z = +1$, la série $\sum a_p e^{-2i\pi p\omega} z^p$ ne le sera pas pour $z = e^{2\pi\omega i}$, et que la suite des termes étendus de la seconde pour la seconde valeur sera identique à celle des termes étendus de la première pour la première $+1$. En rapprochant ces deux remarques, on voit un moyen de déduire de la fonction proposée une infinité d'autres ayant sur le cercle de convergence des points ou des arcs singuliers fixés à l'avance.

Formons des suites d'ensembles des coefficients a

$$
\begin{array}{llllll}
(\Sigma_1) & \quad & E_{n_1}, & E_{n_1+r_1}, & E_{n_1+r_1+s_1}, & \ldots, \\
(\Sigma_2) & & E_{n_2}, & E_{n_2+r_2}, & E_{n_2+r_2+s_2}, & \ldots, \\
(\Sigma_3) & & E_{n_3}, & E_{n_3+r_3}, & E_{n_3+r_3+s_3}, & \ldots, \\
 & & \ldots, & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots, & \ldots,
\end{array}
$$

satisfaisant aux conditions suivantes : 1° il n'y a pas deux ensembles ayant un coefficient a commun; 2° chaque suite $\sum$ donne lieu à une suite d'expressions $|u_n|^{\frac{1}{n}}$ *convenablement choisie*, comme il est dit plus haut (cette restriction étant inutile dans le cas déjà signalé). Donnonsnous à présent des angles

$$2\pi\omega_1,\quad 2\pi\omega_2,\quad \ldots,\quad 2\pi\omega_p,\quad \ldots.$$

Si, pour chaque valeur de p, nous multiplions chaque coefficient a_n, appartenant à $\sum_p$, par $e^{-2i\pi n\omega_p}$, nous obtiendrons *une nouvelle série $\sum a'_p z^p$ qui a tous les points $e^{2\pi\omega i}$ pour points singuliers.* On voit combien ce procédé comporte d'indétermination. D'ailleurs, les ensembles eux-mêmes E ne sont pas bien définis, puisque nous avons assujetti seulement le rapport $\frac{n'}{n}$ à rester finalement supérieur à un nombre fixe plus grand que 1. Il est évident que cette méthode ne nous apprend rien sur les points autres que les $e^{2\pi\omega i}$ et leurs points limites.

9. Voici quelques types de séries déduits de

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots.$$

Soit 2^q la plus haute puissance de 2 contenue dans l'entier p.

1° La série $\sum e^{-\frac{2i\pi pq}{10}} z^p$ a pour points singuliers les sommets d'un décagone régulier inscrit, l'un d'eux étant $+1$.

2° La série $\sum e^{-2ipq} z^p$ a le cercle de convergence pour coupure.

3° Considérons les différences entre les quantités

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{2}{\sqrt{2}},\quad \frac{3}{\sqrt{2}},\quad \ldots,$$

et leurs parties entières. Soit ω_q la $q^{\text{ième}}$ quantité donnant lieu à une différence au plus égale à $\frac{1}{2}$, la série

$$\sum e^{-2i\pi p\omega_q} z^p$$

admet comme arc singulier la demi-circonférence ayant pour rayon bissecteur la partie positive de l'axe des quantités réelles.

On peut évidemment varier ces exemples à l'infini.

10. Deuxième exemple : *Généralisation d'un théorème de Weierstrass.* — Soit une série

$$f(z) = \sum a_p z^p, \tag{1}$$

telle que a_p soit positif et que $\sqrt[p]{a^p}$ tende vers 1 quand p est infiniment grand. Nous allons chercher à annuler certains coefficients de manière à obtenir des points singuliers. Pour étudier la fonction dans le voisinage de la valeur $e^{2i\pi\omega}$ de la variable, je pose $z = e^{2i\pi\omega}z'$, en sorte qu'on a le développement

$$\sum a_p e^{2i\pi p\omega} z'^p \tag{8}$$

à considérer pour $z' = 1$. Le $n^{\text{ième}}$ terme étendu de cette nouvelle série est alors

$$\alpha_{n,n} a_n e^{2i\pi n\omega} + \alpha_{n+1,n} a_{n+1} e^{2i\pi(n+1)\omega} + \ldots + \alpha_{n',n} a_{n'} e^{2i\pi n'\omega}.$$

On peut l'écrire $A_n + iA'_n$ en désignant respectivement par A_n et A'_n les polynomes

$$\sum_n^{n'} \alpha_{p,n} a_p \cos 2\pi p\omega, \quad \sum_n^{n'} \alpha_{p,n} a_p \sin 2\pi p\omega.$$

L'expression $(A_n^2 + A_n'^2)^{\frac{1}{2n}}$ étant supérieure à $A_n^{\frac{1}{n}}$, si la valeur 1 est singulière pour la série

$$\sum a_p \cos 2\pi p\omega . z'^p \tag{9}$$

elle le sera également pour la série (8).

11. Voyons à quelles conditions on aura

$$\cos 2\pi p\omega > \eta, \tag{10}$$

η *étant un nombre positif fixe.* Soit k l'entier le plus voisin de $p\omega$

et θ la différence $p\omega - k$, il suffit évidemment que l'on ait

$$-\frac{1}{4} + \lambda \leq \theta \leq \frac{1}{4} \pm \lambda,$$

λ *étant un nombre positif fixe*, inférieur à $\frac{1}{4}$, ou bien

$$-\mu \leq \theta \leq \mu,$$

en posant $\frac{1}{4} - \lambda = \mu$.

Il résulte de là que, si l'on fixe une valeur de k, les valeurs acceptables correspondantes de p sont les valeurs comprises dans l'intervalle $\frac{k-\mu}{\omega}, \frac{k+\mu}{\omega}$. Les intervalles que l'on obtient ainsi en donnant à k toutes les valeurs entières n'empiètent d'ailleurs pas les uns sur les autres. Par exemple, si nous prenons $\mu = \frac{1}{5}$ et $\omega = \frac{2}{5}$, les valeurs de p qui ne satisferont pas à l'inégalité (10) seront

$$1, \; 4, \; 6, \; 9, \; 11, \; 14, \; 16, \; \ldots.$$

12. Ceci posé, soient

$$u_n = \sum_{n}^{n'} \alpha_{p,n} a_p$$

et

$$v_n = \sum_{n}^{n'} \alpha_{p,n} a_p \cos 2\pi p\omega.$$

Si dans u_n et v_n nous annulons précisément les coefficients a_p qui ne satisfont pas à l'inégalité (10), nous aurons

$$u_n > v_n > \eta u_n.$$

Or, n_1 étant le premier entier supérieur ou au moins égal à n, tel que a_{n_1} ne soit pas nul, $n_1 - n$ reste, pour une valeur donnée de ω, inférieur à une limite fixe. En se reportant à l'expression du terme général étendu, on constate sans peine que dans ces conditions $\sqrt[n]{u_n}$ *tend* vers $\frac{1}{1-b}$ lorsque n croît indéfiniment, et que, par suite, il en est de même de $\sqrt[n]{v_n}$. Cette conclusion subsiste si l'on ne considère qu'une certaine suite formée d'une infinité d'expressions v_n.

13. Il suffit donc, pour que le point $e^{2i\pi\omega}$ soit singulier pour les séries (9) et (8), que dans une infinité d'ensembles E_n relatifs aux nombres a_0, a_1, a_2, ..., les coefficients a_p dont l'indice p ne satisfait pas à l'inégalité (10) soient nuls. De là, un moyen de construire une infinité de fonctions admettant des points ou des arcs singuliers. Supposons, par exemple, qu'on veuille qu'un arc PQ soit singulier. On prendra sur cet arc des points $e^{2i\pi\omega_1}$, $e^{2i\pi\omega_2}$, ..., $e^{2i\pi\omega_k}$, ... de manière à satisfaire aux conditions suivantes :

1° Tout point choisi une fois le sera ensuite indéfiniment;

2° Tout point de l'arc sera l'un de ceux-là ou un de leurs points limites.

Ensuite, on partage la suite a_0, a_1, a_2, ... en ensembles

$$E_{n_1}, \quad E_{n_2}, \quad \ldots, \quad E_{n_k}, \quad \ldots$$

qui ne sont pas nécessairement successifs, mais qui n'empiètent pas les uns sur les autres, et on les fait respectivement correspondre aux points de l'arc. Dans chaque ensemble, on supprime certains coefficients a d'après le procédé indiqué plus haut. Le nombre η de l'inégalité (10) peut d'ailleurs varier avec chaque nouvel angle $2\pi\omega$. Enfin, on peut encore supprimer d'autres coefficients, pourvu que dans la suite d'ensembles E_n relatifs à l'un quelconque des angles $2\pi\omega$, la différence $n_1 - n$ ne devienne pas infiniment grande avec n. Toute série obtenue par cette méthode répondra à la question. Nous parvenons ainsi à une extension d'un théorème de Weierstrass sur l'impossibilité, pour la fonction $\sum a^p z^{m^p}$, de sortir du cercle de convergence, m étant un entier [1].

---

[1] *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. II, Chap. II.

Formation de séries régulières le long d'un arc du cercle de convergence. Enveloppes de séries.

14. Imaginons des séries

$$f_1(z) = \sum a_{p,1} z^p,$$

$$f_2(z) = \sum a_{p,2} z^p,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$f_k(z) = \sum a_{p,k} z^p,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

satifaisant aux conditions suivantes :

1° Ces séries ont un cercle de convergence de rayon égal à l'unité;

2° Elles sont régulières le long d'un arc PQ de ce cercle;

3° Les racines $n^{\text{ièmes}}$ des modules des coefficients $a_{n,k}$ ont *simultanément* $+1$ pour limite supérieure;

4° Les racines $n^{\text{ièmes}}$ des modules de leurs termes étendus de rang n relatifs à l'arc PQ ont *simultanément* pour plus grande limite au plus l'inverse du rayon associé [1].

5° Dans les différences $f_{n+1}(z) - f_n(z)$ les termes dont le rang varie de n à $\varphi(n)$, $\frac{\varphi(n)}{n}$ restant supérieur à un nombre plus grand que 1, admettent comme termes majorants ceux d'une certaine série fixe *plus*

---

[1] En disant que des suites, dépendant de l'indice i,

$$c_{0,i}, \quad c_{1,i}, \quad c_{2,i}, \quad \dots$$

ont *simultanément* au plus l pour limite supérieure, j'entends que, quel que soit l' supérieur à l, il y a une valeur de n telle que pour $p \geqq n$ et i quelconque on a

$$c_{p,i} < l'.$$

En se reportant au début du Chapitre, à l'exposé de la méthode, on voit de suite, *en vertu de la condition* 3°, que si la condition 4° est vérifiée pour une *certaine forme* du terme étendu, c'est-à-dire pour un certain choix de l'*indice* de ce terme en fonction de son *rang*, elle l'est également pour toute autre forme (le cas de l'indice infini n'est pas exclu).

étendue, c'est-à-dire de rayon de convergence plus grand que celui des séries $f(z)$, $\sum h^p z^p (h < 1)$.

Ces conditions seront dites les *conditions fondamentales*.

Si $\varphi(n)$ n'est pas une fonction non décroissante, remplaçons-la par une autre qui lui soit au plus égale et qui, elle, jouisse de cette propriété; choisissons ensuite cette nouvelle fonction comme indice n' des termes étendus de rang n. Supposons enfin, ce qui est permis, n' tel que $\sqrt[n]{n'}$ ait 1 pour plus grande limite; cette hypothèse exclut des modes de croissance trop rapide de n'.

15. *Des séries proposées nous allons déduire de bien des manières de nouvelles séries ayant un rayon de convergence au moins égal à* 1 *et régulières le long de l'arc* PQ.

On peut dire, par une comparaison naturelle, que les séries f sont tangentes deux à deux le long de polynomes de plus en plus étendus et éloignés; le polynome de contact de la série f_n avec la suivante f_{n+1} est formé, par exemple, des termes de f_n dont le degré va de n à n'. Or *formons une série* $F(z) = \sum A_p z^p$ *en prenant le terme* $A_p z^p$ *au hasard dans une des séries f où il figure dans un polynome de contact.* Je dis que $F(z)$ répond à la question.

Soient, en effet, $u_{n,1}, u_{n,2}, \ldots, u_{n,n}$ et U_n les termes généraux étendus de rang n des séries $f_1, f_2, \ldots, f_n$ et F, et évaluons la différence $U_n - u_{n,n}$. Dans ce but, je prends un coefficient A_p qui entre dans U_n, et je suppose, par exemple, $A_p = a_{p,k}$. On a, si $k > n$,

$$a_{p,k} = a_{p,n} + (a_{p,n+1} - a_{p,n}) + \ldots + (a_{p,k} - a_{p,k-1}).$$

Toutes les différences sont inférieures en module à h^p, car $a_{pn} z^p$ et $a_{pk} z^p$ faisant partie des polynomes de contact, il en est de même des termes

$$a_{p,n+1} z^p, \quad \ldots, \quad a_{p,k-1} z^p.$$

D'ailleurs le nombre de ces différences ne dépasse pas n'; donc on a

$$|a_{p,k} - a_{p,n}| < n' h^p.$$

Par suite, $|U_n - u_{n,n}|$ est inférieur à n' fois le terme étendu relatif à la série $\sum h^p z^p$; et comme $\sqrt[n]{n'}$ a pour plus grande limite 1, il résulte de là et de l'hypothèse 4° que la limite maximum de $|U_n|$ est au plus l'inverse du rayon associé. La proposition est donc établie.

En reprenant notre image géométrique, on voit que la série $F(z)$ est en quelque sorte l'*enveloppe* des séries proposées. Cette enveloppe n'est pas déterminée d'une manière unique.

16. *Première application.* — Soit $f(z)$ une fonction n'ayant sur le cercle fondamental que le point $+1$ comme point singulier. La substitution $z' = 1 - x + xz$, *où x désigne un nombre positif inférieur à* 1, permet de former de nouvelles fonctions $f(1 - x + xz)$ qui se trouvent dans les mêmes conditions que la première.

Traçons un cercle c, de centre ω situé sur la partie négative de l'axe des quantités réelles, débordant d'aussi peu que l'on veut sur le cercle fondamental, à l'exception d'un arc très petit laissé en dehors et sur lequel est situé le point $+1$. Les extrémités d'un diamètre de ce cercle ont pour affixes $1 - \varepsilon$, $-1 - \varepsilon'$. *Si l'on suppose que x reste supérieur à un nombre positif fixe α*, au cercle c du plan des z correspond dans le plan des z' un cercle c' intérieur à un cercle fixe C dont un diamètre a pour extrémités les points $1 - \alpha\varepsilon$, $-1 - \varepsilon'$. Sur ce cercle et à son intérieur (ε' étant suffisamment petit), $f(z')$ est holomorphe; j'appelle $\mathfrak{M}$ le maximum de son module.

Alors, au point ω, R étant le rayon du cercle c, on a

$$\frac{1}{n!}\left|\frac{d^n f(1 - x + xz)}{dz^n}\right| < \frac{\mathfrak{M}}{R^n}.$$

Donc il existe un nombre λ, aussi peu supérieur à 1 que l'on voudra, tel que l'on ait, à partir d'une certaine valeur de n, et quel que soit x entre α et 1,

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}\left|\frac{d^n f(1 - x + xz)}{dz^n}\right|_{z=\omega}} < \frac{\lambda}{R}.$$

Ainsi, si l'on donne à x des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, les séries correspondantes satisfont aux conditions fondamentales 1°, 2° et 4°.

La troisième condition est évidemment vérifiée ; cherchons à réaliser aussi la cinquième.

17. Posons

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n f(1-x+xz)}{dz^n} = g(x, z),$$

et désignons par x' et x'' deux valeurs quelconques de x dans les limites indiquées.

On a

$$g(x', 0) - g(x'', 0) = (x' - x'')\lambda\left[\frac{\partial g(x, 0)}{\partial x}\right]_{x=\xi}$$

avec

$$|\lambda| \leqq 1$$

et

$$x' < \xi < x''$$

ou

$$x' > \xi > x''.$$

Or, si l'on pose

$$f(z) = \sum a_p z^p$$

et si l'on choisit un nombre t un peu supérieur à 1, il existe une constante M telle que

$$|a_p| < t^p \mathrm{M}.$$

Lorsque z restera sur un cercle de rayon r inférieur à $\frac{1}{t}$ le module de $\frac{\partial f(1-x+xz)}{\partial x}$ restera manifestement inférieur à

$$\frac{\mathrm{A}t(1+r)}{[1 - t(1-x+xr)]^2},$$

et, par suite,

$$|g(x', 0) - g(x'', 0)| < \frac{|x' - x''|\mathrm{M}t(1+r)}{r^n[1 - t(1-\xi+\xi r)]^2}.$$

Supposons que l'on prenne, entre α et 1, les nombres x_1, x_2, ..., x_p, ..., de manière que *la plus grande des limites des termes de la* *suite*

$$|x_2 - x_1|^1, \quad |x_3 - x_2|^{\frac{1}{2}}, \quad \ldots, \quad |x_{p+1} - x_p|^{\frac{1}{p}}, \quad \ldots,$$

soit un nombre k inférieur à 1. Il suffira de choisir $\frac{1}{l}$ et r supérieurs à k, puis un nombre l compris entre k et r, pour que le coefficient du terme de rang n dans la différence

$$f(1 - x_{p+1} + x_{p+1} z) - f(1 - x_p + x_p z);$$

soit, à partir d'une certaine valeur de p, plus petit en module que

$$\mathrm{P} \times \frac{l^p}{r^n}$$

où P désigne une constante.

Dès lors, si n varie de p à $p(1+\varepsilon)$, ε étant positif, fixe et convenablement choisi, cette expression $\mathrm{P} \times \frac{l^p}{r^n}$ est inférieure au coefficient de rang n d'une série de comparaison dont le rayon de convergence est plus grand que l'unité; et, par suite, les fonctions f satisfont à la cinquième condition fondamentale.

Ainsi les x_p étant choisis comme il a été dit, on peut, par la méthode exposée au n° **15**, déduire des séries $f(1 - x_p + x_p z)$ une infinité d'autres régulières sur le cercle de convergence, sauf peut-être au point 1.

Remarque. — D'autres substitutions conduisent à des résultats analogues; je citerai la suivante

$$z' = xz e^{-z \mathrm{L} x}.$$

18. Deuxième application : *Séries dont les coefficients de rang n sont certaines fonctions de* $\frac{1}{n}$. Soit p un entier non négatif et la série

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{S}_p(z) = \frac{z}{1^p} + \frac{z^2}{2^p} + \ldots + \frac{z^n}{n^p} + \ldots.$$

Les fonctions $\mathrm{S}_0(z)$, $\mathrm{S}_1(z)$, $\mathrm{S}_2(z)$, ... satisfont évidemment aux trois premières conditions fondamentales (n° **14**); et le point $+1$ est leur seul point singulier sur le cercle de convergence. *Il en est de même des fonctions*

$$(12)\qquad \begin{cases} f_0(z) = c_0 S_0(z), \\ f_1(z) = c_0 S_0 + c_1 S_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ f_p(z) = c_0 S_0 + c_1 S_1 + \ldots + c_p S_p, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

où les c désignent des constantes telles que la série

$$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_p t^p + \ldots$$

admet un cercle de convergence de rayon r différent de 0.

19. Relativement à un arc quelconque PQ du cercle de rayon 1, ne comprenant pas $+1$, je dis que la quatrième condition est aussi vérifiée par les fonctions $f(z)$.

A cet effet, je considère les séries

$$(13)\qquad \varpi_p(z) = \frac{z^h}{h^p} + \frac{z^{h+1}}{(h+1)^p} + \ldots$$

déduites des $S_p(z)$ en laissant de côté leurs $h-1$ premiers termes. Je suppose que dans une aire A en tout point de laquelle on peut arriver en restant à son intérieur et en suivant un segment issu de l'origine, $\varpi_p(z)$ soit holomorphe et que son module en un point z quelconque $(|z| = \rho)$ soit au plus égal à $M_p \rho^h$, M_p étant une certaine constante.

L'intégrale

$$\int_0^z \frac{\varpi_p(z)}{z} dz$$

est holomorphe dans la même aire et définit $\varpi_{p+1}(z)$. D'ailleurs

$$\left| \int_0^z \frac{\varpi_p(z)}{z} dz \right| < \int_0^\rho M_p \rho^{h-1} d\rho = \frac{M_p \rho^h}{h}.$$

Donc, en un point z de l'aire, si l'on pose

$$|\varpi_{p+1}(z)| < M_{p+1} \rho^h,$$

on peut prendre

$$M_{p+1} = \frac{M_p}{h}.$$

Donc, enfin

$$M_p = \frac{M_0}{h^p}.$$

Soient R le rayon et b l'affixe du centre du cercle associé à l'arc PQ, $\mathfrak{M}$ le maximum de $\mathfrak{S}_0(z)$ sur ce cercle, on a évidemment, dès que n est supérieur à h,

$$\frac{1}{n!}\left|\frac{d^n f_p(z)}{dz^n}\right|_{z=b} < \frac{\mathfrak{M}}{R^n}\left\{|c_0| + \frac{|c_1|}{h} + \frac{|c_2|}{h^2} + \ldots + \frac{|c_p|}{h^p}\right\}.$$

Or, si l'on suppose $\frac{1}{h}$ plus petit que le rayon r de la série $\sum c_m t^m$, la propriété annoncée devient évidente.

20. Enfin, $f_{n+1}(z) - f_n(z) = c_n S_n(z)$. Dans cette différence, les termes dont le rang varie de n à la valeur plus grande $\varphi(n)$ sont comparables à ceux d'une série fixe plus étendue pour $\varphi(n) < sn\mathrm{L}n$, s étant un nombre positif fixe quelconque.

Donc, si l'on désigne par ν une fonction de n, prenant des valeurs entières au plus égales à n et telles que n soit inférieur à $s\nu\mathrm{L}\nu$, *la série*

$$\sum_1^\infty {}_n\left(c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \ldots + \frac{c_\nu}{n^\nu}\right) z^n$$

a le seul point singulier $+1$ *sur le cercle de convergence.*

21. On peut compléter les résultats qui précèdent. Soient $\psi_n(t)$ des séries n'ayant pas de termes de degré inférieur à $n+1$ et dont le rayon de convergence surpasse $\frac{\lambda}{n}$, λ étant un nombre fixe supérieur à 1. Supposons que t décrivant un cercle de rayon au moins égal à $\frac{\lambda}{n}$ et dont le centre est à l'origine, le module des $\psi_n(t)$ reste fini, il est clair que la série $\sum \psi_n\left(\frac{1}{n}\right) t^n$ a un cercle de convergence de rayon plus grand que 1.

Associant cette remarque aux conclusions ci-dessus, faisons $\nu = n$, et nous aurons le théorème que voici :

Théorème. — *Soient des nombres $c_0, c_1, \ldots, c_p, \ldots$ tels que la série $\sum c_p t^p$ ait un rayon de convergence différent de* o, *et des fonctions*

$$g_0(t), \quad g_1(t), \quad \ldots, \quad g_n(t), \quad \ldots,$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

1° *On a, en ordonnant,*

$$g_n(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n + \psi_n(t):$$

2° *Il existe un nombre λ supérieur à* 1, *tel que le rayon de convergence de la série $g_n(t)$ soit plus grand que $\frac{\lambda}{n}$;*

3° *Lorsque l'on fait décrire à t une circonférence dont le centre est à l'origine et dont le rayon est au moins égal à $\frac{\lambda}{n}$, la suite des modules des fonctions $\psi_n(t)$ a une limite supérieure finie.*

Le point $+1$ *est le seul point singulier de la série $\sum g_n\left(\frac{1}{n}\right) z^n$ sur le cercle de convergence.*

22. *Cas particulier.* — Les fonctions $g_n(t)$ peuvent être identiques; on a, dans ce cas, la série

$$\sum g\left(\frac{1}{n}\right) z^n,$$

$g(t)$ étant holomorphe à l'origine. (On supprime au besoin les premiers coefficients de la série en z.)

Exemples :

$$\sum \frac{n-1}{n^2+1} z^n, \quad \sum e^{\frac{1}{n}} z^n, \quad \ldots.$$

23. Troisième application : *Séries dont les coefficients de rang n sont certaines fonctions de n.*

Cette application se présente d'une manière toute semblable à la précédente.

Soit p un entier non négatif et la série

$$(14) \qquad S_p(z) = 1^p z + 2^p z^2 + \ldots + n^p z^n + \ldots.$$

Les fonctions $S_0(z)$, $S_1(z)$, $S_2(z)$, ..., satisfont aux deux premières conditions fondamentales, et ont seulement $+1$ pour point singulier sur le cercle de convergence et même dans le plan. *Il en est de même des fonctions*

$$(15) \qquad \begin{cases} f_0(z) = c_0 S_0(z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_p(z) = c_0 S_0 + c_1 S_1 + \ldots + c_p S_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

où les c sont des constantes. Mais, si la série $\sum_{p=1}^{p=\infty} c_p t^p$ est une fonction entière, *d'ordre* (¹) *plus petit que* 1, ce que nous supposerons, l'expression

$$[|c_0| + |c_1| n + |c_2| n^2 + \ldots + |c_p| n^p + \ldots]^{\frac{1}{n}}$$

(¹) Les relations entre la distribution des zéros d'une fonction entière et la grandeur de la fonction ont été étudiées par MM. Poincaré et Hadamard, puis par M. Borel qui a défini et utilisé dans ces recherches la notion de l'*ordre* de la fonction [*Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XX; *Comptes rendus*, 24 janvier 1898)]. Nous ne retiendrons de cette notion que ces deux points : l'ordre α d'une fonction entière $\sum a_n z^n$ est la plus grande des limites des termes $\left|\dfrac{\mathrm{L}\,n^n}{\mathrm{L}\,a_n}\right|$. Si l'on désigne par $\mathrm{M}(r)$ le maximum du module de la fonction pour $|z| = r$, l'ordre est la plus grande des limites de $\dfrac{\mathrm{LLM}(r)}{\mathrm{L}r}$ pour r infini. En d'autres termes, quel que soit α' supérieur à α on finit par avoir constamment $|a_n| < \dfrac{1}{n^{\frac{n}{\alpha'}}}$ et $\mathrm{M}(r) < e^{r^{\alpha'}}$, et α est le plus petit nombre pour lequel cette propriété ait lieu.

a pour limite maximum, pour n infini, l'unité, et, par suite, les fonctions f remplissent aussi la troisième condition. Je dis que la quatrième est également vérifiée pour tout arc PQ du cercle de convergence, qui laisse en dehors le point singulier. A cet effet, nous utiliserons la relation

$$z\frac{dS_p(z)}{dz} = S_{p+1}(z) \tag{16}$$

qui nous permettra de trouver des limites successives des modules des S.

24. Soient d la distance d'un point z au point $+1$ et ρ le module de z. Je suppose, hypothèse vérifiée pour les premières valeurs de h, qu'il existe des constantes $M_1, \ldots, M_p$ telles que l'on ait, dès que $0 < h \leqq p$,

$$|S_h(z)| < \frac{M_h}{d^h} \qquad \text{si} \qquad d \leqq 1, \tag{17}$$

et

$$|S_h(z)| < \frac{M_h}{d} \qquad \text{si} \qquad d \geqq 1. \tag{18}$$

Je vais montrer qu'on peut trouver une nouvelle constante M_{p+1} de manière que les inégalités précédentes soient encore satisfaites pour $h = p+1$, et établir une relation simple entre les constantes M ainsi introduites.

Traçons, d'un point z, autre que 1, comme centre un cercle C de rayon δ inférieur à d et posons $d = \delta + \delta'$; comme la limite supérieure donnée pour le module d'une fonction $S_h(z)$ décroît quand z s'éloigne du point singulier, le maximum de $|S_p(z)|$ sur C est inférieur soit à $\frac{M_p}{\delta'^p}$, soit à $\frac{M_p}{\delta'}$ selon que δ' est plus petit ou plus grand que 1. Soit μ celle des deux quantités qu'il convient de choisir. On a donc au centre du cercle $\left|\frac{dS_p(z)}{dz}\right| < \frac{\mu}{\delta}$. Si $\delta' < 1$

$$\frac{\mu}{\delta} = \frac{M_p}{\delta\delta'^p}.$$

Or le maximum de $\delta\delta'^p$ a lieu pour $\delta = \frac{d}{p+1}$ et il est égal à

$$\frac{d^{p+1}}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right)^p.$$

Aussi *adoptons-nous* définitivement *comme rayon de* C *la longueur* $\frac{d}{p+1}$. Si $\frac{p}{p+1}d$ est inférieur à 1, nous aurons en vertu de l'égalité (16) et pour le centre du cercle

$$|S_{p+1}(z)| < \rho \frac{M_p(p+1)\left(1+\frac{1}{p}\right)^p}{d^{p+1}} < \rho e(p+1)\frac{M_p}{d^{p+1}}.$$

Si $\frac{p}{p+1}d$ est supérieur ou égal à 1, nous aurons l'inégalité

$$|S_{p+1}(z)| < \frac{M_p}{d}\left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{\rho}{d}.$$

Or, dans le premier cas, ρ, et dans le second $\left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{\rho}{d}$ restent finis: soit k une limite supérieure de ces quantités; si l'on désigne

$$M_p k e(p+1)$$

par M_{p+1}, on peut écrire soit

$$|S_{p+1}(z)| < \frac{M_{p+1}}{d^{p+1}}, \tag{19}$$

soit

$$|S_{p+1}(z)| < \frac{M_{p+1}}{d}. \tag{20}$$

D'ailleurs, si d est supérieur, mais $\frac{p}{p+1}d$ inférieur à l'unité, de l'inégalité (18) qui a lieu on déduit *a fortiori* l'inégalité (20), de sorte que les relations (19) et (20) sont satisfaites dans les mêmes conditions que celles (17) et (18) qui avaient lieu par hypothèse.

Enfin, on peut trouver M_0 tel que

$$|S_0(z)| < \frac{M_0}{d} \quad \text{si} \quad d \leqq 1.$$

et

$$|S_0(z)| < M_0 \quad \text{si} \quad d \geqq 1.$$

Soit M le plus grand des deux nombres M_0 et M_1. On a, quel que soit p,

$$|f_p(z)| \leqq |c_0||S_0| + |c_1||S_1| + \ldots + |c_p||S_p| < \sum_{n=0}^{n=\infty} |c_n||S_n|.$$

Donc, si $d > 1$

$$(21) \quad |f_p(z)| < \frac{M}{d}\{|c_0|d + |c_1| + |c_2|2!\,ek + \ldots + |c_n|n!\,e^{n-1}k^{n-1} + \ldots\},$$

et si $d \leqq 1$

$$(22) \quad |f_p(z)| < M\left\{\frac{|c_0|}{d} + \frac{|c_1|}{d} + \frac{|c_2|}{d^2}2!\,ek + \ldots + \frac{|c_n|}{d^n}n!\,e^{n-1}k^{n-1} + \ldots\right\}.$$

Donc, dans une région où d a un minimum, l'ensemble des fonctions $f_p(z)$ admet pour les modules de ces fonctions une limite supérieure finie. Achevant alors le raisonnement comme au n° **19**, on conclut de même que la quatrième condition est vérifiée.

23. Formons à présent la différence $f_{n+1}(z) - f_n(z)$ ou $c_n S_n(z)$. Si γ est l'ordre de la série $\sum c_p t^p$, et si $\gamma < \gamma' < 1$, on finit par avoir constamment

$$|c_n| < \frac{1}{n^{\frac{n}{\gamma'}}},$$

le coefficient de z^p dans $c_n S_n$ est donc, du moins à partir d'un certain moment, inférieur en module à $\frac{p^n}{n^{\frac{n}{\gamma'}}}$. On voit aisément, en étudiant la racine $p^{\text{ième}}$ de cette expression, que, si s désigne un nombre quelconque, on pourra, afin d'avoir les polynomes de contact des fonctions f, faire varier p de n à $\varphi(n)$, $\varphi(n)$ ne dépassant pas $snLn$.

Ainsi, désignons par ν une fonction de n qui prend des valeurs entières au plus égales à n et telles que n soit inférieur à $s\nu L\nu$: *la série*

$$\sum_1^\infty n(c_0 + c_1 n + \ldots + c_\nu n^\nu) z^n$$

a le seul point singulier $+1$ *sur le cercle de convergence.*

26. Ces résultats se complètent comme ceux de l'application précédente, au n° **21**. Je me borne donc à énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Soient des nombres* $c_0, c_1, \ldots, c_p, \ldots$ *tels que la série* $\sum c_p t^p$ *définisse une fonction entière d'ordre plus petit que* 1, *et des fonctions*

$$g_1(t), \quad g_2(t), \quad \ldots, \quad g_n(t), \quad \ldots$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *On a, en ordonnant*

$$g_n(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n + \psi_n(t);$$

2° *Il existe un nombre* λ *supérieur à* 1, *tel que le rayon de convergence de la série* $g_n(t)$ *soit plus grand que* λn;

3° *Lorsqu'on fait décrire à* t *une circonférence dont le centre est à l'origine et dont le rayon est au moins égal à* λn, *la suite des modules des fonctions* $\psi_n(t)$ *a une limite supérieure finie.*

Le point $+1$ *est le seul point singulier de la série* $\sum g_n(n) z^n$ *sur le cercle de convergence.*

27. *Cas particulier.* — Les fonctions $g_n(t)$ peuvent être identiques; on a, dans ce cas, la série

$$\sum g(n) z^n,$$

$g(t)$ *étant une fonction entière d'ordre inférieur à l'unité.*

Exemples :

$$\sum (e^{\sqrt{n}} + e^{-\sqrt{n}}) z^n,$$

$$\sum P(n) z^n,$$

P étant un polynome. En combinant les applications II et III, on voit que l'on peut prendre $\sum F(n) z^n$, si F désigne une fraction.

28. On peut étendre un peu les énoncés des nos **26** et **27**. Désignons par $U(t)$ la fonction entière $\sum c_p t^p$. Nous l'avons supposée d'ordre plus petit que 1. Les conclusions trouvées subsistent *si* $U(t)$ *est d'ordre* 1, *pourvu que le maximum* P_r *de son module*, pour les valeurs de la variable de module r, *soit tel que* $P_r^{\frac{1}{r}}$ *ait pour plus grande limite l'unité* quand r devient infini. Posons

$$|c_p| = \left(\frac{u_p}{p}\right)^p;$$

je dis d'abord que u_p *tend vers* 0 *pour* p *infiniment grand*. En effet, on a quel que soit r :

$$|c_p| < \frac{P_r}{r^p},$$

d'où

$$u_p < \frac{P_r^{\frac{1}{p}}}{\frac{r}{p}} = \frac{\left(P_r^{\frac{1}{r}}\right)^{\frac{r}{p}}}{\frac{r}{p}}.$$

Or, soit $\frac{r}{p} = r'$, Q un nombre positif fixe et r'' un nombre tel que

$$\left(P_r^{\frac{1}{r}}\right)^{r''} = Q.$$

Quand r croît indéfiniment, $P_r^{\frac{1}{r}}$ finit par rester inférieur à tout nombre supérieur à 1, donc r'' est infiniment grand; par suite, on peut choisir r'

de manière qu'il reste inférieur à r'', mais qu'il devienne infini ainsi que $\frac{r}{r'}$ ou p. Dès lors u_p qui est inférieur à $\frac{Q}{r'}$ tend vers o.

Réciproquement, *si u_p tend vers* o, $P_r^{\frac{1}{r}}$ *a pour plus grande limite l'unité.* On le voit sans peine en décomposant $\sum \left(\frac{u_p}{p}\right)^p r^p$ en deux parties : l'une contient les termes tels que $p \geqq r$, sa valeur est limitée; l'autre est un polynome dont le nombre de termes est au plus égal à r, et l'on prend la plus grande des puissances $\frac{1}{r}$ de chacun de ces termes, elle tend vers 1; donc, la proposition est établie. Ainsi, *il faut et il suffit que u_p tende vers* o *pour que la plus grande limite de* $P_r^{\frac{1}{r}}$ *soit* 1.

Nous plaçant dans cette hypothèse, nous constatons que les fonctions f satisfont encore à la troisième et à la quatrième condition, par les mêmes raisonnements qu'aux nos **23** et **24**. Quant à la cinquième, étudiée au no **25**, elle ne le sera que si l'on fait varier p de n à $\varphi(n)$, $\varphi(n)$ n'augmentant pas trop rapidement, *le mode de croissance maximum* dépend de la manière dont u_p tend vers o. *Le théorème du no* **26** *ainsi que sa conséquence subsistent intégralement.*

29. *Remarque sur une extension de la méthode qui a fait l'objet des applications précédentes.* — La méthode exposée aux nos **14** et **15** peut être présentée d'une manière un peu plus large. Reprenons les mêmes séries et les quatre premières conditions. La cinquième peut être modifiée comme il suit :

Supposons qu'il existe deux fonctions $\upsilon(n)$, $\varphi(n)$ non décroissantes, la première infiniment grande avec n, la seconde dans un rapport avec la première qui reste supérieur à un nombre >1, et telles enfin que dans les différences $f_{n+1}(z) - f_n(z)$ les termes dont le rang p est compris entre $\upsilon(n)$ et $\varphi(n)$ admettent comme termes majorants ceux d'une série fixe plus étendue, les polynomes de $f_n(z)$ et de $f_{n+1}(z)$ qui donnent lieu à ces différences seront encore dits *polynomes de contact.* Si l'on se représente les coefficients a_{pk} (notation du no **14**) figurés dans un Tableau à double entrée par des points dans les colonnes p et les lignes k, les coefficients des termes de contact sont situés dans une sorte de bande diagonale que l'on peut supposer limitée par deux lignes brisées dont le contour va sans cesse vers le bas ou vers la droite. Soit $\mu(p)$ le nombre de coefficients situés dans cette bande et dans la colonne p, si $\mu(p)^{\frac{1}{p}}$ a pour limite supérieure l'unité pour p infini, la méthode des nos **14** et **15** s'applique, c'est-à-dire que, en choisissant au hasard dans les polynomes de contact le terme de rang p d'une nouvelle série, celle-ci est régulière le long de l'arc PQ. La démonstration est toute semblable à celle déjà faite. On choisit l'indice n' du terme étudié de rang n, de façon que, si n_1 est la plus grande valeur telle que $\upsilon(n_1)$ soit au plus égal à n, $\varphi(n_1)$ soit au moins égal à n'; alors les coefficients du terme étendu peuvent, par substitutions successives, être remplacés par ceux qui figurent dans f_{n_1}; d'ailleurs, la racine $n^{\text{ième}}$ du nombre des substitutions a pour plus grande limite l'unité; le raisonnement s'achève donc comme plus haut.

Cette remarque permettrait d'énoncer sous une forme plus générale les résultats des nos **20** et **25**. Nous ne nous y attarderons pas.

CHAPITRE II.

ÉTUDE, DANS LE PLAN, DES FONCTIONS REPRÉSENTÉES PAR DES SÉRIES DE TAYLOR.

---

1. *Exposé de la méthode.* — Soit une fonction $f(z)$ donnée par le développement $\Sigma a_p z^p$ convergent dans un cercle de rayon différent de o. Nous nous proposons de voir *si elle est holomorphe le long d'une ligne* $\mathfrak{L}$ allant de l'origine à un certain point P. Pour étudier cette question, nous procéderons comme pour la recherche des points singuliers sur le cercle de convergence. Construisons des cercles de même rayon ρ, dont les centres $O, O_1, O_2, \ldots, O_s$ sont situés sur $\mathfrak{L}$, le dernier confondu avec P, la distance de deux centres successifs étant constamment égale à un nombre δ plus petit que ρ. D'après la notion même du prolongement analytique, pour que la fonction soit régulière le long de la ligne donnée, il faut et il suffit que l'on puisse choisir la suite de cercles de manière que les développements de $f(z)$ relatifs aux centres successifs soient convergents pour les valeurs de la variable de module supérieur à ρ.

2. ρ étant donné, désignons par $\Sigma a_{n,k} z^n$ le développement, supposé possible, au point O_k ($a_{n0} = a_n$). J'imagine $f(z)$ holomorphe dans les $h+1$ premiers cercles $C, C_1, C_2, \ldots, C_h$ et sur leurs contours, et j'appelle M_h le maximum du module de la fonction dans cette région. Le coefficient de z^n dans la série qui correspond au point O_{h+1} est fourni par une égalité de la forme

$$(1) \qquad a_{n,h+1} = c_n a_{n,h} + c_{n+1} a_{n+1,h} + \ldots;$$

les quantités $c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \ldots$ ne dépendent pas de la fonction $f(z)$, mais de n et du segment $O_h O_{h+1}$.

Il s'agit à présent de voir quelle est *la plus grande des limites de* $\sqrt[n]{|a_{n,h+1}|}$ *pour n infini*. Or nous ferons, dans ce calcul, les deux modifications suivantes :

1° Nous ne prendrons dans l'expression de $a_{n,h+1}$ qu'un polynome

$$c_n a_{n,h} + c_{n+1} a_{n+1,h} + \ldots + c_{\varphi_{h+1}(n)} a_{\varphi_{h+1}(n),h},$$

$\varphi_{h+1}(n)$ désignant une certaine fonction de n, qui prend des valeurs entières en même temps que n.

2° Nous ne supposerons pas connues les quantités

$$a_{n,h}, \quad a_{n+1,h}, \quad \ldots, \quad a_{\varphi_{h+1}(n),h}$$

et nous leur substituerons des valeurs approchées

$$a'_{n,h}, \quad a'_{n+1,h}, \quad \ldots, \quad a'_{\varphi_{h+1}(n),h},$$

de sorte que nous aurons une valeur approchée de $a_{n,h+1}$, soit $a'_{n,h+1}$, fournie par l'égalité

$$(2) \qquad a'_{n,h+1} = c_n a'_{n,h} + c_{n+1} a'_{n+1,h} + \ldots + c_{\varphi_{h+1}(n)} a'_{\varphi_{h+1}(n),h}.$$

3. Posons en général

$$a_{k,h} = a'_{k,h} + a''_{k,h}$$

et

$$a_{k,h+1} = a'_{k,h+1} + a''_{k,h+1}.$$

Nous allons chercher une limite supérieure de $|a''_{n,h+1}|$, en supposant que, à partir d'une certaine valeur de n, on a

$$|a''_{n,h}| < \lambda''_h,$$

λ_h étant une certaine constante. L'erreur $a''_{n,h+1}$ est la somme de deux expressions.

Première expression :

$$c_{1+\varphi_{h+1}(n)} a_{1+\varphi_{h+1}(n),h} + \ldots + c_q a_{q,h} + \ldots = \varepsilon'_{n,h}.$$

Reportons-nous au calcul analogue fait au Chapitre I, n° 4.

Ici $|a_{p,h}| < \frac{M_h}{\rho^p}$, quel que soit p; ξ est remplacé par $\frac{\varphi_{h+1}(n)}{n}$, t par $\frac{1}{\rho}$, enfin $|b|$ par δ, en sorte que la condition pour la convergence de la progression géométrique de raison $\lambda|b|$ qu'on avait eu à considérer devient ici, en désignant par k un nombre positif, plus petit que 1,

$$(3) \qquad \frac{\frac{\varphi_{h+1}(n)}{n}+1}{\frac{\varphi_{h+1}(n)}{n}} \frac{\delta}{\rho} < k.$$

La quantité que nous avions appelée A était le maximum de

$$\frac{x^x}{(x-1)^{x-1}} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

quand n allait de ξ à $\xi + 1$. Or, avec nos notations nouvelles, la première fraction est inférieure à

$$e\left[\frac{\varphi_{h+1}(n)}{n} + 1\right].$$

On conclut aisément de là, d'après l'expression finale trouvée alors comme limite supérieure des termes négligés, que si l'on choisit *un* *nombre* θ *un peu plus grand que* 1, on a constamment, à partir d'une certaine valeur de n,

$$(4) \qquad |\varepsilon'_{n,h}|^{\frac{1}{n}} < \theta \mathrm{M}_h^{\frac{1}{n}} e \left[\frac{\varphi_{h+1}(n)}{n} + 1\right] \times \frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{\varphi_{h+1}(n)}{n} - 1}.$$

M_h est dans le second membre *la seule quantité* qui dépende de la série $\Sigma a_{p,h} z^p$.

4. *Seconde expression :*

$$c_n a''_{n,h} + c_{n+1} a''_{n+1,h} + \ldots + c_{\varphi_{h+1}(n)} a''_{\varphi_{h+1}(n),h} = \varepsilon''_{n,h}.$$

On a

$$|\varepsilon''_{n,h}| < |c_n| \lambda_h^n + |c_{n+1}| \lambda_h^{n+1} + \ldots + |c_p| \lambda_h^p + \ldots.$$

Mais, *si je suppose*

$$(5) \qquad \lambda_h < \frac{1}{\delta},$$

la série du second membre est convergente et sa racine $n^{\text{ième}}$ a, d'après la règle de Cauchy, pour limite

$$\frac{1}{\frac{1}{\lambda_h} - \delta}.$$

On a donc

$$(6) \qquad |\varepsilon''_{n,h}|^{\frac{1}{n}} < \frac{\theta \lambda_h}{1 - \delta \lambda_h},$$

θ ayant la même signification que ci-dessus. Cette inégalité a lieu certainement à partir d'une certaine valeur de n qui dépend de θ et de $\delta \lambda_h$.

5. Les limites que l'on vient de trouver vont nous permettre de faire dépendre les unes des autres les erreurs commises dans le calcul des coefficients des développements de Taylor que nous sommes amenés à construire successivement.

Soit λ_{h+1} une quantité fixe. Si nous voulons que l'on ait

$$|a''_{n.h+1}| < \lambda''_{h+1}$$

à partir d'une certaine valeur de n, il suffit que l'on ait séparément

$$(7) \qquad |\varepsilon'_{n.h}| < (\theta_\mu \lambda_{h+1})^n,$$

$$(8) \qquad |\varepsilon''_{n.h}| < (\theta_\mu \lambda_{h+1})^n,$$

$\mu\theta$, et par suite μ, étant un peu inférieur à 1.

6. L'inégalité (8) sera vérifiée, en vertu de la relation (6), si l'on a

$$(8') \qquad \lambda_h \leqq \frac{\mu \lambda_{h+1}}{1 + \mu \delta \lambda_{h+1}}.$$

Quand cette inégalité a lieu, λ_h est inférieur à λ_{h+1}. Or *il convient évidemment de diriger le calcul de manière que les quantités négligées dans la détermination des coefficients d'une série n'empêchent pas de constater si cette série a un rayon de convergence supérieur à ρ.* Pour atteindre ce but, il suffit, en désignant d'une manière générale par $a''_{n\,p}$ l'erreur commise sur le coefficient $a_{n\,p}$, que l'on puisse faire correspondre à chaque centre O_p une valeur λ_p au plus égale à $\frac{\mu}{\rho}$ et telle que l'on ait, à partir d'une certaine valeur de n,

$$|a''_{n.p}| < \lambda''_p.$$

En prenant

$$(9) \qquad \lambda_p = \frac{\mu^{s-p+1}}{\rho\left[1 + (s-p)\frac{\delta}{\rho}\right]},$$

tous les λ sont inférieurs à $\frac{\mu}{\rho}$, sauf λ_s qui est précisément égal à $\frac{\mu}{\rho}$ et qu'il n'y a d'ailleurs pas lieu de considérer; de plus, *l'inégalité* (8') *est constamment vérifiée.* D'ailleurs, *la relation* (5) *a bien lieu* a fortiori, δ étant inférieur à ρ.

7. La condition (7) sera satisfaite également, si l'on a, outre la relation (3), la suivante :

$$(7') \qquad M_h^{\frac{1}{n}} e\left[\frac{\varphi_{h+1}(n)}{n}+1\right]\frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{\varphi_{h+1}(n)}{n}-1} < \frac{\mu^{s-h+1}}{\rho+(s-h-1)\delta}.$$

Posons

$$(10) \qquad \frac{\varphi_h(n)}{n}-1=\psi(s-h);$$

ψ ne dépendra pas de n; puis, remplaçons dans (7') h par $h-1$. *Si l'on reste dans une région où les* M_h *ont une limite supérieure finie*, et si l'on désigne par Q une certaine constante, l'inégalité (7') pourra s'écrire

$$(11) \qquad \frac{\rho+(s-h)\delta}{\rho}[\psi(s-h)+2]\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\psi(s-h)}\frac{1}{\mu^{s-h}} < Q.$$

Les ψ sont assujettis à rester supérieurs à un nombre fixe; ε et η étant deux nombres positifs arbitrairement choisis, nous imposerons aux ψ la double inégalité

$$(12) \qquad \varepsilon(s-h) < \psi(s-h) < \eta(s-h).$$

Mais $s\delta$ est sensiblement égal à la longueur l de g et ρ est petit. Il suffira donc, pour vérifier l'inégalité (11), que l'on ait

$$(12') \qquad \frac{[2+\eta(s-h)]}{\rho}\left[\frac{l^{\varepsilon}}{(s\rho)^{\varepsilon}\mu}\right]^{s-h} < Q \text{ (}^1\text{)},$$

ou

$$(13) \qquad \frac{(s-h)}{\rho}\,\frac{g^{s-h}}{(s\rho)^{\varepsilon(s-h)}} \leq R,$$

g et R étant des constantes.

Or, pour une valeur donnée de ρ, *il existe une valeur de s à partir de laquelle cette relation a lieu* pour toutes les valeurs de h : 0, 1, 2, ..., $s-1$, *ainsi*, bien entendu, *que la relation* (3).

---

(1) En toute rigueur, il faudrait remplacer l par une quantité un peu plus grande, mais ceci est sans importance.

Ainsi, l'inégalité (7′) ou (13) détermine [conjointement avec l'inégalité (3)] un minimum de s en fonction de ρ, *si l'on connaît une limite supérieure des* M_h; quant aux λ_p, ils sont fixés par les relations (9), les a_{n0} étant connus exactement, la première valeur λ_0 donnée par la formule est acceptable.

8. Cela posé, je considère les polynomes que nous avons à former pour trouver les valeurs approchées $a'_{n1}, a'_{n2}, \ldots, a'_{np}, \ldots$ des coefficients de la puissance n de la variable, et j'imagine que dans chacun d'eux on remplace les a' qui y figurent par les polynomes qui les expriment eux-mêmes en fonction des coefficients approchés des séries précédentes. Finalement, nous aurons donc des relations de la forme

$$(14)\quad \begin{cases} a'_{n1} = \alpha_{n,1,n} a_n + \alpha_{n+1,1,n} a_{n+1} + \ldots + \alpha_{\chi_1(n),1,n} a_{\chi_1(n)}, \\ a'_{n2} = \alpha_{n,2,n} a_n + \alpha_{n+1,2,n} a_{n+1} + \ldots + \alpha_{\chi_2(n),2,n} a_{\chi_2(n)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{np} = \alpha_{n,p,n} a_n + \alpha_{n+1,p,n} a_{n+1} + \ldots + \alpha_{\chi_p(n),p,n} a_{\chi_p(n)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} &\chi_1\ \ (n) < n[1 + \eta(s-1)], \\ &\chi_2\ \ (n) < n[1 + \eta(s-1)][1 + \eta(s-2)], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\chi_{s-1}(n) < n[1 + \eta(s-1)][1 + \eta(s-2)]\ldots(1 + \eta). \end{aligned}$$

Soit $\theta(s)$ le premier nombre entier supérieur à

$$[1 + \eta(s-1)][1 + \eta(s-2)]\ldots(1 + \eta);$$

les nombres $\chi(n)$ sont donc tous inférieurs à $n\theta(s)$.

9. Dès lors, si l'on considère une fonction n' de n, prenant des valeurs entières avec n et telle que $\dfrac{n'}{n}$ devienne, en même temps que n, infiniment grand, il arrivera un moment à partir duquel, pour des valeurs données de ρ et de s, on aura constamment

$$n' > n\theta(s),$$

et, par suite, *n' restera supérieur aux fonctions $\chi(n)$*.

10. Si la fonction $f(z)$ est holomorphe le long de $\mathcal{L}$, son module admet, dans une région comprenant $\mathcal{L}$ à son intérieur, un maximum, et l'on peut trouver une suite de cercles, de rayon ρ assez petit, telle que $f(z)$ soit holomorphe dans des cercles concentriques à ceux-là, et de rayon plus grand que $\frac{\rho}{\mu'}$, μ' étant supérieur à μ, mais inférieur à 1. Donc, si l'on choisit cette suite de cercles de manière que s soit suffisamment grand, comme il est indiqué au n° **7**, *les racines $n^{\text{ièmes}}$ des valeurs absolues des expressions* (14) *ont, pour n infini, des plus grandes limites inférieures à $\frac{\mu'}{\rho}$*.

Inversement, supposons que l'on forme des suites de cercles C_0, C_1, C_2, ..., C_{s-1}, telles que, pour chaque valeur de ρ inférieure à un nombre ρ_1 et pour les valeurs de s supérieures alors à un nombre qui dépend de ρ, les racines $n^{\text{ièmes}}$ des modules des expressions (14) aient leurs plus grandes limites inférieures à $\frac{\mu'}{\rho}$, μ' étant une quantité positive quelconque plus petite que 1, *la fonction $f(z)$ est holomorphe le long de $\mathcal{L}$*. En effet, choisissons $\mu < \mu'$; puis considérons une des files de cercles, définie par le rayon ρ et le nombre s. La fonction $f(z)$ commence par s'étendre de cercle en cercle, et il en sera ainsi jusqu'au point P, *à moins que le maximum du module de la fonction dans la région acquise* ne s'accroisse tellement que s ne soit plus aussi grand qu'il est requis au n° **7**.

Alors, *sans changer ρ, augmentons s*; $f(z)$ s'étend de nouveau dans les cercles voisins. Mais on peut craindre que *le maximum du module de $f(z)$ ne croisse si vite qu'il faille faire croître à son tour s indéfiniment*. Peut-être alors les cercles, se resserrant de plus en plus, ne pourraient-ils dépasser une position limite Γ? *Cela n'est pas*. $f(z)$ ne deviendra pas infini sur un pareil cercle Γ. Soit, en effet, Γ' un cercle qui *précède* Γ, la distance des centres étant inférieure à

$\frac{\rho}{\mu'} - \rho$. Le cercle Γ' est atteint par $f(z)$ dans son prolongement, et $f(z)$ est holomorphe dans un cercle concentrique à Γ' et de rayon $\frac{\rho}{\mu'}$, *donc sur* Γ. De proche en proche, la fonction s'étend donc jusqu'au point P.

11. Ainsi, la possibilité du prolongement de la série le long d'une ligne $\mathfrak{L}$ dépend des limites supérieures des expressions $|a'_{n\,p}|^{\frac{1}{n}}$ fournies par les formules (14). Ces expressions ne font intervenir que certains coefficients a_h, ceux que l'on obtient en faisant varier h depuis n jusqu'à $\chi_1(n), \ldots, \chi_{s-1}(n)$. Or nous avons vu au n° 9 que si n' est une fonction de n, infiniment grande avec n, les expressions χ finissent par être inférieures à n', quelle qu'ait été la valeur prise pour ρ. Donc, une pareille fonction n' étant choisie, si l'on appelle *$n^{ième}$ ensemble des coefficients de la série $\Sigma a_p z^p$*, l'ensemble $a_n, a_{n+1}, \ldots a_{n'}$, on peut dire que *le problème posé ne dépend que de la suite de ces ensembles.*

Les polynomes (14) jouent dans l'étude de la fonction $f(z)$ le long de $\mathfrak{L}$ un rôle semblable à celui du terme général pour la convergence. Nous les appellerons *termes généraux étendus de rang n*, et n' sera leur *indice;* ainsi se poursuit l'analogie de l'étude actuelle avec celle faite dans le premier Chapitre. La suite de cercles auxiliaires donnant lieu à ces termes généraux sera dite *suite de cercles associée à $\mathfrak{L}$*, et leur rayon le *rayon associé*. Les termes généraux étendus dépendent de la suite de cercles associée. Il sera souvent inutile de spécifier quelle est cette suite, et il sera entendu, à moins d'indication différente, qu'on suppose ρ arbitraire, mais aussi petit que l'on veut, et s suffisamment grand par rapport à ρ.

Ainsi, la différence essentielle entre le résultat auquel nous parvenons et celui qui a été établi au Chapitre I, c'est que le rapport de l'indice des termes généraux étendus, à leur rang, devient infini avec n, tandis qu'il suffisait alors de laisser ce rapport supérieur à un nombre fixe plus grand que 1. Nous avons maintenant un critérium pour l'étude d'une fonction dans les différentes régions du plan. Ici encore, *nous utiliserons ce critérium par la comparaison de la série donnée avec d'autres séries définissant des fonctions déjà connues.*

Nous nous bornerons à former des développements représentant des fonctions holomorphes dans certaines parties du plan.

12. *Formation de fonctions holomorphes dans certaines régions du plan.* — La méthode exposée Chapitre I, n° **14**, s'applique ici avec quelques modifications.

Soit une ligne $\mathfrak{L}$ issue de l'origine, et supposons que l'on ait des séries

$$f_1(z) = \Sigma a_{p1} z^p, \quad f_2(z) = \Sigma a_{p2} z^p, \quad \ldots, \quad f_k(z) = \Sigma a_{pk} z^p, \quad \ldots$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Elles représentent des fonctions holomorphes dans une aire qui comprend $\mathfrak{L}$, les distances des points de la ligne au contour de l'aire admettent un minimum différent de zéro;

2° Les modules des fonctions ont, dans la région considérée, une limite supérieure finie M;

3° Dans les différences $f_{n+1}(z) - f_n(z)$ les termes dont le rang varie de n à $\varphi(n)$, $\frac{\varphi(n)}{n}$ devenant infiniment grand avec n, admettent comme termes majorants ceux d'une certaine série fixe $\Sigma h^p z^p$, convergente dans un cercle qui comprend $\mathfrak{L}$ à son intérieur ([1]).

Ces conditions seront dites les *conditions fondamentales*.

Prenons une fonction n' de n, entière avec n, non supérieure à $\varphi(n)$, non décroissante, telle que $\frac{n'}{n}$ soit infiniment grand avec n et que $\sqrt[n]{n'}$ ait 1 pour plus grande limite. Nous substituerons cette fonction à $\varphi(n)$, à laquelle elle peut d'ailleurs se trouver identique. Reprenant notre comparaison du Chapitre précédent, nous pourrons donc dire que les f forment une famille de séries tangentes le long des polynomes formés pour f_n et f_{n+1} des termes dont l'indice va de n à n'. *Toute série dont les termes sont des termes des polynomes de contact est holomorphe le long de $\mathfrak{L}$.*

Il est inutile de reprendre en détail le raisonnement fait dans des

([1]) Comme au n° 29 du Chapitre I, cette dernière condition pourrait être remplacée par une autre plus large; nous ne nous en occuperons pas.

circonstances analogues. Je me borne à remarquer qu'il existe à coup sûr une infinité de suites de cercles associés, dans les conditions du n° **10**, telles que pour chacune de ces suites et pour chaque cercle qui en fait partie, les racines $n^{\text{ièmes}}$ des modules des termes généraux étendus des diverses séries, considérées à la fois, aient *simultanément* pour plus grande limite au plus le produit de l'inverse du rayon associé par un nombre plus petit que 1. Cela résulte de suite de l'existence du maximum M des modules. De plus, cette propriété a lieu, quelle que soit la forme des termes généraux étendus; elle s'applique aussi aux coefficients mêmes des développements successifs relatifs aux centres des cercles associés.

12. *Première application : Séries dont les coefficients de rang n sont certaines fonctions de* $\frac{1}{n}$. — Reprenons (Chapitre I, n° **18**) les séries

$$S_p(z) = \frac{z}{1^p} + \frac{z^2}{2^p} + \ldots + \frac{z^n}{n^p} + \ldots, \tag{15}$$

p parcourant les valeurs entières et positives, et posons

$$\left\{\begin{aligned} &f_0(z) = c_0 S_0(z), \qquad f_1(z) = c_0 S_0 + c_1 S_1, \qquad \ldots, \\ &\qquad f_p(z) = c_0 S_0 + \ldots + c_p S_p, \qquad \ldots, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

les c étant des constantes telles que la série

$$c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_p t^p + \ldots$$

ait un rayon de convergence, r, différent de 0.

En nous reportant au numéro cité, nous constatons que les fonctions f satisfont à la première et à la seconde condition fondamentale *pour toute ligne $\mathfrak{L}$ qui n'a aucun point commun avec la portion de l'axe des quantités réelles allant de* $+1$ *à* $+\infty$.

Il est d'ailleurs aisé de lever cette restriction. Imaginons que l'aire A (Chapitre I, n° **19**) soit telle qu'on puisse arriver en chacun de ses points en suivant une ligne située à son intérieur, issue de l'origine, et telle que le cosinus de l'angle que fait la tangente en un point quelconque avec le rayon vecteur aboutissant en ce point reste supérieur à un nombre fixe k. Alors, en intégrant le long d'une pareille ligne, on aura, si l'on suppose

$$|\mathfrak{T}_p(z)| < \frac{M_p \rho^h}{k^p},$$

l'inégalité

$$\left|\int_0^z \frac{\mathfrak{T}_p(z)}{z}\,dz\right| < \frac{1}{k}\int_0^z \frac{M_p \rho^{h-1}}{k^p}\,d\rho,$$

et par suite il suffit, dans le calcul déjà fait, de remplacer la relation $M_p = \frac{M_0}{h^p}$ par la suivante : $M_p = M_0 \frac{1}{(hk)^p}$, ce qui n'en modifie pas les conséquences. Ainsi, *la ligne* $\mathfrak{L}$ *est simplement assujettie à ne pas passer par le point* $+1$.

Soit R le rayon (supérieur à 1) d'un cercle dont le centre est à l'origine et à l'intérieur duquel est située la courbe $\mathfrak{L}$; la troisième condition fondamentale sera remplie si l'on prend comme termes du $n^{\text{ième}}$ polynome de contact ceux dont le rang va de n à un nombre plus petit que $\frac{n\,\mathrm{L}n}{\mathrm{L}\frac{1}{\mathrm{R}}}$.

Ainsi, si l'on désigne par ν une fonction de n prenant des valeurs entières au plus égales à n et telles que n soit inférieur à $\frac{\nu\,\mathrm{L}\nu}{\mathrm{L}\frac{1}{\mathrm{R}}}$, *la série*

$$F(z) = \sum_1^\infty \left(c_0 + \frac{c_1}{n} + \ldots + \frac{c_\nu}{n^\nu}\right) z^n$$

n'a à l'intérieur d'un cercle de rayon R *pas d'autre point singulier que* $+1$. La fonction ainsi définie n'est d'ailleurs pas, en général, uniforme dans ce cercle.

13. Au lieu de laisser R constant, on peut le faire croître indéfiniment. Dans la formation du $n^{\text{ième}}$ polynome de contact, ne faisons varier l'indice p du rang que de n à un nombre $n' = \varphi(n)$ et tel que $\frac{\varphi(n)}{n\,\mathrm{L}n}$ tende vers 0. Alors, si dans $F(z)$, n est compris entre ν et $\varphi(\nu)$, la fonction obtenue n'a, *dans un cercle quelconque de centre* O, que le point $+1$ comme point singulier. Il suffit, par exemple, de prendre $\varphi(n) \leqq n(\mathrm{L}n)^{\mu}$ $(\mu < 1)$.

14. On peut encore compléter ces résultats. Il suffit de remplacer dans l'énoncé du n° **21** (Chapitre I) $\frac{\lambda}{n}$ par $\frac{1}{n\varepsilon_n}$, ε_n tendant vers o pour n infini. On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soient des nombres c_0, c_1, ..., c_p, ... tels que la série $\Sigma c_p t^p$ ait un rayon de convergence différent de o, et des fonctions*

$$g_0(t) \quad g_1(t), \quad \ldots, \quad g_n(t), \quad \ldots$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *On a, en ordonnant,*

$$g_n(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n + \psi_n(t);$$

2° *Il existe une quantité infiniment petite ε_n telle que le rayon de convergence de $g_n(t)$ soit supérieur à $\frac{1}{n\varepsilon_n}$;*

3° *Lorsque t décrit pour les valeurs croissantes de n des circonférences dont le centre est à l'origine et dont le rayon est au moins égal à $\frac{1}{n\varepsilon_n}$, la suite des modules des fonctions $\psi_n(t)$ correspondantes a une limite supérieure finie.*

Le point $+1$ est le seul point singulier à distance finie de la fonction $\sum g_n\left(\frac{1}{n}\right) z^n$.

15. *Cas particulier.* — Les fonctions $g_n(t)$ peuvent être identiques; on a dans ce cas la série $\sum g\left(\frac{1}{n}\right) z^n$, *$g(t)$ étant holomorphe à l'origine* (on supprime au besoin les premiers coefficients de la série en z).

Les exemples déjà cités Chapitre I conviennent donc encore :

$$\sum \frac{n-1}{n^2+1} z^n, \qquad \Sigma e^{\frac{1}{n}} z^n.$$

16. *Seconde application : Séries dont les coefficients de rang n sont certaines fonctions de n.* — Il s'agit d'une extension au cas du plan de la troisième application, Chapitre I (nos **23** et suivants). Les raisonnements ne subissent que des modifications fort simples. Aussi ne ferons-nous que les indiquer.

Soient p un entier non négatif, et la série

$$S_p(z) = 1^p z + 2^p z^2 + \ldots + n^p z^n + \ldots. \tag{17}$$

Si l'on pose

$$f_0(z) = c_0 S_0(z), \quad \ldots, \quad f_p(z) = c_0 S_0 + c_1 S_1 + \ldots + c_p S_p, \quad \ldots \tag{18}$$

et si les c sont des constantes telles que la fonction $\sum_{p=1}^{p=\infty} c_p t^p$ soit entière, *d'ordre* γ *plus petit que* 1, les fonctions f satisfont aux deux premières conditions fondamentales pour toute ligne $\mathcal{L}$ qui ne passe pas par le seul point singulier de ces fonctions, $+1$. Cela résulte immédiatement des limites supérieures trouvées pour les $S(z)$ au n° **24**, Chapitre I.

De plus, la troisième condition est également vérifiée, si pour le $n^{\text{ième}}$ polynome de contact, on se borne à faire varier le rang p des termes de ce polynome depuis n jusqu'à $\dfrac{n\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\mathrm{L}n}{\mathrm{LR}}$ au plus, R étant le rayon d'un cercle de centre O et qui comprend $\mathcal{L}$ à son intérieur.

Supposons donc que ν soit une fonction de n, prenant des valeurs entières en même temps que la variable et telle que

$$\nu \leqq n \leqq \frac{\nu\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)\mathrm{L}\nu}{\mathrm{LR}};$$

la série

$$\mathrm{F}(z) = \sum_1^{\infty} {}^{n}(c_0 + c_1 n + \ldots + c_\nu n^\nu) z^n$$

n'a que le point singulier $+1$ *à l'intérieur d'un cercle de rayon* R.

La fonction ainsi définie est uniforme dans le cercle. On peut, en effet, écrire son développement

$$c_0 S_0(z) + c_1[S_1(z) - P_1(z)] + c_2[S_2(z) - P_2(z)] + \ldots,$$

les P étant des polynomes; or les $S(z)$ sont des fonctions uniformes.

17. $F(z)$ n'aura à distance finie qu'un point singulier, si, au lieu de laisser R constant, nous le faisons devenir infini avec n. Il suffira, par exemple, dans l'énoncé de la propriété précédente, d'imposer à ν les conditions

$$\nu \leqq n \leqq \nu(L\nu)^{\mu} \qquad (\mu < 1).$$

18. Enfin, je me borne à énoncer le théorème suivant, qui est l'analogue de celui du n° **26**, Chapitre I :

THÉORÈME. — *Soient des nombres $c_0, c_1, \ldots, c_p, \ldots$ tels que la série $\Sigma c_p t^p$ soit une fonction entière d'ordre inférieur à* 1, *et des fonctions*

$$g_0(t), \quad g_1(t), \quad \ldots, \quad g_n(t), \quad \ldots$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *On a, en ordonnant,*

$$g_n(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n + \psi_n(t);$$

2° *Il existe une variable infiniment petite ε_n telle que le rayon de convergence de $g_n(t)$ soit supérieur à $\frac{n}{\varepsilon_n}$;*

3° *Lorsque t décrit, pour les valeurs croissantes de n, des circonférences dont le centre est à l'origine et dont le rayon est au moins égal à $\frac{n}{\varepsilon_n}$, les modules des fonctions $\psi_n(t)$ correspondantes ont une limite supérieure finie.*

Le point $+1$ *est le seul point singulier à distance finie de la fonction $\Sigma g_n(n) z^n$.*

19. *Cas particulier.* — Les fonctions $g_n(t)$ peuvent être identiques. On a, dans ce cas, la série $\Sigma g(n) z^n$, *$g(t)$ étant une fonction entière d'ordre inférieur à* 1.

Les exemples donnés au n° **27**, Chapitre I, sont encore valables.

20. *Cas où la fonction entière $\Sigma c_p t^p$ est d'ordre* 1. — Nous avons vu au Chapitre précédent, n° **28**, qu'il y a lieu également de considérer le cas où la fonction $U(t) = \Sigma c_p t^p$ est d'ordre 1.

Supposons que $p|c_p|^{\frac{1}{p}}$ tende vers o pour p infini, c'est-à-dire que la plus grande des limites de $P_r^{\frac{1}{r}}$ pour r infiniment grand soit l'unité, P_r étant le module maximum de $U(t)$ pour $|t| = r$. Alors, la seule modification à faire aux conclusions des paragraphes précédents a trait au rang p des termes qui figurent dans le $n^{\text{ième}}$ polynome de contact. Si nous voulons définir une fonction n'ayant à l'intérieur d'un cercle de rayon R qu'un point singulier, il nous suffira de ne faire varier p que de n jusqu'à $\dfrac{n\mathrm{L}\dfrac{1}{n|c_n|^{\frac{1}{n}}}}{\mathrm{LR}}$.

Le résultat est particulièrement intéressant si l'on considère une fonction $\Sigma g(n) z^n = F(z)$, où $g(t)$ désigne une fonction entière d'ordre 1, dont les modules maxima pour $|t| = r$, élevés à la puissance $\frac{1}{r}$, ont l'unité pour plus grande limite : $F(z)$ a le seul point singulier $+1$ à distance finie.

21. *Observation au sujet des applications précédentes.* — En modifiant légèrement les calculs qui précèdent, on peut construire des fonctions ayant d'autres points singuliers.

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ des quantités réelles quelconques telles que les points du cercle de convergence ne soient pas tous des points de l'ensemble $e^{2i\pi\varphi_1}, e^{2i\pi\varphi_2}, \ldots$ ou de son dérivé.

Si l'on substitue aux fonctions $S_p(z)$ des applications I et II, soit les séries

$$\frac{e^{-2i\pi\varphi_p}}{1^p} z + \frac{e^{-4i\pi\varphi_p}}{2^p} z^2 + \ldots + \frac{e^{-2ni\pi\varphi_p}}{n^p} z^p + \ldots,$$

soit les séries

$$1^p e^{-2i\pi\varphi_p} z + 2^p e^{-4i\pi\varphi_p} z^2 + \ldots + n^p e^{-2ni\pi\varphi_p} z^p + \ldots,$$

on voit immédiatement que les raisonnements que nous avons faits ne subissent aucune modification; ils s'appliquent à toute aire finie, contenant l'origine et laissant à son extérieur les points $e^{2i\pi\varphi_1}, \ldots$ et leurs points limites. Mais les fonctions que nous formons ont, du moins en général, les points de cet ensemble comme points singuliers.

Enfin, on obtiendrait une généralisation plus étendue par l'introduction de points singuliers $\sigma_p e^{2i\pi\varphi_p}$ distribués arbitrairement dans le plan.

22. *Autres séries.* — Voici une remarque fort simple : soient des constantes $u_1, u_2, u_3, \ldots$ et les expressions $\psi(n) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$; la fonction $\Sigma\psi(n)z^n$ n'a d'autres points singuliers que ceux de la fonction $\Sigma u_n z^n$ et le point $+1$, puisque l'on a

$$\Sigma\psi(n)z^n = \frac{\Sigma u_n z^n}{1-z}.$$

Cela posé, désignons par $g(t)$ une fonction holomorphe à l'origine, et prenons $\psi(n) = \mathrm{L}g\left(\frac{1}{n}\right)$, il vient

$$\psi(n+1) - \psi(n) = u_{n+1} = \mathrm{L}\,\frac{g\left(\frac{1}{n+1}\right)}{g\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Donc u_{n+1} est une fonction holomorphe de $\frac{1}{n}$ à l'origine, et par suite $\Sigma u_n z^n$ n'a *pas d'autre point singulier que* $+1$ *à distance finie; il en est de même de* $\Sigma \mathrm{L}g\left(\frac{1}{n}\right)z^n$.

Exemples :

1° $$\Sigma \mathrm{L}\sin\frac{1}{n}z^n;$$

2° $$\sum \mathrm{L}\frac{1}{n}z^n \quad \text{et, par conséquent,} \quad \Sigma \mathrm{L}n\,z^n.$$

23. *Extension d'un théorème de M. Hadamard à l'étude des séries de Taylor.* — Le théorème dont il s'agit est le suivant :

Si l'on pose

(19) $$\varphi(z) = \Sigma a_n z^n,$$

(20) $$\psi(z) = \Sigma b_n z^n$$

et

(21) $$f(z) = \Sigma a_n b_n z^n,$$

la fonction $f(z)$ ne peut pas avoir d'autres points singuliers que ceux dont les affixes sont le produit des affixes de deux points singuliers, l'un de φ, l'autre de ψ.

M. Borel [1] a montré que si φ et ψ sont uniformes dans le voisinage de deux de leurs points singuliers respectifs α et β supposés isolés, f est uniforme dans le voisinage du point $\alpha\beta$.

24. Nous allons utiliser ces propriétés pour la formation de séries dont les singularités nous seront connues.

Désignons par $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, ... les séries $\Sigma a_n^2 z^n$, $\Sigma a_n^3 z^n$, ... Si l'on remplace successivement $\psi(z)$ par $\varphi(z)$, $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, ..., $f(z)$ devient tour à tour $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, $\varphi_4(z)$, ... Ainsi donc, une série de la forme $\Sigma P(a_n) z^n$, où P désigne un polynome de degré k, représente une fonction qui n'admet comme singularités que les valeurs singulières α de $\varphi(z)$, leurs produits deux à deux, trois à trois, ..., k à k. Cherchons à remplacer le polynome P par une fonction entière.

A cet effet, considérons l'ensemble E des points singuliers de φ, et tous ceux E_1, E_2, ... que l'on en déduit par l'application répétée du procédé indiqué, enfin l'ensemble $\mathcal{E}$ qui les comprend tous, ainsi que leurs points limites. Si l'un des points de E était à une distance de l'origine moindre que l'unité, l'origine serait un point de $\mathcal{E}$; *nous écarterons ce cas.*

25. Les seuls points singuliers possibles des fonctions φ_2, φ_3, ... appartiennent à $\mathcal{E}$.

---

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXVI, n° 10.

Or, si l'on désigne par C un contour qui comprend l'origine, z et les points $\frac{z}{\alpha}$ et qui laisse les points β à l'extérieur, on a la formule

$$(22) \qquad f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \psi(x)\varphi\left(\frac{z}{x}\right)\frac{dx}{x}.$$

Si nous remplaçons ψ par l'une quelconque des fonctions φ_p, la formule précédente sera donc valable si le contour C laisse à distance finie à l'extérieur, non plus les points β relatifs à *une* fonction particulière φ_h, mais *tous les points* γ de l'ensemble $\mathcal{E}$. Construisons une aire à contour simple, telle que, ce contour étant le contour d'intégration, la formule (22) donne $f(z)$ (dans l'espèce, φ_{p+1}, p étant quelconque) pour tout point de l'aire. Il est évident qu'on peut y arriver de la manière suivante : Partons d'une aire A à contour simple, contenant l'origine et laissant les points γ à l'extérieur. Toutes les aires $\frac{A}{\gamma}$, déduites chacune de A en divisant par un nombre γ les affixes de tous les points de A, seront dans les mêmes conditions. L'ensemble de ces surfaces (et de leurs points limites, si certaines suites formées par elles en admettent) constitue une aire $\mathcal{A}$ d'un seul tenant et jouissant aussi des mêmes propriétés que A; d'ailleurs, si z est dans cette aire, $\frac{z}{\alpha}$ s'y trouve également. Donc la formule (22) s'applique à tout point intérieur à $\mathcal{A}$.

Observons maintenant que toute aire B intérieure à A donne naissance à une aire $\mathcal{B}$ intérieure à $\mathcal{A}$.

26. Cela posé, la relation (22) va nous permettre de trouver pour les points d'aires successives, très voisines, mais intérieures les unes aux autres, des limites maxima des fonctions $\varphi_p(z)$. De ce calcul, nous déduirons alors aisément des séries formées avec ces fonctions et qui représenteront des fonctions holomorphes dans toute aire intérieure à toutes les précédentes.

Supposons que le module d'une fonction $\psi(z)$ ne dépasse pas M quand z est à l'intérieur d'une certaine aire $\mathcal{A}$ ou sur son contour, que nous prenons comme contour C d'intégration. Si z reste à l'intérieur de $\mathfrak{B}$ ou sur son contour, $\frac{z}{x}$ est à distance finie, et ne passe pas par les points singuliers de φ; mais il pourra en être voisin, et par suite φ pourra devenir très grand. En posant $\frac{z}{\alpha} = z'$, on a

$$\frac{z}{x} - \alpha = (z' - x)\frac{\alpha}{x}.$$

Si le contour de $\mathfrak{B}$ est rapproché de celui de $\mathfrak{A}$, certaines valeurs α pourront être telles que $|z' - x|$ soit petit.

Supposons que les points α soient isolés et qu'il existe un nombre m tel que, pour chacun d'eux, $(z - \alpha)^m \varphi(z)$ ait une limite supérieure quand z tend vers α.

27. Si m était négatif ou nul, il est clair que dans une région finie $|\varphi(z)|$ serait limité supérieurement. Sinon, que l'on trace autour de chaque point α un cercle de rayon assez petit η, on aura pour tous les points de ce cercle $|\varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{|z - \alpha|^m}$, ε étant un certain nombre positif; et, en dehors de ces cercles, $|\varphi(z)|$ aurait un maximum. Or, lorsque z est sur l'aire $\mathfrak{B}$ et que x décrit C, $\frac{z}{x}$ reste fini; cette remarque subsisterait si l'on déformait un peu les aires $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{A}$, sans changer leur signification. Donc, toutes les fois que les expressions $\left|\frac{z}{x} - \alpha\right|$ seront supérieures à η, $\left|\varphi\left(\frac{z}{x}\right)\right|$ aura un maximum $\mathfrak{M}$; il suffit pour cela que $|z' - x|$ reste supérieur au produit, r, de η par le maximum de $\left|\frac{x}{\alpha}\right|$ qui a, lui aussi (du moins pour les points x qu'il y a lieu de considérer), une limite supérieure. Ceci posé, et z étant choisi, figurons les cercles de rayon r qui ont pour centres les différents points z' déduits de z. Ces cercles pourront détacher des arcs sur le contour d'intégration. Lorsque x sera sur un pareil arc λ, $|z' - x|$ sera supérieur à la plus courte distance δ des contours de $\mathfrak{A}$ et de $\mathfrak{B}$, et comme $\left|\frac{\alpha}{x}\right|$ a un minimum c pour les contours d'intégration que nous avons à considérer, on aura $\left|\frac{z}{x} - \alpha\right| > \delta c$ et aussi $\left|\frac{z}{x} - \alpha\right| > |z' - x| c$. Par suite,

x décrivant λ, $\left|\varphi\left(\frac{z}{x}\right)\right|$ est plus petit que la plus grande des deux quantités $\mathfrak{M}$, $\frac{\varepsilon}{c^m|z'-x|^m}$. Donc la portion correspondante d'intégrale est à coup sûr inférieure à la somme des deux suivantes : l'une s'obtient en remplaçant $\psi(x)\varphi\left(\frac{z}{x}\right)\frac{1}{x}$ par $\mathrm{M}\mathfrak{M}\frac{1}{\xi}$, si ξ désigne une limite inférieure de $|x|$; l'autre est $\frac{\mathrm{M}\varepsilon}{2\pi\xi c^m}\int_\lambda \frac{|dx|}{|z'-x|^m}$, soit $\frac{\mathrm{M}\varepsilon}{2\pi\xi c^m}\mathrm{I}$. Posons $|z'-x|=y$, la portion du contour d'intégration située à l'intérieur du cercle de centre z' et de rayon y a une longueur qui est fonction de y, $\sigma(y)$. Or *on peut supposer que, pour tous les contours que nous aurons à utiliser, le rapport de la longueur du contour située à l'intérieur d'un cercle arbitraire au rayon de ce cercle, a une limite supérieure finie*. Dès lors, soit k cette limite. On a

$$\mathrm{I}=\int_\lambda \frac{d\sigma(y)}{y^m}.$$

Une intégration par parties montre que l'on a

$$\mathrm{I}<k\,\frac{2m-1}{(m-1)\delta^{m-1}} \qquad \text{si} \qquad m>1$$

et

$$\mathrm{I}<k(1-\mathrm{L}\delta) \qquad \text{si} \qquad m=1 \ (\delta \text{ est supposé inférieur à } 1),$$

$$\mathrm{I} \text{ fini} \qquad \text{si} \qquad m<1.$$

28. Bref, il résulte de la considération de l'intégrale de la formule (22), que si l'on désigne par M_1 une limite supérieure de $|f(z)|$ quand z est sur $\mathfrak{A}$ ou à son intérieur, on peut trouver une constante P, *valable aussi pour les aires voisines de* $\mathfrak{A}$, et telle que l'on ait

$$\mathrm{M}_1<\frac{\mathrm{PM}}{\delta^{m-1}} \qquad \text{si} \qquad m>1$$

et

$$\mathrm{M}_1<\mathrm{PM}|\mathrm{L}\delta| \qquad \text{si} \qquad m=1.$$

29. Partant d'une aire telle que $\mathfrak{A}$, nous pouvons en construire successivement d'autres intérieures aux précédentes $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, ...,

$\mathcal{A}_n$, ... de manière que la plus courte distance de deux contours voisins soit donnée, *par exemple*, par les termes de la série

$$\frac{h}{2(L2)^\mu}, \quad \frac{h}{3(L3)^\mu}, \quad \ldots, \quad \frac{h}{n(Ln)^\mu}, \quad \ldots \quad (\mu > 1).$$

Elles pourront ainsi contenir toutes une aire $\mathcal{A}'$ différant de $\mathcal{A}$ d'aussi peu que l'on veut, si h est choisi assez petit. On définira par la relation (22) les fonctions $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, ..., $\varphi_n(z)$, ... dans les aires $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, ..., $\mathcal{A}_n$, ... et, par conséquent, dans $\mathcal{A}'$. Les raisonnements qui ont été faits donnent des limites maxima des modules de ces fonctions.

Si $m > 1$, on a

$$|\varphi_n(z)| < M\left(\frac{P}{h}\right)^{n-1}(n!)^{m-1}(L2.L3\ldots Ln)^{\mu(m-1)}.$$

Nous allons choisir une série $g(t) = \Sigma d_p t^p$, telle que la série $\Sigma^n d_n \varphi_n(z)$ soit absolument convergente dans $\mathcal{A}'$, quel que puisse être $\frac{P}{h}$. Posons $d_n = \frac{d'_n}{n^{n(m-1)}}$, on a

$$|d_n \varphi_n(z)| < |d'_n| Q^n (L2.L3\ldots Ln)^{\mu(m-1)},$$

Q étant une constante. La condition posée sera donc réalisée certainement pour $|d_n| \leq \frac{d''^n_n}{n^{n(m-1)}(Ln)^{\mu(m-1)n}}$, si d''_n est une variable infiniment petite. Or *il suffira* pour cela *que la fonction* $\Sigma d_p t^p$ *soit entière d'ordre inférieur à* $\frac{1}{m-1}$.

30. Si $m = 1$, on a

$$|\varphi_n(z)| < MP^{n-1}\prod_2^n (Ln + \mu LLn - Lh)$$

et, en désignant par Q une nouvelle constante,

$$|\varphi_n(z)| < MQ^n L2.L3\ldots Ln.$$

Il suffit ici que $|d_n|^{\frac{1}{n}}|\mathrm{L}2\ldots\mathrm{L}n|^{\frac{1}{n}}$ tende vers o. *Cette condition sera certainement réalisée si l'on prend*

$$d_p = \left(\frac{d'_p}{\mathrm{L}p}\right)^p$$

et que d'_p tende vers o.

31. Enfin, nous avons négligé le cas où m serait inférieur à 1. Alors, on aurait évidemment

$$|\varphi_n(z)| < \mathrm{MP}^n,$$

P étant une constante relative à l'aire $\mathcal{A}$. *Il suffit alors de prendre pour $g(t)$ une fonction entière quelconque.*

32. Ainsi, avec les conditions que nous avons posées et les notations choisies, la fonction $\Sigma_n g(a_n) z^n = \Phi(z)$ est holomorphe dans toute aire $\mathcal{A}'$:

1° *Si $g(t)$ est une fonction entière d'ordre inférieur à $\frac{1}{m-1}$, quand m est plus grand que* 1 ;

2° *Si $\mathrm{L}n|d_n|^{\frac{1}{n}}$ est infiniment petit, quand $m = 1$* ;

3° *Si $g(t)$ est une fonction entière quelconque, quand $m < 1$.*

33. En général, nous pourrons déformer l'aire $\mathcal{A}$ de manière à amener z en tout point n'appartenant pas à $\mathcal{C}$. Si $\varphi(z)$ est uniforme autour de certains points singuliers, il en sera de même des fonctions $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$, pour les points qu'on en déduit 2 à 2, 3 à 3, ... Alors, toutes les fonctions φ sont uniformes autour d'un même point α singulier pour elles toutes ou pour un certain nombre d'entre elles; $\Phi(z)$ est uniforme autour du même point. En particulier, si $\varphi(z)$ est uniforme dans tout le plan, il en est de même de $\Phi(z)$. Dans le cas où il n'en serait pas ainsi, on sait [1] que l'origine peut être un point singulier pour le prolongement de $\Phi(z)$.

---

[1] *Voir* la Communication déjà citée de M. Borel.

34. J'ai indiqué [1] cette extension du théorème de M. Hadamard avec des généralisations possibles plus complètes; plutôt que de les développer, je préfère donner quelques applications.

35. *Applications.* — Nous retrouvons par la méthode précédente des résultats déjà obtenus directement.

Soit $\varphi(z) = -\mathrm{L}(1-z)$. On peut prendre pour m un nombre positif quelconque. Donc, si $g(t)$ est une fonction entière, $\sum g\left(\frac{1}{n}\right)z^n$ n'a à distance finie que le point singulier $+1$.

Soit $\varphi(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$. m sera un nombre arbitraire supérieur à 2. En supposant $g(t)$ fonction entière d'ordre plus petit que 1, $\Sigma g(n)z^n$ a la seule singularité $+1$ à distance finie et elle est uniforme dans tout le plan.

Les propositions auxquelles nous parvenons sont moins complètes, la première surtout, que celles que nous avons eues précédemment. Ce fait n'est pas surprenant, puisque nous ne faisons qu'utiliser des propriétés s'appliquant à des types de fonctions très généraux.

36. Nous avons vu (n° **22**) que la fonction $\sum \mathrm{L}n\, z^n$ n'a, à distance finie, que la singularité $+1$. Je dis que si m est un nombre quelconque supérieur à 1 *le produit* $(z-1)^m \sum \mathrm{L}n\, z^n$ *tend vers* 0 *quand* z *tend vers* 1. Comme $\sum \mathrm{L}n\, z^n$ est égal à un quotient de la forme $\dfrac{\sum g\left(\frac{1}{n}\right)z^n}{1-z}$ où $g(t)$ désigne une fonction holomorphe à l'origine où elle devient nulle, il nous suffit de prouver que, quel que soit le nombre positif k, $(1-z)^k \sum g\left(\frac{1}{n}\right)z^n$ a pour limite 0. Or (n° **12**), le long d'une ligne ne passant pas par le point $+1$, on a une limite maximum du module $\sum g\left(\frac{1}{n}\right)$ (en ne faisant au besoin commencer le développement qu'à une certaine puissance z^p) en multipliant par une quantité fixe le

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXVI, n° **10**.

module maximum de $\sum \frac{1}{n} z^n$ (abstraction faite des mêmes termes). La proposition est donc vraie pour la fonction proposée, puisqu'elle est exacte pour $-L(1-z)$.

Cela posé, si $g(t)$ désigne maintenant une fonction entière quelconque d'ordre fini, la série $\sum g(Ln)z^n$ définit une fonction qui n'a, à distance finie, que l'unité comme valeur singulière.

Par exemple, soit h un nombre positif ou négatif quelconque, si l'on prend $g(t) = e^{ht}$, $g(Ln) = n^h$, la fonction $\sum n^h z^n$ rentre dans l'exemple précédent.

37. *Examen d'autres hypothèses.* — L'hypothèse du n° **26** a trait à un premier mode de comparaison, celui de $\varphi(z)$ à une expression de la forme $\frac{1}{(z-\alpha)^m}$, dans le voisinage de α. On peut évidemment choisir des types de fonctions susceptibles de se rapprocher davantage des fonctions φ que l'on peut avoir à considérer, de manière à trouver des caractères plus avantageux que ceux auxquels on a d'abord été conduit.

Prenons le quotient $\frac{\left[L\left(\frac{1}{z-\alpha}\right)\right]^p}{(z-\alpha)^m}$, où m désigne un nombre au moins égal à 1 et p un nombre réel quelconque, et supposons que pour chaque point α le produit

$$\frac{\varphi(z)(z-\alpha)^m}{\left[L\left(\frac{1}{z-\alpha}\right)\right]^p}$$

ait une limite supérieure quand z tend vers α. Il n'y a pas de difficulté (pas plus d'ailleurs que précédemment) provenant de ce que la fonction à étudier peut n'être pas uniforme. En effet, lorsqu'il y a lieu d'utiliser l'hypothèse sur sa limite supérieure, dans l'évaluation de l'intégrale, le chemin décrit par la variable $\left(\frac{z}{x}\right)$ ne tourne pas une infinité de fois autour du point singulier.

Cette remarque faite et les notations conservées, nous avons à prendre l'intégrale

$$I = \int_\lambda \frac{\left[L\left(\frac{1}{cy}\right)\right]^p}{y^m} d\sigma(y).$$

Or on a

$$I = \left\{ \frac{\left[L\left(\frac{1}{cy}\right)\right]^p}{y^m} \sigma(y) \right\}_{(y_0)}^{(y_1)} - \int_\lambda \sigma(y)\, d\frac{\left[L\left(\frac{1}{cy}\right)\right]^p}{y^m},$$

y_0 et y_1 étant les limites entre lesquelles y varie. On sait que

$$\delta < y_0 < y_1 \leqq r.$$

Comme $\sigma(y) < ky$, la partie calculée est infiniment grande, au plus de l'ordre de $\frac{\left[L\left(\frac{1}{\delta}\right)\right]^p}{\delta^{m-1}}$ pour δ infiniment petit (sauf pour $m = 1$ et $p < 0$). L'intégrale qui reste a un module inférieur à $k \int_\lambda y\, d\frac{\left[L\frac{1}{cy}\right]^p}{y^m}$. Soit kJ cette dernière expression. Elle s'écrit

$$\left(\frac{\left[L\frac{1}{cy}\right]^p}{y^{m-1}}\right)_{(y_0)}^{(y_1)} - \int_\lambda \frac{\left[L\frac{1}{cy}\right]^p}{y^m} dy.$$

Le premier terme est encore au plus de l'ordre de $\frac{\left(L\frac{1}{\delta}\right)^p}{\delta^{m-1}}$. Quant à l'intégrale $\int_\lambda \frac{\left(L\frac{1}{cy}\right)^p}{y^m} dy$ que nous désignerons par J', nous distinguerons deux cas :

Premier cas : m = 1. — On a de suite

$$J' = \frac{1}{p+1}\left\{\left(L\frac{1}{cy_0}\right)^{p+1} - \left(L\frac{1}{cy_1}\right)^{p+1}\right\}$$

si $p \neq -1$, et si $p = -1$

$$J' = LL\frac{1}{cy_0} - LL\frac{1}{cy_1}.$$

Ces quantités sont respectivement de l'ordre $\left(L\frac{1}{\delta}\right)^{p+1}$ et $LL\frac{1}{\delta}$.

Deuxième cas : $m > 1$ et $p \neq 0$ ($m > 1$ et $p = 0$ est une hypothèse examinée plus haut).

On a

$$\frac{m-1}{p}\mathrm{J}' + \int_\lambda \frac{\left(\mathrm{L}\frac{1}{cy}\right)^{p-1}}{y^m}\,dy = \left[\frac{\left(\mathrm{L}\frac{1}{cy}\right)^p}{py^{m-1}}\right]_{(y_1)}^{(y_0)}.$$

Or, $\mathrm{L}\frac{1}{cy}$ a un minimum, quand y va de y_0 à y_1, et si $r(\geqq y_0)$ est petit, ce minimum est grand; désignons-le par l. On en conclut

$$\mathrm{J}' > l\int_\lambda \frac{\left(\mathrm{L}\frac{1}{cy}\right)^{p-1}}{y^m}\,dy,$$

et, par suite, le premier membre est compris entre

$$\frac{m-1}{p}\mathrm{J}' \quad \text{et} \quad \left(\frac{m-1}{p} + \frac{1}{l}\right)\mathrm{J}'.$$

Donc, enfin, J' est de l'ordre du second membre, c'est-à-dire de

$$\frac{\left(\mathrm{L}\frac{1}{\delta}\right)^p}{\delta^{m-1}}.$$

Les résultats de cette discussion sont les suivants :

L'ordre de grandeur de I est celui de

$$\frac{\left(\mathrm{L}\frac{1}{\delta}\right)^p}{\delta^{m-1}}$$

si $m > 1$ (p peut être nul, puisqu'on retrouve alors la formule déjà établie dans ce cas),

$$\left[\mathrm{L}\left(\frac{1}{\delta}\right)\right]^{p+1}$$

si $m = 1$ et $p > -1$,

$$\mathrm{LL}\frac{1}{\delta},$$

si $m = 1$ et $p = -1$,
une quantité finie.
si $m = 1$ et $p < -1$.

38. En raisonnant comme aux nos **28** et suivants on parvient aux propriétés que voici :

1° *m est supérieur à* 1. — Soit ϖ un nombre choisi supérieur à $p + m - 1$. Si $p + m - 1 \geqq 0$, il suffit que

$$|d_n| \leqq \frac{d_n''^n}{n^{n(m-1)}(\mathrm{L}n)^{\varpi n}};$$

si $p + m - 1 < 0$, il suffit que

$$|d_n| \leqq \frac{d_n''^n\left(\mathrm{L}\frac{n}{2}\right)^{-\frac{\varpi n}{2}}}{n^{n(m-1)}} \qquad (\text{on a pris } \varpi < 0).$$

d_n'' désigne une quantité infiniment petite. Dans les deux cas, une fonction entière d'ordre inférieur à $\frac{1}{m-1}$ répond à la condition correspondante.

2° *m est égal à* 1 *et p supérieur à* -1. On pourra prendre

$$(\mathrm{L}n)^{p+1}|d_n|^{\frac{1}{n}}$$

infiniment petit.

3° *m est égal à* 1 *et p à* -1. — Il suffira que

$$\mathrm{L.L}n.|d_n|^{\frac{1}{n}}$$

tende vers 0.

39. On remarquera l'analogie des caractères que nous appliquons aux points singuliers de φ (et que l'on pourrait évidemment compliquer de plus en plus) avec ceux de M. Bertrand relatifs à la convergence des séries. Quant aux caractères que nous en déduisons pour les fonctions Φ, elles-mêmes, ils montrent l'utilité qu'il y aurait à poursuivre la classification des fonctions entières en distinguant entre elles les fonctions d'un même ordre.

40. *Applications.* — Voici plusieurs exemples où la fonction $\Phi(z)$ formée n'a que l'unité comme valeur singulière finie.

1° Soit $F(z)$ une fonction entière quelconque, $\sum A_n z^n$; et posons $\varphi(z) = \sum a_n z^n$, avec $a_n = A_0 + A_1 + \ldots + A_n$. Nous aurons

$$\varphi(z) = \frac{F(z)}{1-z},$$

et, par suite, si $|d_n|^{\frac{1}{n}} \mathrm{L}n$ tend vers o pour n infini, nous pourrons choisir $\Phi(z) = \sum g(a_n) z^n$.

2° Soit $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$; il suffit de prendre la fonction $g(t)$ de manière que $|d_n|^{\frac{1}{n}} (\mathrm{L}n)^2$ soit infiniment petit.

3° Supposons que la série $c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots$ ait un rayon de convergence différent de zéro. La fonction

$$\varphi(z) = \sum \left(c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \ldots + \frac{c_n}{n^n} \right) z^n,$$

n'a, comme on sait, que l'unité pour valeur singulière à distance finie. Il résulte d'ailleurs du calcul effectué au Chap. II, n° **12**, que, dans une aire limitée, $\frac{\varphi(z)}{1-z}$ reste fini. Nous ferons donc tendre vers o l'expression $|d_n|^{\frac{1}{n}} \mathrm{L}n$, et en posant

$$a_n = c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \ldots + \frac{c_n}{n^n}$$

la fonction $\Phi(z)$ répondra à la question.

41. *Remarque finale.* — Les extensions que nous avons données du théorème de M. Hadamard consistent en définitive dans des relations d'inégalité entre des limites supérieures d'une certaine fonction $\varphi(z) = \sum a_n z^n$ et des différentes fonctions $\sum a_n^p z^n$ que l'on peut en déduire. Ce sont des relations de ce genre que nous avions établies directement pour les fonctions particulièrement simples et intéressantes $\varphi(z) = \sum \frac{1}{n} z^n$ et $\varphi(z) = \sum n z^n$. Lorsqu'on se borne à conclure de là un caractère relatif à des domaines réguliers pour des fonctions $\Phi(z) = \sum g(a_n) z^n$ où g désigne une fonction convenablement choisie, il est à coup sûr inutile de faire intervenir les enveloppes de séries. Mais cette théorie, dont nous nous sommes servi pour construire à partir des fonctions $\sum \frac{1}{n} z^n$ et $\sum n z^n$ des séries d'une nature plus complexe, nous pouvons l'appliquer à présent en prenant pour point de départ d'autres fonctions φ pour lesquelles nous saurons utiliser le théorème étendu de M. Hadamard. Je me borne à cette indication et à l'exemple suivant : Si la série $\sum c_p t^p$ représente une fonction entière d'ordre fini et si l'on pose

$$g_n(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + c_n t^n,$$

la fonction $\Phi(z) = \sum g_n(\mathrm{L}n) z^n$ n'a pas d'autre singularité que l'unité à distance finie.

Ce résultat devient évident : 1° si l'on utilise la remarque du n° **35** sur la fonction $\varphi(z) = \sum \mathrm{L}n\, z^n$; 2° si l'on observe que dans la série

$$c_p[(\mathrm{L}2)^p z^2 + (\mathrm{L}3)^p z^3 + \ldots + (\mathrm{L}n)^p z^n + \ldots + \ldots]$$

les termes $c_p(\mathrm{L}n)^p z^n$ sont comparables à ceux de la série $\sum \frac{1}{\mathrm{R}^n} z^n$, quel que soit R, pourvu que l'on choisisse p assez grand et que l'on fasse varier n de p à une certaine valeur p' qui rend $\frac{p'}{p}$ infiniment grand avec p, conformément à la troisième condition fondamentale (Chap. II, n° **12**).

42. *Conclusion.* — Il ressort du présent Travail que la comparaison d'une série donnée avec des séries connues, comparaison qui constitue vraiment le principe fondamental dans l'étude de la convergence, peut être utilisée pour la recherche des singularités sur le cercle ou dans le plan. Déjà, on peut construire par ce procédé des séries variées sur lesquelles on obtient des renseignements précis. Mais il reste à savoir s'il serait possible de trouver des caractères simples s'appliquant (sauf des cas exceptionnels) *à des séries arbitrairement données.* La variété de la nature et de la distribution possibles des singularités rend au moins improbable une solution satisfaisante de ce problème.