JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JOUKOVSKY

Sur le principe de la moindre action

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 10 (1884), p. 97-100.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1884_3_10__97_0>

Sur le principe de la moindre action;

PAR M. JOUKOVSKY,

Professeur à l'École Polytechnique de Moscou.

---

1. Le théorème de la moindre action a été complété par M. Serret ([1]), qui a démontré que la variation du deuxième ordre de l'action est essentiellement positive. L'analyse du savant géomètre étant assez difficile, il m'a semblé qu'une démonstration plus élémentaire du théorème ne serait pas dépourvue d'intérêt.

2. Soit donné un système de n points à p liaisons dans sa position initiale $a, a_1, \ldots$, soumis à l'action des forces ayant une fonction potentielle U. Examinons deux mouvements extrêmement voisins de ce système : af, $a_1 f_1, \ldots$ et ab, $a_1 b_1, \ldots$ pour lesquels la constante h, dans l'intégrale des forces vives

$$\mathrm{U} - \mathrm{F} + h = 0, \tag{1}$$

est la même, F étant la somme des forces vives.

En désignant, avec M. Thomson, par (a, f) l'action dans le premier mouvement et par t le temps de ce mouvement, écrivons

$$(a,f) = \int_0^t 2\mathrm{F}\, dt \tag{2}$$

ou, à cause de la formule (1),

$$(a,f) = \int_0^t (\mathrm{U} + \mathrm{F} + h)\, dt.$$

([1]) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXII, p. 696; 1871.

Déterminons la variation $(a, b) - (a, f)$,

$$(a, b) - (a, f) = \Big|^{t} 2\mathrm{F}\,\delta t + \int_0^t \sum \left(\frac{d\mathrm{U}}{dx}\,\delta x + \frac{d\mathrm{U}}{dy}\,\delta y + \frac{d\mathrm{U}}{dz}\,\delta z\right) dt$$
$$+ \int_0^t \sum m \left(\frac{dx}{dt}\,\frac{d\,\delta x}{dt} + \frac{dy}{dt}\,\frac{d\,\delta y}{dt} + \frac{dz}{dt}\,\frac{d\,\delta z}{dt}\right) dt.$$

Intégrons par parties :

$$\int_0^t \sum m \left(\frac{dx}{dt}\,\frac{d\,\delta x}{dt} + \frac{dy}{dt}\,\frac{d\,\delta y}{dt} + \frac{dz}{dt}\,\frac{d\,\delta z}{dt}\right) dt$$
$$= \Big|_0^t \sum m \left(\frac{dx}{dt}\,\delta x + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,\delta z\right)$$
$$- \int_0^t \sum m \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2 y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2 z}{dt^2}\,\delta z\right) dt.$$

Mais on a

$$\Big|^{0} \delta x = 0, \qquad \Big|^{t} \delta x = \delta \Big|^{t} x - \Big|^{t} \frac{dx}{dt}\,\delta t,$$

$$\delta \Big|^{t} x \Big|^{t} \frac{dx}{dt} + \delta \Big|^{t} y \Big|^{t} \frac{dy}{dt} + \delta \Big|^{t} z \Big|^{t} \frac{dz}{dt} = v \cos\alpha\,\delta s,$$

formule dans laquelle v représente la vitesse du point f, δs l'élément fb. et α un angle entre v et δs. Il vient ainsi

$$\int_0^t \sum m \left(\frac{dx}{dt}\,\frac{d\,\delta x}{dt} + \frac{dy}{dt}\,\frac{d\,\delta y}{dt} + \frac{dz}{dt}\,\frac{d\,\delta z}{dt}\right) dt$$
$$= \sum m v \cos\alpha\,\delta s - \Big|^{t} 2\mathrm{F}\,\delta t$$
$$- \int_0^t \sum m \left(\frac{d^2 x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2 y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2 z}{dt^2}\,\delta z\right) dt,$$

et la variation devient

$$(a, b) - (a, f) = \sum m v \cos\alpha\,\delta s$$
$$+ \int_0^t \sum m \left[\left(\frac{d\mathrm{U}}{dx} - m\,\frac{d^2 x}{dt^2}\right)\delta x\right.$$
$$\left. + \left(\frac{d\mathrm{U}}{dy} - m\,\frac{d^2 y}{dt^2}\right)\delta y + \left(\frac{d\mathrm{U}}{dz} - m\,\frac{d^2 z}{dt^2}\right)\delta z\right].$$

L'intégrale est nulle à cause de la formule générale de la Dynamique, et nous trouvons

$$(a, b) - (a, f) = \Sigma mv \cos\alpha\, \delta s. \tag{3}$$

Ainsi, pour que

$$(a, b) = (a, f),$$

il faut et il suffit que les éléments fb, $f_1 b_1$, ... satisfassent l'équation

$$\Sigma mv \cos\alpha\, \delta s = 0. \tag{4}$$

Nous nommerons les éléments fb, $f_1 b_1$, ... les *lignes de l'égale action*.

3. Comparons l'action (a, e, d) dans un mouvement réel avec l'action (a, b, d) dans un mouvement quelconque, compatible avec les liaisons et satisfaisant à l'équation (1), la constante h étant la même dans tous les deux mouvements.

Soient b, b_1, ... les positions simultanées des points du système dans le second mouvement. Construisons les trajectoires ab, $a_1 b_1$, ... d'un mouvement réel auxiliaire ayant aussi des points simultanés b, b_1, ... et la même constante h. Ce mouvement auxiliaire sera entièrement fixé, puisque nous aurons pour la détermination de $3n - p$ composantes arbitraires des vitesses initiales $3n - p - 1$ équations exprimant que les points du système passent en même temps en b, b_1, ... et une équation (1).

Construisons pareillement les trajectoires ac, $a_1 c_1$, ... du mouvement auxiliaire pour les points simultanés c, c_1, ... et pour tous les autres points simultanés du mouvement abd, $a_1 b_1 d_1$, ...

Éliminons maintenant dt de l'action (a, b, d) à l'aide de la formule (1), comme le fait M. Jacobi,

$$(a, b, d) = \int \sqrt{2(U + h)} \sqrt{\Sigma m\, dl^2}, \tag{5}$$

où dl, dl_1, ... sont les éléments des trajectoires abd, $a_1 b_1 d_1$, ... parcourues dans le temps dt.

Soient

$$dl = bc, \quad dl_1 = b_1 c_1, \quad \ldots.$$

Menons par les points b, b_1, ... les éléments

$$fb = \delta s, \quad f_1 b_1 = \delta s_1, \quad \ldots$$

des lignes de l'égale action pour les mouvements auxiliaires, les points f, f_1, ... étant placés sur les trajectoires ac, $a_1 c_1$, ..., et posons

$$fc = d\sigma, \quad f_1 c_1 = d\sigma_1, \quad \ldots.$$

Nous avons

$$dl^2 = d\sigma^2 + \delta s^2 - 2\, d\sigma\, \delta s \cos\alpha.$$

Multiplions par la masse m et prenons la somme étendue sur tous les points du système,

$$\Sigma m\, dl^2 = \Sigma m\, d\sigma^2 + \Sigma m\, \delta s^2 - 2 \Sigma m\, d\sigma\, \delta s \cos\alpha.$$

Par l'équation (4),

$$\Sigma m\, d\sigma\, \delta s \cos\alpha = dt_1\, \Sigma m v\, \delta s \cos\alpha = 0,$$

dt_1 étant l'élément du temps dans lequel les points du système parcourent les arcs infiniment éloignés fc, $f_1 c_1$, ... On aura

$$\Sigma m\, dl^2 > \Sigma m\, d\sigma^2,$$

ou

$$\sqrt{2(\mathrm{U}+h)}\sqrt{\Sigma m\, dl^2} > \sqrt{2(\mathrm{U}+h)}\sqrt{\Sigma m\, d\sigma^2}. \tag{6}$$

Mais nous avons

$$\sqrt{2(\mathrm{U}+h)}\sqrt{\Sigma m\, d\sigma^2} = (f, c) = (a, c) - (a, f) = (a, c) - (a, b) = d(a, b),$$

et la formule (6) devient

$$\sqrt{2(\mathrm{U}+h)}\sqrt{\Sigma m\, dl^2} > d(a, b).$$

Prenons de toutes les deux parties l'intégrale étendue sur tous les éléments des lignes abd, $a_1 b_1 d_1$, ...

$$\int \sqrt{2(\mathrm{U}+h)}\sqrt{\Sigma m\, dl^2} > (a, e, d), \tag{7}$$

ou par (5),

$$(a, b, d) > (a, e, d).$$

C. Q. F. D.