JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. LAURENT

Exposé d'une théorie nouvelle des substitutions

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 4 (1898), p. 75-119.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1898_5_4__75_0>

Exposé d'une théorie nouvelle des substitutions;

PAR M. H. LAURENT.

Dans le travail qui suit, je me propose de créer un algorithme pour exposer la théorie générale des substitutions; à la considération de la notion de produits et de puissances de substitutions, on peut joindre les notions de somme, de différence, et en général de fonctions de substitutions. Les substitutions deviennent ainsi de véritables quantités imaginaires dans le sens le plus large du mot; elles jouent dans le calcul le même rôle exactement que les clefs; ce sont des *clefs*. Les clefs imaginaires reçoivent ainsi une interprétation concrète; elles auront désormais une signification précise.

Le calcul des substitutions tel que je le présente n'est pas un pur objet de curiosité : on verra qu'il vient ajouter des ressources au calcul ordinaire et qu'il permet de découvrir de nouveaux groupes; entre autres résultats, il permet d'énoncer, sous une forme simple, la condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions soient échangeables.

Dans ce qui suit, je laisse de côté tout ce qui concerne la théorie des invariants, mon seul but étant de montrer l'utilité de la nouvelle théorie. Ceux qui voudront bien lire les pages qui suivent se convaincront que je n'ai fait qu'effleurer un sujet très vaste; ainsi, pour ne parler que d'une application que j'ai laissée de côté, on pourrait faire une théorie des congruences de substitutions en ne considérant que les substitutions linéaires à coefficients entiers en négligeant tous les multiples d'un entier donné. Cette théorie des congruences de substitutions linéaires viendrait compléter la théorie des substitutions d'indices dans les substitutions de lettres.

2. — Substitutions linéaires.

On appelle *substitution linéaire* l'opération qui consiste à remplacer des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par des fonctions linéaires et homogènes

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

de ces mêmes variables; c'est encore, si l'on veut, un changement de variables exprimé par les formules

$$x'_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n,$$
$$x'_2 = a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

une pareille opération peut être représentée par une seule lettre s.

Soit donc s la substitution

$$x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

la substitution

$$x'_i = a(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sera représentée par as. Soit encore t la substitution

$$x'_i = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \ldots + b_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

la substitution

$$x'_i = (a_{i1} + b_{i1})x_1 + \ldots + (a_{in} + b_{in})x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sera représentée par $s + t$.

Les symboles $as+bt+cu+\ldots$, dans lesquels $a, b, c, \ldots$ sont des nombres et $s, t, u, \ldots$ des substitutions linéaires, sont donc bien définis. Une fois pour toutes, le symbole τ_{ij} désignera le symbole de la substitution qui remplace x_i par x_j et les autres x par zéro : ce sera la substitution

$$x'_1 = 0, \quad \ldots, \quad x'_i = x_j, \quad \ldots, \quad x'_n = 0;$$

alors le symbole $\Sigma a_{ij}\tau_{ij}$ désignera la substitution

$$x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On appelle *produit de deux substitutions* $\Sigma a_{ij}\tau_{ij}$, $\Sigma b_{ij}\tau_{ij}$ le résultat de l'élimination de $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ entre

$$x'_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et

$$x''_i = b_{i1}x'_1 + b_{i2}x'_2 + \ldots + b_{in}x'_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ce résultat est

$$x''_i = \Sigma b_{ik}a_{k1}x_1 + \Sigma b_{ik}a_{k2}x_2 + \ldots + \Sigma b_{ik}a_{kn}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et on le désigne par

$$\Sigma b_{ij}\tau_{ij}\Sigma a_{ij}\tau_{ij};$$

c'est la substitution linéaire

$$\Sigma(b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \ldots + b_{in}a_{nj})\tau_{ij},$$

résultat qu'il ne faut pas confondre avec

$$\Sigma a_{ij}\tau_{ij}\Sigma b_{ij}\tau_{ij} = \Sigma(a_{i1}b_{1j} + \ldots + a_{in}b_{nj})\tau_{ij}.$$

Le résultat de la multiplication n'est donc pas, en général, indépendant de l'ordre des facteurs.

On voit que, pour multiplier deux expressions de la forme

$\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}$ *l'une par l'autre, il faut traiter les symboles* τ_{ij} *comme des quantités algébriques, en ayant soin de ne pas intervertir les facteurs et en ayant égard aux relations*

$$\tau_{ij}\tau_{kl} = \begin{cases} \tau_{il} \text{ si } k = j, \\ 0 \text{ si } k \gtrless j; \end{cases}$$

lorsque s et t désignent deux substitutions, on a

$$st = ts;$$

on dit que ces deux substitutions sont *échangeables*.

Si s désigne une substitution linéaire, $s \times s$ se désigne par s^2; le produit de s^2 par s se désigne par $s^3, \ldots$; s^0 désigne ce que l'on appelle la *substitution identique;* elle remplace x_i par x_i; elle n'altère pas les variables, elle est équivalente à $\tau_{11} + \tau_{22} + \ldots + \tau_{nn}$; on la désigne par 1; ainsi

$$\tau_{11} + \tau_{22} + \ldots + \tau_{nn} = 1.$$

Il est facile de voir que

$$\Sigma a_{ij}\tau_{ij}(\tau_{11} + \tau_{22} + \ldots) = (\tau_{11} + \tau_{22} + \ldots)\Sigma a_{ij}\tau_{ij} = \Sigma a_{ij}\tau_{ij}$$

et que tout nombre a représente aussi une substitution échangeable avec toutes les autres, à savoir la substitution

$$x'_1 = ax_1, \qquad x'_2 = ax_2, \qquad \ldots, \qquad x'_n = ax_n.$$

Le symbole $f(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots$ se trouve donc bien défini, ainsi que le symbole

$$f(s, t, u, \ldots) = \Sigma a_{ijk} s^i t^j u^k \ldots,$$

les $a, b, \ldots, a_{ij}$ désignant des nombres et $s, t, u, \ldots$ des symboles de substitution.

Nous appellerons *degré* d'une substitution le nombre des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sur lesquelles elle opère.

Le *déterminant* d'une substitution $\Sigma a_{ij}\tau_{ij}$ est le déterminant

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}.$$

Ordinairement il est supposé différent de zéro, afin que les équations qui lient les anciennes et les nouvelles variables soient résolubles par rapport aux anciennes comme par rapport aux nouvelles variables; mais nous n'exclurons pas de nos considérations les substitutions de déterminant nul; nous verrons même qu'elles jouent un rôle important dans notre théorie.

Les substitutions τ_{ij}, par exemple, sont des substitutions de déterminant nul.

Deux substitutions s et s^{-1} sont dites *inverses* l'une de l'autre quand on a

$$ss^{-1} = 1.$$

Nous allons voir que, si le déterminant de s n'est pas nul, la substitution inverse existe et qu'elle est bien déterminée.

Soit en effet

$$s = \Sigma a_{ij}\tau_{ij};$$

posons

$$s^{-1} = \Sigma b_{ij}\tau_{ij};$$

si l'on veut que $ss^{-1} = 1$ ou que

$$\Sigma a_{ij}\tau_{ij}\Sigma b_{ij}\tau_{ij} = 1$$

ou que

$$\Sigma(a_{i1}b_{1i} + a_{i2}b_{2i} + \ldots)\tau_{ij} = 1,$$

il faudra poser

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \gtrless j, \\ 1 \text{ si } i = j; \end{cases}$$

si alors on fait $\Sigma \pm a_{11} \ldots a_{nn} = \mathrm{A}$, on a

$$b_{ij} = \frac{1}{\mathrm{A}} \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial a_{ji}}.$$

On trouve ainsi que, si $ts = 1$, on a $st = 1$ et, par suite, le symbole s^{-1} est bien défini si A n'est pas nul.

Il est bon d'observer que, si s et t sont échangeables, s^α et t^β le sont, car si

$$st = ts,$$

on a, en multipliant à droite par s,

$$sts = ts^2 \qquad \text{ou} \qquad s^2 t = ts^2,$$

puis, en multipliant encore à droite par s,

$$s^2 ts = ts^3 \qquad \text{ou} \qquad s^3 t = ts^3, \qquad \ldots.$$

t étant échangeable avec s^α, s^α sera échangeable avec t^β. α et β ont été supposés positifs, mais je dis que l'on a aussi

$$st^{-1} = t^{-1}s.$$

En effet

$$tt^{-1} = 1;$$

donc

$$stt^{-1} = s = tst^{-1};$$

multipliant à gauche par t^{-1}, on a

$$t^{-1}s = st^{-1};$$

donc, si l'on fait $t^{-2} = t^{-1}t^{-1}, \ldots, t^\alpha$ et s^β sont échangeables, même si α et β sont des entiers quelconques. *Et deux fonctions entières d'une même substitution sont échangeables.*

2. — Équation caractéristique.

Considérons deux déterminants

$$\mathrm{A} = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}, \qquad \mathrm{B}_1 = \Sigma \pm b_{11} b_{22} \ldots b_{nn};$$

soit

$$\mathrm{C} = \Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{nn}$$

leur produit; on a

$$(1) \qquad c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}.$$

Supposons les $c_{ij} = 0$; on peut satisfaire à ces équations : 1° *en prenant tous les a_{ij} nuls*, sans autre condition; les c_{ij} seront alors nuls.

2° En supposant $B = 0$, les équations

$$(2)\quad \begin{cases} c_{i1} = a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \ldots + a_{in}b_{n1} = 0, \\ c_{i2} = a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \ldots + a_{in}b_{n2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

se réduiront à $n-1$ distinctes et détermineront les rapports $a_{i1} : a_{i2} : a_{i3} : \ldots$ qui seront les mêmes quel que soit i; *les mineurs du second degré de* A *seront nuls*.

3° En supposant $B = 0$ et les $\dfrac{\partial B}{\partial b_{ij}}$ nuls, les équations (2) se réduiront à $n-2$ distinctes; deux des a_{i1}, a_{i2}, ... déterminent les autres et l'on a, par exemple,

$$a_{ik} = \lambda_1 a_{i1} + \lambda_2 a_{i2},$$

quel que soit i; donc, *les mineurs du troisième degré de* A *sont nuls*, et ainsi de suite; donc :

Si tous les éléments du produit de deux déterminants sont nuls, les mineurs de ces déterminants sont nuls, et si m et m' désignent les degrés des mineurs de A et B qui sont tous nuls, on a

$$m + m' \geqq n.$$

Supposons maintenant que le produit st de deux substitutions s, t soit nul, comme le déterminant d'un produit de deux substitutions est égal au produit de leurs déterminants; il faut en conclure que le déterminant de l'une au moins des substitutions est nul; de plus, en vertu de ce qui précède, si m et m' désignent les degrés des mineurs des déterminants de s et t qui sont tous nuls, on aura

$$m + m' \geqq n.$$

Ces théorèmes nous seront bientôt utiles.

Toute substitution linéaire $\Sigma a_{ij}\tau_{ij}$ de degré n satisfait à une équation de degré n que l'on appelle son équation caractéristique.

En effet, si

$$s = \Sigma a_{ij}\tau_{ij},$$

on aura

$$\tau_{11}s = a_{11}\tau_{11} + a_{12}\tau_{12} + \ldots + a_{1n}\tau_{1n},$$
$$\tau_{12}s = a_{21}\tau_{11} + a_{22}\tau_{12} + \ldots + a_{1n}\tau_{2n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou

$$(a_{11} - s)\tau_{11} + a_{12}\tau_{12} + \ldots + a_{1n}\tau_{1n} = 0,$$
$$a_{21}\tau_{11} + (a_{22} - s)\tau_{12} + \ldots + a_{2n}\tau_{2n} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

posant alors

$$F(s) = \begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - s & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

on aura, en multipliant les équations précédentes à gauche par $\frac{\partial F}{\partial a_{11}}$, $\frac{\partial F}{\partial a_{21}}$, $\ldots$ et en ajoutant,

$$F(s)\tau_{11} = 0;$$

on aurait de même

$$F(s)\tau_{22} = 0, \qquad \ldots, \qquad F(s)\tau_{nn} = 0,$$

donc

$$F(s)\tau_{11} + (\tau_{22} + \ldots + \tau_{nn})F(s) = F(s) = 0.$$

Ainsi, $F(s) = 0$ est l'équation à laquelle satisfait la substitution. Si elle ne satisfait à aucune autre équation de degré inférieur ou égal à n, on dira qu'elle est *normale;* dans le cas contraire, elle sera *singulière*.

Il résulte de là que *toute fonction entière $f(s)$ de s se réduira à une fonction entière de degré $n-1$ au plus.* Car on a identiquement

$$f(x) = F(x)Q + R(x),$$

Q désignant le quotient et R le reste de la division de f par F. Si l'on suppose $x = s$, on a

$$f(s) = R(s);$$

ce qui montre bien que $f(s)$ se réduit à une fonction $R(s)$ de degré $n-1$.

Toute fonction rationnelle de s, $\frac{\varphi(s)}{f(s)}$ se réduit à une fonction entière qui, d'après ce qu'on vient de voir, est de degré $n-1$ au plus.

Car, si l'on met de côté le cas où $f(x)=0$, quand $F(x)=0$, il existe des polynomes $\theta(x)$ et $\psi(x)$ tels que

$$f(x)\theta(x)+F(x)\psi(x)=1$$

ou

$$f(s)\theta(s)=1, \qquad \theta(s)=\frac{1}{f(s)},$$

donc

$$\frac{\varphi(s)}{f(s)}=\theta(s)\psi(s).$$

Si $f(x)$ et $F(x)$ s'annulent en même temps, $f(s)$ et $F(s)$ ont un diviseur commun et $f(s)$ a son déterminant nul. $\frac{\varphi(s)}{f(s)}$ n'a pas de sens si, ce que l'on peut supposer, cette fraction est irréductible.

Supposons maintenant s et t échangeables; si l'on a

$$ts=st,$$

on peut toujours déterminer t en fonction rationnelle de s ou exprimer s et t en fonction d'une même substitution.

En effet, soient $F(s)=0$, $G(t)=0$ les équations caractéristiques de s et de t. Posons

$$\gamma+\alpha s+\beta t=y,$$

α et β désignant deux nombres quelconques, on aura

$$F\left(\frac{y-\beta t-\gamma}{\alpha}\right)=0;$$

multiplions par $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$ et abaissons les degrés des équations ainsi obtenues au-dessous de n, au moyen de la relation $G(t) = 0$, puis éliminons $t, t^2, \ldots, t^{n-1}$ entre les n relations ainsi obtenues, la résultante sera, ou identiquement nulle, ou fonction de y de la forme $\Pi(y) = 0$; dans ce dernier cas, t s'exprimera en fonction rationnelle de y, car on aura des équations en $t, t^2, \ldots$, qui pourront être résolues. Si la résultante ne contient pas y, c'est qu'il existera des polynomes en t, tels que

$$\lambda F\left(\frac{y - \beta t - \gamma}{\alpha}\right) + \mu G = 0,$$

quel que soit y ou

$$\lambda F\left(\frac{y - \beta t - \gamma}{\alpha}\right) = 0.$$

$F\left(\frac{y - \beta t - \gamma}{\alpha}\right)$ aura donc son déterminant nul, quels que soient β, γ, α, ce qui est absurde; donc t et, de même, s pourront s'exprimer en fonction d'une même substitution $\gamma + \alpha s + \beta t$.

Ainsi, *deux substitutions échangeables sont des fonctions entières, de degré $n - 1$ au plus, d'une même substitution.*

Soit y cette substitution et $\varpi(y)$ son équation caractéristique, on a, en supposant x quelconque,

$$\varpi(x) = (x - y_1)^{\alpha_1}(x - y_2)^{\alpha_2}\ldots,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ étant des entiers et $\Sigma\alpha = n$. Soit $f(x)$ une fonction entière de x, on aura, en posant

$$\theta_i(x) = \frac{\varpi(x)}{(x - y_i)^{\alpha_i}},$$

$$f(x) = \Sigma\theta_i(x)\frac{f(y_i)}{\theta_i(y_i)} + \Sigma\theta_i(x)(x - y_i)\frac{d}{dy_i}\frac{f(y_i)}{\theta_i(y_i)} + \ldots + E\varpi,$$

E désignant un polynome entier, ou

$$f(y) = \Sigma\theta_i(y)\frac{f(y_i)}{\theta(y_i)} + \ldots + E\varpi(y),$$

et, comme $\varpi(y) = 0$,

$$f(y) = \Sigma \theta_i(y) \frac{f(y_i)}{\theta(y_i)} + \Sigma \theta_i(y)(y - y_i) \frac{d}{dy_i} \frac{f(y_i)}{\theta_i(y_i)} + \ldots,$$

telle est la forme que pourront affecter les substitutions échangeables. Cette formule pourra servir à définir les fonctions e^y, $\sin y$, $\cos y$, ... en y remplaçant $f(y)$ par e^y, $\sin y$, $\cos y$, ..., et l'on peut constater que, si s et t sont échangeables,

$$e^{as+bt} = e^{as} e^{bt} = e^{bt} e^{as},$$

a, b désignant deux nombres quelconques.

3. — Sur diverses formes que l'on peut donner aux substitutions linéaires.

Soient s et t deux substitutions, $F(s) = 0$, $G(t) = 0$ leurs équations caractéristiques que nous supposerons à racines inégales; si l'on pose

$$\xi_i = \frac{F(s)}{s - s_i} \frac{1}{F'(s_i)},$$

$$\eta_i = \frac{G(t)}{t - t_i} \frac{1}{G'(t_i)},$$

s_1, s_2, ... désignant les racines de $F = 0$ et t_1, t_2, ... celles de $G = 0$; nous aurons

$$f(s) = f(s_1)\xi_1 + f(s_2)\xi_2 + \ldots + f(s_n)\xi_n,$$
$$g(t) = g(s_1)\eta_1 + g(s_2)\eta_2 + \ldots + g(s_n)\eta_n,$$

et il est facile de voir que

$$(1) \quad \left| \begin{array}{l} \xi_i \xi_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \gtrless j \\ \xi_i & \text{si } i = j \end{cases}, \\ \eta_i \eta_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \gtrless j \\ \eta_i & \text{si } i = j \end{cases}. \end{array} \right.$$

Je suppose que les $\eta_i\xi_i$ et $\xi_i\eta_j$ soient tous différents de zéro, il n'existera pas de relations de la forme

$$\Sigma a_{ij}\xi_i\eta_j,$$

a_{ij} désignant des nombres, car en multipliant à gauche par ξ_p, à droite par η_q, on aurait

$$a_{qp}\xi_p\eta_q = 0,$$

ou $a_{pq} = 0$. Tous les a_{pq} seraient nuls.

Soit alors $V = \Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij}$ une substitution quelconque; on pourra poser

$$\Sigma\alpha_{ij}\tau_{ij} = \Sigma a_{ij}\xi_i\eta_j;$$

si l'on remplace les ξ et les η par leurs valeurs en fonction de τ_{ij}, on aura n^2 équations linéaires qui donneront pour les a_{ij} des valeurs bien déterminées, sans quoi il existerait des relations de la forme $\Sigma A_{ij}\xi_i\eta_j = 0$, A_{ij} désignant des nombres.

Si l'on prend, par exemple,

$$(2)\qquad \begin{cases} s = \tau_{12} + \tau_{23} + \ldots + \tau_{n1}, \\ t = \varepsilon\tau_{11} + \varepsilon^2\tau_{22} + \ldots + \varepsilon^n\tau_{nn}, \end{cases}$$

ε désignant $\cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}$ (s sera une substitution circulaire), on aura

$$\eta_i = \tau_{ii},$$

$$\xi_i = \frac{1}{n}\left[(\tau_{11} + \tau_{22} + \ldots) + \varepsilon^{-i}(\tau_{12} + \tau_{23} + \ldots) + \ldots\right],$$

et l'on n'a jamais $\xi_i\eta_j = 0$.

Il est donc démontré que, une substitution quelconque est fonction entière de deux autres, convenablement choisies, s et t.

Il est d'ailleurs facile de voir que les fonctions s et t, données par les formules (2), satisfont aux relations

$$s^n = 1, \qquad t^n = 1, \qquad st = \varepsilon ts.$$

Il est d'ailleurs bien évident que les fonctions s et t en fonction desquelles on peut exprimer une substitution quelconque peuvent être choisies d'une infinité de manières.

4. — Fonction exponentielle.

Les fonctions entières d'une substitution s sont données par la formule

$$(1) \qquad f(s) = \Sigma\theta_i(s)\frac{f_i(s)}{\theta_i(s_i)} + \Sigma\theta_i(s)(s - s_i)\frac{d}{ds_i}\frac{f(s_i)}{\theta(s_i)} + \ldots.$$

Je rappelle que $F(s) = 0$ est l'équation caractéristique de s, et que s_1, s_2, ... sont ses racines; enfin, si

$$F(s) = (s - s_1)^{\alpha_1}(s - s_2)^{\alpha_2}\ldots.$$

On a

$$\theta_i(s) = \frac{F(s)}{(s - s_i)^{\alpha_i}}.$$

On peut prendre l'équation (1) comme définition du symbole $f(s)$ dans tous les cas où $f(s)$ n'est pas entière et rationnelle. La fonction e^{as} définie ainsi par l'équation

$$e^{as} = \Sigma\theta_i(s)\,\frac{e^{as_i}}{\theta_i(s_i)} + \Sigma\theta_i(s)(s - s_i)\,\frac{d}{ds_i}\,\frac{e^{as_i}}{\theta_i(s_i)} + \ldots$$

joue un rôle important dans la théorie des substitutions. Il est acile de voir que

$$e^{as} = 1 + \frac{as}{1} + \frac{a^2 s^2}{1.2} + \ldots,$$

$$e^{as} e^{bs} = e^{bs} e^{as} = e^{(a+b)s},$$

pourvu que a et b soient des nombres, mais on n'a pas, en général,

$$e^s e^t = e^{s+t}.$$

5. — Généralisation.

Une *substitution*, ou un changement de variable quelconque peut être représenté par des formules telles que

$$(1) \qquad y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n);$$

nous désignerons souvent cette opération au moyen d'une seule lettre s; le degré de la substitution s sera le nombre n des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sur lesquelles elle opère.

Le *déterminant* d'une substitution s représentée par les équations (1) est le déterminant

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

On le suppose ordinairement différent de zéro afin que les équations (1) puissent être résolues par rapport aux x et, s'il en est ainsi, on pourra déduire des formules (1) des équations telles que

$$x_i = f'_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

alors, la substitution

$$y_i = f'_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

est dite *inverse* de s; on la désigne par le symbole s^{-1}.

Pour qu'une substitution ait une inverse, il faut et il suffit que son déterminant ne soit pas identiquement nul.

Si l'on a plusieurs substitutions de même degré, telles que (1), (2), ...,

$$(2) \qquad y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

représentées par les symboles $s, t, u, \ldots$ et si $a, b, c, \ldots$ désignent des nombres indépendants des variables, nous désignerons par

$$as + bt + cu + \ldots$$

la substitution

$$y_i = a\, f_i(x_1, \ldots, x_n) + b\, \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous appellerons *produit* des deux substitutions s et t la substitution représentée par les équations

$$(3)\quad \begin{cases} y_i = f_i[\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \varphi_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n)], \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

et nous la désignerons par st; en général, on n'aura pas

$$st = ts.$$

Si cependant une pareille équation avait lieu, nous dirions que s et t sont *échangeables* ou *permutables*.

Nous poserons encore

$$s^2 = ss, \qquad s^3 = ss^2 = s^2 s, \qquad \ldots, \qquad s^\alpha = ss^{\alpha-1} = s^{\alpha-1}s \qquad \ldots.$$

Le symbole a, a désignant un nombre, représente, si l'on veut, une substitution, à savoir

$$y_1 = ax_1, \qquad y_2 = ax_2, \qquad \ldots,$$

en sorte que 1 que nous représenterons aussi par s^0 sera le symbole de la substitution $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, ... qui n'altère pas les variables; $s^0 = 1$ est ce que l'on appelle la *substitution identique*. Il résulte de là que le symbole

$$a + bs + cs^2 + ds^3 + \ldots,$$

où s désigne une substitution et où $a, b, c, \ldots$ sont des nombres indépendants des variables, représente une substitution bien déterminée à déterminant nul ou différent de zéro, et il est évident que *deux polynomes entiers en s sont deux substitutions échangeables quand s est linéaire.*

Le déterminant du produit de deux substitutions de même degré est égal au produit des déterminants de ces substitutions.

En effet, si l'on considère la substitution st, représentée par les équations (3), son discriminant est

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)} \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Le symbole s^{-1} ou $\frac{1}{s}$ ayant été défini, le symbole $\frac{\varphi(s)}{\psi(s)}$, dans lequel φ et ψ désignent des polynomes entiers en s à coefficients numériques, se trouve bien défini.

Toutes les substitutions, fonctions rationnelles d'une même substitution linéaire, sont échangeables.

Nous dirons que des substitutions en nombre fini ou infini, s, s', s'', ... *forment un groupe* si leurs produits effectués dans un ordre quelconque font partie de ces substitutions.

Toutes les fonctions rationnelles d'une même substitution linéaire forment donc un groupe de substitutions échangeables.

Un groupe est continu, quand il renferme une infinité de substitutions et que, $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ étant une de ses substitutions, il en existe une autre $y_i = f'_i(x_1, \ldots, x_n)$, les fonctions f_i et f'_i différant infiniment peu. Il est discontinu dans le cas contraire.

6. — Condition pour que des substitutions forment un groupe.

Considérons les substitutions à r paramètres $a_1, \ldots, a_r$

$$(1) \qquad y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

M. Sophus Lie a donné la condition pour qu'elles forment un groupe; on peut présenter son analyse comme il suit en la simplifiant : dire que (1) représente un groupe, c'est dire que si l'on pose

$$(2) \qquad z_i = f_i(y_1, \ldots, y_n, b_1, \ldots, b_r),$$

on aura, comme conséquence de (1) et (2),

$$(3) \qquad z_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_r),$$

les c étant fonctions des a et des b. Nous supposerons que le groupe contient la substitution identique $x_i = f_i(x_1, \ldots, a_1^0, \ldots, a_r^0)$. Les équations (2) et (3) donnent

$$f_i(x_1, \ldots, c_1, \ldots, c_r) = f_i(f_1, \ldots, f_n, b_1, \ldots, b_r),$$

f_i, désignant, pour abréger, $f_i(x_1, x_2, \ldots, a_1, a_2, \ldots, a_r)$; différentions alors en laissant les x et les b constants, nous aurons

$$\sum \frac{\partial f_i}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial a_k} da_k = df_i,$$

puis, en laissant les x et les a constants,

$$\begin{gathered} \sum \frac{\partial f_i}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial b_1} = \frac{\partial f_i}{\partial b_1}, \\ \sum \frac{\partial f_i}{\partial c_j} \frac{\partial c_j}{\partial b_2} = \frac{\partial f_i}{\partial b_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{gathered}$$

en éliminant les $\dfrac{\partial f_i}{\partial c_j}$, on a

$$\begin{vmatrix} df_i & \sum \frac{\partial c_1}{\partial a_k} da_k & \cdots & \sum \frac{\partial c_r}{\partial a_k} da_k \\ \frac{\partial f_i}{\partial b_1} & \frac{\partial c_1}{\partial b_1} & \cdots & \frac{\partial c_r}{\partial b_1} \\ \frac{\partial f_i}{\partial b_2} & \frac{\partial c_1}{\partial b_2} & \cdots & \frac{\partial c_r}{\partial b_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0,$$

Si l'on fait $b_1 = a_1^0$, $b_2 = a_2^0$, ..., $f_i(f_{11}, f_{21}, \ldots, b_1, b_2, \ldots)$ se réduit à y_i et les dérivées $\frac{\partial f_i}{\partial b_j}$ à des fonctions Y_{ij} des y seuls; enfin, les dérivées des c se réduisent à des fonctions des a seuls, de sorte que l'équation précédente prend la forme

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} dy_i = Y_{i1} \Sigma A_{1k} da_k + \ldots + Y_{ir} \Sigma A_{rk} da_k, \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{array} \right.$$

les A_{ij} désignant des fonctions des a seuls, et les Y_{ij} des fonctions des y seuls.

Ainsi, *lorsque les équations* (1) *représentent un groupe possédant la substitution identique, les fonctions f_i ou y_i satisfont aux équations aux différentielles totales* (4) que M. Lie remplace par des équations aux dérivées partielles dont (4) est une forme condensée.

On peut démontrer que, réciproquement, si les équations (4) sont complètement intégrables, leurs solutions définissent, ordinairement, quand on les met sous la forme

$$(5) \qquad y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

un groupe à r paramètres; x_1, x_2, ... sont alors les constantes d'intégration.

En effet, pour que les équations (4) soient intégrables, il faut que les suivantes soient complètement intégrables

$$\frac{\partial F}{\partial a_\mu} + \frac{\partial F}{\partial y_1}(Y_{11} A_{1\mu} + Y_{12} A_{2\mu} + \ldots) + \frac{\partial F}{\partial y_2}(Y_{21} A_{1\mu} + \ldots +) \ldots = 0;$$

si l'on pose alors

$$Y_{1i} \frac{\partial F}{\partial y_1} + Y_{2i} \frac{\partial F}{\partial y_2} + \ldots + Y_{ni} \frac{\partial F}{\partial y_n} = Y_i F,$$

elles pourront s'écrire

$$\frac{\partial F}{\partial a_\mu} + Y_1 F A_{1\mu} + Y_2 F A_{2\mu} + \ldots + Y_r F A_{r\mu} = 0,$$

et, si l on résout par rapport aux YF,

$$(6) \qquad Y_i F + A_i F = 0,$$

en désignant par $A_i F$ une expression de la forme

$$A_i F = \alpha_{i1} \frac{\partial F}{\partial a_1} + \ldots + \alpha_{ir} \frac{\partial f}{\partial a_r};$$

où les α sont fonctions des a et ne dépendent pas des y; *cela suppose le déterminant $\Sigma \pm A_{11} \ldots A_{rr}$ différent de zéro :* c'est ce que nous supposerons. Pour que ces équations (6) soient complètement intégrables, il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$[(A_i + Y_i)(A_j + Y_j) - (A_j + Y_j)(A_i + Y_i)] F = \Sigma c_{ij}^s (A_s + Y_s) F;$$

si l'on prend F indépendant des a, comme les AF ne contiennent pas les y, on aura

$$(7) \qquad (Y_i Y_j - Y_j Y_i) F = \Sigma c_{ij}^s Y_s,$$

et les c_{ij} seront indépendants des a. On voit qu'ils sont, pour une raison analogue, indépendants des y; ce sont donc des constantes, et l'on a aussi

$$(8) \qquad (A_i A_j - A_j A_i) F = \Sigma c_{ij}^s A_s.$$

(7) et (8) sont les conditions d'intégrabilité complète de (4) ou (6). *Supposons-les satisfaites.*

Revenons aux équations (4); supposons-les satisfaites, leurs intégrales se présenteront sous la forme

$$(9) \qquad F_i(y_1, y_2, \ldots, a_1, a_2, \ldots) = \text{const.}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ou, en appelant $x_1, x_2, \ldots$ les valeurs de $y_1, y_2, \ldots$ pour $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2, \ldots$,

$$(10) \qquad F_i(y_1, \ldots, a_1, \ldots) = F_i(x_1, \ldots, c_1, \ldots),$$

et les fonctions F seront assujetties à satisfaire aux relations

$$A_j F_i + Y_j F_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, r)$$

et à des relations analogues

$$C_j F_i + X_j F_i = 0.$$

Cela posé, si dans (10) on considère les y comme fonctions des c et des a, on aura

$$\frac{\partial F_i}{\partial a_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial a_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial a_k} + \ldots = 0,$$

$$-\frac{\partial F_i}{\partial c_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial c_k} + \frac{\partial F_i}{\partial y_2}\frac{\partial y_1}{\partial c_k} + \ldots = 0,$$

d'où l'on tire

$$A_j F_i + \frac{\partial F_i}{\partial y_1} A_j y_1 + \frac{\partial F_i}{\partial y_2} A_j y_2 + \ldots = 0,$$

$$-C_j F_i + \frac{\partial F_i}{\partial y_1} C_j y_1 + \frac{\partial F_i}{\partial y_2} C_j y_2 + \ldots = 0,$$

et en multipliant la première formule par $C_j F_i$, la seconde par $A_j F_i$, puis ajoutant

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1}(A_j y_1 C_j F_i - A_j F_i C_j y_1) + \frac{\partial F_i}{\partial y_2}(A_j y_2 C_j F_i - \ldots)\ldots = 0;$$

on en conclut

$$A_j y_k C_j F_i - A_j F_i C_j y_k = 0,$$

ou

$$\frac{A_j y_1}{C_j y_1} = \frac{A_j y_2}{C_j y_2} = \ldots = \frac{A_j y_n}{C_j y_n};$$

si l'on désigne par $\frac{\alpha_j}{\gamma_j}$ ces rapports, d'où l'on peut supposer les y éliminés, on a

$$\gamma_j A_j y_\mu - \alpha_j C_j y_\mu = 0;$$

ce qui exige que les a et les c entrent dans les expressions des y sous la forme de n fonctions $\varphi_1(a_1, a_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots)$, $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$, en sorte que des équations (10) on tire

$$\begin{aligned} y_j &= f_i[x_1, x_2, \ldots, \varphi_1(a_1, \ldots, c_1, \ldots), \varphi_2, \ldots], \\ v_i &= f_i[y_1, y_2, \ldots, \varphi_1(b_1, \ldots, c_1, \ldots), \quad \ldots], \\ z_i &= f_i[x_1, x_2, \ldots, \varphi_1(a_1, \ldots, b_1, \ldots), \quad \ldots]; \end{aligned}$$

ce qui montre que les intégrales des équations (4), quand ces équations sont intégrables (et quand $\Sigma \pm A_{11}, \ldots, A_{rr}$ est différent de zéro), représentent un groupe.

7. — Étude particulière des substitutions à un paramètre.

Les substitutions à un paramètre sont remarquables, elles se conduisent par rapport au paramètre comme des exponentielles et peuvent être représentées, comme nous allons le voir, par des exponentielles.

Les équations différentielles d'un groupe à un paramètre se réduisent à des équations différentielles ordinaires, car les équations (4) du § 6 se réduisent à

$$(1) \qquad dy_i = Y_i A\, da \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les Y_i étant fonctions des y seuls et A désignant une fonction de a ; si l'on change de paramètre, en posant

$$A\, da = dt, \qquad t = \int A\, da,$$

les équations (1) s'écrivent

$$\frac{dy_1}{Y_1} = \ldots = \frac{dy_n}{Y_n} = dt;$$

leurs intégrales se présentent sous la forme

$$\begin{aligned} F_i(y_1, \ldots, y_n) &= c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ F(y_1, \ldots, y_n) &= c + t, \end{aligned}$$

les c_i et c désignant des constantes, et en appelant $x_1, x_2, \ldots$ les valeurs de $y_1, \ldots, y_n$ pour $t = t'$, puis $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pour $t = t''$, on a

$$\begin{aligned}
&F_i(y_1, \ldots, y_n) = F_i(x_1, \ldots, x_n) = F_i(z_1, \ldots, z_n),\\
&F(y_1, \ldots, y_n) - F(x_1, \ldots, x_n) = t - t',\\
&F(y_1, \ldots, y_n) - F(z_1, \ldots, z_n) = t - t'',\\
&F(z_1, \ldots, z_n) - F(x_1, \ldots, x_n) = t'' - t'.
\end{aligned}$$

De ces équations on en tire d'autres de la forme

$$\begin{aligned}
y_i &= f_i(x_1, \ldots, x_n, t - t'),\\
z_i &= f_i(y_1, \ldots, y_n, t'' - t),\\
z_i &= f_i(x_1, \ldots, x_n, t'' - t'),
\end{aligned}$$

et, comme $t'' - t' = (t'' - t) + (t - t')$, on voit que :

1° Les intégrales des équations (1) définissent un groupe à un paramètre;

2° Que le paramètre dans un groupe à un paramètre peut être choisi de telle sorte que le produit de deux substitutions du groupe se fasse en ajoutant les valeurs correspondantes du paramètre;

3° Les substitutions d'un groupe à un paramètre sont donc échangeables.

Nous observerons encore qu'un groupe, dérivé d'équations différentielles de la forme

$$dy_i = Y_{i1}\, da_1 + \ldots + Y_{ir}\, da_r,$$

serait représenté par des équations de la forme

$$F_i(y_1, \ldots, y_n) = \varphi_i(a_1, \ldots, a_r) + c_i,$$

c_i désignant une constante, et un raisonnement analogue à celui que nous venons de faire, montrerait que les substitutions représentées par ces équations sont échangeables.

Mais revenons aux substitutions à un paramètre a, soit $s(a)$ une pareille substitution, on peut poser

$$s(a)s(b) = s(a+b),$$
$$\frac{ds(a)}{da}s(b) = \frac{ds(a+b)}{da} = s(a)\frac{ds(b)}{db}.$$

Si alors on fait $b = 0$, on a en supposant $\frac{ds_i}{db} = k$,

$$\frac{ds_a}{s_a} = k\,da.$$

8. — Substitutions infinitésimales.

Une substitution infinitésimale est une substitution de la forme $1 + s\varepsilon$ où ε est infiniment petit, une pareille substitution remplace x_1, $x_2, \ldots, x_n$ par $x_1 + \delta x_1$, $x_2 + \delta x_2$, ..., $x_n + \delta x_n$ et l'on peut supposer

$$\delta x_1 = X_1\,\delta t, \qquad \ldots, \qquad \delta x_n = X_n\,\delta t,$$

$X_1, \ldots, X_n$ désignant des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si l'on désigne par s la substitution

$$y_i = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

la substitution infinitésimale considérée sera $1 + s\,\delta t$. Supposons $x_1, \ldots, x_n$ fonctions de t, $\delta x, \ldots, \delta t$ pourront être remplacées par $dx_1, \ldots, dt$ et $1 + s\,dt$ remplacera $x_1, \ldots, x_n$ par $X_1\,dt, \ldots, X_n\,dt$ en sorte que

$$(1) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt;$$

les intégrales de ces équations seront de la forme

$$F_i(x_1, \ldots, x_n, t) = F_i(x_1^0, \ldots, x_n^0, t^0),$$

x^0 désignant la valeur de x_i pour $t = t^0$; ces équations définissent, comme on l'a vu, un groupe de substitutions S au paramètre t, dont la substitution infinitésimale $1+s\,dt$ fait partie. On sait que, pour intégrer les équations (1), on peut former les quantités

$$\begin{aligned} x_i^1 - x_i^0 &= X_i(x_1^0, \ldots, x_n^0)\,dt, \\ x_i^2 - x_i^1 &= X_i(x_1^1, \ldots, x_n^1)\,dt, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et passer aux limites, ainsi que cela résulte de la théorie de Cauchy, ce qui revient à former la substitution $(1+s\,dt)^m$, m désignant un nombre infini tel que $\frac{t-t^0}{m} = dt$, on a donc

$$S = \lim\left(1+\frac{t-t^0}{m}s\right)^m;$$

cette limite existe en général et l'on a

$$S = 1 + \frac{t-t^0}{1}s + \frac{(t-t^0)^2}{1.2}s^2 + \ldots,$$

ce que l'on peut écrire symboliquement

$$S = e^{s(t-t^0)};$$

donc, *à toute substitution s correspond une exponentielle symbolique $e^{s(t-t^0)}$ qui représente un groupe à un paramètre t et l'on a*

$$\frac{ds}{dt} = sS = Ss;$$

la substitution infinitésimale de S *est* $1+s\,dt$.

Soit maintenant $s(a_1, a_2, \ldots, a_r) = s_a$ une substitution à r paramètres $a_1, a_2, \ldots$, on aura

$$s(a_1, a_2, \ldots)\,s(b_1, b_2, \ldots) = s(c_1, c_2, \ldots),$$

ou, en se servant d'une notation abrégée,

$$s_a s_b = s_c.$$

$c_1, c_2, \ldots$ seront des fonctions de $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$. On aura

$$ds_a s_b = \sum \frac{ds_c}{dc_i} \frac{dc_i}{da_k} da_k,$$

$$s_a \frac{\partial s_b}{\partial b_k} = \sum \frac{\partial s_c}{\partial c_i} \frac{\partial c_i}{\partial b_k}$$

et, en éliminant les $\frac{\partial s_c}{\partial c_i}$,

$$\begin{vmatrix} ds_a s_b & \sum \frac{\partial c_1}{\partial a_k} da_k & \ldots \\ s_a \frac{\partial s_b}{\partial b_1} & \frac{\partial c_1}{\partial b_1} & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0,$$

puis, supposant $s_b = 1$, et, posant dans cette hypothèse $\frac{\partial s_i}{\partial b_j} = h_j$, on a

$$(1) \qquad ds_a = s_a(h_1 \Sigma A_{1k} da_k + \ldots + h_r \Sigma A_{rk} da_k).$$

Cette équation unique est, au fond, équivalente aux n équations (4) du § 7. Si elle est intégrable, s_a représentera un groupe. Supposons-la intégrable, on aura son intégrale par la méthode de Meyer en posant

$$(2) \qquad \Sigma A_{1k} da_k = \lambda_1 dt, \qquad \ldots, \qquad \Sigma A_{rk} da_k = \lambda_r dt,$$

et, en supposant $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ constants, les a seront fonctions de $\lambda_1 t$, $\lambda_2 t, \ldots$; (1) deviendra alors

$$ds_a = s_a(h_1 \lambda_1 + h_2 \lambda_2 + \ldots + h_r \lambda_r) dt,$$

et s_a n'étant plus fonction que d'un seul paramètre t, on aura

$$s_a = e^{(h_1 \lambda_1 + \ldots + h_r \lambda_r)(t - t_0)}$$

ou, en supposant $t_0 = 0$,

$$s_a = e^{(h_1 \lambda_1 + \ldots + h_r \lambda_r) t};$$

finalement, en remplaçant $\lambda_1 t$, $\lambda_2 t$, ... par leurs valeurs, on aura s_a

sous la forme

$$e^{h_1\psi_1+\dots+h_r\psi_r},$$

ψ_1, ψ_2, ... étant fonctions de a_1, a_2, ...; en changeant de paramètres s'il le faut, on voit que *tout groupe à r paramètres pourra être représenté par une exponentielle de la forme*

$$e^{a_1h_1+\dots+a_rh_r}.$$

Mais les h ne sont pas arbitraires et l'on n'aura pas, en général,

$$e^{\Sigma ah}e^{\Sigma bh}=e^{\Sigma(a+b)h}.$$

Lorsque l'on a ramené un groupe à la forme $e^{\Sigma ah}$, la quantité symbolique $1+\Sigma ah\varepsilon$ est une substitution infinitésimale; il y a donc r substitutions infinitésimales linéairement distinctes

$$1+h_1\varepsilon,\qquad 1+h_2\varepsilon,\qquad \dots,\qquad 1+h_r\varepsilon.$$

9. — Étude des conditions d'intégrabilité.

Les intégrales des équations

$$(1)\qquad Y_iF+A_iF=0$$

représentent un groupe S à r paramètres, quand on a

$$\left.\begin{array}{ll}(2) & (Y_iY_j-Y_jY_i)F=\Sigma c_{ij}^sY_sF\\ (3) & (A_iA_j-A_jA_i)F=\Sigma c_{ij}^sA_sF\end{array}\right\}(i,j=1,2,\dots,r),$$

et seulement dans ce cas. Je rappelle que

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} Y_iF=Y_{1i}\dfrac{\partial F}{\partial y_1}+\dots+Y_{ni}\dfrac{\partial F}{\partial y_n},\qquad A_iF=\alpha_{i1}\dfrac{\partial F}{\partial a_1}+\dots,\\ \qquad\qquad Y_{ij}=\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial b_j}\right),\end{array}\right.$$

la parenthèse indiquant que les valeurs des b sont celles qui donnent $S_b = 1$.

Enfin h_t est la valeur $\left(\frac{\partial S}{\partial b_t}\right)$; c'est une substitution particulière qui ne dépend plus ni des a ni des b, et, comme S_b est représentée par les équations

$$z_i = f_i(y_1, \ldots, y_n, b_1, \ldots, b_r),$$

$\left(\frac{\partial S}{\partial b_j}\right)$ sera représentée par

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial b_j}\right) = Y_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si, dans la formule (2), on fait $F = y_k$, on a

$$(Y_i Y_j - Y_j Y_i) y_k = \Sigma c_{ij}^s Y_s y_k,$$

ou bien, en vertu de (1),

$$Y_i Y_{kj} - Y_j Y_{ki} = \Sigma c_{ij}^s Y_{ks},$$

ou enfin

$$Y_{1i} \frac{\partial Y_{kj}}{\partial y_1} - Y_{1j} \frac{\partial Y_{ki}}{\partial y_1} + Y_{2i} \frac{\partial Y_{kj}}{\partial y_2} - \ldots = \Sigma c_{ij}^s Y_{ks};$$

c'est, sous une autre forme, la condition d'intégrabilité.

Si, dans la fonction $F(y_1, y_2, \ldots)$, on remplace $y_1, y_2, \ldots$ par $y_1 + \varepsilon Y_{i1}, y_2 + \varepsilon Y_{i2} \ldots$, on trouve, en supposant ε infiniment petit,

$$F(y_1, y_2, \ldots) + \varepsilon\left(Y_{i1} \frac{\partial F}{\partial y_1} + \ldots\right) = F + \varepsilon Y_i F,$$

et, si l'on y remplace ensuite $y_1, y_2, \ldots$ par $y_1 + \varepsilon' Y_{j1}, y_2 + \varepsilon' Y_{j2}, \ldots$, on trouve

$$F + \varepsilon Y_i F + \varepsilon' Y_j F + \varepsilon\varepsilon' Y_j Y_i F.$$

C'est le résultat obtenu par la substitution $(1 + \varepsilon' h_j)(1 + \varepsilon h_i)$ ou $1 + \varepsilon h_i + \varepsilon' h_j + \varepsilon\varepsilon' h_j h_i$; donc, la substitution $h_j h_i$ change F en $Y_j Y_i F$. L'équation (2) exprime donc que

$$h_i h_j - h_j h_i = \Sigma c_{ij}^s h_s.$$

C'est le résultat auquel on parvient en exprimant directement les conditions d'intégrabilité de l'équation (1) du paragraphe précédent.

$h_1, h_2, \ldots$ sont ce que j'appellerai les substitutions *fondamentales* du groupe S_i.

Lorsque $n = r$, il est facile de trouver des fonctions α_{ij} telles que les équations (3) aient lieu; il suffit de prendre pour les $A_i F$ des fonctions obtenues en changeant, dans les Y_i, y_i en a_i. Si r est multiple de n, on désignera par A_i, A'_i, A''_i, ... ce que deviennent les Y_i quand on change y_i en a_i, a'_i, a''_i, ... Alors on a

$$\begin{aligned}&(A_i + A'_i + \ldots)(A_j + A'_j + \ldots) - (A_j + A'_j + \ldots)(A_i + A'_i \ldots)\\ &= A_i A_j - A_j A_i + A'_i A'_j - A'_j A'_i + \ldots = \Sigma c^s_{ij}(A_s + A'_s + \ldots),\end{aligned}$$

et le symbole $A_i + A'_i + \ldots$ jouira de la propriété exprimée par les équations (3).

Maintenant, si l'on observe qu'en changeant de variables on a

$$Y_i F = Y_i z_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} + Y_i z_2 \frac{\partial F}{\partial z_2} + \cdots = Z_i F,$$

on aura

$$\begin{aligned}(Z_i Z_j - Z_j Z_i) F &= \sum \left(Y_i z_k \frac{\partial}{\partial z_k} Y_j z_l \frac{\partial F}{\partial z_l} - \cdot\ \cdot \right)\\ &= \sum \left(Y_i z_k \frac{\partial}{\partial z_k} Y_j z_l \frac{\partial F}{\partial z_l} \cdot\ \cdot\ \cdot \right)\\ &= \sum c^s_{ij} \left(Y_s z_1 \frac{\partial F}{\partial z_1} + \cdots \right) = \sum c^s_{ij} Z_s F.\end{aligned}$$

Pour que les z soient en nombre inférieur à n, il suffira de prendre pour quelques-uns d'entre eux des solutions de $Y_i F = 0$. On aura ainsi un symbole A à moins de n variables et, en l'ajoutant aux A, A', A'', ..., on aura un symbole à r variables et satisfaisant à l'équation (3). Donc

$$h_i h_j - h_j h_i = \Sigma c^s_{ij} h_s$$

est la seule condition nécessaire à l'existence du groupe $e^{\Sigma ah}$.

Considérons maintenant les équations aux différentielles partielles

$$A_i F + P_i F = 0,$$

dans lesquelles on suppose que P_i ne diffère de A_i que par le changement de $a_1, a_2, \ldots$ en $p_1, p_2, \ldots$; on aura

$$(P_iP_j - P_jP_i)F = \Sigma c'_{ij} P_s F,$$

et ces équations détermineront un groupe dans lequel $a_1, \ldots, a_r$ seront les variables et $p_1, p_2, \ldots, p_r$ les paramètres, et, à cause de l'identité de forme des A et des P, il sera possible de former le groupe en se donnant les A_i satisfaisant aux relations (3). Ce groupe sera alors défini par les équations

$$\begin{aligned}
b_i &= \Phi_i(a_1, a_2, \ldots, p_1, p_2, \ldots),\\
c_i &= \Phi_i(b_1, b_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots),\\
c_i &= \Phi_i(a_1, a_2, \ldots, r_1, r_2, \ldots),\\
r_i &= \varphi_i(p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots),\\
c_i &= \varphi_i(a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots),
\end{aligned}$$

c'est ce que l'on appelle un *groupe paramétrique*.

10. — Groupe adjoint.

Reprenons les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}
y_i &= f_i(x_1, \ldots, a_1, \ldots),\\
z_i &= f_i(y_1, \ldots, b_1, \ldots),\\
z_i &= f_i(x_1, \ldots, c_1, \ldots),
\end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où $c_i = \varphi_i(a_1, \ldots, b_1, \ldots)$ et qui expriment que (1) représente un groupe; on a, comme plus haut,

$$f_i(x_1, \ldots, c_1, \ldots) = f_i(y_1, y_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots),$$

et l'on en conclut

$$(2)\qquad dy_i = Y_{i1}\Sigma A_{1k}\,da_k + \ldots + Y_{ir}\Sigma A_{rk}\,da_k;$$

mais il est clair que l'on aurait pu obtenir des équations analogues en observant que

$$x_i = F_i(y_1, \ldots, a_1, \ldots), \quad x_i = F_i(x_1, \ldots, b, \ldots), \quad z_i = F_i(y_1, \ldots, c_1, \ldots);$$

on aurait trouvé

$$(3) \qquad dx_i = X_{i1} \Sigma A'_{ik}\, da_k + \ldots + X_{ir} \Sigma A'_{rk}\, da_k,$$

et les X_{ij} auraient été les $\frac{\partial f_i}{\partial b_j}$ de la substitution identique, en sorte qu'ils ne diffèrent des Y_{ij} que par le changement de y en x. Mais, si l'on différentie les équations

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n)$$

en faisant varier les x et les a, on a

$$0 = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j + \sum \frac{\partial f_i}{\partial a_j} da_j.$$

Dans cette formule, les dx_j ont la signification qu'on leur donne dans la formule (3); quant aux $\sum \frac{\partial f_i}{\partial a_j} da_j$, ce sont les valeurs des dy_i pris en regardant les x comme des constantes; ce sont les dy_i tirés de (2), et l'on a

$$0 = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j + dy_i$$

ou, en vertu de (3) et (2),

$$0 = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (X_{j1} \Sigma A'_{1k}\, da_k + \ldots + X_{jr} \Sigma A'_{rk}\, da_k)$$
$$+ Y_{i1} \Sigma A_{1k}\, da_k + \ldots + Y_{ir} \Sigma A_{rk}\, da_k.$$

On en conclut, en égalant les coefficients des da_k,

$$\sum \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (X_{j1} A'_{1k} + \ldots + Y_{jr} A'_{rk}) + Y_{i1} A_{1k} + \ldots + Y_{ir} A_{rk} = 0$$

ou

$$\sum \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(X_{j1} A'_{1k} + \ldots + X_{jr} A'_{rk}) + Y_{i1} A_{1k} + \ldots + Y_{ir} A_{rk} = 0.$$

Soit F une fonction quelconque; multiplions par $\frac{\partial F}{\partial y_i}$, faisons

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

ajoutons, nous aurons

$$A'_{1k} X_1 F + A'_{2k} X_2 F + \ldots + A_{1k} Y_1 F + A_{2k} Y_2 F + \ldots = 0.$$

Donc les $Y_i F$ sont fonctions linéaires des $X_i F$ à coefficients fonctions des a.

Si alors, dans la fonction linéaire

$$t_1 Y_1 F + t_2 Y_2 F + \ldots + t_r Y_r F,$$

on effectue la substitution S_a représentée par $y_i = f_i(x_1, \ldots, a_1, \ldots)$, elle deviendra

$$u_1 X_1 F + u_2 X_2 F + \ldots + u_r X_r F,$$

et les u seront fonctions linéaires des t dont les coefficients seront fonctions des a; on pourra poser

$$(5) \qquad u_j = t_1 \psi_{1i}(a_1, \ldots, a_r) + t_2 \psi_{2i}(a_1, \ldots, a_r) + \ldots.$$

Si l'on effectue la substitution S_b, $\Sigma a_i X_i F$ se changera en $\Sigma v_i Z_i F_i$, et les v seront de la forme

$$v_i = u_1 \psi_{1i}(b_1, \ldots, b_r) + \ldots.$$

Les formules (5) représenteront alors un groupe linéaire que M. Lie appelle le *groupe adjoint* du groupe S_a.

Pour ce groupe, les fonctions A_{ij} ne dépendant que des relations entre les a, b, c, les symboles opératoires A_i seront les mêmes que pour le groupe S_a, et les constantes c^s_{ij} auront la même valeur.

Si, dans

$$(6) \qquad \Sigma t_i Y_i F = \Sigma u_i X_i F,$$

on fait le changement de variables $y_i = f_i(x_1, \ldots, a_1, \ldots)$, on a une identité; soient $a_1^0, a_2^0, \ldots$ les paramètres de la substitution identique, et faisons la substitution

$$(7) \qquad y_i = f_i(x_1, \ldots, a_1^0 + da_1, a_i, \ldots, a_r),$$

nous aurons

$$\Sigma t_i \mathrm{Y}_i \mathrm{F} = \Sigma t_i \left(\mathrm{Y}_i x_1 \frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x_1} + \mathrm{Y}_i x_2 \frac{\partial \mathrm{F}_1}{\partial x_2} + \ldots \right);$$

or on a, pour la substitution inverse de (7),

$$x_j = f_j(y_1, \ldots, a_1^0 - da_1, a_2, \ldots)$$

ou

$$\begin{aligned} x_j &= y_j - da_1 \left(\frac{\partial f_j}{\partial a_1} \right) = y_j - \mathrm{Y}_{j1}\, da_1, \\ \mathrm{Y}_i x_j &= \mathrm{Y}_i y_j - \mathrm{Y}_i \mathrm{Y}_{j1}\, da_1 \\ &= \mathrm{Y}_{ji} - \mathrm{Y}_i \mathrm{Y}_{j1}\, da_1 \\ &= \mathrm{X}_{ji} + \frac{\partial \mathrm{X}_{ji}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \mathrm{X}_{ji}}{\partial x_2} dx_2 - \ldots - \mathrm{X}_i \mathrm{X}_{j1}\, da_1 \\ &= \mathrm{X}_{ji} + \left(\frac{\partial \mathrm{X}_{ji}}{\partial x_1} \mathrm{X}_{11} + \frac{\partial \mathrm{X}_{ji}}{\partial x_2} \mathrm{X}_{21} + \ldots - \mathrm{X}_i \mathrm{X}_{ji} \right) da_1 \\ &= \mathrm{X}_{ji} + (\mathrm{X}_1 \mathrm{X}_{ji} - \mathrm{X}_i \mathrm{X}_{j1})\, da_1. \end{aligned}$$

(6) devient alors

$$\Sigma t_i \left[\mathrm{X}_{ji} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_j} + (\mathrm{X}_1 \mathrm{X}_{ji} - \mathrm{X}_i \mathrm{X}_{j1}) \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_j} da_1 \right] = \Sigma u_i \mathrm{X}_i \mathrm{F}$$

ou, en observant que $t_i = u_i + du_i$,

$$\sum \frac{du_i}{da_1} \mathrm{X}_i \mathrm{F} + \Sigma u_i (\mathrm{X}_1 \mathrm{X}_i - \mathrm{X}_i \mathrm{X}_1) \mathrm{F} = 0;$$

d'où l'on tire

$$\sum \frac{du_i}{da_1} \mathrm{X}_i \mathrm{F} + \Sigma u_i \Sigma c_{1i}^s \mathrm{X}_s \mathrm{F} = 0,$$

et cette formule ayant lieu, quel que soit F,

$$\frac{du_s}{da_1} + \Sigma u_j c^s_{1j} = 0,$$

et, si l'on veut,

$$du_s + \Sigma u_j c^s_{ij} da_i = 0,$$

c'est l'équation aux différentielles totales du groupe adjoint. Ses équations aux dérivées partielles sont

$$U_i F + A_i F = 0,$$

$$U_i F = \Sigma u_j c^1_{ij} \frac{\partial F}{\partial u_1} + \Sigma u_j c^2_{ij} \frac{\partial F}{\partial u_2} + \ldots = \Sigma u_j c^s_{ij} \frac{\partial F}{\partial u_s}.$$

Les substitutions UF ne seront distinctes que si l'on n'a pas de relations de la forme

$$\Sigma \lambda_i \Sigma u_j c^s_{ij} \frac{\partial F}{\partial u_s} = 0$$

ou

$$\Sigma \lambda_i \Sigma c^s_{ij} = 0.$$

Or, si l'on considère l'expression

$$[Y_j \Sigma \lambda_i Y_i - \Sigma(\lambda_i Y_i) Y_j] F = \Sigma c^s_{ji} \lambda_i Y_s F = - \Sigma c^s_{ij} \lambda_i Y_s F,$$

on voit qu'elle sera nulle en même temps que la précédente; donc le groupe adjoint n'aura ses paramètres distincts ou ses U distincts que si le groupe proposé n'a pas de substitution fondamentale Y′ donnant

$$(Y' Y_j - Y_j Y') F = 0;$$

Y′ est ce que l'on appelle une *substitution fondamentale singulière* (*Ausgezeichnete,* distinguée de S. Lie).

11. — Généralités sur la formation des groupes.

Il n'entre pas dans notre plan de donner une théorie complète des groupes de substitutions. Je laisse de côté systématiquement la théorie des invariants à l'aide de laquelle on peut trouver un nombre considérable de groupes; mon but est seulement de montrer l'utilité de mes notations.

Il est facile de se procurer un nombre illimité de groupes; la question est plus difficile à traiter quand on se propose de trouver les groupes contenus dans un groupe donné à plusieurs paramètres. Voici toutefois comment on peut théoriquement résoudre ce problème. Soient $h_1, h_2, \ldots, h_r$ les substitutions fondamentales d'un groupe; si l'on veut trouver un groupe à p paramètres contenu dans ce groupe, il suffira de trouver p fonctions linéaires $k_1, k_2, \ldots, k_p$ de $h_1, h_2, \ldots, h_r$ donnant lieu aux relations

$$(1) \qquad k_i k_j - k_j k_i = \Sigma \gamma_{ij}^s k_s,$$

les γ désignant des constantes. Soit

$$k_i = \alpha_{i1} h_1 + \alpha_{i2} h_2 + \ldots + \alpha_{ir} h_r = \Sigma \alpha_{i\mu} h_\mu;$$

(1) deviendra

$$\Sigma(\alpha_{i\mu}\alpha_{j\nu} - \alpha_{i\nu}\alpha_{j\mu})(h_\mu h_\nu - h_\mu h_\nu) = \Sigma \gamma_{ij}^s \Sigma \alpha_{s\mu} h_\mu$$

ou

$$\Sigma(\alpha_{i\mu}\alpha_{j\nu} - \alpha_{i\nu}\alpha_{j\mu}) \Sigma c_{\mu\nu}^s h_s = \Sigma \gamma_{ij}^s \Sigma \alpha_{s\mu} h_\mu.$$

Ces formules devant avoir lieu entre les h_s qui sont indépendants fournissent chacune r relations; pour que ces relations aient lieu, certaines équations obtenues en éliminant les γ devront avoir lieu entre les α; cette méthode est évidemment impraticable dès que $p > 2$.

Les groupes de substitutions linéaires et homogènes, que nous appellerons *groupes linéaires*, sont de beaucoup les plus importants; ce sont en effet ceux qui se sont présentés les premiers dans la théorie des équations algébriques puis dans la théorie des équations différentielles linéaires (les substitutions de lettres sont des cas particuliers des substitutions linéaires); ensuite, les groupes linéaires continus à un nombre fini de paramètres peuvent servir à former tous les autres (à un nombre fini de paramètres). En effet, quand on est parvenu à former un groupe linéaire, on est par cela même arrivé à se procurer des relations de la forme $(A_iA_j - A_jA_i)F = \Sigma c'_{ij}A_sF$, qui suffisent pour déterminer un groupe en faisant usage des variables a. Je ne m'occuperai donc que de la formation des groupes linéaires, et, dans ce qui va suivre, il ne s'agira plus que de substitutions linéaires et homogènes; ces épithètes *linéaires* et *homogènes* seront dorénavant sous-entendues.

12. — Groupes linéaires.

1° Je commencerai par établir une proposition qui permettra de former un grand nombre de groupes. Si s, s', s'', ... sont des substitutions formant un groupe et, si t est une substitution quelconque, tst^{-1}, $ts't^{-1}$, $ts''t^{-1}$, ... seront encore des substitutions formant un groupe; cela résulte de ce que

$$tst^{-1} \times ts't^{-1} = tss't^{-1}.$$

La substitution $ts't^{-1}$ est la transformée de s par t.

Si

$$tst^{-1} = s',$$

on a

$$tst^{-1}tst^{-1} = ts^2t^{-1} = s'^2, \qquad ts^3t^{-1} = s'^3 \ldots ts^\alpha t^{-1} = s'^\alpha,$$

et, en général,

$$tf(s)t^{-1} = f(s');$$

donc *une substitution et sa transformée ont même équation caractéristique.*

La réciproque est vraie en général, et deux substitutions ayant même équation caractéristique peuvent être transformées l'une dans l'autre; mais il est clair qu'il y aura des exceptions.

Il y a plus : la substitution t peut n'être pas linéaire. Si s est linéaire, tst^{-1} pourra ne pas être linéaire, mais elle aura une équation caractéristique à laquelle elle satisfera et qui sera l'équation de s.

La transformation fournit ainsi une première méthode, d'ailleurs connue depuis longtemps, pour former des groupes linéaires ou non.

2° Rappelons en second lieu que toutes les fonctions d'une même substitution forment un groupe de substitutions échangeables; c'est un théorème nouveau que notre notation symbolique met en évidence.

3° Nous avons signalé plus haut (§ 3) l'existence de substitutions s et t jouissant des propriétés suivantes; elles sont de degré n et l'on a

$$s^n = 1, \qquad t^n = 1, \qquad st = \varepsilon ts, \qquad \varepsilon = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n}}.$$

Il en résulte que

$$s^\alpha t = ts^\alpha \varepsilon^\alpha, \qquad s^\alpha t^\beta = t^\alpha s^\beta \varepsilon^{\alpha+\beta};$$

donc, en général, si a_p, b_q sont des nombres

$$\Sigma a_p s^p \Sigma b_q t^q = \Sigma a_p b_q s^p t^q = \Sigma a_p b_q \varepsilon^{p+q} t^q s^p,$$

c'est-à-dire, en appelant φ et ψ des symboles de fonctions entières,

$$\varphi(s)\psi(t) = \psi(t\varepsilon)\varphi(s\varepsilon);$$

donc $\varphi(s)\psi(t)$ est la substitution générale d'un groupe à $2n$ paramètres, car

$$\varphi(s)\psi(t)\varphi_1(s)\psi_1(t) = \varphi(s)\varphi_1(s\varepsilon)\psi(t\varepsilon)\psi_1(t\varepsilon),$$

et le second membre est de la forme $\varphi(s)\psi(t)$.

En particularisant les fonctions φ et ψ, on peut obtenir des groupes à moins de $2n$ paramètres; par exemple, si n est pair, $\varphi(s^2)\psi(t^2)$ formera un groupe à n paramètres, etc. Ces groupes sont nouveaux.

4° Les substitutions $\varphi(st)\psi(st)$, en conservant les mêmes notations, forment évidemment un groupe.

5° Si n a pour diviseur δ, $f(s^\delta, t^\delta)$ représente un groupe, etc.

6° Les substitutions orthogonales forment un groupe bien connu, et l'on connaît bien des moyens pour se procurer de telles substitutions. Soit $\Sigma a_{ij}\tau_{ij}$ une substitution orthogonale de degré n; posons

$$s_{pq} = \Sigma a_{ip} a_{jq} \tau_{ij};$$

nous aurons

$$(1)\quad \begin{cases} s_{pq}s_{kl} = \Sigma a_{ip}a_{jq}\tau_{ij}\Sigma a_{ik}a_{jl}\tau_{ij} \\ \quad = \Sigma(a_{ip}a_{1q}a_{1k}a_{jl} + a_{ip}a_{2q}a_{2k}a_{jl} + \ldots)\tau_{ij} \\ \quad = (a_{1q}a_{1k} + a_{2q}a_{2k} + \ldots)\Sigma a_{ip}a_{jl}\tau_{ij}, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$s_{pq}s_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{si } q \gtrless k \\ s_{pl} & \text{si } q = k \end{cases}.$$

Les substitutions s_{pq} jouissent donc des mêmes propriétés que les substitutions τ_{pq}; si l'on suppose p et q inférieurs à n, les substitutions s_{pq} formeront un groupe discontinu à l'aide duquel on pourra former, comme avec des substitutions τ_{ij}, de nouvelles substitutions s, t, jouissant des propriétés

$$s^m = 1,\qquad t^m = 1,\qquad st = \varepsilon ts.\qquad \varepsilon = e^{\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}},$$
$$m < n.$$

Ces nouvelles substitutions pourront à leur tour servir à former des groupes continus à moins de n paramètres en procédant comme aux numéros précédents.

7° Supposons la substitution $\Sigma a_{iji}\tau_j$ non plus orthogonale, mais quelconque, et posons

$$P_{qk} = a_{1q}a_{1k} + a_{2q}a_{2k} + \ldots + a_{nq}a_{nk}.$$

La formule (1) du numéro précédent donnera

$$s_{pq}s_{kl} = P_{qk}s_{pl},$$
$$s_{kl}s_{pq} = P_{lp}s_{pq},$$

d'où

$$s_{pq}s_{kl} - s_{kl}s_{pq} = P_{qk}s_{pl} - P_{lp}s_{kq}.$$

Les substitutions s_{pq}, où l'on peut supposer p et q moindres que n forment donc un système fondamental qui pourra servir à former une infinité de groupes continus à moins de n paramètres.

8° Je suppose que l'on sache former un groupe à r paramètres pour les substitutions de degré $n < \nu$; soient $h_1, h_2, \ldots, h_r$ les substitutions fondamentales de ce groupe et

$$h_p = \Sigma a_{ij}^{(p)} \tau_{ij}.$$

Supposons

$$h_p h_q - h_q h_p = \Sigma c_{ij}^s h_s.$$

Parmi les substitutions de degré ν, on pourra en choisir n^2 jouissant des propriétés

$$s_{pq} s_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{si } q \gtrless k \\ s_{pl} & \text{si } q = k \end{cases},$$

p et q restant inférieurs ou au plus égaux à r; si l'on pose alors

$$H_p = \Sigma a_{ij}^{(p)} s_{ij},$$

il est clair que l'on aura

$$H_p H_q - H_q H_p = \Sigma c_{ij}^s H_s;$$

on saura donc aussi former un groupe à r paramètres, avec des substitutions de degré n.

On voit donc comment on pourra simplifier la recherche des groupes linéaires en partant des substitutions du second degré pour s'élever successivement aux substitutions de degré supérieur.

13. — Substitutions du second degré.

Les substitutions du second degré sont intéressantes à considérer en elles-mêmes; elles ont été entre les mains de M. Poincaré un puissant instrument de recherches; leurs groupes, faciles à construire, permettront de construire des groupes pour les substitutions de degré plus élevé. Enfin, elles donnent lieu à des interprétations géométriques remarquables.

Soit

$$(1) \qquad s = a_{11}\tau_{11} + a_{12}\tau_{12} + a_{21}\tau_{21} + a_{22}\tau_{22}.$$

Si l'on pose

$$i = \tau_{12} - \tau_{21}, \qquad j = (\tau_{22} - \tau_{11})\sqrt{-1},$$

on aura

$$i^2 = -1, \qquad j^2 = -1, \qquad ij = -ji;$$

en sorte que, si l'on fait $ij = k$, on aura

$$\begin{aligned} i^2 &= -1, & j^2 &= -1, & k^2 &= -1, \\ ij &= k, & jk &= i, & ki &= j, \end{aligned}$$

et les substitutions i, j, k jouiront des propriétés des clefs d'un quaternion.

Si l'on pose

$$s = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta ij,$$

on aura

$$\begin{aligned} &a_{11}\tau_{11} + a_{12}\tau_{12} + a_{21}\tau_{21} + a_{22}\tau_{22} \\ &\quad = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta ij \\ &\quad = \alpha + \beta(\tau_{12} - \tau_{21}) + \gamma\sqrt{-1}\,(\tau_{22} - \tau_{11}) + \delta(\tau_{12} + \tau_{21})\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

et, en identifiant (en observant que $\alpha = \alpha\tau_{1} = \alpha\tau_{12}$),

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\gamma\sqrt{-1} + \alpha, & a_{22} &= \gamma\sqrt{-1} + \alpha, \\ a_{12} &= \beta + \delta\sqrt{-1}, & a_{21} &= -\beta + \delta\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

On en tire

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \alpha^2 + \gamma^2 + \beta^2 + \delta^2.$$

Le déterminant de la substitution $\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ *est donc* $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$. *Son équation caractéristique est*

$$s^2 - 2\alpha s + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 0;$$

par suite, on pourra poser $\alpha = \rho\cos\varphi$, $\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2} = \rho\sin\varphi$, et les racines de l'équation caractéristique seront

$$p(\cos\varphi \pm \sqrt{-1}\sin\varphi) = \rho e^{\pm\varphi\sqrt{-1}};$$

ρ^2 sera alors le déterminant de la substitution et l'on aura

$$F(s) = -\left(s - \rho e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)\frac{F(\rho e^{-\varphi\sqrt{-1}})}{2\rho\cos\varphi} + \left(s - \rho e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)\frac{F(\rho e^{\varphi\sqrt{-1}})}{2\rho\cos\varphi}.$$

Nous poserons, comme dans la théorie des quaternions,

$$\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}} = \cos\theta,$$

$$\frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}} = \cos\psi\sin\theta,$$

$$\frac{\delta}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2+\delta^2}} = \sin\psi\sin\theta,$$

et la substitution s prendra la forme

$$\left\{\begin{aligned} s &= p(\cos\varphi + u\sin\varphi),\\ u &= i\cos\theta + j\cos\psi\sin\theta + k\sin\psi\sin\theta: \end{aligned}\right.$$

la substitution u a alors pour carré -1, en sorte que

$$s^\alpha = \rho^\alpha(\cos\alpha\varphi + u\sin\alpha\varphi) = \rho^\alpha e^{u\alpha}$$

ou

$$s^\alpha = e^{\alpha(u+\log\rho)}.$$

Les substitutions à un paramètre sont ainsi mises sous forme exponentielle.

La théorie des quaternions et celle des substitutions linéaires du second degré sont donc étroitement liées, mais la théorie des substitutions est beaucoup plus générale et l'emploi des quaternions a l'inconvénient de ne s'appliquer qu'à des substitutions à coefficients imaginaires, aussi nous reviendrons à nos conventions ordinaires.

Nous poserons dorénavant

$$i = \tau_{12} + \tau_{21}, \qquad j = \tau_{11} - \tau_{22};$$

nous aurons

$$i^2 = 1, \qquad j^2 = 1, \qquad ij = -\tau_{12} + \tau_{11} = -ji,$$

et nous aurons les formules fondamentales

$$\begin{aligned} s &= a_{11}\tau_{11} + a_{12}\tau_{12} + a_{21}\tau_{21} + a_{22}\tau_{22} = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta ij \\ &= \tau_{11}(\alpha+\gamma) + \tau_{12}(\beta-\delta) + \tau_{21}(\beta+\delta) + \tau_{22}(\alpha-\gamma). \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{11} = \alpha + \gamma, & a_{22} = \alpha - \gamma, \\ a_{12} = \beta - \delta, & a_{21} = \beta + \delta, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha = \dfrac{a_{11}+a_{22}}{2}, & \gamma = \dfrac{a_{11}-a_{22}}{2}, \\ \beta = \dfrac{a_{12}+a_{21}}{2}, & \delta = \dfrac{a_{21}-a_{12}}{2}. \end{array} \right.$$

L'équation caractéristique est

$$s^2 - 2\alpha s + \alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 0.$$

Si nous observons que

$$(\beta i + \gamma j + \delta ij)^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2,$$

nous pourrons poser : 1°

$$\begin{aligned} &\rho^2 = \alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2, \\ &\alpha = \rho\cos\varphi, \qquad \sqrt{\delta^2 - \beta^2 - \gamma^2} = \rho\sin\varphi, \\ &s = \rho\left(\cos\varphi + \sin\varphi\,\frac{\beta i + \gamma j + \delta ij}{\sqrt{\delta^2 - \beta^2 - \gamma^2}}\right) \end{aligned}$$

ou, en posant

$$u = \frac{\beta i + \gamma j + \delta ij}{\sqrt{\delta^2 - \beta^2 - \gamma^2}}, \qquad u^2 = -1.$$

$$s = \rho(\cos\varphi + u\sin\varphi);$$

on aura alors

$$s^\alpha = \rho^\alpha(\cos\alpha\varphi + u\sin\alpha\varphi).$$

2° Nous pourrons aussi poser

$$\begin{aligned} &\rho^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 - \delta^2, \\ &\alpha = \beta\cos h\varphi, \qquad \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - \delta^2} = \rho\sin h\varphi. \\ &s = \rho(\cos h\varphi + u\sin h\varphi), \qquad u = \frac{\beta i + \gamma j + \delta ij}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - \delta^2}}, \qquad u^2 = 1 \end{aligned}$$

et, si l'on veut
$$s^\alpha = \rho^\alpha(\cos h\alpha\varphi + u \sin h\alpha\varphi).$$

Dans le premier cas, on aura, comme dans le second,
$$s = \rho e^{u\varphi}.$$

3° Si $\beta^2 + \gamma^2 - \delta^2 = 0$, on ne peut plus procéder comme nous l'avons fait, mais en posant
$$r = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}, \qquad \beta = r\cos\varphi, \qquad \gamma = r\sin\varphi,$$
on a
$$s = \alpha + r(i\cos\varphi + j\sin\varphi + ij)$$
ou
$$s = \alpha + ru \qquad \text{et} \qquad u^2 = 0, \qquad s^p = \alpha^p + p\alpha^{p-1}ru.$$

Lorsque $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des nombres réels, les transformations que nous venons d'indiquer ont surtout pour objet de conserver à la substitution s une forme dégagée d'imaginaires; en se plaçant à ce point de vue, la substitution
$$\rho(\cos h\varphi + u \sin h\varphi)$$
sera dite *hyperbolique;* la substitution
$$\rho(\cos\varphi + u\sin\varphi)$$
sera *elliptique*. Enfin,
$$\alpha + ru$$
sera *parabolique*.

Lorsque $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ seront imaginaires, on pourra mettre la substitution s sous la forme
$$S + T\sqrt{-1},$$
S et T étant réels; S et T seront alors ou elliptiques, ou hyperboliques, ou paraboliques.

Nous allons maintenant essayer de former les groupes à plusieurs paramètres. Ces groupes seront représentés par des substitutions de la forme $e^{\alpha+\beta i+\gamma j+\delta ij}$; on pourra toujours supposer que α n'entre pas en exposant, car, s'il n'y entre pas, on pourra l'introduire, ce qui revient à multiplier par un nombre toutes les substitutions du groupe et, s'il y entre, on pourra le supprimer, ce qui reviendra encore à multiplier par un nombre toutes les substitutions du groupe. Le groupe linéaire du second degré est, au fond, à trois paramètres β, γ, δ, α ne comptant pas.

Nous allons chercher tout d'abord deux substitutions fondamentales

$$s = \beta i + \gamma j + \delta ij,$$
$$s' = \beta' i + \gamma' j + \delta' ij;$$

nous aurons

$$ss' - s's = 2(\delta\gamma' - \gamma\delta')i + 2(\beta\delta' - \delta\beta')j + 2(\beta\gamma' - \gamma\beta')ij:$$

pour que s et s' forment un système fondamental, il faut qu'il existe des constantes c et c', telles que $ss' - sc' = 2cs + 2c's'$ ou que

$$\delta\gamma' - \gamma\delta' = c\beta - c'\beta', \qquad \beta\delta' - \delta\beta' = c\gamma + c'\gamma', \qquad \beta\gamma' - \gamma\beta' = c\delta + c'\delta',$$

ce qui donne la condition

$$\begin{vmatrix} \beta\beta' & \gamma\delta' - \gamma\delta' \\ \gamma\gamma' & \beta\delta' - \delta\beta' \\ \delta\delta' & \beta\gamma' - \gamma\beta' \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 - (\beta\delta' - \delta\beta')^2 + (\gamma\delta' - \delta\gamma')^2 = 0;$$

telle est la relation qui doit exister entre les substitutions fondamentales d'un groupe à deux paramètres de déterminant 1. Cette équation peut s'écrire

$$(\beta^2 + \gamma^2 - \delta^2)(\beta'^2 + \gamma'^2 - \delta'^2) - (\beta\beta' + \gamma\gamma' - \delta\delta')^2 = 0.$$

14. — Quelques mots sur les groupes discontinus.

Les groupes discontinus sont ceux dans lesquels les substitutions sont telles que, une substitution *quelconque* étant choisie, il n'en existe pas d'autres en différant infiniment peu. Je dis *quelconque*, parce que le groupe serait encore discontinu s'il y avait un nombre fini de substitutions ne jouissant pas de cette propriété.

On peut se procurer des groupes discontinus linéaires d'un grand nombre de manières que nos notations symboliques mettent en évidence. D'abord le groupe $\Sigma a_{ij}\tau_{ij}$, dans lequel les a_{ij} sont entiers, est évidemment discontinu; la même chose aurait lieu si les a étaient des multiples d'un même nombre.

Nous avons vu qu'il était possible de trouver des substitutions s_{ij} différentes des τ_{ij}, mais jouissant des mêmes propriétés

$$s_{ij}s_{kl} = \begin{cases} s_{il}, & s_{ij} = k, \\ 0, & s_{ij} \gtrless k. \end{cases}$$

Les substitutions $\Sigma a_{ij}s_{ij}$, dans lesquelles les a sont des nombres entiers, formeront évidemment un groupe discontinu. On obtient des sous-groupes en imposant au déterminant $\Sigma \pm a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$ la condition de rester égal à ± 1.

On pourrait obtenir des groupes à coefficients imaginaires en prenant pour les a_{ij} des expressions de la forme

$$A_0 + A_1\varepsilon + \ldots + A_{p-1}\varepsilon^{p-1},$$

ε désignant une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité, et $A_0, A_1, \ldots, A_n$ des entiers.

Il est très facile de trouver des substitutions satisfaisant à une équation binome, par exemple à $s^2 = 1$, si s, par exemple, est une substitution dont l'équation n'a pas de racines multiples, on pourra mettre $f(s)$ sous la forme

$$f(s) = f(s_1)\xi_1 + f(s_2)\xi_2 + \ldots + f(s_n)\xi_n,$$

$s_1, s_2, \ldots$ désignant les racines de l'équation de s et ξ_i des substitutions, telles que

$$\xi_i\xi_j = 0, \qquad \xi_i^2 = \xi_i, \qquad \Sigma\xi_i = 1.$$

Alors, en prenant

$$f(s) = \xi_1 \pm \xi_2 \pm \xi_3 \pm \ldots,$$

on aura $[f(s)]^2 = 1$. Soient s et t deux substitutions non échangeables et telles que $s^2 = 1$, $t^2 = 1$, une fonction de s et t sera de la forme

$$a + bs + ct + dst + ets + fsts + \ldots,$$

a, b, c, ... désignant des nombres; le nombre des symboles s, t, st, sts, ... sera limité, car $(st)^2 = 1$, et les seuls de ces symboles irréductibles sont

$$1, \quad s, \quad t, \quad st, \quad ts, \quad tst, \quad sts;$$

les fonctions entières et à coefficients entiers de s et t formeront donc un groupe discontinu.

Il ne serait pas difficile de généraliser ces considérations. Je crois que ce qui précède suffira pour montrer l'utilité du genre de calcul que je viens d'esquisser.

Un mot avant de terminer : Le calcul des substitutions peut être considéré comme l'interprétation, sous forme concrète, de la théorie générale des symboles imaginaires auxquels on a donné le nom de *clefs;* les clefs peuvent, en effet, être considérées comme représentant des substitutions. Les clefs, auxquelles on a donné le nom d'*ensembles* et qui satisfont aux relations

$$\xi_i \xi_j = 0, \qquad \xi_i^2 = \xi_i,$$

sont les substitutions interpolaires de déterminant nul, que nous avons rencontrées plusieurs fois. Les quaternions sont des substitutions particulières du second degré, comme nous l'avons montré.