JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE PICARD

Sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 2 (1886), p. 329-372.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1886_4_2__329_0>

Sur les intégrales de différentielles totales de seconde espèce;

PAR M. ÉMILE PICARD.

Dans un premier Mémoire (*Journal de Mathématiques*, 1885), j'ai commencé l'étude des intégrales de différentielles totales, relatives à une surface

$$f(x, y, z) = 0;$$

j'entends par là les intégrales de différentielles totales de la forme

$$(1) \qquad \int P\,dx + Q\,dy,$$

où P et Q sont des fonctions rationnelles de x, y et z. Je m'étais uniquement occupé, dans ce travail, des intégrales de première espèce, c'est-à-dire des intégrales qui restent finies pour toute valeur des variables indépendantes.

J'ai continué cette étude, en m'occupant des intégrales de *seconde* espèce, que je définis comme il suit.

Considérons une suite continue fermée à *une* dimension de valeurs de x et y, telle de plus que les valeurs initiales et finales de z soient les mêmes; nous pouvons appeler *cycle* une telle suite. L'intégrale (1) sera dite de seconde espèce, *si l'intégrale prise le long de tout cycle infiniment petit est nulle.*

Il est évident alors que, en représentant par x_0, y_0 un système quelconque de valeurs de x et y, et posant

$$x = x_0 + \lambda(t), \qquad y = y_0 + \mu(t),$$

λ et μ étant des fonctions holomorphes quelconques de t dans le voisinage de $t = 0$ et s'annulant pour cette valeur, l'intégrale deviendra une fonction de t présentant, dans le voisinage de $t = 0$, le caractère d'une fonction algébrique, c'est-à-dire développable en série suivant les puissances entières ou fractionnaires de t avec un nombre limité de termes à exposant négatif.

Une première proposition fondamentale est la suivante :

Si la surface f est la plus générale de son degré, toute intégrale de seconde *espèce se réduit à une* fonction rationnelle *de x, y et z. Ainsi, en faisant abstraction des fonctions rationnelles des coordonnées, il n'y a pas, pour une surface quelconque, d'intégrale de seconde espèce; c'est ce que nous avions déjà rencontré pour les intégrales de première espèce.*

La question qui se pose alors est de reconnaître si une surface possède des intégrales de seconde espèce autres que des fonctions rationnelles. La question est bien plus difficile à résoudre que le problème analogue pour les intégrales de première espèce. Sa solution forme l'objet principal du deuxième Chapitre de ce Mémoire.

Dans le troisième Chapitre, je reviens sur les fonctions hyperabéliennes et hyperfuchsiennes, dont je me suis occupé précédemment dans différents Mémoires. On sait que toutes les fonctions de cette nature, correspondant à un groupe donné, peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide de trois d'entre elles x, y, z, liées par une relation algébrique

$$f(x, y, z) = 0.$$

Or une telle surface présente précisément ce caractère remarquable *de posséder en général des intégrales de seconde espèce.* Ceci m'a permis de répondre à la question suivante qui m'avait longtemps préoccupé.

Peut-on, avec les fonctions hyperfuchsiennes (ou hyperabéliennes), engendrer toutes les fonctions algébriques de deux variables indépendantes, ou, ce qui revient au même, obtenir toutes les surfaces algébriques? La réponse, pour être *négative*, ne m'en semble pas moins présenter quelque intérêt.

Dans mon premier Mémoire, je m'étais borné au cas où les surfaces considérées ne présentaient que des singularités *ordinaires*. Dans une Lettre récente, M. Nœther veut bien me faire savoir que cette restriction peut être facilement levée. On trouvera d'ailleurs dans les *Sitzungsberitchen* de la Société d'Erlangen (séance du 15 février 1886), une Note dans laquelle l'éminent géomètre expose brièvement la méthode dont il a fait usage. La même méthode de discussion s'appliquera évidemment aux intégrales de seconde espèce.

CHAPITRE PREMIER.

1. Nous allons tout d'abord nous placer dans un cas très simple, en examinant le cas où l'équation de la surface serait de la forme

$$z^2 = f(x, y),$$

f étant un polynôme.

La forme générale des intégrales de différentielle totale sera dans ce cas

$$(1) \qquad \int \frac{P\,dx + Q\,dy}{M\sqrt{f(x,y)}},$$

P, Q et M étant des polynômes en x et y.

Quand, partant d'un système de valeurs initiales (x_0, y_0, z_0), le *chemin* d'intégration se termine en un *point* (x, y, z), les diverses valeurs que prend ainsi l'intégrale, quand le chemin varie, ne diffèrent que de quantités constantes; ce sont les périodes de l'intégrale. Considérons en particulier le cas où y resterait constant; l'intégrale se réduit à

$$(2) \qquad \int \frac{P\,dx}{M\sqrt{f(x,y)}};$$

les périodes de cette intégrale sont évidemment en même temps des périodes de l'intégrale (1); par suite elles sont *constantes*, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas de la valeur arbitraire donnée à y.

Cette remarque, si simple, va être fondamentale pour la suite; et nous allons immédiatement démontrer que si le polynôme $f(x,y)$ est arbitraire, c'est-à-dire le plus général d'un degré m, il ne peut exister d'autres intégrales de seconde espèce que les fonctions rationnelles de x, y et z. Donnons en effet à y une valeur arbitraire : l'équation

$$f(x,y)=0 \tag{3}$$

aura m racines distinctes; si l'on considère x comme fonction de y, pour chaque valeur singulière de y, deux valeurs de x seulement deviendront égales. Soient, pour une valeur arbitraire et non singulière y_0 de y,

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_m$$

les racines de l'équation (3). On peut les supposer rangées dans un ordre tel que, y allant de y_0 à une certaine valeur singulière y'_0 de y par un chemin convenable, x_1 et x_2 deviennent égales; puis ensuite, y allant de y_0 à une autre valeur singulière convenable, x_2 et x_3 deviendront égales, et ainsi de suite pour x_3, x_4, $\ldots$, x_{m-1}, x_m; y partant de y_0 et arrivant à la première de ces valeurs singulières, les racines varieront et deviendront

$$x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_m,$$

et l'on aura

$$x'_1=x'_2,$$

les autres racines étant distinctes.

Traçons dans le plan de la variable x un contour fermé simple C, partant d'un point arbitraire x_0 et revenant à ce point et assujetti aux conditions suivantes : il ne rencontre aucun des chemins décrits par les racines x quand y varie, comme il a été indiqué de y_0 à y'_0; il comprend seulement au début à son intérieur les deux racines x_1 et x_2, et, par suite, pour la valeur finale y'_0 de y, la seule racine double $x'_1=x'_2$; il est possible de satisfaire à ces conditions.

Ceci posé, revenons à l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx}{M\sqrt{f(x,y)}},$$

dont les périodes, comme nous l'avons dit, ne dépendent pas de y.

Si nous faisons d'abord $y = y_0$, au contour C va correspondre une période de cette intégrale : je dis que cette période sera nulle. En effet, faisons varier y d'une manière continue, et par le chemin convenable, depuis y_0 jusqu'à y'_0 ; la valeur de la période ne change pas : voyons donc ce qu'elle devient à la fin.

Or, pour $y = y'_0$, le polynôme $f(x,y)$ a une racine double $x'_1 = x'_2$, qui est à l'intérieur du contour C, mais le point $x = x'_1$ ne peut être un point logarithmique pour l'intégrale

$$\int \frac{P(x, y'_0)\,dx}{M(x, y'_0)\sqrt{f(x, y'_0)}},$$

parce qu'alors l'intégrale (1) ne serait pas de seconde espèce. Donc l'intégrale, prise le long du contour C, est nulle, et, par suite, la période envisagée de l'intégrale (1) est également nulle, comme nous voulions l'établir. Il est d'ailleurs évident que toutes les périodes de cette intégrale peuvent être obtenues en employant des contours analogues à C; par suite, nous pouvons affirmer que les périodes de l'intégrale de différentielle totale de seconde espèce

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{M\sqrt{f(x,y)}}$$

sont nulles, *et l'on en conclut alors immédiatement que cette intégrale est une fonction rationnelle de x, y et $\sqrt{f(x,y)}$*.

2. Nous avons simplement voulu montrer, dans le paragraphe précédent, que toutes les intégrales de seconde espèce, attachées à la surface

$$z^2 = f(x,y),$$

étaient des fonctions algébriques, quand le polynôme $f(x, y)$ était le plus général de son degré; mais on voit bien facilement un cas très étendu où la surface précédente n'aura pas d'intégrales de seconde espèce (autres, bien entendu, que les fonctions rationnelles de x, y, z), quoique le polynôme f puisse être très particulier.

Envisageons encore, à cet effet, l'équation

$$f(x, y) = 0,$$

le polynôme f n'étant pas nécessairement, d'ailleurs, irréductible. A une valeur arbitraire y_0 de y correspondent m valeurs de x, x_1, x_2, ..., x_m, et considérons les valeurs de y, pour lesquelles l'équation précédente a une racine *double*; nous laissons par conséquent de côté les valeurs pour lesquelles il y aurait une racine d'un degré de multiplicité *supérieur à deux*. Désignons d'une manière générale par y'_0 une valeur de y pour laquelle l'équation a une racine double; deux cas pourront se présenter :

Ou bien on pourra disposer les racines

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_m$$

de telle manière que, y allant de y_0 à une racine y'_0 par un chemin convenable, x_1 et x_2 deviennent égales, puis, y allant de y_0 à une racine y'_0, *une* des racines x_1 ou x_2 deviendra égale à x_3, et ensuite on pourra trouver un chemin tel de y vers une racine y'_0 que *une* des racines x_1, x_2, x_3 deviendra égale à la racine x_4, et ainsi de suite.

Ou bien cette disposition sera impossible, et alors les racines se partageront en un certain nombre r de groupes

$$G_1, \quad G_2, \quad \ldots, \quad G_r,$$

tels que pour chacun de ces groupes on puisse réaliser la disposition qui vient d'être indiquée; dans ces conditions, une racine d'un groupe ne pourra devenir égale à une racine d'un autre groupe que pour une valeur de y à laquelle correspondra une racine triple au moins de l'équation

$$(1) \qquad f(x, y) = 0.$$

3. Ceci posé, il n'y aura certainement pas dans *le premier cas d'autres intégrales de seconde espèce que des fonctions algébriques de x, y et z*; on peut en effet répéter, sans y rien changer, ce qui a été dit au paragraphe précédent et montrer ainsi que toutes les périodes sont nulles. Dans le cas où le polynôme $f(x, y)$ serait irréductible, et où les lacets binaires fondamentaux relatifs à la fonction algébrique x de y définie par l'équation (1) proviendraient seulement de racines doubles, la première circonstance se trouvera évidemment réalisée.

Pour ce qui est du second cas, nous pouvons remarquer que le nombre des périodes ne pourra pas dépasser $r - 1$, r étant le nombre des groupes G; les périodes provenant de deux racines d'un même groupe sont en effet nulles, d'après le raisonnement employé plus haut, et il ne peut subsister que des périodes provenant de racines n'appartenant pas à un même groupe, ce qui fait par conséquent au plus $r - 1$.

4. Considérons maintenant le cas le plus général auquel peut être étendu le résultat trouvé pour les surfaces précédentes. Nous voulons montrer que, *pour la surface la plus générale*

$$f(x, y, z) = 0$$

de degré m, les intégrales de seconde espèce sont fonctions rationnelles de x, y, z.

Soient, en effet, une telle intégrale représentée par

$$\int P\,dx + Q\,dy,$$

où P et Q sont fonctions rationnelles de x, y, z; nous donnons à y une valeur arbitraire, mais fixe, et nous envisageons l'intégrale

$$\int P\,dx.$$

On voit, en raisonnant comme au § 1, que les périodes de cette intégrale abélienne de seconde espèce ne dépendent pas de y : cette remarque va nous conduire, comme précédemment, à la démonstration du théorème énoncé.

Considérons les deux relations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad f'_z(x, y, z) = 0,$$

on peut les regarder comme définissant un point analytique (z, x), fonction algébrique de la variable y.

Il y aura certaines valeurs singulières de y pour lesquelles deux valeurs de (z, x), et deux seulement (le polynôme f étant le plus général de son degré) deviendront égales; soient, pour une valeur arbitraire et non singulière y_0 de y,

$$(z_1, x_1), \quad (z_2, x_2), \quad \ldots, \quad (z_N, x_N)$$

les N déterminations de (z, x). On peut les supposer rangées dans un ordre tel que, y allant de y_0 à une certaine valeur singulière y'_0 de y,

$$(z_1, x_1) \quad \text{et} \quad (z_2, x_2)$$

deviennent égaux, puis ensuite y allant de y_0 à une autre valeur singulière convenable,

$$(z_2, x_2) \quad \text{et} \quad (z_3, x_3)$$

deviendront égaux, et ainsi de suite pour

$$(z_3, x_3) \quad \text{et} \quad (z_4, x_4), \quad \ldots, \quad (z_{N-1}, x_{N-1}) \quad \text{et} \quad (z_N, x_N);$$

y partant de y_0 et arrivant à la première de ces valeurs singulières y'_0, les points analytiques (z, x) varieront et deviendront

$$(z'_1, x'_1), \quad (z'_2, x'_2), \quad \ldots, \quad (z'_N, x'_N),$$

et l'on aura

$$(z'_1, x'_1) = (z'_2, x'_2),$$

les autres valeurs étant distinctes.

Ceci posé, les points analytiques $(z_1, x_1), \ldots, (z_N, x_N)$, qui sont nécessairement des points de ramification de la fonction algébrique z

de x définie par l'équation

$$f(x, y_0, z) = 0,$$

doivent nécessairement jouir de la propriété suivante : on peut tracer dans le plan des x un contour simple enveloppant seulement les points x_1 et x_2, et tel qu'après un tour complet de la variable x le long de ce contour, *toute* racine z de l'équation précédente reprenne la même valeur.

Pour le démontrer, remarquons que l'équation entre x et z

$$f(x, y'_0, z) = 0$$

définit une courbe qui a au point

$$x = x'_1 = x'_2, \qquad z = z'_1 = z'_2$$

un point double dont les tangentes sont distinctes. Ceci est évident, en langage géométrique, car $y = y'_0$ représente un plan tangent à la surface, x et z du point de contact étant précisément x'_1 et z'_1.

Figurons maintenant dans le plan des x le point $x = x'_1 = x'_2$; quand y varie d'une manière continue de y'_0 à y_0 par le chemin indiqué, x'_1 vient en x_1 et x'_2 en x_2. Tout contour simple enveloppant les points x_1, x_2, x'_1, et n'étant traversé par aucun des chemins décrits par les autres racines (il est évidemment possible d'en former un) remplira la condition cherchée, car la remplissant pour $y = y'_0$, il la remplira pour toutes les valeurs considérées de y, de y'_0 à y_0.

Ces préliminaires indiqués, nous envisageons maintenant la surface de Riemann correspondant à la relation algébrique entre z et x

$$(\mathrm{I}) \qquad f(x, y_0, z) = 0.$$

Nous allons tracer sur cette surface un système particulier de coupures. Prenons comme première coupure la ligne fermée a_1, dont nous venons de parler, tracée autour des points analytiques (x_1, z_1), (x_2, z_2); elle est évidemment une limite non complète et peut, par suite, être prise comme coupure. Prenons comme seconde coupure a_2 une ligne fermée joignant, par rapport aux deux points (x_2, z_2), (x_3, z_3), le même rôle que a_1 par rapport aux deux premiers points critiques; nous pouvons d'ailleurs nous arranger de manière que a_2 rencontre a_1 en *un* point. On continuera ainsi en obtenant les coupures $a_3, a_4, \ldots, a_{N-1}$; à chacune de ces coupures correspondra une période A, ces périodes n'étant pas toutes, d'ailleurs, nécessairement distinctes. De plus, toutes les périodes d'une intégrale abélienne de seconde espèce attachée à la courbe (I) seront réductibles à des sommes de multiples des périodes A, car toute ligne fermée tracée sur la surface de Riemann se ramènera à un point après avoir traversé une ou plusieurs fois un certain nombre de coupures A.

Prenons donc une des coupures a, soit a_1, et cherchons quelle peut être la valeur de la période correspondante; nous allons voir de suite qu'elle est nulle pour l'intégrale

$$\int \mathrm{P}\, dx.$$

En effet, faisons, comme plus haut, varier y d'une manière continue de y_0 à y'_0, la période ne devra pas changer; or elle est nécessairement nulle pour $y = y'_0$, puisque les deux points de ramification (x_1, z_1) et (x_2, z_2) disparaissent.

Nous pouvons donc affirmer que les périodes de l'intégrale

$$\int \mathrm{P}\, dx + \mathrm{Q}\, dy$$

sont nulles, et, par suite, comme nous l'avons énoncé, *cette intégrale est une fonction rationnelle de x, y, z.*

CHAPITRE II.

5. Le théorème qui précède conduit immédiatement à se poser la question suivante : Comment pourra-t-on reconnaître si une surface algébrique possède des intégrales de seconde espèce qui ne soient pas des fonctions rationnelles, et comment pourra-t-on obtenir ces inté-

grales quand elles existeront? Tels sont les problèmes importants et difficiles qui vont nous occuper dans ce Chapitre.

Prenons d'abord, comme nous l'avons fait dans la démonstration du précédent théorème, la surface

$$z^2 = f(x, y),$$

et soit l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{M\sqrt{f(x, y)}},$$

P, Q et M étant des polynômes en x et y. On a la condition d'intégrabilité

$$M\left(P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2f(x, y)\left[M\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + Q\frac{\partial M}{\partial x} - P\frac{\partial M}{\partial y}\right];$$

$M(x, y)$ sera le produit d'un certain nombre de facteurs

$$[A(x, y)]^\alpha [B(x, y)]^\beta \ldots [L(x, y)]^\lambda,$$

les polynômes A, B, ..., L étant irréductibles, et aucun d'eux, comme on peut le supposer, n'étant divisible par y. Soit d'abord le cas le plus simple où

$$M = A^\alpha(x, y)$$

la condition d'intégrabilité s'écrira

$$A(x, y)\left(P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2f(x, y)\left[A\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \alpha Q\frac{\partial A}{\partial x} - \alpha P\frac{\partial A}{\partial y}\right],$$

et supposons que $A(x, y)$ soit premier avec $f(x, y)$. On voit alors que

$$Q\frac{\partial A}{\partial x} - P\frac{\partial A}{\partial y}$$

est divisible par $A(x, y)$.

Ceci posé, considérons l'intégrale

$$\int \frac{P(x, y)\,dx}{A^\alpha\sqrt{f(x', y)}},$$

en y regardant y comme un paramètre.

On peut, comme il est bien connu, retrancher de $\frac{P(x,y)}{A^{\alpha}\sqrt{f(x,y)}}$ une expression de la forme

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\lambda\sqrt{f(x,y)}}{A^{\alpha-1}}\right],$$

λ étant un polynôme en x, telle que la différence ne contienne plus A au dénominateur qu'à la puissance $\alpha - 1$. Le polynôme λ de x aura ses coefficients qui seront des fractions rationnelles de y. Nous pouvons l'écrire sous la forme

$$\frac{\lambda(x,y)}{\varphi(y)},$$

λ et φ étant des polynômes. On aura alors nécessairement

$$P + (\alpha - 1)\frac{\lambda(x,y)}{\varphi(y)}\frac{\partial A}{\partial x}f(x,y) = \frac{\mu(x,y)}{\varphi(y)}A(x,y),$$

et, comme $Q\frac{\partial A}{\partial x} - P\frac{\partial A}{\partial y}$ est divisible par A, il en résultera une identité de la forme

$$Q + (\alpha - 1)\frac{\lambda(x,y)}{\varphi}\frac{\partial A}{\partial y}f(x,y) = \frac{\mu_1(x,y)}{\varphi(y)}A(x,y).$$

Retranchons maintenant de

$$\frac{P\,dx + Q\,dy}{A^{\alpha}\sqrt{f(x,y)}}$$

l'expression différentielle exacte

$$d\,\frac{\lambda(x,y)\sqrt{f(x,y)}}{\varphi(y)A^{\alpha-1}},$$

la différence sera évidemment de la forme

$$\frac{P_1\,dx + Q_1\,dy}{\psi(y)\,A^{\alpha-1}\sqrt{f(x,y)}}.$$

Nous avons ainsi diminué d'une unité le degré de A et introduit seulement au dénominateur le polynôme $\psi(y)$. Nous pourrons évidemment continuer ainsi jusqu'à ce que nous arrivions à une différentielle totale de la forme

$$\frac{P_{\alpha-1}\,dx + Q_{\alpha-1}\,dy}{\chi(y)\,A\sqrt{f(x,y)}};$$

puisque l'intégrale proposée est de seconde espèce, il est nécessaire que $P_{\alpha-1}$ et $Q_{\alpha-1}$ soient divisibles par $A(x,y)$, car cette différentielle nous conduirait, dans le cas contraire, à une intégrale de troisième espèce. Nous avons donc une intégrale de la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\chi(y)\sqrt{f(x,y)}},$$

après avoir extrait de la proposée une partie algébrique. P et Q sont des polynômes en x et y, et $\chi(y)$ est un polynôme dépendant seulement de y. La conclusion serait encore la même, on le voit aisément, si M avait plusieurs facteurs irréductibles au lieu d'un seul.

6. Considérons donc l'intégrale précédente, et, y étant regardé comme un paramètre, arrêtons-nous d'abord sur l'intégrale

$$\int \frac{P\,dx}{\chi(y)\sqrt{f(x,y)}};$$

on sait qu'en retranchant de cette intégrale la dérivée d'une expression de la forme

$$P_1(x)\sqrt{f},$$

on peut ramener le degré de P à être $m-2$, si m est, comme plus haut, le degré de f.

Ici les coefficients de $P_1(x)$ dépendront nécessairement de y, et ce seront évidemment des fractions rationnelles de y, dont le dénominateur sera $\chi(y)$. Écrivons donc cette dernière expression sous la forme

$$\frac{P_1(x,y)\sqrt{f(x,y)}}{\chi(y)},$$

où $P_1(x, y)$ est un polynôme. Considérons alors la différence

$$\frac{P\,dx + Q\,dy}{\chi(y)\sqrt{f(x,y)}} - d\left[\frac{P_1(x,y)\sqrt{f(x,y)}}{\chi(y)}\right],$$

elle aura la forme, où nous gardons les mêmes notations,

$$\frac{P\,dx + Q\,dy}{\chi(y)\sqrt{f(x,y)}},$$

avec cette circonstance capitale que $P(x, y)$ est au plus de degré $m-2$ en x.

La condition d'intégrabilité

$$\chi(y)\left(P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2f(x,y)\left[\chi(y)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) - P\frac{\partial \chi}{\partial y}\right]$$

montre de suite que $Q(x, y)$ sera, par rapport à x, de degré au plus égal à $m-1$.

Nous avons donc une intégrale où les degrés par rapport à x sont limités. Écrivons cette intégrale sous la forme

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{f(x,y)}},$$

où

$$P = a_0 x^{m-2} + a_1 x^{m-3} + \ldots + a_{m-2},$$
$$Q = b_0 x^{m-1} + b_1 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1},$$

les a et les b étant des fonctions rationnelles de y.

Prenons maintenant la condition d'intégrabilité

$$(1) \qquad P\frac{\partial f}{\partial y} - Q\frac{\partial f}{\partial x} = 2f(x,y)\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$

et soit

$$f(x,y) = x^m + \varphi_1(y)x^{m-1} + \ldots + \varphi_m(y).$$

Les deux membres de l'identité (1) vont être des polynômes en x de degré $2m-2$; nous aurons donc à égaler $2m-1$ coefficients à zéro, et dans ces $(2m-1)$ équations figureront les $2m-1$ fonctions de y,

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_{m-2}, \quad b_0, \quad b_1, \quad \ldots, \quad b_{m-1}.$$

Pour faire la discussion de ces équations, supposons m impair et égal à $2p+1$.

En égalant d'abord à zéro dans l'identité (1) les coefficients de x^{2m-2}, x^{2m-3}, ..., x^{m-1}, nous obtenons m identités, qui nous permettent d'exprimer, de proche en proche,

$$b_0, \quad b_1, \quad \ldots, \quad b_{m-1}$$

à l'aide des a et de leur dérivée première. Portant ces valeurs dans les $(m-1)$ autres identités que nous avons encore à écrire, et qui sont fournies par la considération des coefficients de x^{m-2}, x^{m-3}, ..., x_0, nous obtiendrons $(m-1)$ équations linéaires et homogènes entre

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_{m-2}, \quad \frac{da_0}{dy}, \quad \frac{da_1}{dy}, \quad \ldots, \quad \frac{da_{m-2}}{dy},$$

les coefficients dans ces équations étant évidemment des polynômes en y. Nous trouvons donc un système de $(m-1)$ équations linéaires du premier ordre, auquel doivent satisfaire les $(m-1)$ fonctions rationnelles a_0, a_1, ..., a_{m-2}; on pourra en tirer a_1, a_2, ..., a_{m-2} exprimées linéairement au moyen de a_0 et de ses dérivées, et quant à a_0, il satisfera à une équation linéaire E d'ordre $m-1$, dont les coefficients seront des polynômes en y.

Nous nous trouvons donc ramenés à la question suivante : Après avoir formé l'équation linéaire d'ordre $2p$, à laquelle satisfait a_0, équation dont les coefficients sont des polynômes en y, nous devons chercher si l'on peut satisfaire à cette équation en prenant pour a_0 une fonction rationnelle de y. C'est là un problème que l'on sait résoudre.

Supposons donc que l'on ait trouvé une fonction rationnelle de y, satisfaisant à l'équation précédente; on en déduira, pour a_1, a_2, ..., a_{m-2}, des fonctions rationnelles de y, et par suite, pour b_0, b_1, ..., b_{m-1}.

7. Nous aurons donc ainsi une intégrale de différentielle totale; avant de discuter cette expression, nous avons à faire une remarque importante sur l'équation linéaire E d'ordre $2p$, dont il vient d'être question. Nous pouvons retrouver cette équation en nous servant de considérations bien différentes. Envisageons, à cet effet, l'intégrale

$$\int \frac{(a_0 x^{m-2} + a_1 x^{m-3} + \ldots + a_{m-2})\, dx}{\sqrt{f(x,y)}},$$

en considérant y comme un paramètre arbitraire, et $a_0, a_1, \ldots, a_{m-2}$ étant des fonctions pour le moment arbitraires de ce paramètre. Cette intégrale a nécessairement $2p$ périodes, et ces périodes dépendront de y. Cherchons à déterminer les $2p$ fonctions

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_{m-2},$$

de telle manière que ces périodes soient indépendantes de y, et soient égales à des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p}$. Pour une valeur arbitraire donnée à y, considérons $2p$ cycles donnant les $2p$ périodes, et soient

$$P_{1,i}, \quad P_{2,i}, \quad \ldots, \quad P_{2p,i}$$

les $2p$ périodes de l'intégrale

$$\int \frac{x^{m-i-1}\, dx}{\sqrt{f(x,y)}};$$

(i allant de 1 à $2p$); on aura les $2p$ équations

$$\begin{array}{l}
a_0 P_{1,1} + a_1 P_{2,1} + \ldots + a_{m-2} P_{2p,1} = \alpha_1, \\
a_0 P_{1,2} + a_1 P_{2,2} + \ldots + a_{m-2} P_{2p,2} = \alpha_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_0 P_{1,2p} + a_1 P_{2,2p} + \ldots + a_{m-2} P_{2p,2p} = \alpha_{2p}.
\end{array}$$

On sait que le déterminant de ces équations n'est pas identiquement nul, car ce sont les périodes de $2p$ intégrales distinctes de seconde espèce. On tirera donc de ces équations

$$\begin{aligned}
a_0 &= \alpha_1 Q_{1,1} + \alpha_2 Q_{2,1} + \ldots + \alpha_{2p} Q_{2p,1},\\
a_0 &= \alpha_1 Q_{1,2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{2p} Q_{2p,2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a_{m-2} &= \alpha_1 Q_{1,2p} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{2p} Q_{2p,2p};
\end{aligned}$$

les P et par suite les Q seront des fonctions de y, qui s'exprimeront évidemment par des intégrales définies.

Revenons maintenant à l'équation E; quand a_0 satisfait à cette équation, on peut déterminer les a et les b de manière à avoir une intégrale de différentielle totale

$$\int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{f(x,y)}}, \tag{1}$$

où $P = a_0 x^{m-2} + \ldots + a_{m-2}$, mais alors il est manifeste que les périodes de l'intégrale

$$\int \frac{(a_0 x^{m-2} + \ldots + a_{m-2})\,dx}{\sqrt{f(x,y)}},$$

qui sont nécessairement des périodes de l'intégrale (1), ne dépendent pas de y.

On en conclut alors que *l'équation* E *a pour intégrale générale*

$$a_0 = \alpha_1 Q_{1,1} + \alpha_2 Q_{2,1} + \ldots + \alpha_{2p} Q_{2p,1},$$

où les α *sont les constantes arbitraires.*

8. Nous avons dit que l'équation E était d'ordre $2p$; ce nombre est une limite supérieure de l'ordre de l'équation qui pourra être moindre. Considérons, pour une valeur donnée à i, les $2p$ périodes

$$P_{1,i},\quad P_{2,i},\quad \ldots,\quad P_{2p,i},$$

ce sont des fonctions de y. Elles ont déjà été étudiées, à ce point de vue, par M. Fuchs, dans un intéressant Mémoire qui fait partie du tome 71 du *Journal de Crelle*. Ces fonctions satisfont à une équation linéaire dont les coefficients sont des polynômes en y, et dont l'ordre d est au plus égal à $2p$. Les points singuliers de cette équation différentielle correspondent aux valeurs de y, pour lesquelles l'équation en x

$$f(x, y) = 0,$$

a des racines égales. Les $2p$ équations correspondant à $i = 1, 2, \ldots, 2p$ ont les mêmes points singuliers, et bien évidemment aussi le même groupe. L'équation E sera donc aussi d'ordre d, et ce nombre pourra être moindre que $2p$.

Ceci posé, supposons que l'équation E admette une intégrale rationnelle E_0, et discutons l'intégrale de différentielle totale correspondante

$$I = \int \frac{P\,dx + Q\,dy}{\sqrt{f(x, y)}},$$

qui se trouve alors déterminée. On sait, par les éléments, que cette intégrale peut se mettre sous la forme

$$\int_{x_0}^{x} \frac{P(x, y)\,dx}{\sqrt{f(x, y)}} + \int_{y_0}^{y} \frac{Q(x_0, y)\,dy}{\sqrt{f(x_0, y)}},$$

x_0 et y_0 étant arbitraires. Désignons d'une manière générale par b les valeurs de y, en nombre déterminé, pour lesquels l'équation en x

$$f(x, y) = 0$$

a deux ou plusieurs racines égales.

Les deux systèmes de valeurs finies de (x, y) pour lesquelles l'intégrale I, fonction des deux variables x et y, puisse devenir infinie sont ceux dans lesquels la valeur de y est égale à une quantité b. Considérons donc un tel système de valeurs

$$y = b, \qquad x = \alpha,$$

α n'étant pas égale à une racine multiple de l'équation

$$f(x, b) = 0.$$

En mettant en évidence la puissance de $(y-b)$ figurant au dénominateur des coefficients de P et Q, nous écrirons l'intégrale sous la forme

$$\frac{1}{(y-b)^\beta}\int_{x_0}^{x}\frac{P_1(x,y)\,dx}{\sqrt{f(x,y)}}+\int_{y_0}^{y}\frac{Q_1(x_0,y)\,dy}{(y-b)^\beta\sqrt{f(x_0,y)}}.$$

Or la première expression ne présente aucune difficulté, aucun logarithme ne pouvant s'introduire, car l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x}\frac{P_1(x,y)\,dx}{\sqrt{f(x,y)}}$$

présentera, dans le voisinage de $x=\alpha$, $y=\beta$, le caractère d'une fonction algébrique, puisque α n'est pas racine ou est seulement racine simple de l'équation $f(x,b)=0$.

Considérons maintenant la seconde intégrale, qui ne dépend que de y; le point $y=b$ pourrait être un point critique logarithmique; la période polaire correspondante se calculera aisément, et l'on remarquera qu'elle ne dépend pas de la valeur de x_0, car les périodes de la seconde intégrale sont, comme nous l'avons déjà utilisé plus d'une fois, indépendantes de la valeur de x. On devra écrire que cette période polaire est nulle, et nous obtiendrons ainsi de nouvelles conditions qui devront nécessairement être remplies pour que l'intégrale soit de seconde espèce.

Les conditions précédentes étant remplies, l'intégrale

$$\int^{x,y}\frac{P\,dx+Q\,dy}{\sqrt{f(x,y)}}$$

aura certainement les caractères d'une fonction algébrique des deux variables indépendantes x et y, dans le voisinage de tout système de valeurs finies de x et y, sauf aux points $(x=a, y=b)$, que nous n'avons pas encore étudiés, où a désigne une racine multiple de l'équation

$$f(x,b)=0,$$

points qui sont nécessairement en nombre limité. Mais ces systèmes de points en nombre limité ne donneront naissance à aucune difficulté. On voit, en effet, que l'intégrale prise le long d'un cycle fermé infiniment petit tracé dans le voisinage de ce point est nulle, car on peut toujours, par le cycle fermé, qui est à une dimension, faire passer un continuum à deux dimensions, ne contenant pas le point $x=a, y=b$. Il n'y aura alors sur ce continuum, à l'intérieur du cycle, aucun point singulier logarithmique de l'intégrale, donc elle sera nulle.

Ainsi, en résumé, nous savons reconnaître si la surface

$$z^2=f(x,y)$$

admet des intégrales de différentielles totales de seconde espèce, et trouver les intégrales à l'aide desquelles on peut linéairement former toutes les autres, à une fonction algébrique près.

9. Il nous faut maintenant examiner le cas général d'une surface donnée par une équation

$$f(x,y,z)=0.$$

Nous avons eu besoin, dans les paragraphes précédents, de nous servir des $2p$ intégrales de seconde espèce auxquelles on peut ramener toutes les autres. On ne fait pas généralement de pareilles réductions pour les intégrales abéliennes attachées à une courbe dont l'équation n'a pas la forme hyperelliptique. Il est donc indispensable d'ouvrir ici une parenthèse pour combler cette lacune.

Considérons la courbe algébrique d'ordre m

$$f(x,y)=0,$$

pour laquelle nous supposons, comme on le fait habituellement dans la théorie des intégrales abéliennes, que les m directions asymptotiques sont distinctes et différentes de l'axe des y. On sait que les intégrales abéliennes attachées à cette courbe se ramènent aux deux types

$$\text{(T)} \qquad \int \frac{P(x,y)\,dx}{f'_y}, \quad \int \frac{Q(x,y)\,dx}{(x-a)^\alpha f'_y},$$

P et Q étant des polynômes. Nous allons d'abord supposer que la courbe proposée n'a pas de points doubles.

Considérons d'abord la seconde intégrale

$$(1) \qquad \int \frac{Q(x,y)\,dx}{(x-a)^\alpha f'_y},$$

la réduction de cette intégrale se fera immédiatement, si l'on suppose que la droite $x=a$ n'est pas tangente à la courbe. Je dis en effet qu'on peut alors retrancher de l'intégrale une expression de la forme

$$\frac{\lambda(x,y)}{(x-a)^{\alpha-1}},$$

où $\lambda(x,y)$ est un polynôme convenablement choisi en x et y, de telle sorte que cette différence soit une intégrale de même forme, mais où α sera remplacé par $\alpha-1$; en effet, il suffit évidemment pour cela que

$$(2) \qquad P(x,y)-(\alpha-1)\lambda(x,y)f'_y$$

puisse se mettre sous la forme

$$(x-a)P_1(x,y).$$

Or nous n'avons qu'à choisir $\lambda(x,y)$ de telle sorte que, aux mêmes points de rencontre

$$(a,b_1), \quad (a,b_2), \quad \ldots, \quad (a,b_m)$$

de $x=a$ avec la courbe, le polynôme (2) s'annule; comme tous les points de rencontre sont simples, ce polynôme sera nécessairement de la forme

$$(x-a)P_1(x,y)+f(x,y)P_2(x,y);$$

on pourra prendre simplement pour λ un polynôme en y, $\lambda(y)$, de degré égal à $m-1$; les conditions précédentes donneront ses valeurs pour $y=b_1, b_2, \ldots, b_m$.

L'intégrale (1) se trouve donc ramenée à une autre de même forme, mais où α est remplacé par $\alpha - 1$; en continuant de proche en proche, on arrivera à

$$\int \frac{Q(x,y)\,dx}{(x-a)f'_y}$$

si l'intégrale considérée est de seconde espèce; il en sera de même de cette dernière; par suite $Q(x,y)$ devra s'annuler aux m points de rencontre de $x = a$ avec la courbe et l'on aura, par suite,

$$\frac{Q(x,y)}{x-a} = P(x,y);$$

l'intégrale aura donc la forme

$$\int \frac{P(x,y)\,dx}{f'_y},$$

$P(x,y)$ étant un polynôme.

Il nous faut maintenant reprendre l'intégrale (1) en supposant que $x = a$ soit tangente à la courbe f. Soit $(y = b,\ x = a)$ le point M de contact, et la droite rencontrera la courbe en $(m-2)$ autres points $M_1, M_2, \ldots, M_{m-2}$, que nous pouvons supposer distincts. Considérons l'expression

$$\frac{\lambda(x,y)}{(x-a)^\alpha};$$

on peut faire passer la courbe $\lambda(x,y) = 0$ par chacun des points M_1, $M_2, \ldots, M_{m-2}$. Soit (a, b_1) le point M_1.

Le développement de l'intégrale commence par le terme

$$-\frac{1}{\alpha-1}\,\frac{Q(a,b_1)}{(x-a)^{\alpha-1}f'_{b_1}};$$

on peut choisir λ de manière qu'il en soit de même pour l'expression

$$\frac{\lambda(x,y)}{(x-a)^\alpha},$$

il suffira que

$$\frac{\partial\lambda}{\partial a}\frac{\partial f}{\partial b_1} - \frac{\partial\lambda}{\partial b_1}\frac{\partial f}{\partial a} = -\frac{1}{\alpha-1}Q(a,b_1);$$

supposons remplie une condition analogue pour les points

$$(a, b_2), \ldots, (a, b_{m-2}).$$

Passons au point (a, b); on a dans le voisinage de $x = a$

$$y - b = \mu(x-a)^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

développement procédant suivant les puissances de $(x-a)^{\frac{1}{2}}$. Le premier terme du développement de l'intégrale (1) sera $\dfrac{A}{(x-a)^{\alpha-\frac{1}{2}}}$, A étant un coefficient facile à calculer.

Supposons encore que $\lambda(x, y)$ s'annule pour $x = a, y = b$, le premier terme du développement de $\dfrac{\lambda(x,y)}{(x-a)^\alpha}$ sera

$$\frac{\mu \dfrac{\partial\lambda}{\partial b}}{(x-a)^{\alpha-\frac{1}{2}}}.$$

Posons $\mu \dfrac{\partial\lambda}{\partial b} = A$; nous venons d'imposer un certain nombre de conditions au polynôme $\lambda(x, y)$, on pourra évidemment les remplir. Il suffirait de prendre pour cela un polynôme en y, les conditions précédentes reviennent à

$$\lambda(b) = \lambda(b_1) = \ldots = \lambda(b_{m-2}) = 0,$$

et les dérivées $\lambda'(b), \lambda'(b_1), \ldots, \lambda'(b_{m-2})$ doivent avoir des valeurs données; on suppose que $\dfrac{\partial f}{\partial a}$ ne soit pas nul en $M_1, M_2, \ldots, M_{m-2}$, mais c'est évidemment une hypothèse permise.

Supposons donc $\lambda(x, y)$ satisfaisant aux conditions précédentes, et envisageons la différence

$$\int \frac{Q(x,y)\,dx}{(x-a)^\alpha f'_y} - \frac{\lambda(x,y)}{(x-a)^\alpha}.$$

Elle sera de la forme

$$\int \frac{Q_1(x,y)\,dx}{(x-a)^{\alpha-1} f'_y},$$

on peut le démontrer comme il suit : la différence considérée semble se présenter sous la forme

$$\int \frac{Q_2(x,y)\,dx}{(x-a)^{\alpha+1} f'_y};$$

or, dans le voisinage de $x = a, y = b_1$, le développement de l'intégrale commence par un terme en $\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}$; donc

$$\frac{Q_2(x,y)}{(x-a)^2}$$

a une valeur finie pour $x = a, y = b_1$, et de même en $(a, b_2), \ldots, (a, b_{m-2})$. Pareillement, en (a, b), le développement de l'intégrale commencera par un terme en $\frac{1}{(x-a)^{\alpha-\frac{3}{2}}}$; il faut donc encore que

$$\frac{Q_2(x,y)}{(x-a)^2}$$

ait une valeur finie au point $x = a, y = b$. On en conclut que ce quotient peut être considéré comme un polynôme en x et y. En effet, dans le voisinage de toute valeur finie $x = x_0, y = y_0$ (répondant à un point de la courbe), on peut mettre l'expression précédente sous la forme d'une série procédant suivant les puissances croissantes de $x - x_0$ et $y - y_0$. Nous n'avons à faire la vérification que pour le couple $x = a, y = b$; or, en remplaçant y par son développement suivant les puissances croissantes de $(x-a)^{\frac{1}{2}}$, on aura

$$\frac{Q_2(x,y)}{(x-a)^2} = \alpha_0 (x-a)^{\frac{1}{2}} + \ldots.$$

Mais, d'autre part, on pourra remplacer $(x-a)^{\frac{1}{2}}$ par une série ordonnée suivant les puissances croissantes et entières de $y - b$. On voit donc que l'expression considérée pourra toujours se mettre sous la forme d'une série procédant suivant les puissances croissantes de $x - x_0$ et $y - y_0$; ce quotient est donc un polynôme en x et y (théorème dû à M. Nœther); nous nous en servons sous la forme que lui a donnée M. Halphen à la page 22 de son grand Mémoire *Sur les courbes gauches algébriques* (*Journal de l'École Polytechnique;* 1882).

On voit donc que l'on a

$$\int \frac{Q(x,y)\,dx}{(x-a)^\alpha f'_y} = \frac{\lambda(x,y)}{(x-a)^\alpha} + \int \frac{Q_1(x,y)\,dx}{(x-a)^{\alpha-1} f'_y};$$

en continuant de proche en proche, nous arrivons à

$$\int \frac{Q(x,y)\,dx}{(x-a)f'_y}.$$

Il est manifeste que les raisonnements précédents ne s'appliqueront pas, du moins sous la même forme, à $\alpha = 1$. Si, comme nous avons à le supposer ici, l'intégrale considérée est de seconde espèce, il faudra que $Q(x,y)$ s'annule pour $x = a, y = b_1, b_2, \ldots, b_{m-2}$. Retranchons encore de cette intégrale une expression

$$\frac{\lambda(x,y)}{(x-a)},$$

$\lambda(x,y)$ s'annulant pour $x = a$, $y = b_1, b_2, \ldots, b_{m-2}$. On a aussi $\lambda(a,b) = 0$, et de plus le coefficient du premier terme

$$\frac{\mu \dfrac{\partial\lambda}{\partial b}}{(x-a)^{\frac{1}{2}}}$$

de cette expression est égal au coefficient correspondant dans l'intégrale. Il s'ensuit que la différence

$$\int \frac{Q(x,y)\,dx}{(x-a)f'_y} - \frac{\lambda(x,y)}{x-a}$$

sera de la forme

$$\int \frac{P(x,y)\,dx}{f'_y}.$$

Nous arrivons donc à cette conclusion, que par une soustraction convenable d'une fonction rationnelle de x et y, on peut ramener le second type d'intégrales (T) au premier, et dans les calculs à effectuer, pour faire cette réduction, tous les coefficients de x et y n'entrent que rationnellement.

10. Il nous reste donc à considérer

$$\int \frac{P(x, y)\,dx}{f'_y},$$

$P(x, y)$ étant un polynôme. Soit p le degré de ce polynôme, et supposons d'abord

$$p \geq 2m - 3;$$

on peut retrancher de l'intégrale un polynôme

$$\lambda(x, y)$$

de degré $p - m + 2$, tel que les m déterminations de l'intégrale dans le voisinage de $x = \infty$, et les m déterminations de $\lambda(x, y)$ dans le voisinage de ce même point, commencent par le même terme en x^{p-m+2}; ceci est évidemment possible : il suffira de prendre pour $\lambda(x, y)$ un polynôme homogène où figureront un nombre $p - m + 3$ de coefficients arbitraires, et ayant

$$p - m + 3 \geq m;$$

on pourra le déterminer de manière à satisfaire aux m conditions prescrites. Si l'on considère alors la différence

$$\int \frac{P(x, y)\,dx}{f'_y} - \lambda(x, y),$$

on voit qu'elle sera de la forme

$$\int \frac{P_1(x, y)\,dx}{f'_y},$$

où $P_1(x, y)$ est seulement de degré $p-1$; en continuant ainsi de proche en proche, nous arrivons à l'intégrale

$$\int \frac{P(x, y)\,dx}{f'_y},$$

où $P(x,y)$ est de degré $2m-4$. Comptons les coefficients réellement arbitraires restant dans cette intégrale, en ne considérant pas comme distinctes les deux intégrales dont la différence serait un polynôme en x et y. Dans $P(x,y)$ figurent

$$\frac{(2m-3)(2m-2)}{2}$$

coefficients, mais nous pouvons retrancher de l'intégrale

$$\lambda(x,y),$$

où λ est un polynôme arbitraire de degré $m-2$ qui peut s'écrire

$$\int \frac{\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}}{f'_y}\,dx,$$

et qui contient alors au numérateur $\frac{m(m-1)}{2}-1$ paramètres arbitraires. Le numérateur de l'intégrale ne renfermera plus alors que

$$\frac{(2m-3)(2m-2)}{2}-\left[\frac{(m-1)m}{2}-1\right]$$

paramètres, et l'on peut encore réduire ce nombre, car le numérateur ne changera pas si l'on en retranche le produit

$$\lambda_1(x,y)f(x,y),$$

où λ_1 est un polynôme de degré $m-4$, ce qui diminue encore le nombre précédemment trouvé de

$$\frac{(m-3)(m-2)}{2}.$$

En définitive, le nombre des paramètres réellement arbitraires sera

$$\frac{(2m-3)(2m-2)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} + 1 - \frac{(m-3)(m-2)}{2} = m^2 - 2m + 1.$$

Si, d'autre part, nous voulons que l'intégrale soit de seconde espèce, nous aurons à écrire que le point ∞ n'est pas un point critique logarithmique, ce qui donne $(m-1)$ conditions. Il nous reste donc en résumé, dans l'intégrale de seconde espèce, un nombre de coefficients réellement arbitraire qui est égal à

$$m^2 - 2m + 1 - (m-1) \quad \text{ou} \quad (m-1)(m-2),$$

et nous retombons précisément sur le nombre $2p$ (p étant le genre), puisque ici

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2};$$

ainsi, en retranchant de l'intégrale de seconde espèce considérée une fonction rationnelle de x et y, *fonction dont les coefficients sont eux-mêmes des fonctions rationnelles des coefficients figurant dans l'intégrale*, on peut exprimer l'intégrale par une combinaison linéaire de $2p$ intégrales particulières de seconde espèce.

11. Nous avons supposé dans ce qui précède que la courbe

$$f(x,y) = 0$$

n'avait pas de points doubles; supposons maintenant que la courbe ait un certain nombre de points doubles. Nous aurons à discuter l'intégrale

$$\int \frac{Q(x,y)\,dx}{(x-a)^\alpha f'_y},$$

la droite $x = a$, passant par un point double de la courbe proposée, dont les coordonnées sont a et b. Deux branches *distinctes* de courbes passent au point (a, b), et, pour chacune de ces branches, le développement de l'intégrale commence par un terme en $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$. Nous allons retrancher de l'intégrale une expression de la forme

$$\frac{\lambda(x,y)}{(x-a)^{\alpha+1}}, \tag{1}$$

$\lambda(x,y)$ s'annulant pour $x=a$, $y=b$. Soient

$$y = b + \mu\,(x-a)+\ldots,$$
$$y = b + \mu'(x-a)+\ldots,$$

les développements relatifs aux deux branches de la courbe passant par le point double.

Les coefficients de $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$ dans le développement de l'expression (1) seront

$$\frac{\partial\lambda}{\partial a}+\mu\frac{\partial\lambda}{\partial b} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\lambda}{\partial a}+\mu'\frac{\partial\lambda}{\partial b}.$$

D'autre part, dans le développement de l'intégrale, ces coefficients auront certaines valeurs A et B; nous pouvons choisir $\lambda(x,y)$ de telle sorte que

$$\frac{\partial\lambda}{\partial a}+\mu\frac{\partial\lambda}{\partial b}=\mathrm{A}, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial a}+\mu'\frac{\partial\lambda}{\partial b}=\mathrm{B}.$$

Considérons encore les coefficients de $\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}$ dans le développement de l'expression (1) et dans le développement de l'intégrale; en écrivant qu'ils sont égaux, nous aurons deux relations entre

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial a^2}, \quad \frac{\partial^2\lambda}{\partial a\,\partial b}, \quad \frac{\partial^2\lambda}{\partial b^2}.$$

Soient maintenant $(a, b_1), (a, b_2), \ldots, (a, b_{m-2})$ les $(m-2)$ autres points simples de rencontre de la droite $x-a$ avec la courbe. Choisissons le polynôme λ de telle sorte qu'en chacun des points $\lambda(x,y)$ s'annule, que le coefficient du terme en $\frac{1}{(x-a)^\alpha}$ dans (1) soit nul, et enfin que le coefficient du terme en $\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}$ soit égal au coefficient du même terme dans le développement de l'intégrale. On peut évidemment satisfaire à toutes ces conditions; il arrive alors que, pour la différence

$$\int \frac{Q(x,y)\,dx}{(x-a)^\alpha f'_y} - \frac{\lambda(x,y)}{(x-a)^{\alpha+1}},$$

les deux développements dans le voisinage de $x=a$, $y=b$ commencent par un terme en $\frac{1}{(x-a)^{\alpha-2}}$, et dans le voisinage de $x=a, y=b_i$, le développement commence également par un terme du même degré. Or cette différence sera de la forme

$$\int \frac{Q_1(x,y)\,dx}{(x-a)^{\alpha+2} f'_y};$$

d'après ce qui précède, le quotient

$$\frac{Q_1(x,y)}{(x-a)^2}$$

aura une valeur finie pour $x=a, y=b_i (i=1,2,\ldots,m-2)$ et pour $x=a$, $y=b$, sur l'une et l'autre branche,

$$\frac{Q_1(x,y)}{(x-a)^4}$$

aura une valeur finie. Je dis qu'alors $\frac{Q_1(x,y)}{(x-a)^3}$ peut se mettre sous la forme d'un polynôme en x et y; on pourra, en effet, déterminer les coefficients A, A', ... de manière à écrire

$$\begin{aligned}\frac{Q_1(x,y)}{(x-a)^3} = {} & A(x-a) + A'(y-b) \\ & + A''(x-a)^2 + A'''(x-a)(y-b) + A^{\text{IV}}(y-b)^2 + \ldots,\end{aligned}$$

pour l'une et l'autre branche passant par le point (a, b); le quotient précédent a donc le caractère d'une fonction entière au point $x=a$, $y=b$ (voir Halphen, *loc. cit.*). Il en est évidemment de même pour $(x=a, y=b_i)$ et par suite, d'après le théorème déjà invoqué de M. Nœther, on aura

$$\frac{Q_1(x,y)}{(x-a)^3} = Q_2(x,y).$$

La différence considérée est donc de la forme

$$\int \frac{Q_1(x,y)\,dx}{(x-a)^{\alpha-1} f'_y};$$

elle a donc la même forme, mais α est remplacé par $\alpha - 1$. En continuant ainsi de proche en proche et en supposant que l'intégrale est de seconde espèce, on arrive à l'intégrale

$$\int \frac{Q(x,y)\,dx}{f'_y},$$

après avoir retranché une fonction rationnelle de x et y. La réduction de cette intégrale se fera absolument comme dans le premier cas, en tenant compte seulement de plus que $Q(x,y) = 0$ passe par les points doubles de f. Le nombre des paramètres réellement arbitraires sera donc

$$(m-1)(m-2) - 2d \quad \text{ou bien} \quad 2p.$$

Nous arrivons donc à la même conclusion que l'on peut ainsi formuler : soit

$$\int R(x,y)\,dx$$

une intégrale quelconque de seconde espèce; *on pourra exprimer cette intégrale par une fonction rationnelle* F *de* x *et* y, *et par une somme de* $2p$ *intégrales particulières de seconde espèce de la forme*

$$\sum_{i=1}^{i=2p} A_i \int \frac{Q_i(x,y)\,dx}{f'_y},$$

où Q *est un polynôme d'ordre* $2m-4$. *De plus, et c'est là le point essentiel, les coefficients de* F *et les coefficients* A_i *s'exprimeront rationnellement à l'aide des coefficients qui figurent dans* R.

12. Après cette digression indispensable sur les intégrales abéliennes, revenons à l'intégrale de seconde espèce

$$\int P\,dx + Q\,dy,$$

P et Q étant des fonctions rationnelles de x, y, z, et l'on a

$$(1) \qquad f(x, y, z) = 0.$$

Envisageons d'abord l'intégrale abélienne

$$\int \mathrm{P}\,dx$$

attachée à la relation (1) entre z et x, où y est considéré comme un paramètre. D'après ce qui précède, nous pouvons trouver $2p$ intégrales particulières de seconde espèce

$$\int \frac{\mathrm{Q}_1(x, y)\,dx}{f'_z}, \quad \int \frac{\mathrm{Q}_2(x, y, z)\,dx}{f'_z}, \quad \ldots, \quad \int \frac{\mathrm{Q}_{2p}(x, y, z)\,dx}{f'_z},$$

où $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \ldots, \mathrm{Q}_{2p}$ sont des polynômes en x, y, z de degré $2m - 4$, en désignant par m le degré de l'équation (1), et par p le genre de cette relation algébrique entre x et z; et l'on pourra écrire

$$\int \mathrm{P}\,dx = a_1 \int \frac{\mathrm{Q}_1\,dx}{f'_z} + a_2 \int \frac{\mathrm{Q}_2\,dx}{f'_z} + \ldots + a_{2p} \int \frac{\mathrm{Q}_{2p}\,dx}{f'_z} + \lambda(x, y, z),$$

$a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$ étant des fonctions rationnelles de y, et λ une fonction rationnelle de x, y et z; ceci est une conséquence immédiate de la méthode de réduction exposée dans les paragraphes précédents.

Ceci posé, retranchons de $\int \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy$ la fonction rationnelle

$$\lambda(x, y, z);$$

nous aurons la différentielle totale

$$\int \mathrm{R}\,dx + \mathrm{S}\,dy;$$

et l'on aura

$$(2) \qquad \int \mathrm{R}\,dx = a_1 \int \frac{\mathrm{Q}_1\,dx}{f'_z} + \ldots + a_{2p} \int \frac{\mathrm{Q}_{2p}\,dx}{f'_z};$$

comme nous l'avons déjà dit plusieurs fois, les périodes de l'intégrale abélienne

$$\int \mathrm{R}\,dx,$$

où y est considéré comme un paramètre, *ne doivent pas dépendre de ce paramètre.* Nous avons donc d'abord à rechercher si l'on peut déterminer des fonctions *rationnelles*

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{2p}$$

de y, de telle sorte que les périodes de la somme (2) ne dépendent pas de y; les polynômes Q sont à considérer comme connus et parfaitement déterminés.

On peut toujours déterminer des fonctions $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$ de y, telles que l'expression (2) ait ses périodes indépendantes de y. Pour une valeur arbitraire donnée à y, considérons $2p$ cycles donnant les $2p$ périodes

$$\mathrm{P}_{1,i}, \quad \mathrm{P}_{2,i}, \quad \ldots, \quad \mathrm{P}_{2p,i}$$

de l'intégrale de seconde espèce

$$\int \frac{\mathrm{Q}_i\,dx}{f'_z} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Si l'on veut que les périodes de l'expression (2) soient des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p}$, on devra déterminer les a de telle sorte que

$$\begin{aligned}
a_1\mathrm{P}_{1,1} + a_2\mathrm{P}_{1,2} + \ldots + a_{2p}\mathrm{P}_{1,2p} &= \alpha_1,\\
a_1\mathrm{P}_{2,1} + a_2\mathrm{P}_{2,2} + \ldots + a_{2p}\mathrm{P}_{2,2p} &= \alpha_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots,\\
a_1\mathrm{P}_{2p,1} + a_2\mathrm{P}_{2p,2} + \ldots + a_{2p}\mathrm{P}_{2p,2p} &= \alpha_{2p};
\end{aligned}$$

le déterminant de ces équations du premier degré en $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$ n'est pas nul, car les périodes P sont les périodes de $2p$ intégrales distinctes de seconde espèce (c'est-à-dire des intégrales dont aucune combinaison linéaire n'est une fonction algébrique). On peut donc tirer de là

$$\begin{aligned}
a_1 &= \alpha_1\mathrm{Q}_{1,1} + \alpha_2\mathrm{Q}_{2,1} + \ldots + \alpha_{2p}\mathrm{Q}_{2p,1},\\
a_2 &= \alpha_1\mathrm{Q}_{1,2} + \alpha_2\mathrm{Q}_{2,2} + \ldots + \alpha_{2p}\mathrm{Q}_{2p,2},\\
\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
a_{2p} &= \alpha_1\mathrm{Q}_{1,2p} + \alpha_2\mathrm{Q}_{2,2p} + \ldots + \alpha_{2p}\mathrm{Q}_{2p,2p}.
\end{aligned}$$

Les P et par suite les Q sont des fonctions de y qui pourront évidemment s'exprimer au moyen d'intégrales définies.

La question qui se pose maintenant est donc la suivante : *peut-on déterminer les constantes* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p}$ *de telle sorte que les fonctions de* y

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{2p},$$

définies par les égalités précédentes, soient des fonctions rationnelles de y?

13. Il serait impossible de répondre à la question précédente, en partant des expressions données pour $a_1, a_2, \ldots, a_{2p}$; mais nous allons montrer qu'on peut ramener la question posée à la recherche des intégrales rationnelles d'une équation différentielle linéaire.

Considérons d'abord, à cet effet, une quelconque des intégrales de seconde espèce

$$\int \frac{Q_i dx}{f'_z},$$

et ses $2p$ périodes

$$P_{1,i}, \quad P_{2,i}, \quad \ldots, \quad P_{2p,i}.$$

Ce sont des fonctions du paramètre y, et elles ont été étudiées à ce point de vue par M. Fuchs dans un Mémoire qui est la suite de celui que nous avons cité plus haut (*Journal de Crelle*, t. 73, p. 324). M. Fuchs établit entre autres résultats, dans ce beau travail, que ces périodes satisfont à une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des polynômes en y; cette équation sera, en général, d'ordre $2p$, mais elle pourra être d'ordre moindre.

Nous ferons d'abord la remarque évidente que les différentes équations linéaires qu'on obtient en faisant successivement $i = 1, 2, \ldots, 2p$ ont même groupe G, et toutes les substitutions de ce groupe effectuées sur

$$P_{1,i}, \quad P_{2,i}, \quad \ldots, \quad P_{2p,i}$$

sont à coefficients entiers et à déterminant 1. On en conclura de suite que le déterminant

$$\begin{vmatrix} P_{1,1} & P_{2,1} & \dots & P_{2p,1} \\ P_{1,2} & P_{2,2} & \dots & P_{2p,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{1,2p} & P_{2,2p} & \dots & P_{2p,2p} \end{vmatrix}$$

des équations du premier degré donnant $a_1, a_2, \dots, a_{2p}$ est une fonction rationnelle de y, puisque toute substitution du groupe commun des équations linéaires laisse invariable ce déterminant

Ceci posé, considérons les expressions

$$Q_{1,1}, \quad Q_{2,1}, \quad \dots, \quad Q_{2p,1},$$

qui figurent dans a_1, qui sont les mineurs du premier ordre du déterminant précédent, correspondant à la suppression de la première ligne horizontale. A chaque substitution du groupe G correspond évidemment une substitution linéaire effectuée sur les expressions Q, et celles-ci satisfont à une équation linéaire d'ordre au plus égal à $2p$, et dont les coefficients sont des polynômes en x. On pourra former cette équation linéaire, que je désignerai par E, et sa considération va nous donner immédiatement la solution du problème proposé.

Nous avons en effet à rechercher si l'on peut déterminer les constantes α, de telle sorte que

$$\alpha_1 Q_{1,1} + \alpha_2 Q_{2,1} + \dots + \alpha_{2p} Q_{2p,1}$$

soit une fonction rationnelle de y. Or ceci revient à rechercher si l'équation différentielle linéaire E, à coefficients rationnels et à intégrales régulières, peut être vérifiée par une fonction rationnelle de la variable y. La solution de ce dernier problème est bien connue, et l'on voit qu'on peut décider si les constantes peuvent être choisies de telle sorte que a_1 soit une fonction rationnelle de y. Les constantes α étant choisies, s'il est possible, de telle sorte que a_1 soit une fonction rationnelle de y, il en résultera pour

$$a_2, \quad a_3, \quad \dots, \quad a_{2p}$$

des expressions qui seront fonctions rationnelles de y. En effet, prenons, par exemple, l'expression de a_2

$$a_1 Q_{1,2} + \alpha_2 Q_{2,2} + \ldots + \alpha_{2p} Q_{2p,2}:$$

elle satisfera à une équation linéaire qui aura même groupe que celle à laquelle satisfait a_1; donc à une intégrale rationnelle de la première correspond une intégrale rationnelle de la seconde.

La question posée à la fin du paragraphe précédent peut donc être complètement résolue à l'aide de l'équation E, et nous pouvons supposer que nous ayons un certain nombre de systèmes linéairement indépendants de

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{2p},$$

fonctions rationnelles de y; chacun d'eux nous fournira une intégrale

$$\int \frac{a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + \ldots + a_{2p} Q_{2p}}{f'_z} dx,$$

dont les périodes ne dépendront pas de y.

14. Il faut maintenant rechercher si nous pourrons former des intégrales de différentielle totale, correspondant aux intégrales que nous venons de trouver. Il en est effectivement ainsi, comme nous allons le faire voir. Désignons par

$$\int R(x, y, z)\, dx$$

une intégrale, comme on vient d'en trouver une au paragraphe précédent, dont les périodes ne dépendent pas de y. Peut-on trouver une fraction rationnelle $S(x, y, z)$, telle que

$$R(x, y, z)\, dx + S(x, y, z)\, dy$$

soit une différentielle totale d'une fonction de x et y? Il faut que

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y},$$

en désignant, bien entendu, par $\frac{\partial R}{\partial y}$ la dérivée partielle, par rapport à y, de R considérée comme fonction de x et y seulement, et non la dérivée partielle, par rapport à y, de $R(x, y, z)$. On aura alors

$$S = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial R}{\partial y}\, dy = \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^{x} R(x, y, z)\, dx.$$

L'intégration précédente est faite, par rapport à x, en donnant à y une valeur constante, d'ailleurs arbitraire, et x_0 est une constante fixe. Or l'équation

$$f(x_0, y, z) = 0$$

donnera, pour z, m valeurs $z_1, z_2, \ldots, z_m$. L'intégrale ne se trouvera définie, à des multiples près des périodes, que si l'on se donne la valeur initiale et la valeur finale de z. Pour éviter toute ambiguïté, considérons la somme

$$\int_{x_0, z_1}^{x, z} R(x, y, z)\, dx + \int_{x_0, z_2}^{x, z} R(x, y, z)\, dx + \ldots + \int_{x_0, z_m}^{x, z} R(x, y, z)\, dx,$$

y ayant une valeur constante, d'ailleurs arbitraire. En un point arbitraire (x, y, z) de la surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

cette somme a une valeur déterminée, à un multiple près des périodes, et par conséquent

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{i=1}^{i=m} \int_{x_0, z_i}^{x, z} R(x, y, z)\, dx\right]$$

aura une valeur *unique* en chaque point x, y, z, *puisque les périodes des intégrales ne dépendent pas de* y. Par suite, cette expression sera une fonction rationnelle de x, y et z, car les points singuliers de cette fonction de x et de y ne peuvent être des points singuliers essentiels. Nous prenons maintenant la fraction rationnelle $S(x, y, z)$,

$$S(x, y, z) = \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{i=1}^{i=m} \int_{x_0, z_i}^{x, z} R(x, y, z)\, dx\right];$$

sa dérivée partielle par rapport à x sera

$$\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial y}[m\mathrm{R}(x,y,z)]:$$

ce sera, par conséquent, la dérivée partielle par rapport à y de la fonction R. Nous aurons donc une intégrale de différentielle totale

$$\int \mathrm{R}(x,y,z)\,dx + \mathrm{S}(x,y,z)\,dy,$$

R et S étant des fonctions rationnelles de x, y et z.

Nous avons donc trouvé toutes les intégrales de différentielles totales attachées à la surface

$$f(x,y,z)=0,$$

qui *peuvent* être des intégrales de seconde espèce.

Ces intégrales ne se réduiront certainement pas à des fonctions rationnelles de x, y, z. Cela résulte immédiatement de la manière même dont elles ont été formées; car, laissant y constant, on a l'intégrale

$$\int \mathrm{R}(x,y,z)\,dx,$$

dont toutes les périodes ne sont pas nulles.

Mais il pourrait arriver que les intégrales qui viennent d'être trouvées ne fussent pas de seconde espèce, c'est-à-dire que les périodes le long de certains cycles infiniment petits ne fussent pas nulles. On aura à faire sur chacune de ces intégrales une discussion analogue à celle qui a été faite au § VIII. L'étude de l'intégrale ne présentera pas de difficultés dans le voisinage de tout point simple ou d'un point qui soit une singularité ordinaire pour la surface (*voir* mon Mémoire *Sur les intégrales de première espèce*, t, I, 4^e série de ce journal), et, comme je l'ai rappelé dans l'Introduction, l'étude des singularités quelconques pourra se faire en suivant la voie indiquée par M. Nœther.

Ainsi, en résumé, après des calculs qui pourront être fort longs, mais qui peuvent être régulièrement effectués, *nous pourrons décider si une surface algébrique donnée possède des intégrales de seconde* *espèce et trouver toutes les intégrales distinctes de seconde espèce,* c'est-à-dire celles pour lesquelles aucune combinaison linéaire n'est une fonction rationnelle de x, y et z.

CHAPITRE III.

15. Nous allons considérer dans ce Chapitre une classe de surfaces admettant des intégrales de seconde espèce, et cette étude nous conduira à une remarque importante relative aux fonctions hyperfuchsiennes et aux fonctions hyperabéliennes, dont je me suis occupé dans différents Mémoires (*Acta mathematica* et *Journal de Mathématiques*).

Nous allons raisonner sur les fonctions et groupes hyperfuchsiens; des considérations toutes semblables seraient applicables aux fonctions et groupes hyperabéliens.

Envisageons un groupe hyperfuchsien G pour lequel nous supposerons que le domaine fondamental n'a aucun point commun avec l'hypersphère limite. Nous avons précédemment défini ce que l'on doit entendre par la connexion de troisième espèce, relative à ce domaine fondamental (*Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. I, p. 20). Soit p_3+1 l'ordre de cette connexion; nous aurons alors p_3 substitutions du groupe

$$\Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \ldots, \quad \Sigma_{p_3},$$

qui correspondront aux p_3 *coupures* à trois dimensions, faites dans le polyèdre fondamental. Toutes ces substitutions sont évidemment hyperboliques, et il en est de même de toutes les substitutions du groupe g' ayant les substitutions précédentes comme substitutions fondamentales; le groupe hyperfuchsien g' est un sous-groupe contenu dans le groupe initial g.

Ceci posé, considérons un groupe G, isomorphe du groupe g, et dont toutes les substitutions, qui sont linéaires et sont effectuées sur deux lettres, soient représentées par un tableau de coefficients de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix};$$

on peut prendre arbitrairement le coefficient a dans les substitutions correspondant à

$$\Sigma_1, \quad \Sigma_2, \quad \ldots, \quad \Sigma_{p_1},$$

et pour toute substitution elliptique de g, la substitution correspondante dans G se réduira à la substitution unité, c'est-à-dire que a sera nul. Envisageons donc ces deux groupes isomorphes g et G; soient

$$\left(u, v, \frac{M_1 u + N_1 v + P_1}{Mu + Nv + P}, \frac{M_2 u + N_2 v + P_2}{Mu + Nv + P}\right),$$

une substitution quelconque de g, et

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

le tableau des coefficients de la substitution correspondante dans G.

Je dis que l'on pourra former deux fonctions uniformes et continues de u, v

$$G(u, v), \quad G_1(u, v),$$

telles que

$$(r) \quad \left\{ \begin{aligned} & G\left(\frac{M_1 u + N_1 u + P_1}{Mu + Nv + P}, \frac{M_2 u + N_2 v + P_2}{Mu + Nv + P}\right) \\ & \qquad = (Mu + Nv + P)^{3m}[G(u, v) + aG_1(u, v)], \\ & G_1\left(\frac{M_1 u + N_1 v + P_1}{Mu + Nv + P}, \frac{M_2 u + N_2 v + P_2}{Mu + Nv + P}\right) \\ & \qquad = (Mu + Nv + P)^{3m} G_1(u, v). \end{aligned} \right.$$

16. Nous obtiendrons des fonctions satisfaisant aux conditions précédentes, en formant les séries suivantes.

Désignons par

$$(u, v, U_i, V_i),$$

le dénominateur commun de U_i et V_i, étant $M_i u + N_i v + P_i$ une substitution quelconque du groupe g et

$$\begin{vmatrix} 1 & a_i \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

la substitution correspondante de G; formons alors les deux séries, en représentant par $R(u, v)$ et $R_1(u, v)$ deux fonctions rationnelles de u et v, qui restent finies à l'intérieur et sur la surface de l'hypersphère limite

$$G(u, v) = \sum_i [R(U_i, V_i) - a_i R_1(U_i, V_i)] \frac{1}{(M_i u + N_i v + P_i)^{3m}},$$

$$G_1(u, v) = \sum_i R_1(U_i, V_i) \frac{1}{(M_i u + N_i v + P_i)^{3m}},$$

les sommations étant étendues à toutes les substitutions du groupe g; le nombre m, qui figure dans ces formules, est un entier positif. La seconde série est convergente pour $m \geq 2$ [*voir* mon Mémoire *Sur un groupe de substitutions linéaires* (*Acta mathematica*, t. I)] et, à l'aide de considérations présentant une grande analogie avec celles dont a fait usage M. Poincaré dans ses études sur les séries zêtafuchsiennes (*Acta mathematica*, t. V, p. 233), on montrera que la seconde série est convergente pour une valeur suffisamment grande de l'entier m, la limite dépendant uniquement du groupe hyperfuchsien.

Il est facile de voir ce que deviennent les fonctions G et G_1, quand on effectue sur u et v une substitution du groupe hyperfuchsien; les deux séries

$$\sum_i R(U_i, V_i) \frac{1}{(M_i u + N_i v + P_i)^{3m}}$$

et

$$\sum_i R_1(U_i, V_i) \frac{1}{(M_i u + N_i v + P_i)^{3m}}$$

se reproduiront multipliées par $(Mu + Nv + P)^{3m}$ si l'on fait sur u, v la substitution

$$(1) \qquad \left(u, v, \frac{M_1 u + N_1 v + P_1}{Mu + Nv + P}, \frac{M_2 u + N_2 v + P_2}{Mu + Nv + P}\right) \quad \text{ou} \quad (u, v, U, V),$$

et désignons par a la quantité figurant dans la substitution correspondante du groupe G. Il faut voir ce que devient la série

$$\Theta(u, v) = \sum a_i R_1(U_i, V_i) \frac{1}{(M_i u + N_i v + P_i)^{3m}};$$

après la substitution (1) : le terme marqué par l'indice i dans la série se trouve remplacé par un autre terme, et on a la série

$$\theta(U, V) = \sum a_i R_1(U_j, V_j) \frac{1}{(M_j u + N_j v + P_j)^{3m}} (Mu + Nv + P)^{3m};$$

d'autre part, la série initiale pouvait s'écrire

$$\sum a_j R_1(U_j, V_j) \frac{1}{(M_j u + N_j v + P_j)^{3m}},$$

et l'on a manifestement $a_i + a = a_j$ ou $a_i = a_j - a$.

Écrivant donc

$$\theta(U,V) = \sum (a_j - a) R_1(U_j, V_j) \frac{1}{(M_j u + N_j v + P_j)^{3m}} (Mu + Nv + P)^{3m},$$

on aura

$$\theta(U, V) = (Mu + Nv + P)^{3m} [\theta(u, v) - a G_1(u, v)],$$

et, par conséquent, les fonctions $G(u, v)$ et $G_1(u, v)$ satisfont aux relations (r) du paragraphe précédent.

17. Considérons maintenant la fonction

$$\varphi(u, v) = \frac{G(u, v)}{G_1(u, v)};$$

on aura, pour toute substitution (u, v, U, V) du groupe,

$$\varphi(U, V) = \varphi(u, v) + a,$$

et l'on peut prendre arbitrairement (§ **15**) p_3 des quantités a, à savoir celles qui correspondent aux substitutions $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{p_3}$.

On sait, d'autre part, que toutes les fonctions hyperfuchsiennes, relatives au groupe g, peuvent s'exprimer rationnellement à l'aide de trois d'entre elles, x, y, z, qui sont liées par une relation algébrique

$$f(x, y, z) = 0:$$

c'est de cette surface que je voudrais maintenant m'occuper.

On a

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\,dv;$$

donc

$$d\varphi = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}}\,dx + \frac{\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial y}{\partial v} - \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial y}{\partial u}}\,dy;$$

les coefficients de dx et dy sont des fonctions uniformes de u et v. Elles resteront d'ailleurs invariables pour toute substitution du groupe : ce seront des fonctions hyperfuchsiennes de u et v, et par suite des fonctions rationnelles de x, y et z.

On a ainsi

$$d\varphi = \mathrm{P}(x, y, z)\,dx + \mathrm{Q}(x, y, z)\,dy,$$

P et Q étant des fonctions rationnelles de x, y, z. La fonction $\varphi(u, v)$ considérée comme fonction rationnelle de x et y sera donc une intégrale de différentielle totale

$$\varphi = \int \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy,$$

relative à la surface f.

Cette intégrale sera une intégrale de seconde espèce. Il est impossible en effet qu'un cycle infiniment petit donne une période différente de zéro ; car à tout cycle correspond une substitution du groupe hyperfuchsien. Si le cycle est infiniment petit, cette substitution devra nécessairement être elliptique, et par suite la valeur correspondante de a sera nulle.

On voit donc que φ est une intégrale de *seconde* espèce, et elle possède p_1 périodes qui peuvent d'ailleurs être choisies arbitrairement. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, qui exprime une propriété remarquable de la surface

$$f(x, y, z) = 0.$$

La surface f possède des intégrales de seconde espèce. Le nombre de ces intégrales linéairement indépendantes (c'est-à-dire pour lesquelles aucune combinaison linéaire n'est égale à une fonction rationnelle de x, y et z) *est égal à* p_3, *et le nombre des périodes de ces intégrales de seconde espèce est également représenté par* p_3.

On voit, par l'énoncé précédent, que la surface f jouit d'une propriété bien remarquable et bien spéciale, et nous pouvons en conclure, relativement aux fonctions hyperfuchsiennes, une conséquence, qui, pour être négative, ne m'en paraît pas moins présenter quelque intérêt.

On sait que M. Poincaré a démontré que les coordonnées d'une courbe algébrique quelconque

$$f(x, y) = 0$$

peuvent s'exprimer par des fonctions fuchsiennes d'un paramètre, et c'est là certainement un des plus beaux résultats que présente la théorie des fonctions fuchsiennes. Une question analogue se pose d'elle-même pour une surface

$$f(x, y, z) = 0;$$

on se demande naturellement si l'on peut exprimer ses coordonnées x, y, z par des fonctions hyperfuchsiennes de deux paramètres. Le théorème que nous venons de démontrer permet de répondre à cette question, et la réponse est *négative*. On vient de voir en effet que les surfaces correspondant à un groupe hyperfuchsien avaient, en général, des intégrales de seconde espèce, et nous savons que cette propriété n'appartient pas à une surface algébrique prise arbitrairement. Les fonctions hyperfuchsiennes conduisent donc à une classe spéciale et remarquable de surfaces algébriques.

Paris, 15 avril 1886.