JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. POINCARÉ

Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$

Journal de mathématiques pures et appliquées 5^e^ série, tome 4 (1898), p. 137-230.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1898_5_4__137_0>

Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$;

PAR M. H. POINCARÉ.

I. — Introduction.

Considérons une équation différentielle linéaire de la forme suivante

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \varphi(x, y) v, \tag{1}$$

où $\varphi(x, y)$ est une fonction rationnelle de deux variables x et y liées par une relation algébrique

$$f(x, y) = 0. \tag{2}$$

L'équation (1) admettra un certain nombre de points singuliers qui seront les infinis de la fonction rationnelle φ; pour chacun de ces points singuliers on pourra former l'équation déterminante.

Pour que x puisse être une fonction fuchsienne du rapport des intégrales, il faut d'abord que la différence des racines de chaque équation déterminante soit l'inverse d'un nombre entier. Mais cette condition n'est pas suffisante.

Nous dirons que deux équations de la forme (1) appartiennent au même *type :*

1° Si la relation (2) est la même pour ces deux équations;

2° Si les infinis de la fonction φ sont les mêmes;

3° Si, pour chacun de ces infinis, les équations déterminantes sont les mêmes.

La question suivante se pose alors.

Dans un type quelconque (pourvu que la différence des racines de chaque équation déterminante soit l'inverse d'un entier), y a-t-il toujours une équation fuchsienne, c'est-à-dire telle que x soit fonction fuchsienne du rapport des intégrales?

Cette question est d'une importance capitale dans la théorie des fonctions fuchsiennes; mais elle est extrêmement difficile; on voit assez aisément que, dans un type quelconque, il ne peut y avoir plus d'une équation fuchsienne; mais il est plus difficile d'établir qu'il y en a toujours une.

La première démonstration qui ait été donnée est fondée sur ce qu'on appelle la *méthode de continuité*. Nous y avons été conduits, M. Klein et moi, d'une façon indépendante. Dans mon Mémoire sur les *groupes des équations linéaires*, inséré dans le Tome III des *Acta mathematica*, j'ai insisté sur les ressemblances et les différences des résultats de M. Klein et des miens et j'ai donné en même temps un exposé complet de la méthode; je n'ai plus à y revenir. Je crois être arrivé à donner à cette méthode une forme parfaitement rigoureuse, mais elle n'en reste pas moins extrêmement compliquée et a un caractère indirect.

Peu de temps après, la Société royale des Sciences de Göttingen attira l'attention des géomètres sur une autre manière d'aborder la question, en proposant comme sujet de concours l'intégration de l'équation

$$\Delta u = e^u.$$

L'intégration de cette équation conduirait en effet directement à la solution du problème qui nous occupe.

La question posée par la Société de Göttingen fut résolue par M. Picard dans un Mémoire inséré au *Journal de Jordan* (1890) et complété par une Note des *Comptes rendus* (Tome CXVI).

La solution proposée par M. Picard consiste à intégrer d'abord l'équation dans un contour assez petit et à étendre ensuite le résultat à un contour quelconque par la méthode alternée de M. Schwarz.

On peut revenir sur la question et chercher à se passer de ce détour. C'est ce que je me propose de faire ici.

Je me bornerai dans ce Mémoire aux fonctions fuchsiennes des première, deuxième et sixième familles, c'est-à-dire à celles qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Le polygone R_0 qui engendre la fonction fuchsienne est alors tout entier à l'intérieur de ce cercle; il a un certain nombre de sommets se répartissant en un certain nombre de cycles.

Mais parmi ces cycles nous distinguerons :

1° Ceux de la première espèce où la somme des angles est égale à 2π;

2° Ceux de la seconde espèce où la somme des angles est égale à $\frac{2\pi}{n}$, n étant un entier plus grand que 1;

3° Ceux de la troisième espèce dont tous les angles sont nuls.

Nous ferons une étude particulière des *fonctions fuchsiennes de la première espèce*, où tous les cycles des sommets sont de la première espèce; nous étendrons ensuite nos résultats aux autres fonctions fuchsiennes.

II. — La fonction u.

Nous emploierons les notations suivantes :

Soient Z et Z' deux variables complexes liées par une relation algébrique

$$f(Z, Z') = 0, \tag{2}$$

correspondant à la relation (2) du paragraphe précédent. Soit

$$Z = X + iY, \qquad Z' = X' + iY'.$$

Considérons ensuite les quantités

$$Z_0 = X - iY, \qquad Z'_0 = X' - iY'$$

imaginaires conjuguées de Z et Z'. Elles seront évidemment liées par une relation

$$(2\ bis) \qquad f_0(Z_0, Z'_0) = 0$$

où f_0 est un polynome dont les coefficients sont imaginaires conjugués de ceux de f.

Supposons maintenant que Z et Z' soient des fonctions fuchsiennes

$$Z = \varphi(z), \qquad Z' = \varphi'(z)$$

de la variable complexe

$$z = x + iy.$$

Alors Z_0 et Z'_0 seront des fonctions fuchsiennes

$$Z_0 = \varphi_0(z_0), \qquad Z'_0 = \varphi'_0(z_0)$$

de la variable conjuguée

$$z_0 = x - iy.$$

Le cercle fondamental aura pour équation

$$x^2 + y^2 = 1$$

ou bien

$$zz_0 = 1.$$

Cela posé, supposons que la variable Z décrive dans son plan un arc infiniment petit dS, et que la variable z décrive dans le sien l'arc infiniment petit correspondant. Soit ds la longueur de cet arc décrit par z, *longueur évaluée au point de vue de la géométrie non euclidienne,* c'est-à-dire ce que j'ai appelé la L de cet arc dans mes Mémoires du Tome I des *Acta mathematica.* On aura

$$dS = \sqrt{dZ\,dZ_0}; \qquad ds = \frac{\sqrt{dz\,dz_0}}{1 - zz_0}.$$

Soit

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

une substitution du groupe fuchsien. Quand la variable z décrira l'arc considéré dont la L est ds, la variable $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ décrira un arc dont la L sera encore ds; et la variable

$$\varphi\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

qui sera encore égale à Z décrira un arc dont la longueur sera encore dS.

Le rapport

$$\frac{dS}{ds}$$

n'est donc pas altéré par les substitutions du groupe fuchsien; c'est donc une fonction uniforme de Z, Z', Z_0, Z'_0.

Posons alors

$$e^u = \frac{ds^2}{dS^2} = \frac{dz}{dZ}\frac{dz_0}{dZ_0}(1 - zz_0)^{-2},$$

d'où

$$u = -\log\frac{dZ}{dz} - \log\frac{dZ_0}{dz_0} - 2\log(1 - zz_0).$$

Si l'on observe que Z est fonction seulement de z et Z_0 de z_0, on trouvera

$$\frac{d^2 u}{dZ dZ_0} = -2\frac{dz}{dZ}\frac{dz_0}{dZ_0}\frac{d^2\log(1 - zz_0)}{dz dz_0} = 2\frac{dz}{dZ}\frac{dz_0}{dZ_0}(1 - zz_0)^{-2},$$

ou enfin

$$\frac{d^2 u}{dZ dZ_0} = 2e^u.$$

Si l'on passe des variables Z et Z_0 aux variables X et Y, on trouve

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dX^2} + \frac{d^2 u}{dY^2} = 4\frac{d^2 u}{dZ dZ_0}$$

ou bien

(3) $$\Delta u = 8e^u.$$

Pour que la fonction u cesse d'être finie il faut que l'un des facteurs

$$\frac{dz}{dZ}, \quad \frac{dz_0}{dZ_0}, \quad 1 - zz_0$$

soit nul ou infini.

Le facteur $1 - zz_0$ ne peut jamais être infini; si la fonction fuchsienne est de la première famille, c'est-à-dire si le polygone R_0 n'a pas de cycle de la troisième espèce, le facteur $1 - zz_0$ ne peut pas non plus devenir nul, parce que le polygone R_0 n'a aucun point sur la circonférence du cercle fondamental.

Si, au contraire, le polygone R_0 a des cycles de sommets de la troisième espèce, le facteur $1 - zz_0$ ne peut devenir nul qu'en un sommet appartenant à l'un de ces cycles.

En dehors des sommets appartenant aux cycles de la troisième espèce, la fonction u ne peut donc cesser d'être finie que si l'un des facteurs

$$\frac{dz}{dZ}, \quad \frac{dz_0}{dZ_0}$$

est nul ou infini. Comme ces deux facteurs sont imaginaires conjugués, ils deviendront nuls et infinis en même temps.

La condition pour que u cesse d'être fini, c'est donc que

$$\frac{dZ}{dz} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dZ}{dz} = \infty.$$

On aura $\frac{dZ}{dz} = 0$ dans deux cas:

1° Aux sommets de R_0 qui appartiennent à un cycle de deuxième ou de troisième espèce; nous y reviendrons.

2° Si l'on a à la fois

$$f(Z, Z') = 0, \qquad \frac{df}{dZ'} = 0,$$

c'est-à-dire si la tangente à la courbe $f(Z, Z') = 0$ est parallèle à l'axe des Z'.

Si le point correspondant n'est pas un point double de la courbe $f = 0$, on aura

$$\frac{df}{dZ'} = 0,$$

mais on n'aura pas

$$\frac{df}{dZ} = 0,$$

ni, par conséquent,

$$\frac{dZ'}{dz} = 0.$$

Si, alors, on pose

$$dS' = \sqrt{dZ'\,dZ'_0}$$

et

$$e^{u'} = \frac{ds^2}{dS'^2},$$

c'est-à-dire si u' est la fonction qui joue, par rapport à Z', le même rôle que u par rapport à Z, cette nouvelle fonction u' ne deviendra pas infinie au point correspondant.

Supposons maintenant que le point considéré soit un point double de $f = 0$; on aura alors à la fois

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{dZ'}{dz} = 0.$$

Mais posons

$$Z'' = R(Z, Z'),$$

R étant une fonction rationnelle de Z et de Z'; nous pourrons choisir cette fonction R de telle façon que Z'' prenne des valeurs différentes au point double sur les deux branches de courbe qui s'y croisent.

Dans ces conditions, on n'aura pas

$$\frac{dZ''}{dz} = 0,$$

et, par conséquent, si u'' est la fonction qui joue par rapport à Z'' le même rôle que u par rapport à Z', u'' ne deviendra pas infinie au point correspondant.

On peut d'ailleurs toujours supposer que la courbe $f = 0$ ne présente d'autre singularité que des points doubles ordinaires. Si, au contraire, le point z était un sommet de R_0, appartenant à un cycle de deuxième ou de troisième espèce, toutes les dérivées

$$\frac{dZ}{dz},\quad \frac{dZ'}{dz},\quad \frac{dZ''}{dz}$$

seraient nulles à la fois et toutes les fonctions

$$u, \quad u', \quad u''$$

deviendraient infinies à la fois.

3° On aura

$$\frac{dZ}{dz} = \infty,$$

quand on aura

$$Z = \infty.$$

Mais si l'on pose

$$Z'' = \frac{1}{Z},$$

et si u'' est la fonction qui joue par rapport à Z'' le même rôle que u par rapport à Z, on aura

$$Z'' = 0,$$

et, par conséquent, on n'aura ni

$$\frac{dZ''}{dz} = 0,$$

ni

$$u'' = \infty.$$

En résumé, *si la fonction fuchsienne est de première espèce, c'est-à-dire s'il n'y a pas de cycles de deuxième et troisième espèces, les fonctions*

$$u, \quad u', \quad u'', \quad \ldots$$

ne peuvent devenir infinies à la fois.

Dans le cas général, ces fonctions ne pourront devenir infinies à la fois qu'aux différents sommets des divers cycles de deuxième et de troisième espèces.

Examinons maintenant ce qui arrive en un sommet d'un cycle de deuxième espèce.

Si la somme des angles du cycle est $\frac{2\pi}{n}$ et si a est un sommet de deuxième espèce et A la valeur correspondante de z, la fonction fuchsienne

$$Z - A = \varphi(z) - A$$

sera développable suivant les puissances de $z - a$, et le développement commencera par un terme en $(z-a)^n$. Le développement de $\frac{dZ}{dz}$ commencera donc par un terme en $(z-a)^{n-1}$; il vient donc

$$\log(Z - A) = n \log(z - a) + Q,$$
$$\log\frac{dZ}{dz} = (n-1)\log(z-a) + Q',$$

Q et Q′ restant finis pour $z = a$, et, par conséquent,

$$\log\frac{dZ}{dz} = \frac{n-1}{n}\log(Z - A) + Q'',$$
$$\log\frac{dZ_0}{dz_0} = \frac{n-1}{n}\log(Z_0 - A_0) + Q''_0,$$

et enfin

$$u = -\frac{2n-2}{n}\log|Z - A| + q,$$

Q'', Q''_0 et q restant finis pour $z = a$. J'ajoute que q est développable suivant les puissances de $Z - A$, $Z_0 - A_0$, $\sqrt[n]{(Z-A)(Z_0-A_0)}$.

Passons aux sommets d'un cycle de troisième espèce; on aura alors dans le voisinage de ce cycle

$$\frac{1}{z-a} = \psi(Z) + b\log(Z - A),$$

b étant une constante et ψ une fonction développable suivant les puissances de $Z - A$. On tire de là

$$\frac{dz}{dZ} = -(z-a)^2\left[\psi'(Z) + \frac{b}{Z-A}\right],$$

d'où

$$\log\frac{dZ}{dz} = \log(Z - A) - 2\log(z-a) + Q,$$

Q désignant une quantité qui reste finie pour $z = a$.

On aurait, de même,

$$\log \frac{dZ_0}{dz_0} = \log(Z_0 - A_0) - 2\log(z_0 - a_0) + Q_0,$$

Q_0 restant fini pour $z = a$; comme le sommet a est sur le cercle fondamental, on a $aa_0 = 1$ et, par conséquent,

$$u = -2\log|Z - A| + 2\log\frac{(z-a)(z_0-a_0)}{(zz_0 - aa_0)} + q,$$

q restant fini pour $z = a$.

Observons maintenant que l'on a identiquement

$$\begin{aligned}\frac{zz_0 - aa_0}{(z-a)(z_0-a_0)} &= \frac{a}{z-a} + \frac{a_0}{z-a_0} + 1 \\ &= ab\log(Z - A) + a_0 b_0 \log(Z_0 - A_0) + q',\end{aligned}$$

q' restant fini pour $z = a$.

Mais il est aisé de vérifier que le produit ab doit être réel, de sorte que

$$ab = a_0 b_0$$

et

$$\frac{zz_0 - aa_0}{(z-a)(z_0-a_0)} = 2ab\log|Z - A| + q' = \log|Z - A|e^{q''},$$

q'' restant fini pour $z = a$.

Nous trouvons donc enfin

$$u = -2\log|Z - A| - 2\log\log|Z - A| - 2q'' + q.$$

Plus précisément, nous aurons

$$u = -2\log|Z - A| - 2\log(\log|Z - A| + \psi) + \varphi,$$

ψ et φ étant holomorphes en $Z - A$ et $Z_0 - A_0$.

Ainsi donc :

1° Dans le voisinage d'un sommet de la deuxième espèce, la différence

$$u + \frac{2n-2}{n}\log|Z - A|$$

reste finie, ou plus exactement, toutes les différences

$$u + \frac{2n-2}{n}\log|Z - A|, \qquad u' + \frac{2n-2}{n}\log|Z' - A'|,$$
$$u'' + \frac{2n-2}{n}\log|Z'' - A''|$$

ne peuvent pas devenir infinies à la fois.

2° Dans le voisinage d'un sommet de la troisième espèce, toutes les différences

$$u + 2\log|Z - A| + 2\log\log|Z - A|,$$
$$u' + 2\log|Z' - A'| + 2\log\log|Z' - A'|,$$
$$u'' + 2\log|Z'' - A''| + 2\log\log|Z'' - A''|, \quad \ldots$$

ne peuvent pas devenir infinies à la fois.

Il importe de se rendre compte de la raison de cette différence entre les sommets de la deuxième et de la troisième espèce.

Soit $\rho^2 = x^2 + y^2$, et supposons, pour simplifier, que u soit fonction de ρ seulement; l'équation

$$\Delta u = 8e^u$$

peut alors s'écrire

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du}{d\rho} = 8e^u.$$

Supposons que l'on veuille intégrer par approximations successives de la façon suivante; nous prendrons

$$\frac{d^2u_0}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du_0}{d\rho} = 0,$$
$$\frac{d^2u_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du_1}{d\rho} = 8e^{u_0},$$
$$\frac{d^2u_2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du_2}{d\rho} = 8(e^{u_0+u_1} - e^{u_0}),$$
$$\frac{d^2u_3}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du_3}{d\rho} = 8(e^{u_0+u_1+u_2} - e^{u_0+u_1}),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

Bornons-nous aux deux premières approximations; nous aurons, par exemple,

$$u_0 = p \log \rho, \qquad e^{u_0} = \rho^p,$$
$$u_1 = \frac{8\rho^{p+2}}{(p+2)^2}.$$

L'expression de u_1 devient illusoire pour $p = -2$, et l'on peut en conclure que l'équation (4) ne peut avoir d'intégrale de la forme

$$u = -2 \log \rho + v,$$

v restant fini pour $\rho = 0$; elle en a une, au contraire, de la forme

$$u = p \log \rho + v$$

si p n'est pas égal à -2.

En revanche, l'équation (4) admet pour intégrale

$$u = -2 \log \rho - 2 \log \log \rho - \log 4.$$

Je me contenterai de cet aperçu qui suffit pour faire comprendre la différence entre le cas des sommets de la deuxième espèce qui correspond à p différent de -2, et celui des sommets de la troisième espèce qui correspond à $p = -2$.

La variable z est le rapport des intégrales d'une certaine équation fuchsienne

$$(1) \qquad \frac{d^2 v}{dZ^2} = \varphi(Z, Z')v$$

qui correspond à l'équation (1) du paragraphe précédent.

Si le « type » de cette équation est donné, on connaîtra :

1° La relation algébrique

$$f(Z, Z') = 0;$$

2° Les valeurs A de Z qui correspondent aux divers cycles de sommets, soit de la seconde, soit de la troisième espèce;

3° Le nombre entier n relatif à chacun des sommets de la seconde espèce.

III. — Surfaces de Klein.

M. Klein a imaginé un mode de représentation des fonctions algébriques dont l'emploi peut nous être utile.

Considérons une courbe algébrique définie par l'équation

$$(2) \qquad f(Z, Z') = 0.$$

On peut construire une surface fermée, et de telle façon qu'à tout point réel ou imaginaire de la courbe (2) corresponde un point réel de la surface et un seul. Cependant, à un point double de la courbe (2) correspondront deux points réels de la surface, appartenant respectivement aux deux branches de courbe qui se coupent au point double.

Nous supposerons, d'ailleurs, que les coordonnées du point de la surface sont des fonctions continues des coordonnées du point correspondant de la courbe, et même que ces fonctions continues ont des dérivées de tous les ordres.

Les surfaces de Riemann ne sont que des cas particuliers des surfaces de Klein; une surface de Klein se réduit à une surface de Riemann quand elle est infiniment aplatie et réduite à un certain nombre de feuillets appliqués sur un plan.

Mais nous devons faire une distinction et séparer les surfaces de Klein *isotropes* des surfaces de Klein *anisotropes*.

Une surface de Klein sera dite *isotrope* si le mode de correspondance entre les points de la courbe et ceux de cette surface est telle que la représentation du plan des Z sur la surface de Klein soit une *représentation conforme*. Aux différents points du plan des Z correspondent différents points de la courbe (2) et, par conséquent, différents points de la surface de Klein; cette correspondance définit une transformation d'une région du plan des Z dans une région de la surface de Klein; pour que la surface de Klein soit isotrope, il faut que cette transformation conserve les angles.

Nous pourrions ne nous servir que des surfaces isotropes; les travaux de MM. Schwarz et Klein permettent, en effet, d'affirmer que les différents points d'une courbe algébrique quelconque peuvent toujours être représentés sur une surface de Klein isotrope.

Mais il est préférable de ne pas s'imposer cette restriction, ce qui ne compliquera pas beaucoup notre analyse; et, en effet, on sera dispensé de s'appuyer sur le théorème que je viens de citer et dont la démonstration est assez longue.

Au contraire, on peut pour ainsi dire regarder comme évident que, si l'on se donne une courbe (2) quelconque de genre p et une surface fermée quelconque $2p+1$ fois connexe, on peut faire correspondre d'une façon univoque les points de la courbe à ceux de la surface.

Ainsi l'on pourra faire correspondre d'une façon univoque les points réels d'une sphère et les points imaginaires d'une courbe unicursale quelconque; ou bien les points réels d'un tore et les points imaginaires d'une courbe de genre 1 quelconque.

Précisons la nature de la correspondance.

Nous pouvons, sans restreindre la généralité, supposer que la courbe (2) n'a d'autre singularité que des points doubles ordinaires et qu'elle se comporte régulièrement à l'infini, c'est-à-dire que ses directions asymptotiques sont toutes distinctes et non parallèles aux axes.

Cela posé, soit M un point de coordonnées courantes sur la surface, correspondant au point Z, Z′ de la courbe; soit P un point de la surface de Klein, correspondant au point

$$Z = A, \qquad Z' = A'$$

de la courbe.

Si la distance MP est très petite et si au point

$$Z = A, \qquad Z' = A'$$

on n'a pas

$$\frac{df}{dZ} = 0,$$

la distance MP est du même ordre de grandeur que $|Z - A|$.

Si, au contraire, on a

$$\frac{df}{dZ} = 0;$$

mais si l'on n'a pas

$$\frac{df}{dZ'} = 0,$$

la distance MP ne sera pas du même ordre de grandeur que $|Z - A|$; elle sera, en général, du même ordre de grandeur que le carré de $|Z - A|$ et en tout cas du même ordre de grandeur que $|Z' - A'|$.

Si l'on a à la fois

$$\frac{df}{dZ} = \frac{df}{dZ'} = 0,$$

c'est-à-dire si le point $Z = A$, $Z' = A'$ est un point double de la courbe (2), la distance MP ne sera plus du même ordre de grandeur que $|Z - A|$ ou que $|Z' - A'|$; mais nous pouvons poser

$$Z'' = R(Z, Z'),$$

R étant une fonction rationnelle de Z et Z' dont le numérateur et le dénominateur s'annulent au point double.

Si A'' est l'une des deux valeurs que prend Z'' au point double et celle précisément qui correspond au point P, la distance MP est du même ordre de grandeur que $|Z'' - A''|$.

Si enfin le point P correspond à un point à l'infini de la courbe (2), la distance MP est du même ordre de grandeur que $\left|\frac{1}{Z}\right|$.

Considérons maintenant une fonction u des coordonnées du point M; le point M correspond à un point du plan des Z dont les coordonnées sont X et Y, parties réelle et imaginaire de Z. Alors u est aussi une fonction de X et Y.

Soient dS un arc infiniment petit dans le plan des Z et $d\sigma$ l'arc correspondant sur la surface de Klein; soient $d\Omega$ une aire infiniment petite dans le plan des Z et $d\omega$ l'aire correspondante sur la surface.

Par l'extrémité Z de l'arc dS, je mène un arc infiniment petit ZZ_1 normal à dS et dont la longueur sera dN.

Soit MM_1 l'arc infiniment petit de la surface de Klein correspondant à l'arc ZZ_1 et aboutissant, par conséquent, à l'extrémité M de l'arc $d\sigma$.

Supposons d'abord la surface de Klein isotrope; alors, si j'appelle dn la longueur de l'arc MM_1, l'arc MM_1 sera normal à $d\sigma$ et l'on aura

$$\frac{d\sigma}{dn} = \frac{dS}{dN}, \qquad \frac{d\omega}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{dS}\right)^2.$$

Soit u la valeur de la fonction u au point M, ou ce qui revient au même point Z et

$$u + \frac{du}{dn} dn = u + \frac{du}{dN} dN$$

sa valeur au point M_1 ou, ce qui revient au même, au point Z_1. On aura

$$\frac{du}{dn} d\sigma = \frac{du}{dN} dS.$$

Le théorème de Green, appliqué dans le plan des Z, nous donne

$$(3) \qquad \int \Delta u \, d\Omega = \int \frac{du}{dN} dS,$$

ou en considérant deux fonctions u et v,

$$(4) \qquad \int v \Delta u \, d\Omega = \int v \frac{du}{dN} dS - \int \left(\frac{du}{dX} \frac{dv}{dX} + \frac{du}{dY} \frac{dv}{dY} \right) d\Omega.$$

Les intégrales sont étendues soit à tous les éléments $d\Omega$ d'une certaine aire plane, soit à tous les éléments dS du contour qui limite cette aire. Les fonctions u et v sont supposées continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre.

Posons maintenant

$$Du = \Delta u \frac{d\Omega}{d\omega}$$

et

$$E(u, v) = \left(\frac{du}{dX} \frac{dv}{dX} + \frac{du}{dY} \frac{dv}{dY} \right) \frac{d\Omega}{d\omega},$$

de telle sorte que

$$E(u, v) = E(v, u),$$
$$E(u, u) > 0.$$

Les équations (3) et (4) deviennent alors

$$(3 \textit{ bis}) \qquad \int Du \, d\omega = \int \frac{du}{dn} d\sigma,$$

$$(4 \textit{ bis}) \qquad \int v \, Du \, d\omega = \int v \frac{du}{dn} d\sigma - \int E(u, v) \, d\omega.$$

Ces équations représentent le théorème de Green étendu à la surface de Klein; mais la première est susceptible d'une interprétation physique remarquable. Supposons que u représente la température d'un point de la surface; alors $\frac{du}{dn}$ représentera la dérivée de cette température estimée suivant la normale à l'arc $d\sigma$.

Si la surface est supposée conductrice et qu'elle soit homogène et isotrope au point de vue de la conductibilité calorifique, le produit

$$\frac{du}{dn}d\sigma$$

représentera le flux de chaleur qui traverse l'élément $d\sigma$ pendant l'unité de temps, pourvu que l'on choisisse convenablement les unités.

L'intégrale

$$\int \frac{du}{dn}d\sigma$$

représente alors la quantité de chaleur qui entre dans l'aire $\int d\omega$ à travers son contour.

L'expression $\mathrm{D}u\,d\omega$ représente donc la quantité de chaleur cédée à l'élément de surface $d\omega$ par les éléments voisins de la surface.

Supposons maintenant la surface de Klein anisotrope.

D'abord l'arc MM_1 ne sera plus normal à l'arc $d\sigma$.

Si l'on considère sur le plan des Z un cercle infiniment petit ayant pour centre le point Z, la figure correspondante sur la surface de Klein sera une ellipse infiniment petite, ayant pour centre le point M. Alors les tangentes à l'arc MM_1 et à l'arc $d\sigma$ seront deux diamètres conjugués de cette ellipse.

Nous n'aurons plus alors

$$\frac{\mathrm{MM}_1}{d\mathrm{N}} = \frac{d\sigma}{d\mathrm{S}};$$

mais nous pourrons poser

$$dn = \frac{d\sigma\,d\mathrm{N}}{d\mathrm{S}}$$

et nous aurons

$$\mathrm{MM}_1 = \frac{a'\,dn}{b'},$$

a' et b' étant les longueurs des diamètres conjugués de notre ellipse qui sont dirigés respectivement suivant les tangentes à MM_1 et à $d\sigma$.

Ayant ainsi modifié la définition de dn, nous aurons

$$\frac{du}{dn}d\sigma = \frac{du}{dN}dS.$$

Nous conserverons les définitions de Du et de $E(u, v)$ et nous retomberons sur les équations (3 *bis*) et (4 *bis*).

L'interprétation physique subsiste; si, en effet, la surface est supposée conductrice, mais que la conductibilité ne soit pas isotrope, le flux de chaleur qui traverse l'élément $d\sigma$ sera encore représenté par le produit

$$\frac{du}{dn}d\sigma,$$

la définition de dn ayant été modifiée comme nous venons de le dire.

L'équation (3 *bis*) entraîne comme conséquence

$$\int Du\, d\omega = 0,$$

quand l'intégrale est étendue à la surface de Klein tout entière et, en effet, cette surface est fermée.

L'interprétation physique de cette équation est évidente : la conductibilité de la surface amène des échanges de chaleur entre ses diverses parties, mais ne peut altérer la quantité totale de chaleur que possède la surface entière.

IV. — La fonction U.

Nous considérons diverses quantités

$$Z, \quad Z', \quad Z''$$

toutes fonctions rationnelles de Z, Z', et les fonctions correspondantes

$$u, \quad u', \quad u'',$$

telles qu'elles ont été définies dans le § II.

Posons maintenant

$$e^{U} = e^{u}\frac{d\Omega}{d\omega}.$$

On en conclurait, si la surface de Klein était isotrope,

$$e^{U} = \frac{ds^2}{d\sigma^2}.$$

Dans tous les cas on aura également

$$e^{U} = e^{u'}\frac{d\Omega'}{d\omega},$$

l'aire $d\Omega'$ étant l'aire du plan des Z' qui correspond à l'aire $d\Omega$ du plan des Z; et, en effet, l'on a

$$e^{u} = \frac{ds^2}{dS^2}, \qquad e^{u'} = \frac{ds^2}{dS'^2}, \qquad \frac{d\Omega}{d\Omega'} = \frac{dS^2}{dS'^2}.$$

On aurait de même

$$e^{U} = e^{u''}\frac{d\Omega''}{d\omega}.$$

La définition de la fonction U *est donc indépendante du choix de la fonction* Z *parmi les diverses fonctions*

$$Z, \quad Z', \quad Z'', \quad \ldots.$$

Il vient alors

$$Du = \Delta u \frac{d\Omega}{d\omega} = 8e^{u}\frac{d\Omega}{d\omega} = 8e^{U}$$

et enfin

$$DU = 8e^{U} + D\log\frac{d\Omega}{d\omega};$$

comme $D\log\frac{d\Omega}{d\omega}$ est une fonction connue que je puis poser égale à $-\Phi$, je puis écrire

$$(1) \qquad DU = 8e^{U} - \Phi.$$

La définition de U ne dépendant pas du choix de Z, on devra avoir

$$-\Phi = D\log\frac{d\Omega}{d\omega} = D\log\frac{d\Omega'}{d\omega} = D\log\frac{d\Omega''}{d\omega} = \ldots$$

et par conséquent

$$D\log\frac{d\Omega'}{d\Omega} = 0, \qquad \Delta\log\frac{d\Omega'}{d\Omega} = 0,$$

ce qu'il est d'ailleurs aisé de vérifier.

Je dis maintenant que la fonction Φ ne peut devenir infinie. En effet, elle ne peut cesser d'être finie que si $\log\frac{d\Omega}{d\omega}$ est infini, c'est-à-dire si

$$Z = \infty \qquad \text{ou} \qquad \frac{df}{dZ'} = 0.$$

Mais il faudrait en même temps que

$$\log\frac{d\Omega'}{d\omega} = \infty,$$

ce qui entraînerait

$$Z' = \infty \qquad \text{ou} \qquad \frac{df}{dZ} = 0.$$

Il n'y a donc de doute que pour les points de la surface de Klein qui correspondent aux points à l'infini ou aux points doubles de la courbe

$$(2) \qquad f(Z, Z') = 0.$$

Mais il faudrait encore que pour toutes les fonctions Z'' on eût

$$\log\frac{d\Omega''}{d\omega} = \infty.$$

Or c'est ce qui n'arrive pas, pour un point à l'infini, si l'on fait

$$Z'' = \frac{1}{Z},$$

ni pour un point double, si l'on fait

$$Z'' = R(Z, Z'),$$

le numérateur et le dénominateur de R s'annulant à la fois au point double.

La fonction Φ est donc toujours finie. C. Q. F. D.

Que dire maintenant de la fonction U.

Si on laisse de côté les points de la surface de Klein qui correspondent à un sommet de deuxième ou de troisième espèce du polygone R_0, on pourra trouver une fonction Z'' telle que

$$u'' \quad \text{et} \quad \log \frac{d\Omega''}{d\omega}$$

soient finis. La fonction U est donc finie.

Si la fonction fuchsienne est de première espèce, la fonction U sera donc finie sur toute la surface de Klein et elle sera définie par l'équation

$$(1) \qquad DU = 8e^U - \Phi.$$

Supposons maintenant que a soit un sommet de deuxième espèce de R_0 et soient A, A', A'' les valeurs correspondantes de Z, Z' et Z'' et P le point correspondant de la surface de Klein.

Nous pourrons supposer que l'on a choisi la fonction Z'' de telle sorte que

$$\log \frac{d\Omega''}{d\omega}$$

reste fini; alors la différence

$$u'' + \frac{2n-2}{n} \log |Z'' - A''|$$

et, par conséquent, la différence

$$U + \frac{2n-2}{n} \log MP$$

resteront finies.

Une observation cependant; lorsque Z'' tend vers A'', l'expression

$$u'' + \frac{2n-2}{n} \log |Z'' - A''|$$

tend vers une limite finie et déterminée; mais quand le point M se rapproche de P, l'expression

$$U + \frac{2n-2}{n} \log MP$$

(à moins que la surface de Klein ne soit isotrope) reste finie, mais ne tend pas vers une limite déterminée; sa limite dépend de la direction de la droite MP. Si ρ est le rayon d'un cercle très petit situé dans le plan des Z'' et ε le diamètre de l'ellipse correspondante de la surface de Klein dont la direction est la même que celle de MP, c'est l'expression

$$U + \frac{2n-2}{2} \log \frac{\rho . MP}{\varepsilon}$$

qui tend vers une limite déterminée quand MP tend vers o.

Posons

$$v'' = u'' + \frac{2n-2}{n} \log |Z'' - A''|,$$

il viendra

$$\Delta v'' = \Delta u'' = 8e^{u''} \frac{d\Omega''}{d\Omega} = 8e^{v''} |Z'' - A''|^{\frac{2-2n}{n}} \frac{d\Omega''}{d\Omega}.$$

On voit que la fonction v'' satisfait à une équation de la forme

$$\Delta v'' = \theta e^{v''} \frac{d\Omega''}{d\Omega},$$

où θ est une fonction donnée, constamment positive, mais devenant infinie pour $Z'' = A''$.

Posons maintenant

$$e^V = e^{v''} \frac{d\Omega''}{d\omega}.$$

Si nous conservons aux lettres θ et Φ leur signification

$$\theta = 8 |Z'' - A''|^{\frac{2-2n}{n}}; \qquad \Phi = -D \log \frac{d\Omega''}{d\omega},$$

il viendra

$$DV = \theta e^V - \Phi.$$

Au point P (correspondant au point $Z'' = A''$), la fonction θ deviendra infinie, mais V et Φ resteront finis.

Envisageons de même un sommet de la troisième espèce; nous choisirons u'' de telle façon que

$$u'' + 2\log|Z'' - A''| + 2\log\log|Z'' - A''|$$

reste fini et nous poserons

$$\begin{aligned} v'' &= u'' + 2\log|Z'' - A''| + 2\log\log|Z'' - A''|, \\ \theta &= 8|Z'' - A''|^{-2}\log^{-2}|Z'' - A''|. \end{aligned}$$

Nous aurons alors

$$\Delta v'' = \Delta u'' + 2\Delta\log\log|Z'' - A''| = \frac{d\Omega''}{d\Omega}\left(8e^{u''} - \frac{2}{|Z'' - A''|^2\log^2|Z'' - A''|}\right),$$

et si nous posons encore

$$e^{\mathrm{V}} = e^{v''}\frac{d\Omega''}{d\omega},$$

il viendra

$$\mathrm{DV} = \theta e^{\mathrm{V}} - \Phi - \frac{\theta}{4}\frac{d\Omega''}{d\omega}.$$

Nous sommes ainsi conduits à changer la définition de U. Nous poserons

$$\mathrm{U} = u + \log\frac{d\Omega}{d\omega} + h,$$

où h est une fonction uniforme qui reste finie en tous les points de la surface de Klein, sauf aux points qui correspondent à des sommets de deuxième ou de troisième espèce de R_0.

En un sommet de la deuxième espèce, la différence

$$h - \frac{2n-2}{n}\log|Z'' - A''|$$

devra rester finie; en un sommet de troisième espèce, la différence

$$h - 2\log|Z'' - A''| - 2\log\log|Z'' - A''|$$

devra rester finie.

Nous pourrons toujours choisir la fonction h de façon à satisfaire à ces conditions et même de telle façon que la fonction h en dehors des sommets de deuxième et de troisième espèce, et les fonctions

$$h - \frac{2n-2}{n}\log|Z''-A''|; \quad h - 2\log|Z''-A''| - 2\log\log|Z''-A''|$$

dans le voisinage de ces sommets, que ces diverses fonctions, dis-je, aient leurs dérivées de tous les ordres finies et continues.

Dans ces conditions la fonction U *sera toujours finie et elle satisfera à l'équation*

$$DU = 8e^{U}e^{-h} + D\log\frac{d\Omega}{d\omega} + Dh,$$

ou en posant

$$\theta = 8e^{-h}, \qquad -\Phi = D\log\frac{d\Omega}{d\omega} + Dh,$$

à l'équation

$$(1\ bis) \qquad DU = \theta e^{U} - \Phi.$$

Les fonctions θ et Φ sont des fonctions *données;* la première est toujours positive, elle ne peut jamais s'annuler; elle ne peut devenir infinie qu'aux sommets de deuxième et de troisième espèces; la fonction Φ ne peut devenir infinie qu'aux sommets de troisième espèce.

Aux sommets de deuxième espèce, θ devient infini comme

$$|Z''-A''|^{\frac{2-2n}{n}}.$$

Aux sommets de troisième espèce, θ et Φ deviennent infinies comme

$$(|Z''-A''|\log|Z''-A''|)^{-2}.$$

Le rapport

$$\frac{\Phi}{\theta}$$

reste donc fini; la limite de ce rapport est d'ailleurs égale à

$$\frac{1}{4}\frac{d\Omega''}{d\omega};$$

elle est donc positive.

Ainsi, s'il y a des sommets de troisième espèce, la fonction Φ peut devenir infinie, mais infinie positive; elle n'a donc plus de limite supérieure, mais *elle a toujours une limite inférieure.*

V. — Maxima et minima.

La propriété fondamentale de l'expression Du est la suivante : Si la fonction u est maxima, Du est négatif; si la fonction u est minima, Du est positif; ce qui signifie, au point de vue physique, qu'un point où la température est maximum peut céder de la chaleur aux points voisins, mais ne peut en recevoir.

Examinons la chose d'un peu plus près, et pour cela reprenons l'équation (3 *bis*) du paragraphe III

$$\int \mathrm{D}u\,d\omega = \int \frac{du}{dn}\,d\sigma. \tag{3 bis}$$

Si au point P la fonction u est maximum, dans le voisinage de ce point, les courbes $u =$ const. seront de petites courbes fermées s'enveloppant mutuellement et enveloppant le point P.

L'intégrale $\int \frac{du}{dn}\,d\sigma$, prise le long d'une de ces petites courbes, sera toujours négative, car $\frac{du}{dn}$ sera toujours négatif.

L'intégrale $\int \mathrm{D}u\,d\omega$, étendue à l'aire limitée par une de ces petites courbes, sera donc négative.

Il faut donc qu'à l'intérieur de chacune de ces petites courbes u puisse prendre des valeurs négatives et, comme je puis supposer cette courbe aussi voisine du point P que je le veux, on pourra trouver, aussi près du point P qu'on le veut, des points où Du sera négatif.

Si la fonction Du est continue, elle ne pourra pas être positive en P; elle pourra s'annuler en P, mais à la condition qu'il y ait dans le voisinage de P des points où elle est négative. Il peut se faire que Du devienne infinie en P, mais toujours à la condition qu'il y ait dans le voisinage de P des points où elle soit négative.

Il convient toutefois de s'assurer que, si $\mathrm{D}u$ devient infini, l'intégrale

$$\int |\mathrm{D}u|\, d\omega$$

reste finie. C'est ce qui arrivera dans le problème qui nous occupe.

Nous avons vu que, aux sommets de la deuxième espèce, DU devient infini de l'ordre de

$$\frac{1}{\mathrm{MP}^{2-\frac{2}{n}}}$$

et aux sommets de la troisième espèce, infini de l'ordre de

$$\frac{1}{\mathrm{MP}^2 \log^2 \mathrm{MP}}.$$

L'intégrale

$$\int |\mathrm{DU}|\, d\omega$$

est du même ordre que

$$\int |\mathrm{DU}|\, \mathrm{MP}\, d(\mathrm{MP}),$$

c'est-à-dire que

$$\int \frac{d\mathrm{MP}}{\mathrm{MP}^{1-\frac{2}{n}}}, \qquad \int \frac{d\mathrm{MP}}{\mathrm{MP} \log^2 \mathrm{MP}},$$

et l'on vérifie aisément que ces deux intégrales sont finies.

Considérons alors l'équation

$$\mathrm{DU} = \theta e^{\mathrm{U}} - \Phi.$$

Je suppose que θ est toujours positif et ne peut s'annuler; je supposerai en outre que θ et Φ sont toujours finis (c'est ce qui arrive, comme nous l'avons vu, dans le cas des fonctions fuchsiennes de la première espèce).

Enfin, je supposerai d'abord que Φ est toujours positif et ne peut s'annuler.

Alors θ et Φ, ne pouvant ni s'annuler, ni devenir infinies, admettront chacune un minimum θ_0 et Φ_0 et chacune un maximum θ_1 et Φ_1; toutes ces quantités sont positives.

D'autre part U', étant fini, aura un maximum U_1 et un minimum U_0.

Pour le maximum, on aura

$$DU < 0$$

et, par conséquent,

$$\theta e^{U_1} - \Phi < 0,$$

ou *a fortiori*

$$\theta_0 e^{U_1} - \Phi_1 < 0.$$

Pour le minimum, on aura

$$DU > 0,$$

d'où

$$\theta e^{U_0} - \Phi > 0,$$

ou *a fortiori*

$$\theta_1 e^{U_0} - \Phi_0 > 0.$$

La fonction U satisfera donc toujours aux inégalités

$$(1)\qquad \log\Phi_0 - \log\theta_1 < U < \log\Phi_1 - \log\theta_0.$$

On peut obtenir des limites plus rapprochées en considérant le rapport $\frac{\Phi}{\theta}$; les inégalités

$$\theta e^{U_1} - \Phi < 0, \qquad \theta e^{U_0} - \Phi > 0$$

montrent que e^U reste toujours compris entre le minimum et le maximum de $\frac{\Phi}{\theta}$.

Ce résultat serait illusoire si Φ n'était pas toujours positif.

Supposons maintenant que Φ soit toujours positif, mais qu'on puisse trouver une fonction η, telle que

$$\Phi + D\eta$$

soit toujours positif.

Posons alors

$$U = V + \eta;$$

l'équation devient alors

$$DV = \theta e^{\eta} e^{V} - \Phi - D\eta.$$

Les fonctions θe^{η}, $\varphi + D\eta$ étant toujours finies et positives, les résultats précédents peuvent s'appliquer, et l'on voit que e^{V} reste toujours compris entre le maximum et le minimum de

$$\frac{\Phi + D\eta}{\theta e^{\eta}}.$$

Si donc η_0 et η_1 sont le minimum et le maximum de η, et si ζ_0 et ζ_1 sont le minimum et le maximum de

$$\frac{\Phi + D\eta}{\theta},$$

on aura

$$\zeta_0 e^{\eta_0 - \eta_1} < e^{V} < \zeta_1 e^{\eta_1 - \eta_0}. \tag{2}$$

Si θ et Φ peuvent devenir infinis, les résultats précédents subsistent-ils? Dans les cas dont nous aurons à nous occuper, θ ne pourra devenir infini qu'aux sommets de deuxième et de troisième espèces et Φ aux sommets de troisième espèce.

Dans tous les cas, l'expression

$$e^{U} - \frac{\Phi}{\theta}$$

restera finie et déterminée; cette expression devra être négative pour les maxima (sans quoi DU ne pourrait devenir négatif dans le voisinage du point correspondant au maximum) et positive pour les minima.

Si donc Φ est toujours positif, e^{U} sera toujours compris entre le maximum et le minimum de $\frac{\Phi}{\theta}$.

Si Φ n'est pas toujours positif, mais si $\Phi + D\eta$ est toujours positif, les inégalités (2) subsisteront.

Envisageons maintenant l'équation

$$DV = \theta e^{U} V - \psi. \tag{4}$$

Soient V_1 et V_0 le maximum et le minimum de V; on devra avoir

$$\theta e^{U} V_1 - \psi < 0,$$
$$\theta e^{U} V_0 - \psi > 0,$$

ce qui montre que V reste compris entre le maximum et le minimum du rapport

$$\frac{\psi}{\theta e^{U}}.$$

Comme θe^{U} est essentiellement positif et ne peut s'annuler, ce résultat reste vrai, soit que ψ soit constamment positif, soit que ψ puisse changer de signe.

Il reste vrai encore et n'est pas illusoire, quand θ et même quand ψ peuvent devenir infinis pourvu que le rapport $\frac{\psi}{\theta}$ demeure fini.

Je dis maintenant que l'équation (4) ne peut admettre deux solutions; si elle en admettait deux, V et V', la différence V — V' satisferait à l'équation

$$D(V - V') = \theta e^{U}(V - V').$$

Cette équation est de même forme que (4), mais ψ est nul. Sont donc également nulles la limite supérieure et la limite inférieure entre lesquelles peut varier V — V', d'après ce que nous venons de voir. Donc

$$V - V' = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

De même, l'équation

$$DU = \theta e^{U} - \Phi$$

ne peut admettre deux solutions, car si elle en admettait deux, U et U + V, on aurait

$$DV = \theta e^{U}(e^{V} - 1).$$

Si V_1 et V_0 sont le maximum et le minimum de V, on devrait avoir

$$e^{V_1} \leqq 1, \qquad e^{V_0} \geqq 1,$$

d'où

$$V_1 \leqq 0, \qquad V_0 \geqq 0, \qquad V_1 \geqq V \geqq V_0,$$

ce qui entraîne

$$V_1 = V = V_0 = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

VI. — L'équation $Du = \varphi$.

Je me propose d'intégrer l'équation

$$(1) \qquad Du = \varphi,$$

où u est la fonction inconnue qui doit être finie et continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, et la fonction φ qui est donnée. C'est comme si l'on demandait la température finale de chaque point de la surface, en supposant qu'elle ne cède pas de chaleur au dehors par rayonnement, mais que chaque élément $d\omega$ de la surface est le siège d'une source de chaleur produisant dans l'unité de temps une quantité de chaleur $-\varphi\, d\omega$.

Pour que le problème soit possible, il faut d'abord que

$$(2) \qquad \int \varphi\, d\omega = 0,$$

l'intégrale étant étendue à la surface entière. En effet, nous avons trouvé plus haut

$$\int Du\, d\omega = 0$$

et, d'ailleurs, l'équilibre thermique n'est évidemment possible que si la quantité *totale* de chaleur fournie par les sources est nulle.

Supposons cette condition remplie. Pour résoudre notre problème, nous allons introduire une fonction qui jouera le même rôle que la fonction de Green dans la théorie du potentiel.

Reprenons la courbe algébrique

$$(3) \qquad f(Z, Z') = 0,$$

qui est la même que la courbe (2) des paragraphes précédents.

Considérons l'intégrale abélienne

$$J = \int R(Z, Z')\, dZ, \tag{4}$$

où R est une fonction rationnelle de Z et de Z'.

Soient alors

$$\begin{aligned} &(Z = Z_0,\ Z' = Z'_0), \qquad (Z = Z_1,\ Z' = Z'_1), \\ &(Z = U_0,\ Z' = U'_0), \qquad (Z = U_1,\ Z' = U'_1) \end{aligned}$$

quatre points analytiques pris sur la courbe (3). Les deux premiers (Z_0, Z'_0), (Z_1, Z'_1) seront les limites inférieure et supérieure de l'intégrale (4).

Cette intégrale elle-même sera une intégrale abélienne de la troisième espèce admettant pour points singuliers logarithmiques les deux points analytiques (U_0, U'_0), (U_1, U'_1).

Donc, sauf aux points analytiques (U_0, U'_0), (U_1, U'_1), la fonction J sera holomorphe; dans le voisinage de (U_0, U'_0), la différence

$$J + \log(Z_1 - U_0) - \log(Z_0 - U_0)$$

et, dans le voisinage de (U_1, U'_1), la différence

$$J - \log(Z_1 - U_1) + \log(Z_0 - U_1)$$

seront holomorphes en Z_1 et Z_0.

Pour achever de définir l'intégrale (4), nous supposerons que les parties réelles de ses $2p$ périodes cycliques sont nulles.

L'intégrale J ne change pas quand on permute les deux points analytiques

$$(Z_0, Z'_0), \quad (Z_1, Z'_1)$$

avec les deux points analytiques

$$(U_0, U'_0), \quad (U_1, U'_1).$$

C'est le résultat bien connu dans la théorie des fonctions abéliennes sous le nom de *Vertauschung von Parameter und Argument*.

Je désignerai par M, P, M_1, P_1 les points de la surface de Klein qui correspondent aux quatre points analytiques

$$(Z_1, Z'_1), \quad (Z_0, Z'_0), \quad (U_1, U'_1), \quad (U_0, U'_0),$$

et par

$$G(M, P; M_1, P_1)$$

la partie réelle de l'intégrale J.

On voit que

$$G, \qquad G + \log\left|\frac{Z_1 - U_0}{Z_0 - U_0}\right|, \qquad G - \log\left|\frac{Z_1 - U_1}{Z_0 - U_1}\right|$$

seront des fonctions harmoniques de X et Y (si l'on pose $Z_1 = X + iY$), la première pour tous les points analytiques sauf pour U_0 et U_1, la seconde dans le voisinage de U_0, la troisième dans le voisinage de U_1.

Observons enfin que la définition précédente devrait être modifiée si l'un de nos quatre points analytiques venait en un point de la courbe (3) où

$$\frac{df}{dZ'} = 0, \qquad \frac{df}{dZ} = 0;$$

il conviendrait de remplacer alors par la fonction Z' la fonction Z qui joue le rôle prépondérant dans notre définition; ou bien encore si l'un des quatre points analytiques venait en un point double de la courbe (3); il faudrait remplacer Z par

$$Z'' = \frac{P(Z, Z')}{Q(Z, Z')},$$

P et Q étant deux polynomes entiers s'annulant tous deux au point double.

Soient $d\omega$ et $d\omega_1$ deux éléments quelconques de la surface de Klein; soient M et M_1 les centres de gravité de ces éléments; soient P et P_1 deux points *fixes* quelconques sur la surface de Klein. Soit φ_1 une fonction quelconque des coordonnées du point M_1.

Considérons l'intégrale

$$(5) \qquad v = \int G(M, P; M_1, P_1)\,\varphi_1\, d\omega_1,$$

étendue à tous les éléments $d\omega_1$ de la surface de Klein. C'est une fonction des coordonnées du point M.

Je dis d'abord que cette intégrale est finie, si la fonction φ_1 est finie elle-même. Et, en effet, la fonction G ne peut devenir infinie que si le point M_1 vient en M ou en P (elle s'annule si M se confond avec P et, par conséquent aussi, à cause de la Vertauschung, si M_1 se confond avec P_1); mais si M_1 vient en M ou en P la fonction G devient infinie logarithmiquement, de sorte que notre intégrale reste finie et déterminée.

Pour pousser l'étude plus loin, je divise la surface de Klein en deux régions, l'une S' réduite à une petite calotte entourant le point M, l'autre S'' comprenant le reste de la surface et je pose

$$v = v' + v'',$$

v' et v'' représentant la même intégrale étendue respectivement à S' et S''.

Je suppose que le point M ne se confond ni avec P ni avec P_1.

Considérons d'abord l'intégrale v''; si M_1 reste dans la région S'' qui ne contient pas le point M, les trois distances MM_1, MP, MP_1 restent finies et l'on peut assigner une limite supérieure à la fonction G et à chacune de ses dérivées.

L'intégrale

$$\int H\varphi_1\, d\omega_1,$$

où H est une dérivée quelconque de G est non seulement finie, mais *uniformément* convergente. Nous pouvons donc appliquer le procédé de la différentiation sous le signe $\int$ et nous voyons d'abord que toutes les dérivées de v'' sont finies.

Il vient ensuite

$$Dv'' = \int DG\,\varphi_1\, d\omega_1 = 0,$$

puisque

$$DG = 0.$$

Considérons maintenant v'; la portion S' de la surface étant très petite pourra être représentée d'une façon univoque sur le plan des Z et nous aurons

$$v' = \int G\,\varphi_1 \frac{d\omega_1}{d\Omega_1}\,d\Omega_1,$$

$d\Omega_1$ étant l'aire de l'élément du plan des Z correspondant à l'élément $d\omega_1$ de la surface de Klein et l'intégration étant étendue à tous les éléments $d\Omega_1$ de la portion du plan des Z qui correspond à la région S'.

Mais on a

$$G = \log|Z_1 - U_1| + H,$$

H étant une fonction harmonique de X et de Y.

Nous aurons alors

$$v' = v'_1 + v'_2,$$

$$v'_1 = \int \log|Z_1 - U_1|\,\varphi_1 \frac{d\omega_1}{d\Omega_1}\,d\Omega_1,$$

$$v'_2 = \int H\,\varphi_1 \frac{d\omega_1}{d\Omega_1}\,d\Omega_1.$$

Nous voyons d'abord que l'on peut appliquer à l'intégrale v'_2 le procédé de la différentiation sous le signe $\int$, de sorte que toutes les dérivées de v'_2 sont finies; d'ailleurs on a

$$\Delta v'_2 = \int \Delta H\,\varphi_1 \frac{d\omega_1}{d\Omega_1}\,d\Omega_1 = 0,$$

d'où

$$D v'_2 = 0.$$

Ensuite les propriétés du potentiel logarithmique nous apprennent:

1° Que v'_1 est fini ainsi que ses dérivées des K premiers ordres, si φ_1 est fini ainsi que ses dérivées des $K-1$ premiers ordres;

2° Que

$$\Delta v'_1 = -2\pi\varphi \frac{d\omega}{d\Omega},$$

φ et $\frac{d\omega}{d\Omega}$ représentant les valeurs que prennent φ_1 et $\frac{d\omega_1}{d\Omega_1}$ quand le point M_1 vient en M. On en conclut

$$Dv'_1 = -2\pi\varphi.$$

En résumé, v est fini ainsi que ses dérivées des K premiers ordres si φ est fini ainsi que ses dérivées des K − 1 premiers ordres, et l'on a

$$Dv = -2\pi\varphi.$$

J'ai supposé que M ne se confondait ni avec P, ni avec P_1.

Si M se confond avec P, G et v s'annulent.

Il me reste à faire voir qu'aucune singularité ne se présente quand M se confond avec P_1, et pour cela je vais montrer que l'intégrale v ne dépend pas de la position du point P_1.

Si nous remplaçons P_1 par un autre point P_2, v se change en

$$\int G(M, P; M_1, P_2)\varphi_1\, d\omega_1.$$

Puisque

$$G(M, P; M_1, P_1) = G(M, P; M_1, P_2) - G(M, P; P_1, P_2),$$

je vois que v a augmenté de

$$\int G(M, P; P_1, P_2)\varphi_1\, d\omega_1 = G(M, P; P_1, P_2)\int \varphi_1\, d\omega_1.$$

Or, cette expression est nulle à cause de la relation (2). Donc, v n'a pas changé. C. Q. F. D.

En résumé, la solution de l'équation (1) *nous est donnée par la formule*

$$u = -\frac{1}{2\pi}\int G(M, P; M_1, P_1)\varphi_1\, d\omega_1. \tag{6}$$

La solution donnée par l'équation (6) n'est pas unique; on peut évidemment y ajouter une constante arbitraire; à part cela, il n'y en a pas d'autre.

Ce qui caractérise la solution particulière (6), c'est qu'elle s'annule au point P.

La solution (6) satisfait à une inégalité qui nous sera utile dans la suite.

Soient η une fonction quelconque, toujours positive, et η_1 la valeur de cette fonction au point M_1. Soient

$$\varphi = \psi\eta, \qquad \varphi_1 = \psi_1\eta_1.$$

On aura évidemment

$$|u| < (\text{max. de } |\psi|) \int \frac{|G| \eta_1 \, d\omega_1}{2\pi}.$$

L'intégrale

$$\int \frac{|G| \eta_1 \, d\omega_1}{2\pi}$$

est une fonction de M; la fonction sous le signe $\int$ ne peut devenir infinie que dans trois cas : 1° si le point M vient en M_1; 2° si la fonction η_1 devient infinie; 3° si le point M vient en P_1.

Afin d'exclure ce troisième cas, je décrirai autour de P_1 une petite courbe fermée et je supposerai que le point M ne pénètre pas à l'intérieur de cette courbe fermée.

Lorsque le point M est voisin de M_1, la fonction G devient infinie de l'ordre de $\log MM_1$; en outre, je supposerai que la fonction η_1 devient infinie en certains points A qui correspondront aux sommets de la deuxième espèce, et cela infinie de l'ordre de $M_1A^{\frac{2-2n}{n}}$; je suppose qu'il n'y ait pas de sommets de la troisième espèce et qu'en tous les autres points la fonction η_1 soit finie.

Alors l'intégrale

$$\int \frac{|G| \eta_1 \, d\omega_1}{2\pi}$$

est finie et même converge uniformément. Et, en effet, dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire si le point M coïncide avec un point A et si M_1 est très voisin de M, la fonction sous le signe $\int$ sera infinie de l'ordre de

$$MM_1^{\frac{2-2n}{n}} \log MM_1,$$

et l'intégrale ne deviendra pas infinie. Nous pouvons donc assigner à cette intégrale une limite β' et écrire

$$(7) \qquad |u| < \beta'(\text{max. de } |\psi|).$$

Cette inégalité est vraie pourvu que M ne pénètre pas à l'intérieur de la courbe qui entoure le point P_1.

Mais nous avons vu que u ne dépend pas de la position du point P_1 et ne change pas quand P_1 vient en P_2; nous aurons donc

$$(7 \textit{ bis}) \qquad |u| < \beta''(\text{max. de } |\psi|),$$

pourvu que M ne pénètre pas à l'intérieur d'une petite courbe entourant P_2.

Si, alors, β est le plus grand des deux nombres β' et β'', nous aurons

$$(8) \qquad |u| < \beta(\text{max. de } |\psi|),$$

quelle que soit la position du point M.

Ce résultat est vrai pourvu que la fonction η ne devienne jamais infinie que d'ordre $2 - \frac{2}{n} < 2$.

C'est une condition à laquelle satisfait la fonction θe^v quand il n'y a pas de sommet de troisième espèce.

VII. — L'équation $Du = \eta u - \varphi$.

Considérons l'équation

$$(1) \qquad Du = \lambda\eta u - \varphi - \lambda\psi.$$

Je supposerai la solution développable suivant les puissances de λ et je la mettrai sous la forme

$$u = (u_0 + c_0) + \lambda(u_1 + c_1) + \lambda^2(u_2 + c_2) + \ldots.$$

Les c_k sont des constantes et les u_k s'annulent au point P.

J'aurai la suite d'équations

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{D}u_0 = -\varphi, \\ \mathrm{D}u_1 = \eta(u_0 + c_0) - \psi, \\ \mathrm{D}u_2 = \eta(u_1 + c_1), \\ \mathrm{D}u_3 = \eta(u_2 + c_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Pour que la solution soit possible, nous devrons avoir

$$0 = \int \varphi\, d\omega = \int [\eta(u_0 + c_0) - \psi]\, d\omega = \int \eta(u_1 + c_1)\, d\omega = \ldots,$$

ce qui nous donne la suite d'équations

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} c_0 \int \eta\, d\omega = \quad \int \psi\, d\omega - \int \eta u_0\, d\omega, \\ c_1 \int \eta\, d\omega = -\int \eta u_1\, d\omega, \\ c_2 \int \eta\, d\omega = -\int \eta u_2\, d\omega, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Si ces conditions sont supposées remplies, la formule (6) du paragraphe précédent nous permettra de calculer $u_0, u_1, \ldots$.

Ainsi, pourvu que l'on ait

$$\int \varphi\, d\omega = 0,$$

nous pourrons calculer successivement, par les équations (2) et (3), d'abord u_0, puis $c_0, u_1, c_1, u_2, c_2, \ldots$.

Soient $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ les maxima de $|u_1|$, $|u_2|, \ldots$.

Si la fonction η est supposée toujours positive, on aura

$$|c_1| \int \eta\, d\omega < \int \eta\, |u_1|\, d\omega < \gamma_1 \int \eta\, d\omega,$$

d'où

$$|c_1| < \gamma_1,$$

et, de même,

$$|c_2| < \gamma_2, \quad |c_3| < \gamma_3, \quad \ldots.$$

L'inégalité (8) du paragraphe précédent nous donnera ensuite

$$\gamma_2 < \beta(\text{max. de } |u_1 + c_1|) < 2\beta\gamma_1$$

et, de même,

$$\gamma_3 < 2\beta\gamma_2, \quad \gamma_4 < 2\beta\gamma_3, \quad \ldots.$$

La série

$$\sum \lambda^k \gamma_k$$

converge donc, pourvu que

$$2\beta\lambda < 1;$$

et par conséquent, à cette condition, la série

$$(4) \qquad \sum \lambda^k (u_k + c_k)$$

converge uniformément.

Si u est la somme de cette série, u sera donc une fonction finie et continue des coordonnées de M.

Nous aurons, d'autre part (puisque la série converge uniformément),

$$\int \eta u \, d\omega = \int \eta (u_0 + c_0) \, d\omega + \lambda \int \eta (u_1 + c_1) \, d\omega + \ldots = 0.$$

Nous pourrons alors, par la formule (6) du paragraphe précédent, trouver une fonction v qui satisfasse à l'équation

$$Dv = \lambda \eta u - \varphi - \lambda \psi.$$

Je dis que cette fonction v est identique à u.

Posons, en effet,

$$u = (u_0 + c_0) + \lambda(u_1 + c_1) + \ldots + \lambda^n (u_n + c_n) + R_n,$$
$$v = (u_0 + c_0) + \lambda(u_1 + c_1) + \ldots + \lambda^{n+1} (u_{n+1} + c_{n+1}) + S_n;$$

il viendra

$$DS_n = \lambda\eta R_n.$$

La série (4) convergeant uniformément, nous aurons

$$|R_n| < K(2\lambda\beta)^n,$$

K étant une constante assignable; on conclut

$$|S_n| < K(2\lambda\beta)^{n+1}.$$

Quand n croît indéfiniment $(2\lambda\beta)^n$ et, par conséquent, $|R_n|$ et $|S_n|$ tendent vers zéro. La différence $u - v$ est égale à

$$u - v = R_n - S_n - \lambda^{n+1}(u_{n+1} + v_{n+1}) < |R_n| + |S_n| + 2\lambda^{n+1}\gamma_{n+1}.$$

Elle tend donc vers zéro quand n croît indéfiniment et, comme elle ne dépend pas de n, elle est nulle. Donc $u = v$. Donc u satisfait à l'équation

$$Du = \lambda\eta u - \varphi - \lambda\psi. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cette démonstration suppose que η, φ, ψ restent finis ou ne peuvent devenir infinis qu'en certains points (qui correspondraient aux sommets de la deuxième espèce) et *seulement infinis d'ordre* $2 - \frac{2}{n} < 2$.

Je terminerai par la remarque suivante :

Si, dans une certaine région de la surface de Klein, η, φ et ψ sont finies ainsi que toutes leurs dérivées, il en sera de même de u.

Soit, en effet, $Dv = 0$, équation qu'on peut intégrer par la formule (6) du paragraphe précédent.

Nous avons vu que, si dans une certaine région θ est finie ainsi que ses dérivées des K premiers ordres, v sera finie ainsi que ses dérivées des K + 1 premiers ordres.

Appliquons ce résultat à l'équation

$$Du = \lambda\eta u - \lambda\varphi - \lambda\psi.$$

Comme u est fini, le second membre est fini; donc u est fini ainsi que ses dérivées du premier ordre; donc le second membre est fini ainsi que ses dérivées du premier ordre; donc u est fini ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, et ainsi de suite... C. Q. F. D.

Supposons maintenant que l'on sache intégrer l'équation

$$(5) \qquad \mathrm{D}u = \eta u - \varphi,$$

et proposons-nous d'intégrer

$$(6) \qquad \mathrm{D}u = (\eta + \lambda\eta')u - \varphi.$$

Les deux fonctions η et η' sont supposées toujours positives.

Soit

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots;$$

l'équation (6) nous donnera la suite d'équations

$$(7) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{D}u_0 = \eta u_0 - \varphi, \\ \mathrm{D}u_1 = \eta u_1 + \eta' u_0, \\ \mathrm{D}u_2 = \eta u_2 + \eta' u_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Les équations (7) étant de la forme (5), nous saurons les intégrer et elles nous donneront successivement $u_0, u_1, u_2, \ldots$.

Les principes du paragraphe V nous donnent les inégalités suivantes :

$$|u_0| < \text{max. de} \left|\frac{\varphi}{\eta}\right|,$$

$$|u_1| < \text{max. de} \left|\frac{\eta' u_0}{\eta}\right|,$$

$$|u_2| < \text{max. de} \left|\frac{\eta' u_1}{\eta}\right|,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Soient alors γ_k le maximum de $|u_k|$ et β celui de $\left|\frac{\eta'}{\eta}\right|$, il viendra

$$\gamma_1 < \beta\gamma_0, \quad \gamma_2 < \beta\gamma_1, \quad \ldots.$$

Donc la série

$$(8) \qquad u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots$$

converge uniformément pourvu que

$$|\lambda\beta| < 1.$$

J'ai supposé plus haut que nous savions intégrer l'équation (5); je précise cette hypothèse en disant que nous savons l'intégrer quelle que soit la fonction φ, pourvu que le rapport $\left|\frac{\varphi}{\eta}\right|$ soit limité. J'ai supposé aussi plus haut que le rapport $\left|\frac{\eta'}{\eta}\right|$ a une limite supérieure, et c'est cette limite supérieure que j'ai appelée β.

Soit alors u la somme de la série (8); cette somme est finie; nous savons alors intégrer l'équation

$$Dv = \eta v + \lambda\eta' u - \varphi,$$

puisque le rapport

$$\left|\frac{\lambda\eta' u - \varphi}{\eta}\right|$$

est limité.

Je dis que l'intégrale v de cette équation est précisément égale à u.

Soient, en effet,

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \ldots + \lambda^n u_n + R_n,$$
$$v = u_0 + \lambda u_1 + \ldots + \lambda^{n+1} u_{n+1} + S_n,$$

on aura

$$DS_n = \eta S_n + \lambda\eta' R_n.$$

Or

$$|R_n| < K(\lambda\beta)^n, \qquad \text{K étant une constante.}$$

Les principes du paragraphe V donnent ensuite

$$|S_n| < \text{max. de}\left|\frac{\lambda\eta' R_n}{\eta}\right| < K(\lambda\beta)^{n+1}.$$

Donc la différence

$$u - v = R_n - S_n - \lambda^{n+1} u_{n+1}$$

tend vers zéro quand n tend vers l'∞; elle est donc nulle, et $u = v$.

C. Q. F. D.

On démontrerait ensuite comme plus haut que si, dans une certaine région, η, φ et η' sont finies ainsi que toutes leurs dérivées, il en est de même de u.

Considérons maintenant l'équation

$$\text{(9)} \qquad Du = \eta u - \varphi,$$

et posons

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p = 1,$$
$$\varphi = \varphi_1 + \lambda_1 \psi_1.$$

Les λ sont des constantes positives; la fonction φ_1 est assujettie à la condition unique

$$\int \varphi_1 \, d\omega = 0,$$

mais elle est d'ailleurs arbitraire.

Nous allons intégrer successivement les équations

$$\text{(10)} \qquad \begin{cases} Du = \lambda_1 \eta u - \varphi_1 - \lambda_1 \psi_1, \\ Du = \lambda_1 \eta u + \lambda_2 \eta u - \varphi, \\ Du = (\lambda_1 + \lambda_2) \eta u + \lambda_3 \eta u - \varphi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Du = (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{p-1}) \eta u + \lambda_p \eta u - \varphi. \end{cases}$$

La première équation (10) est de la forme (1); nous saurons donc l'intégrer, pourvu que

$$\lambda_1 < \frac{1}{2\beta},$$

β étant la quantité qui figure dans l'inégalité (8) du paragraphe précédent.

Les autres équations (10) sont de la forme (6); on les rend identiques à l'équation (6) en changeant

$$
\begin{array}{llll}
\lambda_1\eta \text{ en } \eta, & \eta \text{ en } \eta', & \lambda_2 \text{ en } \lambda, & \text{pour la 2}^{\text{e}} \text{ équation (10)},\\
(\lambda_1+\lambda_2)\eta \text{ en } \eta, & \eta \text{ en } \eta', & \lambda_3 \text{ en } \lambda, & \text{pour la 3}^{\text{e}} \text{ équation (10)},\\
\dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots\\
(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{p-1})\eta \text{ en } \eta; & \eta \text{ en } \eta', & \lambda_p \text{ en } \lambda, & \text{pour la } p^{\text{ième}} \text{ équation (10)}.
\end{array}
$$

Nous saurons donc intégrer *successivement* ces équations (10), pourvu que

$$\lambda_2 < \frac{1}{\text{max de } \frac{\eta}{\lambda_1\eta}}, \qquad \lambda_3 < \frac{1}{\text{max de } \frac{\eta}{(\lambda_1+\lambda_2)\eta}}, \qquad \ldots,$$

ou

$$\lambda_2 < \lambda_1, \qquad \lambda_3 < \lambda_1+\lambda_2, \qquad \ldots, \qquad \lambda_p < \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_{p-1}.$$

Or, nous pouvons toujours satisfaire à ces conditions et aux relations

$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_p = 1, \qquad \lambda_1 < \frac{1}{2\beta},$$

en choisissant l'entier p assez grand.

Donc nous saurons intégrer l'équation (9), *pourvu que :*

1° *Le rapport* $\left|\frac{\varphi}{\eta}\right|$ *soit limité ;*

2° *Que* η *soit toujours positif et ne s'annule pas ;*

3° *Que* η *soit partout fini ou ne puisse devenir infini qu'en un nombre limité de points* (correspondant aux sommets de deuxième espèce) *et seulement d'ordre* $2-\frac{2}{n}<2$.

L'intégrale u est partout finie et continue.

Si, dans une certaine région, les fonctions données η et φ sont finies ainsi que toutes leurs dérivées, il en sera de même de u.

VIII. — Extension aux sommets de troisième espèce.

Les résultats précédents s'appliquent, pourvu que la fonction η ne devienne infinie qu'en un nombre limité de points et seulement d'ordre $2 - \frac{2}{n} < 2$.

C'est la condition à laquelle satisfait la fonction θe^u, s'il n'y a pas de sommets de troisième espèce. Mais aux sommets de troisième espèce, cette fonction θe^u devient infinie de la même manière que

$$\frac{1}{x^2 \log^2 x}$$

devient infini pour $x = 0$.

Nous sommes donc conduits à examiner ce qui se passe quand, en certains points (sommets de troisième espèce), la fonction η devient infinie et cela de telle sorte que le produit

$$\eta \overline{MK}^2 \log^2 \overline{MK}$$

tende vers une limite finie et déterminée quand le point M se rapproche indéfiniment du sommet de troisième espèce K.

Dans ce cas, l'intégrale

$$\int \frac{|G| \eta_1 d\omega_1}{2\pi},$$

considérée à la fin du paragraphe VI, n'est pas finie quand le point M vient en K; on ne peut donc pas lui assigner une limite supérieure β'; on ne peut donc plus écrire l'inégalité (8) du paragraphe VI.

Si alors nous reprenons les équations (1), (2) et (3) du paragraphe VII, nous pouvons encore former les fonctions u_0, u_1, u_2, etc.; mais nous ne pouvons plus écrire les inégalités

$$\gamma_3 < 2\beta\gamma_2, \qquad \gamma_4 < 2\beta\gamma_3, \qquad \ldots,$$

ni, par conséquent, affirmer que la série

$$S = \sum \lambda^k (u_k + v_k)$$

converge.

D'ailleurs, il est aisé de voir que

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots$$

deviennent infinies au sommet de troisième espèce K et infinies respectivement du même ordre de grandeur que

$$\log\log \mathrm{MK}, \quad \log^2\log \mathrm{MK}, \quad \log^3\log \mathrm{MK}, \quad \ldots.$$

Néanmoins, nous verrons plus tard que la série S converge en tous les points de la surface de Klein, sauf aux sommets de troisième espèce, et que la somme de cette série tend vers une limite finie et déterminée quand le point M se rapproche de l'un de ces sommets.

On pourrait dire, dans un langage abrégé mais peu correct, qu'aux sommets de troisième espèce la somme de la série est finie, bien que chacun des termes soit infini.

Un exemple simple fera mieux comprendre ma pensée.

Soit λ un nombre positif, et considérons la fonction x^λ; nous pouvons la développer suivant les puissances de λ et écrire

$$x^\lambda = 1 + \frac{\lambda \log x}{1} + \frac{\lambda^2 \log^2 x}{1.2} + \ldots + \frac{\lambda^n \log^n x}{1.2\ldots n}.$$

Chacun des termes devient infini pour $x = 0$, mais la somme de la série x^λ reste finie.

On pourra donc encore intégrer l'équation (1) du paragraphe VII.

Mais, pour établir toutes ces propositions, nous rencontrerons bien des difficultés. Ces mêmes difficultés, non encore surmontées, se retrouvent dans la méthode de M. Picard et dans toutes les méthodes d'approximations successives.

Pour en triompher, nous allons procéder par étapes.

Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'un seul sommet de troisième espèce, que nous appellerons K, et proposons-nous d'intégrer l'équation

$$\mathrm{D}u = \zeta\varphi. \tag{1}$$

Dans cette équation, ζ et φ sont deux fonctions données et la dernière est partout finie. Quant à ζ elle est partout positive et elle est finie, sauf au point K où elle est infinie comme

$$\frac{1}{\mathrm{MK}^2 \log^3 \mathrm{MK}},$$

aux sommets de deuxième espèce, s'il y en a, où elle devient infinie comme η et au point P_1 où elle pourra devenir infinie comme $\log \mathrm{MP}_1$.

La solution de l'équation (1) nous sera donnée par la formule

$$u = \int \zeta_1 \varphi_1 G(M, K; M_1, P_1)\, d\omega_1,$$

analogue à la formule (6) du paragraphe VI.

Cela s'établirait par des raisonnements tout à fait analogues à ceux du paragraphe VI, mais qu'il est inutile de répéter ici.

Remarquons toutefois que la condition

$$\int \zeta \varphi\, d\omega = 0$$

n'est plus ici nécessaire puisque la fonction u peut devenir infinie pour $M = P_1$.

Cela posé, on a évidemment

$$|u| < \gamma \int \zeta_1 \,|G(M, K; M_1, P_1)|\, d\omega_1.$$

Étudions l'intégrale $\int \zeta_1 \,|G(M, K; M_1, P_1)|\, d\omega_1$.

C'est une fonction des coordonnées du point M qui ne peut présenter de singularité que quand le point M vient en K ou en P_1.

Qu'arrive-t-il d'abord quand M est voisin de K? Partageons la surface de Klein en deux parties par une petite courbe fermée entourant le point K.

Nous aurons d'abord la région S extérieure à la petite courbe fermée; la portion correspondante de l'intégrale sera très petite de l'ordre de MK.

Considérons maintenant la région S' intérieure à cette petite courbe;

si les deux points M et M_1 sont dans cette région, G sera de même ordre de grandeur que

$$\log \frac{MM_1 . KP_1}{MP_1 . KM_1}$$

ou que

$$\log \frac{MM_1}{KM_1},$$

c'est-à-dire qu'on pourra trouver une quantité β telle que

$$\zeta_1 < \beta' \frac{1}{KM_1^2 |\log^3 KM_1|},$$

$$d\omega_1 < \beta'' KM_1 d(KM_1) d\varepsilon,$$

ε étant l'angle de KM_1 et de KM.

Si donc nous posons, pour abréger,

$$KM_1 = \rho, \qquad KM = r,$$

$$MM_1 = \delta = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\varepsilon}, \qquad b = \beta\beta'\beta''.$$

notre intégrale sera plus petite que

$$b \int \left| \log \frac{\delta}{\rho} \right| \frac{d\rho\, d\varepsilon}{\rho |\log^3 \rho|}.$$

Nous supposerons que notre petite courbe fermée a pour équation

$$\rho = R,$$

c'est-à-dire qu'elle est l'intersection de la surface de Klein avec une sphère de rayon R ayant son centre en K.

L'intégrale doit alors être prise entre les limites o et 2π pour ε, o et R pour ρ; si l'on considère ρ et ε comme les coordonnées polaires d'un point dans un plan, point que nous appellerons encore M_1, l'intégrale à l'intérieur d'un cercle de rayon 1, et dont le centre pourra être encore désigné par K.

De même nous regarderons r et o comme les coordonnées polaires d'un autre point que nous appellerons encore M; et la distance MM_1 de ces deux points, dans ce plan, sera encore égale à δ.

Nous partagerons alors la surface du cercle de rayon 1 en deux régions, l'une telle que

$$\delta > \rho, \quad MM_1 > KM_1, \quad \left|\log \frac{MM_1}{KM_1}\right| = \log \frac{MM_1}{KM_1},$$

l'autre telle que

$$\delta < \rho, \quad MM_1 < KM_1, \quad \left|\log \frac{MM_1}{KM_1}\right| = \log \frac{KM_1}{MM_1}.$$

Ces deux régions seront séparées l'une de l'autre par la droite π, perpendiculaire au milieu de MK.

L'intégrale, étendue à la première région, est plus grande que l'intégrale étendue à la seconde région.

En premier lieu, le champ d'intégration est plus grand; en second lieu, si nous envisageons deux points M, symétriques l'un de l'autre, par rapport à π, et situés, l'un dans la première région, l'autre dans la seconde, nous remarquerons que la valeur de

$$\frac{1}{\rho \log^2 \rho}$$

est plus grande pour le premier de ces points que pour le second, tandis que la valeur de

$$\left|\log \frac{\delta}{\rho}\right|$$

est la même pour les deux.

Notre intégrale est donc plus petite que

$$2h \int \left|\log \frac{\delta}{\rho}\right| \frac{d\xi\, d\eta}{\rho \,|\log^2 \rho\,|},$$

l'intégration étant étendue à la première région seulement. Mais dans cette région on a

$$\left|\log \frac{\delta}{\rho}\right| = \log \frac{\delta}{\rho} = \log \frac{MM_1}{KM_1} < \log \frac{KM_1 + MK}{KM_1}$$
$$= \log\left(1 + \frac{MK}{KM_1}\right) = \log\left(1 + \frac{r}{\rho}\right).$$

Donc notre intégrale est plus petite que

$$2b\int \log\left(1+\frac{r}{\rho}\right)\frac{d\rho\, d\iota}{\rho\,|\log^2\rho|},$$

ou *a fortiori* plus petite que la même intégrale étendue au cercle de rayon R tout entier, c'est-à-dire que

$$4\pi b\int_0^R \log\left(1+\frac{r}{\rho}\right)\frac{d\rho}{\rho\,|\log^2\rho|}$$

Décomposons l'intégrale de la façon suivante

$$\int_0 = \int_0^r + \int_r^{R_0} + \int_{R_0}^R.$$

La lettre R_0 désigne une quantité que nous déterminerons plus complètement plus tard, mais qui doit être $> r$.

Considérons d'abord la troisième intégrale prise de R_0 à R: entre ces limites on a

$$\log\left(1+\frac{r}{\rho}\right) < \frac{r}{\rho}.$$

L'intégrale est donc plus petite que

$$r\int \frac{d\rho}{\rho^2\,|\log^2\rho|} < r\int \frac{d\rho}{\rho^2} < \frac{r}{R_0}.$$

Envisageons maintenant la seconde intégrale prise de r à R_0: entre ces limites on a

$$r<\rho,\quad \log\left(1+\frac{r}{\rho}\right) < \log 2,$$

et l'intégrale est plus petite que

$$\log 2\int\frac{d\rho}{\rho\,|\log^2\rho|} = \frac{\log 2}{2}\left(\frac{1}{\log^2 R_0}-\frac{1}{\log^2 r}\right) < \frac{\log 2}{2\log^2 R_0}.$$

Venons enfin à la troisième intégrale prise de o à r; entre ces limites on a

$$\rho < r; \quad \log\left(1+\frac{r}{\rho}\right) = \log\left(1+\frac{\rho}{r}\right) + \log\frac{r}{\rho} < \log 2 + \log\frac{r}{\rho}.$$

L'intégrale est donc plus petite que

$$\log 2 \int \frac{d\rho}{\rho\,|\log^3\rho\,|} + \int \log\frac{r}{\rho}\,\frac{d\rho}{\rho\,|\log^3\rho\,|} = \frac{\log 2}{\log^2 r} + \frac{1}{2\,|\log r\,|}.$$

Notre intégrale est donc plus petite que

$$4\pi b\,\frac{r}{R_0} + 2\pi b \log 2\,\frac{1}{\log^2 R_0} + \frac{4\pi b \log 2}{\log^2 r} + \frac{2\pi b}{|\log r\,|},$$

et cela quel que soit R_0; en prenant, par exemple, $R_0 = \sqrt{r}$, on voit que notre intégrale est de l'ordre de grandeur de

$$\frac{1}{|\log r\,|} = \frac{1}{|\log \mathrm{MK}\,|}.$$

Supposons maintenant M très voisin de P_1.

Nous pouvons trouver une quantité positive H telle que l'on ait constamment

$$|G| < |\log \mathrm{MM}_1| + |\log \mathrm{MP}_1| + \log|\mathrm{KM}_1| + \mathrm{H},$$

et, en effet, si l'une des distances MM_1, MP_1, KM_1 est très petite (par exemple MM_1), G est égal à $\pm \log \mathrm{MM}_1 +$ une quantité finie.

Si deux de ces distances sont très petites, par exemple MP_1 et KM_1, nous pouvons ramener au cas précédent en introduisant un point auxiliaire K' et écrivant

$$G(\mathrm{M}, \mathrm{K}; \mathrm{M}_1, \mathrm{P}_1) = G(\mathrm{M}, \mathrm{K}'; \mathrm{M}_1, \mathrm{P}_1) + G(\mathrm{K}', \mathrm{K}; \mathrm{M}_1, \mathrm{P}_1).$$

Pour chacune des fonctions G qui entrent dans le second membre, une seule des distances est très petite.

Or les intégrales

$$\int \mathrm{H}\zeta_1\,d\omega_1 \quad \int |\log \mathrm{MM}_1|\,\zeta_1\,d\omega_1, \quad \int \log|\mathrm{KM}_1|\,\zeta_1\,d\omega_1$$

sont finies; l'intégrale

$$\int |\log \mathrm{MP}_1| \zeta_1 d\omega_1 = |\log \mathrm{MP}_1| \int \zeta_1 d\omega_1$$

est de l'ordre de $|\log \mathrm{MP}_1|$.

D'où cette conséquence : l'intégrale

$$\int |G| \zeta_1 d\omega_1$$

est finie, sauf dans le voisinage du point K où elle est de l'ordre de $\frac{1}{|\log \mathrm{MK}|}$ et dans le voisinage du point P_1 où elle est de l'ordre de $|\log \mathrm{MP}_1|$.

Il existe donc une quantité b' telle que

$$\int |G| \zeta_1 d\omega_1 < b' \left|\frac{\log \mathrm{MP}_1}{\log \mathrm{MK}}\right|,$$

et, par conséquent, telle que

$$(3) \qquad |u| < \alpha\gamma b' \left|\frac{\log \mathrm{MP}_1}{\log \mathrm{MK}}\right|$$

Si nous posons maintenant

$$\eta_1 u = \zeta\varphi'$$

et si nous observons qu'on peut trouver une quantité ε telle que

$$\frac{\eta_1}{\zeta} < \varepsilon \left|\frac{\log \mathrm{MK}}{\log \mathrm{MP}_1}\right|,$$

il viendra

$$(4) \qquad |\varphi'| < \alpha\gamma \qquad (\alpha = b'\varepsilon).$$

Soit donc γ' le maximum de $|\varphi'|$, nous pourrons trouver une quantité α ne dépendant que des points K et P_1 et telle que l'on ait toujours

$$(5) \qquad \gamma' < \alpha\gamma.$$

Considérons maintenant l'équation

$$(6) \qquad \mathrm{D}u = \lambda\eta u + \varphi$$

et proposons-nous de trouver une solution u de cette équation qui s'annule au point K et puisse devenir au point P_1 infinie comme $\log \mathrm{MP}_1$.

Proposons-nous de développer cette solution suivant les puissances de λ et soit

$$(7) \qquad u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots.$$

Nous aurons, en introduisant une série de fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$, la série d'équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \zeta\varphi_0 = \varphi; & \mathrm{D}u_0 = \zeta\varphi_0; \\ \zeta\varphi_1 = \eta u_0; & \mathrm{D}u_1 = \zeta\varphi_1; \\ \zeta\varphi_2 = \eta u_1; & \mathrm{D}u_2 = \zeta\varphi_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

que l'on traitera comme l'équation (1).

Si alors $|\varphi_0|$ est limité et que γ_0 soit son maximum, si γ_k est le maximum de $|\varphi_k|$ on aura, en vertu des inégalités (5) et (3),

$$\gamma_k < \alpha\gamma_{k-1} < \alpha^k\gamma_0; \qquad |u_k| < \beta\delta\gamma_k \mathrm{MK}\,|\log \mathrm{MP}_1|.$$

La série (7) est donc convergente pourvu que

$$\lambda\alpha < 1$$

et elle nous fournit la solution de l'équation (6).

Si l'on avait eu

$$\int \zeta\varphi_0\, d\omega = \int \zeta\varphi_1\, d\omega = \ldots = \int \zeta\varphi_k\, d\omega = \ldots = 0,$$

les fonctions $u_0, u_1, \ldots$ auraient été indépendantes de la position du point P_1 ainsi que je l'ai expliqué dans le § VI; nous aurions donc pu affirmer que ces fonctions, et par conséquent la fonction u, demeurent finies, même au point P_1. C'est le raisonnement de la fin du § VI.

Prenons maintenant l'équation

$$(8) \qquad Du = \lambda\eta u + \varphi + \mu\psi;$$

φ et ψ sont deux fonctions données; μ est une constante indéterminée que je supposerai développée suivant les puissances de λ,

$$\mu = \mu_0 + \lambda\mu_1 + \lambda^2\mu_2 + \ldots,$$

et il s'agit de déterminer u et μ de façon que u soit partout fini et s'annule en K.

Je suppose que $\int\psi\,d\omega$ ne soit pas nul.

Nous avons la suite d'équations

$$\begin{array}{lll}
\int\varphi\,d\omega + \mu_0\int\psi\,d\omega = 0; & \zeta\varphi_0 = \varphi + \mu_0\psi; & Du_0 = \zeta\varphi_0; \\
\int\eta u_0\,d\omega + \mu_1\int\psi\,d\omega = 0; & \zeta\varphi_1 = \eta u_0 + \mu_1\psi; & Du_1 = \zeta\varphi_1; \\
\int\eta u_1\,d\omega + \mu_2\int\psi\,d\omega = 0; & \zeta\varphi_2 = \eta u_1 + \mu_2\psi; & Du_2 = \zeta\varphi_2; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

que l'on traitera comme l'équation (1); les propriétés de l'équation (1) subsisteront, mais il y a plus; à cause de la relation

$$\int\zeta\varphi_k\,d\omega = 0,$$

la fonction u_k ne dépendra pas de la position du point P_1, de telle façon qu'en choisissant convenablement la constante b', l'inégalité (2) pourra être remplacée par la suivante

$$|u_k| < \frac{b'\gamma_k}{|\log MK|},$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\left|\int\eta u_k\,d\omega\right| < \varepsilon'\gamma_k,$$

ε' étant une nouvelle constante, et enfin

$$|\mu_{k+1}| < \varepsilon'' \gamma_k,$$

en désignant par $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$ la valeur de $\left|\int \psi \, d\omega\right|$.

Soit α' une quantité plus grande que le maximum de $\left|\frac{\psi}{\zeta}\right|$, nous avons

$$\zeta \varphi_k = \eta u_{k-1} + \mu_k \psi,$$

et nous pouvons trouver une quantité α ne dépendant que du point K. telle que

$$\frac{\eta}{\zeta} = \alpha |\log MK|.$$

Il viendra alors

$$\gamma_k < (\alpha + \alpha' \varepsilon'') \gamma_{k-1}.$$

La série (7) converge donc pourvu que

$$\lambda(\alpha + \alpha' \varepsilon'') < 1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Énonçons le résultat obtenu.

On peut satisfaire à l'équation (8) *et cela de telle façon que* u *s'annule en* K *et soit toujours fini, pourvu que les rapports*

$$\frac{\varphi}{\zeta}, \frac{\psi}{\zeta}$$

soient limités.

Soit maintenant v une fonction définie de la façon suivante :

Traçons autour de K une petite courbe fermée, et soit A la valeur de Z qui correspond au sommet de deuxième espèce K.

A l'intérieur de la petite courbe, v sera égal à $\log \left|\frac{1}{Z - A}\right|$.

A l'extérieur v ne pourra s'annuler ni devenir infini.

Enfin partout, sauf au point K, v est fini ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres.

Soit h un exposant constant quelconque.

A l'intérieur de la petite courbe, on aura

$$D v^h = \Delta v^h \frac{d\Omega}{d\omega}; \qquad \Delta v^h = \frac{h(h-1)}{|Z - A|^2} \log^{h-2} \left|\frac{1}{Z - A}\right|.$$

Faisons d'abord une hypothèse particulière sur η et supposons qu'à l'intérieur de la petite courbe η se réduise à

$$\frac{1}{|Z-A|^2 \log^2 \left|\frac{1}{Z-A}\right|}\frac{d\Omega}{d\omega}.$$

J'appellerai η_0 cette fonction η particulière satisfaisant à cette condition.

Il est clair alors qu'on aura, à l'intérieur de la petite courbe,

$$Dv^h = \lambda\eta_0 v^h$$

si l'on suppose

$$\lambda = h(h-1).$$

Je puis donc poser

$$Dv^h = \lambda\eta_0 v^h + \psi,$$

ψ étant nul à l'intérieur de la petite courbe et restant fini à l'extérieur de cette courbe, sauf aux sommets de troisième espèce, où le rapport $\frac{\psi}{\eta_0}$ et, par conséquent, le rapport $\left|\frac{\psi}{\zeta}\right|$ restent finis.

Supposons donc que l'on ait l'équation

$$(8\ bis)\qquad Du = \lambda'\eta_0 u + \varphi + \mu\psi,$$

où $\left|\frac{\varphi}{\zeta}\right|$ est limité et où ψ est la fonction que nous venons de définir.

Dans cette équation, μ est une constante indéterminée de sorte que l'équation est de même forme que l'équation (8). Mais nous devons faire plusieurs remarques :

1° L'intégrale $\int\psi\,d\omega$ ne peut être nulle; on a, en effet,

$$\int\psi\,d\omega = -\lambda\int\eta_0 v^h\,d\omega,$$

et η_0 et v sont essentiellement positifs.

2° La fonction ψ dépend de λ; elle est même développable suivant les puissances de λ; en effet, on trouve aisément

$$Dv^h = hv^{h-1}Dv + h(h-1)v^{h-2}E(v,v).$$

On voit que h est développable suivant les puissances de λ, et qu'il en est de même de v^h *à l'extérieur de la petite courbe*, puisque dans cette région v ne devient ni nul ni infini; il en est donc aussi de même de Dv^h.

A l'intérieur de la petite courbe ψ est nul, et à l'extérieur

$$\psi = Dv^h - \lambda\eta_0 v^h$$

sera développable suivant les puissances de λ.

On pourra alors résoudre l'équation (8 *bis*) de telle façon que u s'annule au point K, pourvu que

$$\lambda'(\alpha + \alpha'\varepsilon'') < 1.$$

Dans cette inégalité, α ne dépend que de la position du point K, elle ne dépend donc pas de λ; il en est de même de la quantité ε' définie plus haut; mais il n'en est pas de même de α' et de $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$.

En effet, α' doit être plus grand que le maximum de $\left|\frac{\psi}{\zeta}\right|$ et $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$ est égal à $\left|\int \psi\, d\omega\right|$.

Or nous avons

$$\psi = hv^{h-1}Dv + h(h-1)v^{h-2}E(v, v) - \lambda\eta_0 v^h.$$

A l'intérieur de la petite courbe ψ est nul; à l'extérieur $\frac{\eta_0}{\zeta}$ est limité.

Nous avons

$$\lambda = h(h-1);$$

cette équation, considérée comme déterminant h, admet deux racines, l'une négative, l'autre positive (puisque nous supposons λ positif). Nous prendrons la racine négative; cette racine est plus petite que λ en valeur absolue.

Si alors v_0 est la plus petite valeur à l'extérieur de la petite courbe, on pourra trouver une constante A telle que

$$\left|\frac{\psi}{\zeta}\right| < A\lambda v_0^h.$$

Si maintenant nous envisageons

$$\int \psi \, d\omega = -\lambda \int \eta_0 v^h \, d\omega,$$

nous voyons que cette expression est plus grande en valeur absolue que

$$\lambda \int \eta_0 v^h \, d\omega,$$

l'intégrale étant étendue, non plus à la surface de Klein tout entière, mais à l'extérieur de la petite courbe, et, en effet, les éléments de l'intégrale supprimés sont essentiellement positifs.

Si v_1 est la plus grande valeur de v à l'extérieur de la petite courbe, on aura, puisque h est négatif,

$$v^h > v_1^h,$$

et, par conséquent,

$$\lambda \int \eta_0 v^h \, d\omega > \lambda v_1^h \int \eta_0 \, d\omega$$

ou

$$\left| \int \psi \, d\omega \right| > B \lambda v_1^h,$$

B étant une constante.

La condition à laquelle doit satisfaire $\frac{\alpha' \varepsilon''}{\varepsilon'}$ est

$$\frac{\alpha' \varepsilon''}{\varepsilon'} > \frac{A}{B} \left(\frac{v_0}{v_1} \right)^h.$$

Si, en effet, cette condition est remplie, on aura certainement

$$\alpha' > \text{max. de} \left| \frac{\psi}{\zeta} \right|.$$

Nous supposerons

$$\lambda < \lambda_0,$$

λ_0 étant une constante et

$$\frac{\alpha' \varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{A}{B} \left(\frac{v_0}{v_1} \right)^{h_0},$$

où h_0 est la valeur de h qui correspond à λ_0 de telle sorte que

$$\lambda_0 = h_0(h_0 - 1).$$

Alors la condition imposée à $\frac{\alpha'\varepsilon''}{\varepsilon'}$ sera bien remplie, *et cette quantité est devenue indépendante de* λ.

Alors on pourra satisfaire à l'équation (8 *bis*), pourvu que

$$\lambda'(\alpha + \alpha'\varepsilon'') < 1.$$

Supposons donc que nous ayons à la fois

$$\lambda < \lambda_0, \qquad \lambda(\alpha + \alpha'\varepsilon'') < 1, \qquad \lambda = \lambda',$$

et soit u' la solution de l'équation (8 *bis*); on aura, puisque nous supposons $\lambda = \lambda'$,

$$\mathrm{D}u' = \lambda\eta_0 u' + \varphi + \mu\psi,$$

et la valeur de μ ne sera pas infinie.

On a, d'ailleurs,

$$\mathrm{D}v^h = \lambda\eta_0 v^h + \psi.$$

Si donc nous posons

$$u = u' - \mu v^h,$$

il viendra

$$(9) \qquad \mathrm{D}u = \lambda\eta_0 u + \varphi.$$

D'ailleurs u ne devient pas infini au point K, mais, au contraire, s'y annule; car u' et v^h (l'exposant h étant négatif) s'y annulent l'un et l'autre.

On peut donc résoudre l'équation (9), pourvu que $\left|\frac{\varphi}{\eta}\right|$ soit limité.

Nous avons, il est vrai, fait une hypothèse toute particulière sur la fonction η, supposée égale à η_0; posons donc l'équation plus générale

$$(10) \qquad \mathrm{D}u = \eta u + \varphi,$$

je dis qu'on saura également l'intégrer.

Posons, en effet,

$$\eta = \lambda\eta_0 + \eta',$$

en attribuant à λ une valeur assez petite pour qu'on ait

$$\lambda < \lambda_0, \qquad \lambda\alpha < 1,$$

et que, par conséquent, on puisse intégrer l'équation (9). Envisageons l'équation

$$(11)\qquad Du = (\lambda\eta_0 + \mu\eta')u + \varphi.$$

On peut assimiler cette équation à l'équation (6) du paragraphe précédent, l'équation (9) étant elle-même assimilée à l'équation (5) du même paragraphe.

Le rapport $\frac{\eta'}{\lambda\eta_0}$ est, d'ailleurs, limité.

On voit donc, par le raisonnement du paragraphe précédent, que l'on saura intégrer (11) pourvu que μ soit assez petit; et ensuite, en répétant le raisonnement appliqué à l'équation (9) à la fin du même paragraphe, que l'on sait encore intégrer (11), quelle que soit la valeur attribuée à μ, et en particulier pour $\mu = 1$.

On sait donc intégrer l'équation (10).

Le théorème une fois établi pour le cas où il n'y a qu'un sommet de troisième espèce, la méthode de M. Picard permettrait facilement de le généraliser quel que soit le nombre de ces sommets.

Mais je préfère arriver directement au résultat; je suivrai une voie peu différente de celle qui m'a servi dans le cas particulier traité d'abord et que je pourrais suivre encore, si je ne craignais de trop me répéter.

Je supposerai deux sommets de troisième espèce K et K_1.

La fonction η sera partout positive; elle ne deviendra infinie qu'aux sommets de deuxième et de troisième espèce; aux sommets de deuxième espèce, elle sera infinie de l'ordre $2 - \frac{2}{n}$; en K elle sera infinie de l'ordre

$$\frac{1}{\mathrm{MK}^2 \log^2 \mathrm{MK}},$$

et, de plus, développable suivant les puissances de MK et de $\left|\frac{1}{\log \mathrm{MK}}\right|$ et de même en K_1.

La fonction ζ sera partout positive et le rapport

$$\frac{\zeta\,|\log \mathrm{MK} \log \mathrm{MK}_1|}{\eta}$$

sera limité, de telle façon qu'au point K, par exemple, ζ sera de l'ordre de

$$\frac{1}{\text{MK}^2 \log^2 \text{MK}}.$$

On verrait alors, comme plus haut, qu'on peut trouver une constante b' telle que

$$\int \zeta_1 \, d\omega_1 \, |G(M, K;\; M_1, P_1)| < b' \left| \frac{\log \text{MP}_1}{\log \text{MK}} \right|,$$

$$\int \zeta_1 \, d\omega_1 \, |G(M, K_1; M_1, P_1)| < b' \left| \frac{\log \text{MP}_1}{\log \text{MK}_1} \right|.$$

Soit ensuite φ une fonction satisfaisant aux conditions

$$(12) \qquad \int \zeta \varphi \, d\omega = 0; \quad \int \varphi_1 \zeta_1 G(K_1, K; M_1, P_1) \, d\omega_1 = 0 \qquad |\varphi| < \gamma,$$

et soit

$$u = \int \varphi_1 \zeta_1 \, G(M, K; M_1, P_1) \, d\omega_1.$$

A cause des relations (12), on aura également

$$\begin{aligned} u &= \int \varphi_1 \zeta_1 G(M, K_1; M_1, P_1) d\omega_1 \\ &= \int \varphi_1 \zeta_1 G(M, K;\; M_1, P_2) d\omega_1 = \int \varphi_1 \zeta_1 G(M, K_1; M_1, P_1) \, d\omega_1, \end{aligned}$$

P_2 étant un autre point arbitraire de la surface de Klein. On pourra donc trouver une constante b' telle que l'on ait à la fois

$$|u| < b'\gamma \left| \frac{\log \text{MP}_1}{\log \text{MK}} \right|; \qquad |u| < b'\gamma \left| \frac{\log \text{MP}_1}{\log \text{MK}_1} \right|;$$

$$|u| < b'\gamma \left| \frac{\log \text{MP}_2}{\log \text{MK}} \right|; \qquad |u| < b'\gamma \left| \frac{\log \text{MP}_2}{\log \text{MK}_1} \right|.$$

En d'autres termes, u est fini même dans le voisinage de P_1 et de P_2 et très petit de l'ordre de $\frac{1}{|\log \text{MK}|}$, $\frac{1}{|\log \text{MK}_1|}$, dans le voisinage de K et K_1.

On aura donc, en choisissant convenablement la constante b'',

$$|u| < \frac{b''\gamma}{|\log MK . \log MK_1|}.$$

Posons

$$\eta u = \zeta \varphi';$$

soit γ' le maximum de $|\varphi'|$; et $\frac{\alpha}{b''}$ celui de $\frac{\eta}{\zeta |\log MK \log MK_1|}$. Nous aurons

(13) $$\gamma' < \alpha\gamma$$

inégalité analogue à (5).

Cela posé, envisageons l'équation

(14) $$Du = \lambda\eta u + \varphi + \mu\psi + \mu'\psi',$$

où φ, ψ, ψ' sont des fonctions données; μ et μ' des constantes indéterminées.

Peut-on l'intégrer de façon que u soit toujours fini?

Nous supposerons :

1° Que les rapports $\frac{\varphi}{\zeta}$, $\frac{\psi}{\zeta}$, $\frac{\psi'}{\zeta}$ sont limités;

2° Que les intégrales

$$\int \psi' d\omega, \quad \int \psi_1 G(K, K_1, M_1, P_1)\, d\omega,$$

sont différentes de zéro;

J'écrirai, pour abréger, g au lieu de $G(K, K_1, M_1, P_1)$;

3° Que

$$\int \psi\, d\omega = \int \varphi\, d\omega = 0.$$

Nous supposerons u, μ et μ' développés suivant les puissances de λ.

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \ldots, \qquad \mu = \mu_0 + \lambda\mu_1 + \ldots, \qquad \mu' = \mu'_0 + \lambda\mu'_1 + \ldots.$$

Nous aurons la suite d'équations

$$\mu'_0 = 0, \qquad \int \varphi_1 g\, d\omega_1 + \mu_0 \int \psi_1 g\, d\omega_1 = 0,$$

$$\varphi + \mu_0 \psi = \zeta \varphi_0, \qquad \mathrm{D}u_0 = \zeta \varphi_0,$$

$$\int \eta u_0\, d\omega + \mu'_1 \int \psi'\, d\omega = 0, \qquad \eta u_0 + \mu'_1 \psi' = \varphi',$$

$$\int \varphi'_1 g\, d\omega_1 + \mu_1 \int \psi_1 g\, d\omega_1 = 0,$$

$$\eta u_0 + \mu_1 \psi + \mu'_1 \psi' = \zeta \varphi'_0, \qquad \mathrm{D}u_1 = \zeta \varphi'_0,$$

$$\int \eta u_1\, d\omega + \mu'_2 \int \psi'\, d\omega = 0, \qquad \eta u_1 + \mu'_2 \psi' = \varphi'',$$

$$\int \varphi''_1 g\, d\omega_1 + \mu_2 \int \psi_1 g\, d\omega_1 = 0,$$

$$\eta u_1 + \mu_2 \psi + \mu'_2 \psi' = \zeta \varphi''_0, \qquad \mathrm{D}u_2 = \zeta \varphi''_0.$$

. . . .

Bien entendu, $\psi_1, \varphi'_1, \varphi''_1, \ldots$ représentent les valeurs que prennent les fonctions $\psi, \varphi', \varphi'', \ldots$ quand le point M vient en M_1.

On voit que $\varphi_0, \varphi'_0, \varphi''_0, \ldots$ n'ont aucun rapport avec $\varphi_1, \varphi'_1, \varphi''_1, \ldots$ ou avec $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$

Soient $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$, les maxima de $\varphi_0, \varphi'_0, \varphi''_0, \ldots$.

J'aurai d'abord

$$|u_0| < \frac{b''\gamma_0}{|\log \mathrm{MK}.\log \mathrm{MK}_1|},$$

d'où je conclus que je puis trouver une constante c telle que

$$\left|\int \eta u_0\, d\omega\right| < c\gamma_0,$$

et comme $\int \psi'\, d\omega$ est une constante différente de zéro, je puis trouver une constante c' telle que

$$\mu'_1 < c'\gamma_0.$$

Si alors β et β' sont les maxima de

$$\frac{\eta b''}{\zeta |\log \mathrm{MK} \log \mathrm{MK}_1|} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\psi'}{\zeta}\right|,$$

on aura

$$\left|\frac{\varphi'}{\zeta}\right| < (\beta + c'\beta')\gamma_0.$$

Or l'intégrale $h = \int \zeta_1 g\,d\omega_1$ est une constante finie, et l'intégrale $h' = \int \psi_1 g\,d\omega_1$ est une constante différente de zéro. On a donc

$$\left|\int \varphi'_1 g\,d\omega_1\right| < (\beta + c'\beta')h\gamma_0$$

et

$$|\mu_1| < (\beta + c'\beta')\frac{h}{h'}\gamma_0.$$

Or

$$\varphi'_0 = \frac{\eta u_0}{\zeta} + \mu_1\left|\frac{\psi}{\zeta}\right| + \mu'_1\left|\frac{\psi'}{\zeta}\right|.$$

Si β'' est le maximum de $\left|\frac{\psi}{\zeta}\right|$, il viendra

$$|\varphi'_0| < \left[\beta + (\beta + c'\beta')\frac{h\beta''}{h'} + c'\beta'\right]\gamma_0$$

ou, en posant

$$\alpha = (\beta + c'\beta')\left(1 + \frac{h\beta''}{h'}\right),$$

$$\gamma_1 < \alpha\gamma_0;$$

on trouverait de même

$$\gamma_2 < \alpha\gamma_1,$$

ou, plus généralement,

$$\gamma_k < \alpha\gamma_{k-1}.$$

Nous voyons que la série

$$\sum \lambda^k \gamma_k$$

converge pour

$$\lambda\alpha < 1,$$

et comme

$$u_k| < \frac{b''\gamma_k}{|\log \mathrm{MK}.\log \mathrm{MK}_1|},$$

il en sera de même de la série

$$\sum \lambda_k u_k.$$

Traçons maintenant autour de K et de K_1 deux petites courbes fermées. Soit d'ailleurs v une fonction définie comme il suit.

Je désigne par A et A_1 les valeurs de Z correspondant aux deux points K et K_1.

A l'intérieur de la petite courbe entourant K, on aura

$$v = \log\left|\frac{1}{Z - A}\right|.$$

A l'intérieur de la seconde petite courbe, v est partout nul.

A l'extérieur des deux courbes, v ne peut s'annuler ni devenir infini. Enfin v est partout fini ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres.

Nous poserons ensuite

$$C\lambda = h(h - 1);$$

C étant la valeur que prend $\eta\,|Z - A|^2 \log^2 |Z - A|$ au point K et h étant la racine négative de cette équation du second degré; soit

$$Dv^h = \lambda\eta_1 v^h + \theta.$$

Je dis que la fonction $\frac{\theta}{\zeta}$ est limitée.

En effet, c'est seulement au point K que le rapport $\frac{\theta}{\zeta}$ pourrait devenir infini.

Or, dans le voisinage du point K, la fonction η, par hypothèse, est développable suivant les puissances entières croissantes (positives ou négatives) de

$$(Z - A), \quad (Z_0 - A_0) \quad \text{et} \quad \frac{1}{\log\left|\frac{1}{Z - A}\right|};$$

il en est de même de

$$v^h \log^{-h}\left|\frac{1}{Z - A}\right|, \quad Dv^h \log^{-h}\left|\frac{1}{Z - A}\right|$$

et, par conséquent, de

$$\theta \log^{-h}\left|\frac{1}{Z - A}\right|.$$

Dans le développement de θ, les termes qui sont de l'ordre le plus élevé, c'est-à-dire de l'ordre de

$$|Z - A|^{-2} \log^{-2+h} \left|\frac{1}{Z - A}\right|,$$

se détruisent, et les termes de l'ordre immédiatement inférieur, c'est-à-dire de l'ordre de

$$|Z - A|^{-2} \log^{-3+h} \left|\frac{1}{Z - A}\right|,$$

seront très petits par rapport à ζ (puisque h est négatif); donc $\frac{\theta}{\zeta}$ reste fini. C. Q. F. D.

Soit maintenant v' une fonction engendrée comme v, mais de telle façon que le point K_1 joue le rôle du point K et inversement, c'est-à-dire que l'on ait à l'intérieur de la première petite courbe

$$v' = 0$$

et à l'intérieur de la seconde

$$v' = \log \frac{1}{|Z - A_1|}.$$

Soit C' la quantité qui joue, par rapport à K_1, le même rôle que C par rapport à K; soit enfin h' la racine négative de l'équation

$$C'\lambda = h'(h' - 1)$$

et posons

$$Dv'^{h'} = \lambda \eta v'^{h'} + \theta';$$

nous verrons encore que $\frac{\theta'}{\zeta}$ est limité.

Soient maintenant ψ et ψ' deux combinaisons linéaires de θ et θ'

$$\psi = a\theta + c\theta',$$
$$\psi' = b\theta + d\theta'.$$

Je dis qu'on peut choisir les coefficients constants a, b, c, d de telle façon que

$$\int \psi\, d\omega = 0, \qquad \int \psi' d\omega \gtrless 0, \qquad \int \psi_1 g\, d\omega_1 \gtrless 0.$$

Pour que cela fût impossible, il faudrait en effet que l'on eût : ou bien

$$\int \theta\, d\omega = \int \theta'\, d\omega = 0$$

ou bien

$$\int \theta\, d\omega \int \theta'_1\, g\, d\omega_1 - \int \theta'\, d\omega \int \theta_1\, g\, d\omega_1 = 0.$$

Comme v et v' sont arbitraires sur une partie de la surface de Klein, on pourra toujours s'arranger de façon que cela n'ait pas lieu.

Seulement il importe de remarquer que ψ et ψ' dépendent de λ; le rapport entre le maximum de $\left|\frac{\psi}{\zeta}\right|$ et $\left|\int \psi_1\, g\, d\omega_1\right|$, et le rapport entre le maximum de $\left|\frac{\psi'}{\zeta}\right|$ et $\left|\int \psi'\, d\omega\right|$ dépendent aussi de λ.

Il importe de rechercher si ces rapports ne deviennent pas infinis quand λ s'annule.

Cherchons donc les limites de $\frac{\theta}{\lambda}$ et $\frac{\theta'}{\lambda}$ pour $\lambda = 0$.

Pour cela nous nous servirons de la formule

$$\mathrm{D}v^h = h v^{h-1}\,\mathrm{D}v + h(h-1)v^{h-2}\,\mathrm{E}(v, v).$$

Si l'on tient compte alors de

$$\mathrm{D}v^h = \lambda \eta v^h + \theta; \qquad \mathrm{C}\lambda = h(h-1),$$

il viendra, en divisant par λ et faisant tendre λ vers 0,

$$-\mathrm{C}\frac{\mathrm{D}v}{v} + \mathrm{C}\frac{\mathrm{E}(v, v)}{v^2} = \eta + \lim \frac{\theta}{\lambda}.$$

Si nous appelons θ_0 et θ'_0 les limites de $\frac{\theta}{\lambda}$ et $\frac{\theta'}{\lambda}$, nous voyons que les fonctions $\frac{\theta_0}{\zeta}$ et $\frac{\theta'_0}{\zeta}$ sont limitées; en effet, dans le voisinage des points K et K_1, $\mathrm{D}v$ s'annule et la différence

$$\mathrm{C}\frac{\mathrm{E}(v, v)}{v^2} - \eta$$

est, au plus, de l'ordre de

$$\frac{1}{|Z-A|^2 \log^3 \left|\frac{1}{Z-A}\right|},$$

c'est-à-dire de l'ordre de ζ.

D'autre part, comme v et v' sont arbitraires sur une partie de la surface de Klein, nous pourrons nous arranger pour que l'on n'ait pas

$$\int \theta_0\, d\omega = \int \theta'_0\, d\omega = 0,$$

$$\int \theta_0\, d\omega \int \theta'_{0,1} g\, d\omega_1 - \int \theta'_0\, d\omega \int \theta_{0,1} g\, d\omega_1 = 0,$$

c'est-à-dire que l'on peut s'arranger pour que les rapports dont il a été question plus haut ne deviennent pas infinis quand λ s'annule.

Formons alors l'équation

$$\text{(15)} \qquad Du = \lambda' \eta\, u + \varphi + \mu\psi + \mu'\psi'.$$

C'est l'équation (14), sauf qu'on a changé λ en λ': elle est donc intégrable pourvu que

$$\lambda'\alpha < 1.$$

La quantité α a été définie plus haut; elle est seulement assujettie à avoir une limite inférieure. Mais cette limite inférieure dépend de λ puisque ψ et ψ' dépendent de λ.

Toutefois, elle ne deviendra pas infinie pour $\lambda = 0$, puisqu'il en est ainsi des deux rapports dont il a été question plus haut.

Donc, si nous faisons varier λ de 0 à λ_0, cette limite inférieure restera plus petite qu'une certaine quantité β, et il suffira de prendre α indépendant de λ et plus grand que β, pour que nous puissions affirmer que notre équation (15) est intégrable toutes les fois que

$$\alpha\lambda' < 1.$$

Soit u_0 la solution de cette équation (15), et soit maintenant l'équation

$$\text{(16)} \qquad Du = \lambda\eta\, u + \varphi, \qquad \int \varphi\, d\omega = 0.$$

On résoudra cette équation en faisant

$$u = u_0 - \mu(av^h + cv'^{h'}) - \mu'(bv^h + dv'^{h'}),$$

en ayant soin de faire

$$\lambda' = \lambda,$$

et cela sera permis pourvu que

$$\lambda' = \lambda < \lambda_0, \qquad \lambda' = \lambda < \frac{1}{\alpha}.$$

On remarquera quelques différences entre la démonstration que j'ai donnée dans le cas d'un seul sommet de troisième espèce et celle que j'ai donnée dans le cas de deux sommets.

Dans la première, j'ai employé un détour en me servant de la fonction auxiliaire η_0; dans la seconde, j'ai évité ce détour, mais j'ai dû supposer que η était d'une forme particulière, c'est-à-dire développable suivant les puissances croissantes de $Z - A$, $Z_0 - A_0$, $\frac{1}{\log|Z - A|}$. Cette condition est d'ailleurs remplie dans les applications que nous aurons à faire.

J'aurais pu tout aussi bien faire le contraire, mais j'ai voulu donner un exemple de deux procédés différents de démonstration.

Si l'équation (16) est intégrable pour $\int \varphi\, d\omega = 0$, elle le sera également quand cette condition ne sera pas remplie, car nous pouvons trouver une fonction v telle que

$$\int \eta v\, d\omega \gtrless 0.$$

Nous pouvons ensuite choisir la constante μ de telle sorte que

$$\mu \int (Dv - \lambda\eta v)\, d\omega = -\lambda\mu \int \eta v\, d\omega = \int \varphi\, d\omega.$$

Nous pourrons alors intégrer l'équation

$$(16) \qquad Du = \lambda\eta u + [\varphi - \mu(Dv - \lambda\eta v)],$$

qui satisfait à la condition

$$\int [\varphi - \mu(\mathrm{D}v - \lambda\eta v)]\, d\omega = 0.$$

L'intégrale de (16) est alors égale à l'intégrale de (17) augmentée de μv.

En résumé, ce que nous avons dit au paragraphe précédent de l'équation (1) reste vrai quand il y a des sommets de troisième espèce; ce que nous avons dit dans ce même paragraphe des équations (5), (6) et (9) reste donc vrai également.

Nous pouvons nous résumer en disant que l'équation

$$(17) \qquad \mathrm{D}u = \eta u - \varphi$$

est susceptible d'être intégrée. Ce résultat n'est établi jusqu'ici qu'en supposant que le rapport $\frac{\varphi}{\zeta}$ est limité.

Je dis maintenant qu'il sera vrai encore pourvu que le rapport $\frac{\varphi}{\eta}$ soit limité et partout bien déterminé.

Nous avons, en effet,

$$\frac{\varphi}{\zeta} = \frac{\varphi}{\eta}\frac{\eta}{\zeta}.$$

Le rapport $\frac{\eta}{\zeta}$ est fini, sauf aux sommets de troisième espèce; nous n'avons donc qu'à examiner ce qui se passe dans le voisinage de l'un de ces sommets.

Nous avons supposé plus haut que, dans ce voisinage, η est développable suivant les puissances croissantes de

$$\mathrm{Z} - \mathrm{A}, \quad \mathrm{Z}_0 - \mathrm{A}_0, \quad \frac{1}{\log|\mathrm{Z} - \mathrm{A}|}.$$

Nous supposerons qu'il en est de même de φ.

Si, alors, nous appelons a la valeur du rapport $\frac{\varphi}{\eta}$ au sommet de troisième espèce K et que nous posions

$$\varphi = a\eta + \varphi_1,$$

le rapport $\frac{\varphi_1}{\zeta}$ restera fini au point K.

Supposons donc, pour fixer les idées, deux sommets de troisième espèce K et K_1; soient a et a_1 les valeurs de $\frac{\varphi}{\eta_1}$ aux points K et K_1.

Soit v une fonction quelconque, finie et continue ainsi que ses dérivées des trois premiers ordres et prenant les valeurs a et a_1 aux points K et K_1; on aura

$$(18) \qquad D(u-v) = \eta_1(u-v) - (\varphi - \eta_1 v + Dv).$$

Comme le rapport

$$\frac{\varphi - \eta_1 v + Dv}{\zeta}$$

reste fini aux points K et K_1, on saura intégrer l'équation (18) et, par conséquent, l'équation (17).

IX. — Application du calcul des variations.

J'arrive à l'étude de l'équation

$$(1) \qquad DU = \theta e^U - \Phi$$

dont, nous l'avons vu, dépend le problème de la formation des fonctions fuchsiennes.

Mais, avant de démontrer par des procédés rigoureux l'intégrabilité de cette équation, je veux d'abord la faire pressentir par un de ces aperçus fondés sur le calcul des variations dont on fait quelquefois usage en Physique mathématique.

Pour cela, je suppose d'abord que Φ soit toujours positif, et je donne à la fonction U un accroissement infiniment petit δU.

J'envisage l'intégrale

$$(2) \qquad \int \delta U \, d\omega (\theta e^U - \Phi - DU),$$

étendue à la surface de Klein tout entière.

L'intégration par parties donne

$$\int \delta U \, DU \, d\omega = -\int E(U, \delta U) \, d\omega,$$

de sorte que l'intégrale (2) devient

$$\int d\omega [(\theta e^{U} - \Phi)\,\delta U + E(U, \delta U)].$$

Or

$$(\theta e^{U} - \Phi)\,\delta U = \delta(\theta e^{U} - \Phi U); \qquad E(U, \delta U) = \frac{1}{2}\,\delta E(U, U).$$

Notre intégrale (2) n'est donc autre chose que la variation δJ, en posant

$$J = \int d\omega \left[\frac{1}{2} E(U, U) + \theta e^{U} - \Phi U\right].$$

La variation δJ ne peut donc s'annuler sans que l'équation (1) soit satisfaite.

L'intégrale J admet-elle un minimum? $E(U, U)$ est essentiellement positif; quant à l'expression

$$\theta e^{U} - \Phi U,$$

elle atteint son minimum pour

$$\theta e^{U} = \Phi,$$

équation à laquelle on peut satisfaire, puisque Φ et θ sont toujours positifs.

Le minimum atteint est

$$\Phi\left(1 - \log\frac{\Phi}{\theta}\right).$$

Donc on a toujours

$$J > \int d\omega\, \Phi\left(1 - \log\frac{\Phi}{\theta}\right).$$

Donc J a un minimum.

Donc on peut satisfaire à l'équation (1).

Supposons maintenant que Φ ne soit plus toujours positif, et soit Φ_0 la valeur moyenne de Φ, de telle façon que

$$\Phi_0 \int d\omega = \int \Phi\, d\omega.$$

Nous pourrons poser alors

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1,$$

et l'on aura

$$\int \Phi_1 \, d\omega = 0.$$

Je dis qu'on peut satisfaire à l'équation (1), pourvu que Φ_0 soit positif.

En effet, puisqu'on a

$$\int \Phi_1 \, d\omega = 0,$$

on peut trouver une fonction u telle que

$$Du = -\Phi_1.$$

Posons alors

$$U = V + v;$$

l'équation (1) devient

$$(1\ bis) \qquad DV = \theta e^v e^V - \Phi_0.$$

On pourra résoudre l'équation (1 *bis*) qui est de même forme que (1), car θe^v est toujours positif et Φ_0 est une constante positive.

Peut-on maintenant résoudre l'équation (1) quand

$$\int \Phi \, d\omega < 0?$$

Non ; en effet, on a

$$\int DU \, d\omega = 0$$

et, par conséquent,

$$\int \Phi \, d\omega = \int \theta e^U \, d\omega > 0.$$

Donc, la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse résoudre l'équation (1), c'est que

$$\int \Phi \, d\omega > 0.$$

X. — L'équation $DU = \theta e^U - \Phi$.

Nous allons maintenant donner de ce résultat une démonstration rigoureuse.

Envisageons d'abord l'équation

$$(1) \qquad Du = \theta e^u - \varphi;$$

supposons qu'on sache l'intégrer et qu'elle admette comme intégrale

$$u = u_0.$$

Envisageons ensuite l'équation

$$(2) \qquad Du = \theta e^u - \varphi - \lambda\psi.$$

Je me propose de chercher à quelles conditions cette nouvelle équation sera intégrable.

Pour cela, je suppose u développé suivant les puissances de λ et j'écris

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots.$$

Alors e^{u-u_0} sera également développable suivant les puissances de λ, et je pourrai écrire

$$\begin{aligned} e^{u-u_0} = 1 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \lambda^3 u_3 + \ldots. \\ + \lambda^2 w_2 + \lambda^3 w_3 + \ldots. \end{aligned}$$

J'aurai évidemment

$$w_2 = \frac{u_1^2}{2}, \qquad w_3 = \frac{u_1^3}{6} + u_1 u_2,$$

$$w_4 = \frac{u_1^4}{24} + u_1 u_3 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{u_1^2 u_2}{2}, \quad \ldots.$$

En général, *les w seront des polynomes entiers par rapport aux u_k et les coefficients de ces polynomes seront tous positifs.*

Alors u_0, u_1, ... nous seront donnés successivement par les équations

$$(1)\qquad Du_0 = \theta e^{u_0} - \varphi,$$

$$(3)\qquad \begin{cases} Du_1 = \theta e^{u_0} u_1 - \psi, \\ Du_2 = \theta e^{u_0}(u_2 + w_2), \\ Du_3 = \theta e^{u_0}(u_3 + w_3), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Nous avons supposé qu'on savait intégrer l'équation (1). D'autre part, d'après les paragraphes VII et VIII, on sait intégrer les équations (3).

Dans la première équation (3), θ, u_0 et ψ sont connues, et u_1 est la fonction inconnue; dans la seconde, θ, u_0 et w_2 sont connues et u_2 est la fonction inconnue et ainsi de suite.

Voyons maintenant à quelles inégalités satisfont les fonctions u_k ainsi formées.

Quand u_2 atteint son maximum, Du_2 doit être négatif; donc

$$u_2 < -w_2.$$

Au contraire, quand u_2 atteint son minimum, on doit avoir

$$u_2 > -w_2.$$

Donc le maximum de u_2 est plus petit que celui de $(-w_2)$ et le minimum de u_2 plus grand que celui de $(-w_2)$.

Donc le maximum de $|u_2|$ est plus petit que celui de $|w_2|$.

On verrait de même que le maximum de $|u_3|$ est plus petit que celui de $|w_3|$ et, en général, que le maximum de $|u_k|$ est plus petit que celui de $|w_k|$.

Pour la même raison, le maximum de $|u_1|$ est plus petit que celui de

$$\frac{|\psi|}{\theta e^{u_0}}.$$

(Rappelons que θ et e^{u_0} sont essentiellement positifs).

Donc

$$\max \text{ de } |u_1| < \frac{\max \left|\frac{\psi}{\theta}\right|}{\min e^{u_0}}.$$

Mais u_0 satisfait à l'équation

$$Du_0 = \theta e^{u_0} - \varphi.$$

Quand u_0 atteint son minimum, on doit donc avoir

$$\theta e^{u_0} - \varphi > 0$$

et, par conséquent, si φ est toujours positif,

$$\min \text{ de } e^{u_0} > \min \left|\frac{\varphi}{\theta}\right|;$$

d'où enfin

$$\max |u_1| < \frac{\max \left|\frac{\psi}{\theta}\right|}{\min \left|\frac{\varphi}{\theta}\right|}.$$

Soit $u'_1, u'_2, \ldots, u'_k, \ldots$ une suite de constantes positives, soit w'_k un polynome formé avec les u'_j comme w_k l'est avec les u_j.

Comme les polynomes w_k ont tous leurs coefficients positifs, si l'on suppose

$$u'_1 > \max |u_1|, \qquad u'_2 > \max |u_2|, \qquad \ldots, \qquad u'_{k-1} > \max |u_{k-1}|,$$

on aura

$$w'_k > \max |w_k|,$$

et si l'on suppose

$$u'_k = w'_k,$$

on aura

$$u'_k > \max |w_k| > \max |u_k|,$$

de sorte que, de proche en proche, on aura

$$(4) \qquad u'_k = w'_k, \qquad w'_k > \max |w_k|, \qquad u'_k > \max |u_k|.$$

Posons maintenant

$$v = \lambda u'_1 + \lambda^2 u'_2 + \ldots; \tag{5}$$

il viendra, d'après la définition des polynomes w et w',

$$\begin{aligned} e^v = 1 + \lambda u'_1 + \lambda^2 u'_2 + \lambda^3 u'_3 + \ldots \\ + \lambda^2 w'_2 + \lambda^3 w'_3 + \ldots \end{aligned}$$

ou, à cause de l'égalité $u'_k = w'_k$,

$$e^v = 2v + 1 - \lambda u'_1. \tag{6}$$

Comme u'_1 n'est assujetti qu'à être plus grand que le maximum de u_1, je prendrai

$$u'_1 = \frac{\max \left|\frac{\psi}{\theta}\right|}{\min \left|\frac{\varphi}{\theta}\right|}.$$

De l'équation (6), je tirerai v en série ordonnée suivant les puissances de λ, et la limite de convergence de cette série correspondra à la valeur de λ pour laquelle l'équation (6) a une racine double.

Or, en différentiant l'équation (6), je trouve

$$e^v = 2, \qquad v = \log 2.$$

$$\lambda u'_1 = \log 4 - 1.$$

Donc, *la série* (5) *converge, pourvu que*

$$|\lambda u'_1| < \log 4 - 1.$$

Donc, en vertu des inégalités (4),

$$u = u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots$$

converge absolument et uniformément.

Il en est de même de la série

$$e^u = e^{u_0}(1 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots + \lambda^2 w_2 + \ldots).$$

En effet, les termes de cette série sont respectivement plus petits que ceux de la série convergente (à termes positifs et constants)

$$e^{u'+u_0} = e^{u_0}(1 + \lambda u'_1 + \lambda^2 u'_2 + \ldots + \lambda^2 w'_2 + \ldots).$$

Formons donc les deux séries

$$\theta e^{u} - \varphi - \lambda\psi = V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2 + \ldots$$

et

$$\int V_0^1 G\, d\omega_1 + \lambda \int V_1^1 G\, d\omega_1 + \lambda^2 \int V_2^1 G\, d\omega_1 + \ldots,$$

où j'ai écrit, pour abréger, G, au lieu de

$$G(M, P; M_1, P_1),$$

et où V_k^1 est la valeur de la fonction V_k au point M_1.

La première de ces séries sera uniformément convergente, de sorte que la seconde représentera l'intégrale

$$J = \int (\theta e^{u} - \varphi - \lambda\psi)_1 G\, d\omega_1,$$

où

$$(\theta e^{u} - \varphi - \lambda\psi)_1$$

représente la valeur au point M_1 de la fonction

$$\theta e^{u} - \varphi - \lambda\psi.$$

On a donc

$$DJ = \theta e^{u} - \varphi - \lambda\psi.$$

D'autre part, on a

$$D\int V_0^1 G\, d\omega_1 = V_0 = \theta e^{u_0} - \varphi,$$

$$D\int V_1^1 G\, d\omega_1 = V_1 = \theta e^{u_0} u_1 - \psi,$$

$$D\int V_2^1 G\, d\omega_1 = V_2 = \theta e^{u_0}(u_2 + w_2),$$

En résumé, si nous posons, pour abréger,

$$\int V_k^1 G \, d\omega_1 = v_k,$$

on aura

$$Du_k = Dv_k$$

et, par conséquent,

$$u_k = v_k + C_k,$$

C_k étant une constante. Les deux séries

$$u = \sum \lambda^k u_k \qquad \text{et} \qquad \sum \lambda^k v_k = J$$

sont convergentes et la convergence est uniforme, pourvu que M reste en dehors d'une petite courbe entourant le point P_1.

Soit donc u la somme de la première série et J celle de la deuxième; soit c celle de la série $\sum \lambda^k C_k$, on aura

$$C = J + c$$

et, par conséquent,

$$Du = DJ = \theta e^u - \varphi - \lambda \psi.$$

Notre équation est donc satisfaite.

Cela suppose que φ est toujours positif et que les rapports $\frac{\varphi}{\theta}$ et $\frac{\psi}{\theta}$ sont limités et partout bien déterminés.

L'équation

$$(7) \qquad Du = \theta e^u - \alpha \theta$$

admet-elle une solution quelle que soit la constante positive α?

Oui, car elle admet pour intégrale

$$u = \log \alpha.$$

Soit maintenant l'équation

$$(8) \qquad Du = \theta e^u - \alpha \theta - \mu \psi,$$

où ψ est une fonction toujours positive et telle que $\frac{\psi}{\theta}$ soit limité.

Est-elle toujours intégrable quelles que soient les constantes positives α et μ?

Changeons μ en $\mu + \lambda$, l'équation devient

$$\text{(8 bis)} \qquad Du = \theta e^u - \alpha\theta - \mu\psi - \lambda\psi,$$

qui se ramène à la forme (2) en posant

$$\varphi = \alpha\theta + \mu\psi.$$

Comme $\mu\psi$ est essentiellement positif, nous avons

$$\text{min de} \left|\frac{\varphi}{\theta}\right| > \alpha.$$

Si donc l'équation (8) est intégrable, il en sera de même de (8 *bis*) pourvu que

$$\left|\frac{\lambda}{\alpha} \max\left|\frac{\psi}{\theta}\right|\right| > \log q - 1.$$

Si donc l'équation (8) est intégrable pour

$$\mu = \mu_0,$$

elle le sera encore pour

$$\mu_0 < \mu < \mu_0 + (\log q - 1)\frac{\alpha}{\max\left|\frac{\psi}{\theta}\right|}$$

et, par conséquent, pour

$$\mu_0 < \mu < \mu_0 + \frac{n\alpha}{\max\left|\frac{\psi}{\theta}\right|}(\log q - 1),$$

et comme le nombre n peut être pris aussi grand que l'on veut, elle sera intégrable pour toutes les valeurs de μ supérieures à μ_0.

Or l'équation (8) est intégrable pour $\mu = 0$, puisqu'elle se réduit alors à l'équation (7); elle est donc intégrable pour toutes les valeurs positives de μ. C. Q. F. D.

On peut conclure de là que l'équation

$$(1) \qquad \mathrm{D}u = \theta e^u - \varphi$$

est toujours intégrable pourvu :

1° Que la fonction φ soit toujours positive et ne puisse s'annuler;

2° Que cette fonction reste finie, sauf aux sommets de deuxième et de troisième espèces où θ devient infini;

3° Pourvu, enfin, que le rapport $\frac{\varphi}{\theta}$ tende vers une limite déterminée quand on se rapproche de l'un de ces sommets et que cette limite ne soit ni nulle, ni infinie.

Dans ces conditions, en effet, le rapport $\frac{\varphi}{\theta}$ restera constamment compris entre deux limites positives, de telle façon que

$$\beta > \frac{\varphi}{\theta} > \alpha.$$

Nous pourrons poser

$$\varphi = \alpha\theta + \psi.$$

Alors ψ sera toujours positif et le rapport $\frac{\psi}{\theta}$ sera limité.

L'équation

$$\mathrm{D}u = \theta e^u - \alpha\theta - \mu\psi$$

sera donc intégrable pour toutes les valeurs positives de μ et, en particulier, pour la valeur 1. C. Q. F. D.

Dans le cas particulier des fonctions fuchsiennes de la première espèce, il n'y a pas de sommets de deuxième et de troisième espèce, la fonction θ est toujours finie, et l'équation (1) est intégrable si la fonction φ est toujours positive et toujours finie. Elle l'est, en particulier, si φ est une constante positive.

Supposons maintenant que φ soit toujours finie, mais ne soit pas toujours positive. Soit φ_0 la valeur moyenne de φ, de telle sorte que

$$\varphi_0 \int d\omega = \int \varphi \, d\omega.$$

Il existera alors une fonction v qui satisfera à

$$Dv = \varphi_0 - \varphi,$$

puisque $\int (\varphi_0 - \varphi)\, d\omega = 0$. (Cf § VI).

Il existera une fonction w satisfaisant à

$$Dw = \theta e^{v} e^{w} - \varphi_0,$$

pourvu que la constante φ_0 soit positive.

La fonction

$$u = v + w$$

satisfera alors à

$$Du = \theta e^{u} - \varphi.$$

Donc, *dans le cas des fonctions fuchsiennes de première espèce, c'est-à-dire dans le cas où θ est toujours fini, si, d'ailleurs, la fonction φ est toujours finie, la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation* (1) *soit intégrable, c'est que la valeur moyenne de φ soit positive.*

On peut généraliser ce résultat pour le cas où il y a des sommets de deuxième et de troisième espèce.

Supposons, en effet, que la fonction φ soit toujours finie, sauf aux sommets de deuxième et de troisième espèce, où le rapport $\frac{\varphi}{\theta}$ tend vers une limite positive déterminée qui n'est ni nulle, ni infinie.

Supposons de plus que

$$\int \varphi\, d\omega > 0.$$

Il est évident qu'on peut poser

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

et cela de telle façon :

1° Que φ_1 soit toujours positive;

2° Que φ_2 soit toujours finie;

3° Que

$$\int \varphi_2\, d\omega = 0.$$

Alors le rapport $\frac{\varphi_1}{\theta}$ tendra vers une limite finie et différente de o dans le voisinage des sommets et l'on aura

$$\int \varphi_1 \, d\omega > 0.$$

Donc on trouvera des fonctions v et w qui satisferont à

$$Dv = -\varphi_2,$$
$$Dw = \theta e^v e^w - \varphi_1.$$

La fonction

$$u = v + w$$

satisfait alors à l'équation (1).

Donc l'équation est intégrable aux conditions suivantes :

1° *Si la valeur moyenne de φ est positive;*

2° *Si le rapport $\frac{\varphi}{\theta}$ tend vers une limite positive finie et différente de o quand on se rapproche d'un sommet de deuxième ou de troisième espèce.*

Il subsiste encore une restriction dont je voudrais me débarrasser.

Le rapport $\frac{\varphi}{\theta}$ doit être fini aux sommets de deuxième et de troisième espèce, et, de plus, *en ces sommets, il ne doit pas s'annuler*. Cette restriction est essentielle en ce qui concerne les sommets de troisième espèce, mais elle doit disparaître en ce qui concerne ceux de deuxième espèce.

Soit, en effet, ψ une fonction quelconque assujettie aux conditions suivantes :

1° Sa valeur moyenne sera nulle; 2° elle est finie partout, sauf aux sommets de deuxième espèce; 3° aux sommets de deuxième espèce, le rapport $\frac{\psi}{\theta}$ sera positif et différent de zéro; on pourra alors, en vertu des principes du § VI, intégrer l'équation

$$Dv = \psi.$$

On ne le pourrait pas si nous avions supposé que le rapport $\frac{\psi}{\theta}$ était différent de o aux sommets de troisième espèce. L'intégrale

$$\int \psi_1 G(M, P; M_1, P_1) d\omega_1$$

ne serait pas alors restée finie quand M serait venu en un de ces sommets.

Soit, d'autre part, l'équation

$$(1) \qquad Du = \theta e^u - \varphi$$

et supposons que φ satisfasse aux conditions suivantes :

1° On a

$$\int \varphi \, d\omega > 0;$$

2° Le rapport $\frac{\varphi}{\theta}$ a partout une valeur finie et déterminée;

3° Aux sommets de deuxième espèce, cette valeur peut être positive, négative ou nulle;

4° Aux sommets de troisième espèce, elle sera positive et différente de zéro.

Si nous posons

$$u - \lambda v = w,$$

il viendra

$$(9) \qquad Dw = \theta e^{\lambda v} e^w - \varphi - \lambda \psi.$$

Nous pourrons prendre la constante positive λ assez grande pour que, aux sommets de deuxième espèce, les rapports

$$\frac{\varphi + \lambda\psi}{\theta}, \qquad \frac{\varphi + \lambda\psi}{\theta e^{\lambda v}}$$

soient positifs, et, en effet, $\frac{\psi}{\theta}$ est positif, $\left|\frac{\varphi}{\theta}\right|$ est limité.

Aux sommets de troisième espèce, ces rapports sont égaux à

$$\frac{\varphi}{\theta}, \qquad \frac{\varphi}{\theta e^{\lambda v}}$$

et, par conséquent, positifs d'après l'hypothèse.

On pourra donc intégrer l'équation (9) et, par conséquent, l'équation (1).

En résumé, *voici les conditions pour que l'équation* (1) *soit intégrable :*

1° On doit avoir

$$\int \varphi \, d\omega > 0;$$

2° Le rapport $\frac{\varphi}{\theta}$ doit avoir partout une valeur finie et déterminée;

3° Cette valeur, qui peut être quelconque aux sommets de deuxième espèce, doit être positive et différente de zéro aux sommets de troisième espèce.

XI. — Application aux fonctions fuchsiennes.

Nous venons de voir à quelles conditions peut s'intégrer l'équation (1) du paragraphe précédent; or, au début de ce travail, nous avons montré que la formation des fonctions fuchsiennes dépend de l'intégration d'une équation de même forme,

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{DU} = \theta e^{\mathrm{U}} - \Phi.$$

Voyons si elle satisfait aux conditions énoncées.

La fonction Φ est finie, sauf aux sommets de troisième espèce, et en ces sommets la valeur du rapport $\frac{\Phi}{\theta}$ est finie, déterminée, positive et différente de zéro; c'est ce que nous avons montré à la fin du § IV.

Il reste donc à vérifier que l'on a

$$\int \Phi \, d\omega > 0.$$

Je rappelle que

$$-\Phi = \mathrm{D} \log \frac{d\Omega}{d\omega} + \mathrm{D}h,$$

h étant une fonction partout finie, sauf aux sommets de deuxième et de troisième espèce et telle que la différence

$$(2) \qquad h - \left(2 - \frac{2}{n}\right) \log |Z - A|$$

reste finie aux sommets de deuxième espèce et que la différence

$$(3) \qquad h - 2 \log |Z - A| - 2 \log \log |Z - A|$$

reste finie aux sommets de troisième espèce.

Nous supposerons que Z est lié à Z′ par une relation algébrique

$$F(Z, Z') = 0.$$

Cette relation représente une courbe algébrique d'ordre m; je puis, sans restreindre la généralité, supposer que cette courbe a ses m directions asymptotiques distinctes et qu'elle n'a d'autre singularité que des points doubles ordinaires.

Je puis supposer aussi que les sommets de deuxième ou de troisième espèce ne correspondent ni à un point double de la courbe, ni à un point à l'infini, ni à un point où la tangente est parallèle à l'axe des Z [c'est ce qui m'a permis tout à l'heure d'écrire $Z - A$ et non $Z' - A'$ dans les formules (2) et (3)].

Cela posé, quand $\log \frac{d\Omega}{d\omega}$ devient-il infini?

1° Quand $\frac{d\Omega}{d\omega}$ devient infini, c'est-à-dire quand le point Z, Z′ s'éloigne à l'infini sur l'une des branches asymptotiques de la courbe;

2° Aux points où la tangente est parallèle à l'axe des Z, on a

$$\frac{dZ}{dZ'} = 0$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\Omega}{d\Omega'} = 0$$

et, comme $\frac{d\Omega'}{d\omega}$ est fini, $\frac{d\Omega}{d\omega}$ est nul;

3° Aux points doubles, on a, à la fois,

$$\frac{dF}{dZ} = \frac{dF}{dZ'} = 0;$$

mais Z' est fonction holomorphe de Z et $\frac{d\Omega}{d\omega}$ reste fini.

Nous avons donc

$$\Phi = D\psi,$$
$$\psi = -\log\frac{d\Omega}{d\omega} - h$$

et ψ devient logarithmiquement infini en un certain nombre de points singuliers qui se répartissent en quatre sortes :

Première sorte. — Ce sont les m points à l'infini de la courbe $F = 0$.

Deuxième sorte. — Ce sont les points où $\frac{dF}{dZ'} = 0$; leur nombre est

$$m(m-1) - 2d,$$

d étant le nombre des points doubles, ou bien

$$2m + 2p - 2,$$

p étant le genre de la courbe.

Troisième sorte. — Ce sont les sommets de deuxième espèce.

Quatrième sorte. — Ce sont les sommets de troisième espèce.

Entourons chacun de ces points singuliers d'une courbe infiniment petite. La surface de Klein se trouve partagée en deux régions; la région intérieure à ces petites courbes qui est infiniment petite et la région extérieure qui est finie.

L'intégrale $\int \Phi\, d\omega$, étendue à la région intérieure, est infiniment petite. L'intégrale étendue à la région extérieure est

$$\int \Phi\, d\omega = \int D\psi\, d\omega = \int \frac{d\psi}{dn}\, d\sigma,$$

en vertu de l'équation (3 *bis*) du § III; dn et $d\sigma$ sont définis comme au § III, que la surface de Klein soit isotrope ou anisotrope.

L'intégrale du troisième membre est étendue au périmètre de toutes les petites courbes; mais il faut observer que les dn positifs doivent être comptés vers l'extérieur de la région où se fait l'intégration double, c'est-à-dire vers l'*intérieur* de la petite courbe.

Considérons d'abord une petite courbe entourant un des m points singuliers de la première sorte; ceux où Z devient infini.

Nous prendrons

$$Z'' = \frac{1}{Z},$$

d'où

$$\frac{d\Omega}{d\Omega''} = \left|\frac{dZ}{dZ''}\right|^2 = \frac{1}{|Z''|^4}.$$

A l'intérieur de notre petite courbe nous avons donc

$$\psi = 4\log|Z''| - \log\frac{d\Omega''}{d\omega} - h.$$

Or, $\log\frac{d\Omega''}{d\omega} + h$ reste fini; notre intégrale est donc égale, en négligeant des infiniment petits, à

$$4\int\frac{d\log|Z''|}{dn}\,d\sigma,$$

ou bien, toujours avec les notations du § III,

$$4\int\frac{d\log|Z''|}{dN''}\,dS'',$$

dS'' et dN'' étant les arcs infiniment petits qui correspondent sur le plan des Z'' aux arcs $d\sigma$ et dn de la surface de Klein.

Si nous posons

$$Z'' = \rho e^{i\omega}$$

et si l'on suppose que la petite courbe a pour équation $\rho = \text{const.}$, et correspond à un cercle sur le plan des Z''; cette intégrale peut s'écrire

$$-4\int\frac{d\log\rho}{d\rho}\rho\,d\omega = -4\int d\omega = -8\pi.$$

J'ai mis le signe $-$, parce que les dN'' positifs doivent être comptés vers l'intérieur du petit cercle $\rho = \text{const}$.

Considérons maintenant une petite courbe entourant un des

$$2m + 2p - 2$$

points singuliers de la deuxième sorte.

Soit $Z = A$, $Z' = A'$ ce point singulier. Nous aurons

$$\psi = -\log\frac{d\Omega}{d\omega'} - \log\frac{d\Omega'}{d\Omega} - h.$$

D'autre part, on aura

$$Z - A = (Z' - A')^2 H,$$

H étant une série ordonnée suivant les puissances de $Z' - A'$ et ne s'annulant pas pour $Z' = A'$.

On en déduit

$$\frac{dZ}{dZ'} = (Z' - A')H',$$

H' ne s'annulant pas pour $Z' = A'$.

Il vient donc

$$\log\frac{d\Omega}{d\Omega'} = 2\log\left|\frac{dZ}{dZ'}\right| = 2\log|Z' - A'| + 2\log H',$$

d'où

$$\psi = -2\log|Z' - A'| - 2\log H' - \log\frac{d\Omega'}{d\omega} - h.$$

L'expression

$$2\log H' + \log\frac{d\Omega'}{d\omega} + h$$

reste finie; donc l'intégrale se réduit à

$$-2\int\frac{d\log|Z' - A'|}{dn}\,d\sigma.$$

Le même calcul montrerait que cette intégrale est égale à 4π.

Considérons une courbe entourant un point singulier de la troisième sorte; il vient

$$h = \left(2 - \frac{2}{n}\right) \log |Z - A| + h_1,$$

h_1 étant fini et, par conséquent,

$$\psi = \left(\frac{2}{n} - 2\right) \log |Z - A| - h_1 - \log \frac{d\Omega}{d\omega},$$

$h_1 + \log \frac{d\Omega}{d\omega}$ étant fini.

Notre intégrale est donc égale à

$$\left(\frac{2}{n} - 2\right) \int \frac{d \log |Z - A|}{dn} \, d\sigma$$

(dans cette formule, la lettre n figure deux fois dans deux sens différents; n est un nombre entier et dn une longueur infiniment petite; mais aucune confusion n'est à craindre), c'est-à-dire, toujours d'après le même raisonnement, à

$$4\pi\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Passons enfin aux sommets de la quatrième sorte; on a

$$h = 2 \log |Z - A| + 2 \log \log |Z - A| + h_1,$$

h_1 restant fini; notre intégrale se réduit donc à

$$-2 \int \frac{d \log |Z - A|}{dn} \, d\sigma - 2 \int \frac{d \log \log |Z - A|}{dn} \, d\sigma.$$

La première intégrale se réduit à 4π. Quant à la seconde, si nous posons

$$Z - A = \rho e^{i\omega}$$

et si nous supposons que la petite courbe a pour équation $\rho = \text{const.}$, elle se réduit à

$$+ 2 \int \frac{d \log \log \rho}{d\rho} \rho \, d\omega = 2 \int \frac{d\omega}{\log \rho}$$

et tend vers zéro quand ρ tend vers zéro.

L'intégrale se réduit donc finalement à 4π.

En résumé, nous trouvons :

1° Pour les m points de la première sorte :

$$-8m\pi;$$

2° Pour les $2m+2p-2$ points de la deuxième sorte :

$$8m\pi + 8p\pi - 8\pi;$$

3° Pour les q points de la troisième sorte (sommets de la deuxième espèce) :

$$4\pi\left(q - \sum \frac{1}{n}\right),$$

4° Pour les q' points de la quatrième sorte (sommets de la troisième espèce) :

$$4q'\pi.$$

Nous avons donc finalement

$$\int \Phi\, d\omega = 4\pi\left(2p - 2 + q + q' - \sum \frac{1}{n}\right).$$

Considérons le polygone fuchsien R_0, et soit $2k$ le nombre de ses côtés, h le nombre des cycles de sommets de première espèce, q et q' ceux des cycles de sommets de deuxième et de troisième espèce.

La somme des angles est égale à

$$2\pi\left(h + \sum \frac{1}{n}\right).$$

Le déficit angulaire (proportionnel à la surface non euclidienne) est

$$2\pi\left(k - 1 - h - \sum \frac{1}{n}\right).$$

On a, d'autre part,

$$p = \frac{k + 1 - h - q - q'}{2},$$

d'où

$$k = 2p - 1 + h + q + q',$$

ce qui montre que le déficit angulaire est égal à

$$2\pi\left(2p-2+q+q'-\sum\frac{1}{n}\right).$$

L'intégrale $\int\Phi\,d\omega$ est donc égale au double du déficit angulaire.

Elle est donc positive. C. Q. F. D.

Donc l'équation

$$DU = \Theta e^U - \Phi$$

peut s'intégrer; donc, dans tout type fuchsien, il y a une équation fuchsienne.

Le théorème fondamental est démontré pour toutes les fonctions fuchsiennes qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental; je me réserve d'y revenir en ce qui concerne les autres fonctions fuchsiennes et en particulier celles de la troisième famille.

XII. — Formation des équations fuchsiennes.

Soit

$$(1)\qquad \frac{d^2v}{dZ^2} = v\varphi(Z, Z')$$

notre équation fuchsienne, où φ est une fonction rationnelle des deux variables Z et Z' liées par la relation algébrique

$$(2)\qquad f(Z, Z') = 0.$$

Les deux intégrales fondamentales de cette équation seront

$$v_1 = \sqrt{\frac{dZ}{dz}}, \qquad v_2 = z\sqrt{\frac{dZ}{dz}}$$

et Z sera une fonction fuchsienne de z.

Si l'on désigne par v_1^0 et v_2^0 les imaginaires conjuguées de v_1 et v_2, on aura

$$v_1^0 = \sqrt{\frac{dZ_0}{dz_0}}, \qquad v_2^0 = z_0\sqrt{\frac{dZ_0}{dz_0}}.$$

D'autre part, nous avons posé

$$e^u = \frac{dz}{dZ}\frac{dz_0}{dZ_0}(1 - zz_0)^{-2},$$

d'où

$$e^{-\frac{u}{2}} = \sqrt{\frac{dZ}{dz}}\sqrt{\frac{dZ_0}{dz_0}}(1 - zz_0),$$

ou bien

$$e^{-\frac{u}{2}} = v_1 v_1^0 - v_2 v_2^0.$$

L'exponentielle $e^{-\frac{u}{2}}$ est une fonction de Z et Z_0 et nous avons, dans ce Mémoire, appris à former cette fonction pour les couples de valeurs Z et Z_0 qui sont imaginaires conjuguées.

Cela posé, il vient

$$\frac{d^2 e^{-\frac{u}{2}}}{dZ^2} = \frac{d^2 v_1}{dZ^2} v_1^0 - \frac{d^2 v_2}{dZ^2} v_2^0;$$

ou, à cause de l'équation (1),

$$\frac{d^2 e^{-\frac{u}{2}}}{dZ^2} = e^{-\frac{u}{2}} \varphi(Z, Z'),$$

ou enfin,

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2 u}{dZ^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{du}{dZ}\right)^2 = \varphi.$$

La fonction u est connue pour tous les couples de valeurs conjuguées de Z et Z_0, c'est-à-dire pour toutes les valeurs réelles de X et de Y (en posant $Z = X + iY$).

On connaît donc aussi pour toutes les valeurs réelles de X et de Y les dérivées $\frac{du}{dX}$ et $\frac{du}{dY}$ et, par conséquent,

$$\frac{du}{dZ} = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dX} + \frac{du}{i\,dY}\right),$$

$$\frac{d^2 u}{dZ^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 u}{dX^2} + \frac{2\,d^2 u}{i\,dX\,dY} - \frac{d^2 u}{dY^2}\right).$$

Nous connaissons donc φ et, par conséquent, l'équation fuchsienne est formée. Il est aisé de vérifier que φ est fonction de Z seulement; en effet,

$$\frac{d\varphi}{dZ_0} = -\frac{1}{2}\frac{d^3 u}{dZ^2\, dZ_0} + \frac{1}{2}\frac{du}{dZ}\frac{d^2 u}{dZ\, dZ_0}.$$

Or

$$\frac{d^2 u}{dZ\, dZ_0} = 2e^u, \qquad \frac{d^3 u}{dZ^2\, dZ_0} = 2e^u\frac{du}{dZ}.$$

Donc

$$\frac{d\varphi}{dZ_0} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On vérifierait facilement les autres propriétés de la fonction φ.

Ces considérations peuvent nous permettre d'entrevoir une autre démonstration de l'existence de l'équation fuchsienne.

Supposons que nous considérions les équations d'un même type fuchsien; la fonction φ qui y figurera ne sera pas entièrement arbitraire; elle dépendra seulement d'un nombre fini N de paramètres.

Les intégrales v_1 et v_2 dépendront de ces N paramètres et, en plus, de quatre constantes d'intégration.

Si l'on forme de cette manière l'expression

$$e^{-\frac{u}{2}} = v_1 v_1^0 - v_2 v_2^0,$$

ce sera une fonction de X et de Y qui dépendra de N + 4 paramètres. Seulement la fonction ainsi définie pourrait n'être pas uniforme sur la surface de Klein; on la rendrait uniforme par des coupures.

On formerait ensuite l'intégrale du § IX et l'on répéterait le raisonnement de ce paragraphe fondé sur le calcul des variations. Mais cette fois *ce raisonnement serait rigoureux,* parce que l'intégrale ne dépendrait plus d'une fonction arbitraire, mais d'un certain nombre de constantes arbitraires.

On serait donc certain qu'elle a un minimum.