

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

H. RESAL

**Théorie de l'Électrostatique**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 3<sup>e</sup> série*, tome 8 (1882), p. 217-250.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1882\\_3\\_8\\_217\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1882_3_8_217_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Théorie de l'Électrostatique;*

PAR M. H. RESAL.

## § I. — GÉNÉRALITÉS.

1. Dans l'exposé suivant, nous n'avons aucune prétention à l'invention. Nous n'avons pour objet que de coordonner, à notre point de vue, les résultats non sujets à contestation obtenus par Poisson et ses savants successeurs, Gauss, Green, Clausius, Bertrand, etc.

Sans remonter plus haut, nous trouvons la fonction des forces dans les *Œuvres* de Laplace et de Lagrange. Plus tard Gauss désigne cette fonction sous le nom de *potentiel*, expression qui est devenue depuis d'un usage général dans l'enseignement.

L'emploi du potentiel en électrostatique est souvent entaché d'obscurité, à ce point que bien des géomètres physiciens ont prétendu que l'on y faisait une trop large part à l'arbitraire et n'ont pas, par suite, montré une grande sympathie pour ce genre de recherches. Nous nous sommes surtout attaché à faire disparaître les ambiguïtés.

Les formules de Green se manient avec la plus grande sûreté lorsqu'on y regarde d'un peu près; elles n'ont d'ailleurs d'autre objet que de conduire immédiatement à certains résultats généraux et de supprimer des combinaisons pénibles d'intégrales définies, auxquelles on est conduit en suivant la voie ordinaire tracée par la Mécanique rationnelle.

2. Pour expliquer les faits qui se rapportent à l'électricité à l'état

d'équilibre, on a recours à une hypothèse que l'on peut résumer ainsi qu'il suit :

« Lorsqu'un corps n'est pas électrisé ou qu'il se trouve à l'état naturel, dans chacune de ces molécules se trouvent concentrés deux fluides impondérables, en quantités égales censées indéfinies, qui sont à l'état de combinaison. Quoique ces deux fluides se neutralisent ou qu'ils ne produisent aucun effet physique, on est cependant convenu d'appeler *fluide neutre* leur état de combinaison. »

Pour que le corps soit électrisé, il faut qu'il y ait décomposition partielle du fluide neutre dans ses deux éléments et que, par un procédé quelconque, on ait fait disparaître un de ces éléments, ou encore que l'on ait réparti ces mêmes éléments sur deux parties distinctes du corps.

Les deux éléments du fluide neutre ont reçu respectivement les noms de *fluide positif* et de *fluide négatif*. Quoiqu'ils n'aient qu'un caractère fictifs, on suppose qu'ils jouissent des propriétés de la matière; c'est ainsi que l'on considère une molécule matérielle électrisée comme renfermant une molécule électrique, dont la masse mesure l'*intensité* de l'électricité.

En partant de là et des lois de Coulomb, on a été conduit à poser ce principe élémentaire :

*Deux molécules s'attirent ou se repoussent, suivant qu'elles appartiennent aux deux électricités de signe contraire ou à la même électricité; leur action mutuelle est proportionnelle à leurs masses et varie en raison inverse du carré de leur distance.*

Nous admettrons que chaque masse électrique élémentaire a une valeur algébrique et qu'elle porte avec elle le signe de l'électricité à laquelle elle appartient. Ainsi, si  $m$  est la masse d'une molécule électrique appartenant à l'électricité positive, elle devra être prise en valeur absolue; si  $m'$ , est la masse d'une autre molécule électrique agissant sur la précédente, elle devra être considérée comme positive ou négative selon qu'elle appartiendra à la même électricité que  $m$  ou à l'autre électricité.

En désignant par  $r_1$  la distance des  $m, m'_1$ , nous représenterons par

$$\frac{mm'_1}{r_1^2}$$

leur action mutuelle, qui sera positive si c'est une répulsion et négative dans le cas contraire. Nous supposons ainsi que l'on prend pour unité de force électrique l'action mutuelle de deux masses électriques égales à l'unité, dont la distance est aussi égale à l'unité.

Le travail total de l'action ci-dessus, pour une variation quelconque de  $r_1$ , sera aussi

$$mm'_1 \int \frac{dr_1}{r_1^2} = -\frac{mm'_1}{r_1} + \text{const.}$$

### 3. Fonction potentielle et potentiel. — Soient

$m'_1, m'_2, \dots, m'_i, \dots$  les masses de molécules électriques agissant simultanément sur la masse  $m$ .

$x, y, z$  les coordonnées du point  $m$  parallèles à trois axes rectangulaires  $Ox, Oy, Oz$ .

$x'_i, y'_i, z'_i$  les coordonnées semblables du point  $m'_i$ ;

$r_i = \sqrt{(x - x'_i)^2 + (y - y'_i)^2 + (z - z'_i)^2}$  la distance  $\overline{mm'_i}$ ;

$X, Y, Z$  les composantes parallèles aux axes ci-dessus de la résultante  $F$  des actions exercées sur  $m$  par les  $m'_i$ .

Nous désignerons sous le nom de *fonction potentielle* la fonction de  $x, y, z$  définie par

$$(1) \quad V = -\left(\frac{m'_1}{r_1} + \frac{m'_2}{r_2} + \dots + \frac{m'_i}{r_i} + \dots\right) = \sum -\frac{m'_i}{r_i},$$

et de *potentiel* de la masse  $m$  l'expression

$$(2) \quad mV.$$

Le potentiel n'est autre chose, à une constante près, que le travail total de  $F$  ou des actions exercées par les  $m'_i$  sur  $m$  lorsqu'on fait varier les distances  $r'_i$  de quantités finies.

Supposons que les molécules  $m_i$  forment une masse électrique telle qu'on puisse la considérer comme continue; soient  $du$  un élément de volume en un point quelconque  $m'$  de cette masse,  $\rho$  la densité correspondante, positive ou négative selon la nature du fluide; comme on peut prendre  $m' = \rho du$ , nous aurons, au lieu de l'équation (1), la suivante

$$(3) \quad V = - \int \rho \frac{du}{r},$$

l'intégrale s'étendant à toute la masse fluide.

La fonction potentielle peut être étudiée indépendamment de toute idée de masse attribuée au point  $m$  ainsi réduit à l'état d'un point géométrique, point que nous désignerons sous le nom de *centre potentiel*. En faisant varier la position de ce centre, on n'obtiendra un potentiel que lorsque ce centre pénétrera dans l'intérieur de la masse fluide considérée ou dans une autre masse sur laquelle agit cette dernière.

4. *Propriétés du potentiel et de la fonction potentielle.* — Les formules relatives à l'attraction d'un corps grave sur un point matériel <sup>(1)</sup> s'appliquent évidemment ici, en y changeant le signe de  $V$ .

Nous avons d'abord

$$(4) \quad X = m \frac{dV}{dx}, \quad Y = m \frac{dV}{dy}, \quad Z = m \frac{dV}{dz}.$$

Concevons que l'on fasse subir à  $m$  un déplacement élémentaire  $d\xi$  suivant une certaine direction  $m\xi$  et soit  $F_\xi$  la composante de  $F$  suivant cette direction. Nous aurons, en égalant entre elles deux expressions du travail élémentaire,

$$m dV = F_\xi d\xi,$$

d'où

$$(5) \quad F_\xi = m \frac{dV}{d\xi}.$$

---

<sup>(1)</sup> *Œuvres de Laplace*, t. II, liv. III; DUHAMEL, *Cours de Mécanique de l'École Polytechnique* (édit. de 1845), t. II, p. 165 et suiv.; H. RESAL, *Traité élémentaire de Mécanique céleste*, Ch. III.

En désignant par  $C$  une constante arbitraire, l'équation en  $x, y, z$ ,

$$V = C,$$

représente une famille de surfaces dites *de niveau*.

Si  $m$  est un point de l'une de ces surfaces, et si la direction de  $m\xi$  est comprise dans le plan tangent à cette surface, nous aurons, en vertu de la formule (5),

$$F_{\xi} = 0,$$

et l'action exercée sur  $m$  est par suite *normale* à la surface de niveau correspondante

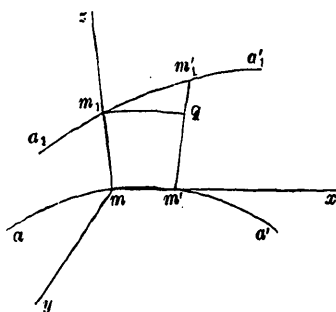
Soit  $dn$  la portion de la normale à la surface de niveau ci-dessus, menée au point  $m$ , limitée par une autre surface de niveau qui en est infiniment voisine; nous aurons

$$(6) \quad F = m \frac{dV}{dn} \quad (1).$$

(1) Il nous paraît intéressant de trouver l'expression de l'angle formé par les plans tangents en deux points correspondants de deux surfaces de niveau consécutives.

Soient (fig. 1)  $V = C, V = C + dC$  les équations de ces surfaces (A) et (A<sub>1</sub>);  $m, m_1$  les points où la normale au point  $m$  de la première rencontre la seconde ou

Fig. 1.



le point correspondant de  $m$ . Nous prendrons pour plan de la figure celui de l'une des sections principales de (A) en  $m$ , déterminant dans cette surface la courbe  $aa'$  et dans l'autre le profil  $a_1a'_1$ .

Portons sur  $aa'$  à partir de  $m$  la longueur infiniment petite  $mm' = ds$  et dési-

Si le point  $m$  n'est pas compris dans l'intérieur de la masse fluide, la fonction potentielle satisfait à l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$(7) \quad \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0.$$

Dans le cas contraire, on a

$$(8) \quad \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 4\pi\rho,$$

$\rho$  étant la densité du fluide au point intérieur  $m$ .

gnons par  $m'_1$  le point correspondant de  $m'$ ; menons en  $m_1$  la parallèle à  $mm'$  jusqu'à sa rencontre  $q$  avec  $m'm'_1$ , nous avons, en supposant la masse  $m$  égale à l'unité,

$$dn = \overline{mm_1},$$

$$F = \frac{dC}{dn}, \quad dn = \frac{dC}{F},$$

$$m'_1 q = \frac{d dn}{ds} ds = dC \frac{d^1 \overline{F}}{ds},$$

et, en appelant  $i$  l'angle  $\widehat{m'_1 m_1 q}$ ,

$$i = \frac{\overline{m'_1 q}}{m_1 q} \frac{dC}{mn} \frac{d^1 \overline{F}}{ds} ds = dC \frac{d^1 \overline{F}}{ds}.$$

Si l'on distingue par un accent les valeurs de  $i$  et  $ds$  qui se rapportent à l'autre section principale, on a de même

$$i' = dC \frac{d^1 \overline{F}}{ds'}.$$

Prenons les directions de  $mm_1$ ,  $mm'$  pour axes des  $z$  et des  $x$ , l'équation du plan parallèle en  $m$  au plan tangent mené au point  $m_1$  sera

$$x \operatorname{tang} i + y \operatorname{tang} i' - z = 0.$$

Le cosinus de l'angle cherché  $\gamma$ , que forme ce plan avec le plan  $amy$ , sera donné par

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 i + \operatorname{tang}^2 i'}},$$

d'où

$$\gamma = \sqrt{i^2 + i'^2} = \frac{dC}{F^2} \sqrt{\frac{dF^2}{ds^2} + \frac{dF^2}{ds'^2}}.$$

Enfin, si le point  $m$  se trouve à la surface, on a

$$(9) \quad \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 2\pi\rho \quad (1).$$

## § II. — DE L'ÉQUILIBRE ÉLECTRIQUE D'UN CONDUCTEUR.

5. *Niveau potentiel.* — Si, à un instant quelconque, un corps conducteur possède une certaine quantité libre d'électricité, cette quantité ne subira aucune modification que si l'on se trouve dans les conditions suivantes :

1° Le corps doit être placé dans un milieu non conducteur, et qui exerce sur sa surface une pression supérieure à zéro; 2° il ne doit se trouver en contact qu'avec des corps non conducteurs; 3° il doit être suffisamment éloigné d'autres conducteurs, pour que ces derniers n'exercent sur lui aucune action appréciable.

Si l'équilibre électrique est établi, *les deux fluides restent à l'état de combinaison dans toutes les molécules matérielles du corps.*

En effet, supposons que, en un point de ce corps, le fluide neutre se trouve décomposé en ses deux éléments égaux  $m$  et  $m'$ . L'un de ces éléments étant soumis à une attraction et l'autre à une répulsion, ils se sépareraient de plus en plus, c'est-à-dire qu'il y aurait mouvement de l'électricité, ce qui est contraire à l'hypothèse de l'équilibre.

Ainsi donc il ne s'exerce aucune action électrique dans le corps à partir de sa surface, c'est-à-dire que l'on a

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

ou, d'après les équations (4), que la fonction potentielle a une valeur constante dans tout l'intérieur du corps. Cette constante, qui joue un

---

(1) On ne donne pas généralement cette formule, mais on l'établit de la même manière que la formule (8), par la considération d'une sphère d'un rayon infiniment petit ayant son centre en  $m$ . Mais l'on voit ici que l'on ne doit considérer que la moitié du potentiel de cette sphère.



rôle important dans la théorie de l'Électrostatique, a reçu le nom de *niveau potentiel*.

L'équation (8) donne, pour l'intérieur du corps,  $\rho = 0$ , ce qui devait paraître évident a priori. On déduit de là que le potentiel d'un point intérieur du conducteur est nul.

D'après ce qui précède, on voit que la seule hypothèse que l'on puisse faire est de supposer que l'électricité forme une couche répandue sur la surface du corps, et que cette surface est une surface de niveau <sup>(1)</sup>. L'épaisseur de la couche, généralement variable d'un point à un autre de la surface du corps, ne peut pas être appréciée; toutefois, on admet qu'elle est très petite.

La couche électrique n'exerçant aucune action sur le corps, réciproquement le corps, dans ses éléments, n'exerce aucune action sur la couche. D'où il suit que chaque molécule électrique de cette couche n'est soumise qu'aux forces répulsives provenant des autres parties de la même couche.

La fonction potentielle changera brusquement de valeur quand on passera d'un point de la surface à un point de la couche qui en sera aussi voisin que l'on voudra; il en sera de même lorsque l'on passera d'un point de la couche à un point de sa surface extérieure; c'est ce qui résulte des équations (8) et (9).

**6. Densité électrique superficielle. Charge électrique.** — Soient  $d\omega$  un élément de la surface du corps;  $\epsilon$  et  $\rho$  l'épaisseur et la densité correspondantes de la couche électrique; on peut prendre  $du = \epsilon d\omega$ , et la formule (3) devient

$$V = - \int \rho \epsilon \frac{d\omega}{r}.$$

Mais, comme il est impossible d'apprécier  $\rho$  et  $\epsilon$ , il est plus simple

(1) La surface libre de la couche ne sera généralement pas une surface de niveau, quoiqu'elle ne soit soumise qu'à une pression normale. En effet, la condition qui exprimerait qu'elle est de niveau sera presque toujours incompatible avec celle qui exprime que la valeur de la fonction potentielle de la couche est constante pour tous les points du corps conducteur. La distribution des pressions dans la couche différera donc quelque peu de celle que donne l'Hydrostatique.

de poser

$$\rho\varepsilon = h,$$

$h$  étant ce que l'on est convenu d'appeler la *densité superficielle de l'électricité*. On a ainsi, pour la fonction potentielle,

$$(15) \quad V = - \int h \frac{d\omega}{r},$$

et pour la masse de la couche électrique, c'est-à-dire la *charge électrique* du corps,

$$(16) \quad M = \int h d\omega.$$

Des considérations qui précèdent, il résulte que l'électricité peut être regardée comme formant, à la surface du conducteur, une pellicule sans épaisseur appréciable, mais ayant une densité constante ou variable par unité de surface.

**7. Relation entre deux charges que peut recevoir un conducteur et les deux fonctions potentielles correspondantes relatives à un même centre.** — Si l'on substitue à la couche électrique dont la densité superficielle est  $h$  une autre couche dont la densité soit proportionnelle à cette dernière, la nouvelle satisfera encore à la condition de l'équilibre électrique, car, puisque  $V$  est constant dans l'intérieur du corps dans le premier cas, il le sera également dans le second.

Soient  $M'$  et  $V'$  ce que deviennent  $M$  et  $V$ , lorsqu'on passe du premier état d'équilibre au second, en concevant le même centre potentiel. Nous aurons évidemment

$$(17) \quad \frac{M'}{M} = \frac{V'}{V},$$

et, en distinguant par l'indice 0 les valeurs que prennent  $V'$  et  $V$  lorsque le centre potentiel se trouve dans l'intérieur du conducteur,

$$(17') \quad \frac{M'}{M} = \frac{V'_0}{V_0}.$$

On voit ainsi que deux charges électriques successives d'un même corps sont *proportionnelles aux niveaux potentiels correspondants*.

On comprend ainsi ce que l'on doit entendre en disant que l'on *charge un corps à un niveau potentiel déterminé*.

Les formules (17) et (17') peuvent se mettre sous les formes suivantes,

$$(18) \quad MV' = M'V,$$

$$(18') \quad MV'_0 = M'V_0.$$

### 8. Rappel d'une formule de Green. — Soient

$U, V$  deux fonctions des trois coordonnées rectangulaires  $x, y, z$ , assujetties, ainsi que leurs dérivées partielles, à rester finies dans un volume terminé par une surface fermée ;

$du, d\omega$  deux éléments respectifs du volume de la surface ;

$dn$  une longueur infiniment petite portée à partir de la surface sur la normale extérieure.

On a la relation

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int U \left( \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} \right) du - \int U \frac{dV}{dn} d\omega \\ & = \int V \left( \frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{d^2 U}{dy^2} + \frac{d^2 U}{dz^2} \right) du - \int V \frac{dU}{dn} d\omega, \end{aligned} \right.$$

dans laquelle la première et la troisième intégrale se rapportent au volume et les deux autres à la surface.

Prenant  $U = 1$ , on a simplement

$$(A') \quad \int \left( \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} \right) du = \int \frac{dV}{dn} d\omega.$$

9. *Action exercée par une couche électrique en équilibre sur un point de sa masse.* — Ce problème comporte trois questions que nous allons examiner successivement.

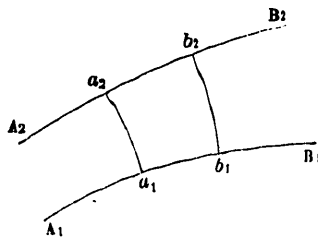
1° Soient (*fig. 2*)

$A, B_1, A_2, B_2$  deux surfaces de niveau comprises dans la couche, qu'il est inutile jusqu'à nouvel ordre de considérer comme extrêmement voisines;

$d\omega_1 = a_1 b_1$  un élément de la première d'entre elles;

$d\omega_2 = a_2 b_2$  l'élément de la seconde, déterminé par le lieu géométrique

Fig. 2.



des courbes <sup>(1)</sup> partant des points du périmètre de  $d\omega_1$ , et qui sont normales aux surfaces de niveau comprises entre  $A, B_1, A_2, B_2$ .

Supposons que  $A, B_1$  soit celle des deux surfaces qui se trouve la plus rapprochée de la surface du conducteur.

Nous allons appliquer la formule (A') au volume  $a_1 a_2 b_1 b_2$ . Si l'on a égard à l'équation (8), qui s'applique à tous les points intérieurs de ce volume, on voit que le premier membre de la formule précitée se réduit à

$$4\pi \int \rho \, du = 4\pi \, dM,$$

$dM$  étant la masse électrique contenue dans le volume considéré.

La surface latérale  $(a_1 a_2, b_1 b_2)$  ne donnera pas de terme dans le second membre de la formule (A'), puisque, en chacun de ses points, la force lui est tangente. L'élément  $a_2 b_2 = d\omega_2$  donnera le terme  $\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\omega_2$ , et l'élément  $d\omega_1$ , le terme  $\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\omega_1$ ; mais il faudra donner à cette dernière expression le signe  $-$ , si l'on continue à désigner par

(<sup>1</sup>) Les courbes de cette nature ont reçu de Faraday le nom de *lignes de force* (*Experimental researches in electricity*, t. I, p. 383 et suiv.), parce que la tangente en chacun de leurs points donne la direction de la force correspondante.

$dn$  la distance du point  $a_1$  de la surface  $A_1B_1$  à une surface de niveau qui en est infiniment voisine, et comprise entre elle et  $A_2B_2$ , tandis que, au point de vue de la formule (12),  $dn$  a une signification contraire. Nous avons donc

$$(a) \quad \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\omega_2 - \left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\omega_1 = 4\pi dM \quad (1),$$

ce qui exprime que *la différence des forces électriques qui s'exercent sur deux éléments correspondants de deux surfaces de niveau est égale au produit par  $4\pi$  de la masse électrique contenue dans le volume orthogonal déterminé par ces deux éléments.*

2° Supposons maintenant que  $A_1B_1$  soit la surface du conducteur ; comme nous l'avons fait remarquer plus haut, le terme  $\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\omega$  correspond à un déplacement normal dans l'intérieur du corps où la fonction potentielle est constante ; ce terme est donc nul.

En admettant maintenant que la couche électrique soit extrêmement mince, que  $A_2B_2$  passe par un point de la surface libre situé dans l'intérieur de la surface latérale  $(a_1, a_2, b_1, b_2)$ , nous pourrions prendre

$$dM = h d\omega_2,$$

$h$  étant la densité de la couche électrique en  $a_1$  ; en supprimant l'indice 2 devenu inutile, l'équation (a) se réduit ainsi à la suivante,

$$(19) \quad \frac{dV}{dn} = 4\pi h,$$

qui exprime que :

*La force, rapportée à l'unité de masse exercée en un point de la couche électrique, est égale au produit par  $4\pi$  de la densité superficielle correspondante.*

3° L'action totale exercée sur la masse  $(a_1, a_2, b_1, b_2)$  sera

$$h d\omega \cdot 4\pi h = 4\pi h^2 d\omega.$$

---

(1) En supposant  $dM = 0$ , on retombe sur un théorème de Michel Chasles.

Soient  $P$  la pression extérieure normale censée constante (estimée en unités de force électrique) exercée sur la pellicule électrique;  $N d\omega$  la réaction de la surface du corps conducteur sur l'élément  $d\omega$ ; on a

$$N = P - 4\pi h^2.$$

Pour que l'équilibre ait lieu, comme nous l'avons supposé, il faut que  $N$  soit positif et que l'on ait, par suite,

$$(20) \quad \max. h^2 < \frac{P}{4\pi}.$$

Dans le cas de l'égalité, l'équilibre serait instable et le fluide tendrait à s'écouler au point de la surface correspondant au maximum de  $h^2$ .

**10. Distribution de l'électricité sur un ellipsoïde.** — On sait qu'une couche homogène n'exerce aucune action sur un point et son intérieur lorsqu'elle est limitée par deux surfaces ellipsoïdales concentriques dont les axes coïncident en direction. On déduit de là qu'une couche électrique sur un ellipsoïde peut être considérée comme ayant une densité de masse constante  $\rho$ , et comme étant limitée extérieurement par une surface semblable dans les conditions ci-dessus définies. Il nous est inutile, jusqu'à nouvel ordre du moins, de supposer que la couche est extrêmement mince.

Soient

$a, b, c$  les demi-axes de l'ellipsoïde, dont les directions sont  $Ox, Oy, Oz$ ;

$\lambda$  le rapport de similitude de la surface libre de la couche;

$p$  la distance du centre  $O$  au plan tangent mené au point  $(x, y, z)$  de la surface du conducteur;

$e = (\lambda - 1)p$  l'épaisseur correspondante de la couche.

Nous avons

$$(a) \quad \begin{cases} M = \frac{4}{3} \pi abc \cdot \rho (\lambda^3 - 1), \\ h = \rho (\lambda - 1) p, \end{cases}$$

d'où

$$(b) \quad h = \frac{3}{4} \frac{Mp}{\pi abc(\lambda^2 + \lambda + 1)},$$

ou, en remplaçant  $p$  par sa valeur en fonction des coordonnées,

$$(c) \quad h = \frac{3}{4} \frac{M}{\pi abc(\lambda^2 + \lambda + 1) \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}.$$

Pour déterminer le niveau potentiel, nous pourrions prendre pour centre potentiel le centre  $O$  de l'ellipsoïde.

Concevons un cône partant du sommet  $O$ , et dont l'ouverture sphérique, infiniment petite, soit  $d\omega$ . Ce cône déterminera dans la couche un élément de volume que nous pourrions diviser en d'autres éléments secondaires par les surfaces infiniment voisines semblables à celle de l'ellipsoïde.

Soient  $r, r' = ru$  les portions d'une génératrice du cône déterminées par l'ellipsoïde et l'une des surfaces ci-dessus; la fonction potentielle d'un élément secondaire sera

$$- \rho r'^2 d\omega \frac{dr'}{r'} = \rho r^2 d\omega u du,$$

et, en intégrant entre les limites  $u = 1, u = \lambda$ , on obtiendra, pour celle de l'élément déterminé par le cône,

$$- \rho \frac{(\lambda^2 - 1)}{2} r^2 d\omega.$$

Ainsi donc nous aurons, pour le niveau potentiel cherché,

$$(d) \quad V_0 = - \rho \frac{(\lambda^2 - 1)}{2} \int r^2 d\omega,$$

l'intégrale s'étendant à la surface entière de l'ellipsoïde.

Soient  $\theta$  et  $\varphi$  les angles formés par  $r$  avec  $Oz$  et ses projections sur

ce plan  $xOy$  avec  $Ox$ ; nous avons

$$\begin{aligned}d\omega &= \sin\theta \, d\varphi \, d\theta, \\x &= r \sin\theta \cos\varphi, \\y &= r \sin\theta \sin\varphi, \\z &= r \cos\theta,\end{aligned}$$

et de l'équation de l'ellipsoïde on tire, par suite,

$$r^2 = \frac{1}{\frac{\sin^2\theta \cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta \sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}}.$$

La formule (d) devient ainsi

$$V_0 = -\rho \frac{(\lambda^2 - 1)}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int \frac{\sin\theta \, d\theta}{\frac{\sin^2\theta \cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta \sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}},$$

ou encore

$$(e) \, V_0 = -\rho \frac{(\lambda^2 - 1)}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 \frac{du}{\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2} + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) u^2};$$

en posant  $u = \cos\theta$ .

Supposons d'abord que les trois axes soient inégaux et que l'on ait

$$a > b > c,$$

et posons

$$A^2 = \frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}, \quad B^2 = \frac{1}{c^2} - \frac{\cos^2\varphi}{a^2} - \frac{\sin^2\varphi}{b^2}.$$

L'intégrale par rapport à  $u$  de l'expression (e) prend la forme

$$\frac{1}{AB} \int_{-1}^1 \frac{dBu}{1 + \frac{B^2 u^2}{A^2}} = \frac{2}{AB} \operatorname{arctang} \frac{B}{A};$$



par suite, on a

$$(f) \left\{ \begin{aligned} V_0 &= -\rho(\lambda^2 - 1) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\left(\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}\right) \left(\frac{1}{c^2} - \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} - \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}\right)}} \\ &\times \operatorname{arctang} \sqrt{\frac{\frac{1}{c^2} - \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} - \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}}{\frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2}}}, \end{aligned} \right.$$

intégrale qu'il est impossible de déterminer dans le cas général; toutefois, le problème se trouve ramené à une quadrature.

Mais l'intégration s'effectue facilement quand l'ellipsoïde est de révolution; admettons, en effet, que l'on ait  $a = b$ , la formule (e) devient

$$V_0 = -\pi\rho(\lambda^2 - 1)a^2 \int_{-1}^1 \frac{du}{1 + \left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right)u^2};$$

selon que  $a > c$  ou  $a < c$ , ou que l'ellipsoïde est aplati ou allongé, on trouve, en ayant égard à la formule (a),

$$(g) \left\{ \begin{aligned} V_0 &= -2\rho\pi(\lambda^2 - 1)a^2 \frac{\operatorname{arctang} \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}} \\ &= -\frac{3}{2} \frac{(\lambda + 1)M}{(\lambda^2 + \lambda + 1)c} \frac{\operatorname{arctang} \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}}, \end{aligned} \right.$$

ou

$$(h) \left\{ \begin{aligned} V_0 &= -2\pi\rho \frac{(\lambda^2 - 1)a^2}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}} \log \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}} \\ &= -\frac{3}{2} \frac{(\lambda + 1)M}{(\lambda^2 + \lambda + 1)\sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}} \log \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}}. \end{aligned} \right.$$

*Hypothèse d'une couche très mince.* — Comme  $\lambda - 1$  est très petit, nous pouvons faire  $\lambda = 1$  dans l'équation (c), qui devient

$$(c') \quad h = \frac{M}{4\pi abc \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}}.$$

Si l'on a  $a > b > c$ , le minimum de  $h$  correspondra à  $x = 0, y = 0, z = c$ , et sera

$$h = \frac{M}{4\pi ab},$$

et son maximum,

$$h = \frac{M}{4\pi bc}.$$

En portant cette dernière valeur dans la formule (18) du numéro précédent, on trouve que, pour que la couche puisse être en équilibre, il faut que

$$M < 2bc\sqrt{P}.$$

On voit ainsi que si l'ellipsoïde est très allongé, ou si  $b$  et  $c$  sont très petits, il arrivera que, même sous une très faible charge, l'électricité tendra à s'écouler ou s'écoulera aux sommets du grand axe, ce qui, à un certain point, peut expliquer le pouvoir des pointes.

En éliminant  $z$  dans la formule (c) au moyen de l'équation de l'ellipsoïde, on trouve

$$(c') \quad h = \frac{M}{4\pi ab \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + c^2 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)}}.$$

Supposons que l'ellipsoïde soit assez aplati dans la direction de  $Oz$  pour qu'il devienne en quelque sorte un plateau elliptique. A une distance suffisante du bord, le terme  $c^2 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)$  sera très petit par rapport à  $1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ , et l'on aura sensiblement

$$h = \frac{M}{4\pi ab} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

Dans le voisinage du bord,  $1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  devient, au contraire, très petit par rapport à  $c^2 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)$ , et l'on a alors, à très peu près,

$$h = \frac{M}{4\pi abc} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}} = \frac{M}{4\pi a^2 \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) x^2}}.$$

Dans le cas d'une sphère dont le rayon est  $a$ , la formule (c') donne ce résultat évident à priori

$$h = \frac{M}{4\pi a^2}.$$

En faisant  $\lambda = 1$  dans le troisième membre des formules (g) et (h), on trouve

$$(g') \quad V_0 = -\frac{M}{c} \frac{\text{arctang} \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}},$$

$$(h') \quad V_0 = -\frac{M}{c} \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}} \log \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}}.$$

Si  $a = c$ , on déduit facilement de ces formules la suivante

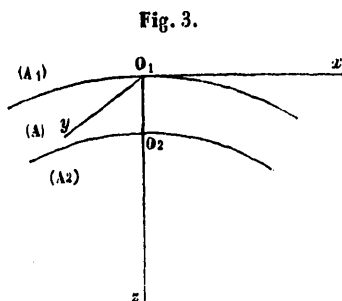
$$V_0 = -\frac{M}{a},$$

qui est relative à la sphère et qui est évidente.

### § III. — DES SYSTÈMES DE CONDUCTEURS.

**11.** *Condition d'équilibre électrique de deux corps conducteurs terminés par des surfaces parallèles* (théorie de Green). — Considérons deux corps conducteurs ( $A_1$ ), ( $A_2$ ) chargés d'électricité dont les surfaces

sont parallèles, très peu éloignées l'une de l'autre et séparées par une substance non conductrice (A).



Soient (*fig. 3*)

- $O_1$  un point quelconque de la surface du premier corps;
- $O_2$  le point où la normale  $O_1z$  en  $O_1$  rencontre la surface du second corps;
- $O_1x, O_1y$  deux axes rectangulaires compris dans le plan tangent en  $O_1$ ;
- $e$  l'épaisseur constante de (A) supposée assez petite pour qu'on puisse négliger celles de ses puissances qui sont supérieures à la seconde;
- $h_1, h_2$  les densités électriques superficielles et  $V_1, V_2$  les niveaux potentiels de  $(A_1)$  et  $(A_2)$ ;
- $V$  la fonction potentielle, variable d'un point à un autre de (A).

Nous admettrons, pour fixer les idées, que la surface de  $(A_1)$  oppose sa convexité au plan tangent  $xO_1y$  et nous désignerons par l'indice 1 les dérivées partielles qui se rapportent à l'origine  $O_1$ .

Nous avons

$$(21) \quad V_2 = V_1 + \left(\frac{dV}{dz}\right)_1 e + \left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)_1 \frac{e^2}{2}.$$

Pour un point infiniment voisin de  $O_1$  situé sur l'intersection de la surface  $(A_1)$  et du plan  $zO_1x$ , on a, en remarquant que  $dV = 0$  et que  $dz$  est du second ordre par rapport à  $dx$ ,

$$0 = \left(\frac{dV}{dx}\right)_1 dx + \left(\frac{dV}{dz}\right)_1 dz + \left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)_1 \frac{dx^2}{2}.$$

Si  $R_x$  désigne le rayon de courbure au point  $O_1$  de la section considé-

rée, on a

$$dz = \frac{dx^2}{2R_x},$$

et l'équation précédente se transforme dans la suivante

$$0 = \left(\frac{dV}{dx}\right)_1 + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_1 + \frac{1}{R_x} \left(\frac{dV}{dz}\right)_1 \right] dx.$$

Comme cette dernière doit être vérifiée quel que soit  $dx$ , il faut que

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)_1 = 0, \quad \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_1 + \frac{1}{R_x} \left(\frac{dV}{dz}\right)_1 = 0,$$

d'où

$$(\alpha) \quad \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_1 = -\frac{1}{R_x} \left(\frac{dV}{dz}\right)_1.$$

En désignant par  $R_y$  le rayon de courbure en  $O_1$  de la section faite dans la surface de  $(A_1)$  par le plan  $zO_1y$ , on aurait de même

$$(\beta) \quad \left(\frac{d^2V}{dy^2}\right)_1 = -\frac{1}{R_y} \left(\frac{dV}{dz}\right)_1;$$

mais, comme  $(A)$  est extérieur à  $(A_1)$ ,  $V$  doit satisfaire à l'équation (7) du n° 4; en substituant dans cette équation les valeurs  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  et désignant par  $\frac{1}{\Gamma}$  la courbure  $\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}$  de la surface en  $O_1$ , on trouve

$$\left(\frac{d^2V}{dz^2}\right)_1 = \frac{1}{\Gamma} \left(\frac{dV}{dz}\right)_1.$$

L'équation (21) devient alors

$$V_2 - V_1 = e \left(\frac{dV}{dz}\right)_1 \left(1 + \frac{e}{2\Gamma}\right).$$

Mais on a, en vertu de la formule (19) du n° 9,

$$\left(\frac{dV}{dz}\right)_1 = 4\pi h_1,$$

par suite

$$(22) \quad V_2 - V_1 = 4\pi e h_1 \left( 1 + \frac{e}{2\Gamma} \right).$$

Supposons maintenant que l'on place l'origine des coordonnées en  $O_2$ , en dirigeant l'axe des  $z$  suivant  $O_2O_1$ ; la courbure de la surface de  $(A_2)$  en  $O_2$  sera de signe contraire à celle de la surface de  $(A_1)$  en  $O_1$ , mais pourra être considérée comme étant égale à  $\frac{1}{\Gamma}$  en valeur absolue. De l'équation (22) on déduira ainsi la suivante

$$(22') \quad V_1 - V_2 = 4\pi e h_2 \left( 1 - \frac{e}{2\Gamma} \right),$$

et de ces deux formules

$$(23) \quad h_2 = -h_1 \left( 1 + \frac{e}{\Gamma} \right).$$

Soient  $d\omega_1$  un élément de la surface de  $(A_1)$  en  $O_1$ ;  $d\omega_2$  l'élément déterminé sur la surface de  $(A_2)$  par les normales menées aux différents points du périmètre de  $d\omega_1$ , on a, aux termes du second ordre près,

$$(24) \quad d\omega_2 = d\omega_1 \left( 1 - \frac{e}{\Gamma} \right) \quad (1),$$

(1) Soient

$$mn = ds, \quad mn' = ds'$$

les éléments respectifs des deux lignes de courbure passant par le point  $m$  d'une surface,  $m'$  l'intersection de la ligne de courbure de même espèce que  $mn'$  passant par  $n$ , avec la ligne de courbure de la seconde espèce passant par  $n'$ ;  $R, R'$  les rayons de courbure de  $mn$  et  $mn'$ . L'aire  $mnm'n'$  a pour expression

$$d\omega_1 = ds ds'.$$

Menons les normales aux points  $m, n, m', n'$  jusqu'à leur rencontre avec une surface intérieure parallèle à la proposée et qui en est distante de  $e$ . Nous déterminerons ainsi sur la seconde surface un élément superficiel qui aura pour

d'où, au même degré d'approximation,

$$(25) \quad h_1 d\omega_1 = -h_2 d\omega_2$$

ce qui exprime que *les quantités d'électricité qui se trouvent sur deux éléments correspondants des surfaces des deux conducteurs doivent être égales et de signes contraires*. Ce théorème s'étend évidemment à deux portions correspondantes des deux surfaces, et, par suite, aux surfaces entières.

Si l'on néglige  $\frac{e}{r}$  devant l'unité, on a simplement

$$(26) \quad h_1 = -h_2 = \frac{V_2 - V_1}{4\pi e},$$

ce qui exprime que *la densité électrique superficielle de chaque conducteur est proportionnelle à l'excès du niveau potentiel de l'autre sur le sien propre et varie en raison inverse de la distance des deux conducteurs*.

Les considérations qui précèdent sont notamment applicables au condensateur, au carreau de Franklin et à la bouteille de Leyde.

Si  $M_1$  et  $M_2$  sont les charges des armatures ( $A_1$ ), ( $A_2$ ) de la bouteille de Leyde,  $\Omega$  la surface de cette armature, on a

$$(27) \quad M_1 = \frac{V_2 - V_1}{4\pi e} \Omega = -M_2.$$

valeur

$$d\omega_2 = ds \left( \frac{R-e}{R} \right) ds' \left( \frac{R'-e}{R'} \right) = ds ds' \left[ 1 - e \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) + \frac{e^2}{RR'} \right],$$

d'où

$$d\omega_2 = d\omega_1 \left[ 1 - e \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) + \frac{e^2}{RR'} \right].$$

Si  $e$  est assez petit pour qu'on puisse en négliger la seconde puissance, on a

$$d\omega_2 = d\omega_1 \left[ 1 - e \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \right],$$

ce qui n'est autre chose que la formule (24) du texte.

Nous admettrons en principe que *lorsqu'un corps électrisé par influence se trouve en communication avec la terre, son niveau potentiel est nul*. Et, en effet, la fonction potentielle a la même valeur en un point quelconque de l'intérieur du système formé par la terre et le corps; comme il y a dans la terre autant d'électricité positive que d'électricité négative, cette valeur est nécessairement nulle. La grandeur du rayon de la Terre suffirait d'ailleurs pour justifier le principe dont il s'agit.

Si donc l'armature extérieure ( $A_2$ ) de la bouteille de Leyde est en communication avec le sol, nous aurons  $V_2 = 0$ ; sa charge sera

$$(28) \quad M_2 = \frac{V_1 \Omega}{4\pi e} = -M_1,$$

$M_1$  étant la charge de l'autre armature.

**12. Système formé de conducteurs dont l'un enveloppe les autres.** — Soient ( $A_1$ ) le conducteur enveloppant; ( $A_2$ ), ( $A_3$ ), ... les autres conducteurs;  $M_i$  la charge de ( $A_i$ ).

Considérons l'espace limité par les surfaces de tous les conducteurs ou plutôt par des surfaces de niveau extérieures qui en sont infiniment voisines. Pour chacun des points de cet espace l'équation (7) s'applique et l'équation (A') se réduit à

$$\int \frac{dV}{dn} d\omega = 0.$$

Mais, en remarquant que l'élément  $dn$  doit être changé de signe, puisqu'il est dirigé en sens inverse de celui qui se rapporte à la surface de ( $A_i$ ) et à la surface de niveau extérieure qui en est infiniment voisine, et désignant par  $h$  la densité en un point quelconque des couches électriques, la formule (19) donne

$$\frac{dV}{dn} = -4\pi h,$$

d'où

$$\int h d\omega = 0,$$

ou encore

$$M_1 + M_2 + \dots = 0.$$



Ainsi la somme algébrique des charges de tous les conducteurs est nulle.

Supposons, en particulier, que le conducteur  $(A_1)$  n'ait pas reçu de charge initiale, et qu'il ne soit ainsi électrisé que par l'influence de  $(A_2)$ ,  $(A_3)$ , ...; en désignant par  $M'_1$  la quantité d'électricité qui se trouve sur sa surface extérieure, nous aurons  $M'_1 + M_1 = 0$ , d'où, en vertu de la formule ci-dessus,

$$M'_1 = -M_1 = M_2 + M_3 + \dots,$$

ce qui n'est autre chose que l'expression de cette loi de Faraday : *La quantité d'électricité induite sur un corps enveloppant est égale à la quantité inductrice.*

**13. Conducteur présentant des vides intérieurs qui ne renferment pas de masses électriques.** — Nous allons d'abord établir le lemme suivant : *Quand une surface fermée ne renferme aucune masse électrique et que sur cette surface la fonction potentielle a une valeur constante, cette fonction est également constante dans l'espace déterminé par la surface.* En effet, en un point de cet espace, l'équation (7) est satisfaite. On aura d'ailleurs  $\frac{dV}{dn} = -4\pi h = 0$ , puisque la surface n'est pas recouverte d'électricité et que partout  $h = 0$ . Une formule de Green <sup>(1)</sup> conduit au résultat suivant

$$\int \left( \frac{dV^2}{dx^2} + \frac{dV^2}{dy^2} + \frac{dV^2}{dz^2} \right) du = 0,$$

---

<sup>(1)</sup> En conservant les notations du n° 8, on a

$$\begin{aligned} & \int U \left( \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} \right) du \\ &= \int U \frac{dV}{dn} d\omega - \int \left( \frac{dU}{dx} \frac{dV}{dx} + \frac{dU}{dy} \frac{dV}{dy} + \frac{dU}{dz} \frac{dV}{dz} \right) du. \end{aligned}$$

Si l'on fait  $U = V$ , cette formule se réduit à la suivante

$$\int V \left( \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} \right) du = \int V \frac{dV}{dn} - \int \left( \frac{dV^2}{dx^2} + \frac{dV^2}{dy^2} + \frac{dV^2}{dz^2} \right) du,$$

qui est celle dont on fait usage dans le texte.

qui exige que  $V$  soit constant dans l'espace considéré, ce qu'il fallait établir.

Revenons maintenant à notre sujet et considérons un conducteur dont la surface extérieure est électrisée, présentant des vides intérieurs qui ne renferment pas de masses électriques.

Soient  $V_1$  la valeur constante de la fonction potentielle à la surface d'une cavité;  $K$  la valeur de la fonction potentielle en un point  $O$  du vide;  $Om$  un rayon quelconque partant du point  $O$  et rencontrant la surface en un point  $m$ . En suivant ce rayon, la fonction potentielle variera entre  $K$  et  $V_1$ , et il y aura l'un  $n$  de ses points pour lequel la fonction potentielle aura une valeur déterminée  $K'$  comprise entre  $K$  et  $V_1$ ; le lieu des points  $n$  sera une surface rentrant dans les conditions du lemme précédent et dans l'intérieur de laquelle la fonction potentielle serait égale à  $K'$ , tandis que, en  $O$ , elle est égale à  $K$ , ce qui est absurde. Ainsi, comme on ne peut pas supposer que  $K$  soit différent de  $V_1$ , il faut que la fonction potentielle dans l'intérieur de l'espace vide ait la même valeur constante qu'à sa surface.

Il résulte de là que *des cavités dans un conducteur n'ont aucune influence sur le mode de répartition de l'électricité sur sa surface extérieure et qu'il se comporte comme s'il était plein.*

**14. Théorème de Clausius** <sup>(1)</sup>. — Considérons un système composé de  $m$  corps conducteurs  $(A_1), (A_2), \dots, (A_i), \dots, (A_m)$  et supposons que ces corps aient reçu successivement deux charges électriques.

Soient

$M_i, M'_i$  les quantités d'électricité qui recouvrent  $(A_i)$  lors du premier et du second chargement;

$V_i, V'_i$  les niveaux potentiels correspondants.

Concevons l'espace limité par les surfaces des conducteurs et par celle d'une sphère d'un rayon  $R$  aussi grand que l'on voudra qui enveloppe tous les corps et dont le centre se trouve dans le voisinage de ces corps.

---

<sup>(1)</sup> *Annales de Physique et de Chimie* de G. Wiedemann, p. 493 et suiv.; 1877.

Soient

$du$  un élément de volume de cet espace au point  $(x, y, z)$ ;  
 $V, V'$  les valeurs des fonctions potentielles relatives à ce point lors de  
la première et de la seconde charge;  
 $d\omega$  un élément de l'une ou de l'autre des surfaces qui limitent l'espace.

La formule (A) du n° 8 donne

$$\begin{aligned} \int V \frac{dV'}{dx} d\omega - \int V \left( \frac{d^2 V'}{dx^2} + \frac{d^2 V'}{dy^2} + \frac{d^2 V'}{dz^2} \right) du \\ = \int V' \frac{dV}{dx} d\omega - \int V' \left( \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} \right) du. \end{aligned}$$

Comme il n'y a pas d'électricité dans l'espace ci-dessus défini et que le point  $(x, y, z)$  est extérieur aux  $(A_i)$ ,  $V$  et  $V'$  satisfont à l'équation (7) et la formule précédente se réduit à

$$(\alpha) \quad \int V \frac{dV'}{dn} d\omega = \int V' \frac{dV}{dn} d\omega.$$

Considérons d'abord la portion de l'intégrale du premier membre de cette équation qui se rapporte à la sphère et prenons pour centre  $O$  de cette sphère le centre de gravité des masses  $M'_i$ ; si la distance  $r$  d'un point quelconque  $(x, y, z)$  à ce centre est suffisamment grande, on a

$$V' = \frac{\Sigma M'_i}{r},$$

d'où

$$\frac{dV'}{dn} = \frac{dV'}{dr} = - \frac{\Sigma M'_i}{r^2},$$

et, pour la surface de la sphère,

$$\frac{dV'}{dn} = - \frac{\Sigma M'_i}{R^2},$$

quantité égale à zéro si nous prenons  $R = \infty$ , ainsi qu'il nous est

permis de le supposer. Comme le même raisonnement s'applique à  $\frac{dV}{dn}$ , on voit que la sphère ne joue aucun rôle dans l'équation ( $\alpha$ ).

Désignons par  $d\omega_i$  un élément de la surface du conducteur ( $A_i$ );  $V_i$  et  $V'_i$  étant constantes à la surface de ce corps comme dans son intérieur, l'équation ( $\alpha$ ) devient

$$(\beta) \quad V_1 \int \frac{dV'_1}{dn} d\omega_1 + V_2 \int \frac{dV'_2}{dn} d\omega_2 + \dots = V'_1 \int \frac{dV_1}{dn} d\omega_1 + V'_2 \int \frac{dV_2}{dn} d\omega_2 + \dots$$

Soient  $h_i, h'_i$  les densités électriques à la surface de ( $A_i$ ) qui se rapportent respectivement à la première et à la seconde charge; on a, en vertu de la formule (19) et en changeant le signe de  $dn$ , comme au n° 12,

$$\frac{dV'_i}{dn} = -4\pi h'_i, \quad \frac{dV_i}{dn} = -4\pi h_i,$$

et l'équation ( $\beta$ ) devient

$$V_1 \int h'_1 d\omega'_1 + V_2 \int h'_2 d\omega'_2 + \dots = V'_1 \int h_1 d\omega_1 + V'_2 \int h_2 d\omega_2 + \dots,$$

ou encore (1)

$$(29) \quad V_1 M'_1 + V_2 M'_2 + \dots = V'_1 M_1 + V'_2 M_2 + \dots;$$

telle est la formule qui constitue le théorème de M. Clausius, et dont on déduit, comme conséquences, plusieurs autres théorèmes particuliers, auxquels divers auteurs étaient arrivés auparavant, et que nous rappellerons dans ce qui suit.

15. Supposons que le conducteur ( $A_i$ ) se trouve en communication avec la terre; on a (11)  $V_i = 0$ .

Admettons maintenant que le corps ( $A_i$ ) étant isolé n'ait point reçu de charge initiale; il ne sera électrisé que par influence, c'est-à-dire qu'il sera recouvert de deux quantités égales d'électricité de signe

---

(1) D'après M. Bertrand (*Journal de Physique* de d'Almeida, t. III, p. 73), cette formule aurait été antérieurement établie par Gauss.

contraire, de sorte que l'on a  $M_2 = 0$ ,  $M'_2 = 0$ . De ces considérations résulte le théorème suivant :

*Les corps qui, lors des deux charges, sont en communication avec la Terre ou qui sont isolés sans charge initiale ne donnent aucun terme dans l'équation (29).*

16. Admettons maintenant, comme tout ce qui va suivre, que les  $(A_i)$  autres que  $(A_1)$  et  $(A_2)$  soient en communication avec la terre, ou que, étant isolés, ils ne reçoivent pas de charge initiale. L'équation (29) se réduira à la suivante

$$(30) \quad V_1 M'_1 + V_2 M'_2 = V'_1 M_1 + V'_2 M_2.$$

17. Supposons que,  $(A_1)$  et  $(A_2)$  étant isolés et non électrisés,  $(A_1)$  seul reçoive une charge que nous désignerons par  $E$ , en développant dans  $(A_2)$  le niveau potentiel  $V_2$ ; puis que  $(A_2)$  reçoive la même charge en soustrayant  $(A_1)$  à toute action extérieure. Nous avons

$$M_2 = 0, \quad M'_1 = 0, \quad M_1 = M'_2 = E,$$

d'où

$$(31) \quad V_2 = V'_1.$$

*Donc, le niveau potentiel qui naît dans  $(A_2)$ , quand  $(A_1)$  a été seul chargé, est égal à celui qui naît dans  $(A_1)$  quand on effectue l'opération inverse et que les deux charges sont égales.*

18. *Théorème de Riemann.* — Supposons que, à la première charge, le corps  $(A_1)$  se trouve au niveau potentiel  $K$ , que  $(A_2)$ , mis en communication avec la terre, reçoive de ce corps par influence la quantité d'électricité  $M_2$ ; puis que, à la seconde décharge,  $(A_2)$  se trouve au même niveau potentiel  $K$ , tandis que  $(A_1)$ , mis en communication avec le sol, se trouve recouvert de la quantité d'électricité  $M'_1$ . Nous avons

$$V_2 = 0, \quad V'_1 = 0, \quad V_1 = V'_2 = K,$$

et la formule (30) donne

$$(32) \quad M'_1 = M_2.$$

Donc la quantité d'électricité qui, sous l'influence de  $(A_1)$ , s'est accumulée sur  $(A_2)$  mis en communication avec la Terre, et celle qui s'est accumulée sur  $(A_1)$  mis en relation avec la Terre, par l'influence de  $(A_2)$ , sont égales lorsqu'il y a égalité entre les niveaux potentiels pour ces deux charges.

#### § IV. — DU TRAVAIL DES FORCES ÉLECTRIQUES. — DÉCHARGES.

**19. Expression du travail des forces électriques.** — Soient  $(A_1), (A_2) \dots, (A_i), \dots$  des conducteurs chargés d'électricité et réagissant les uns sur les autres.

Une modification introduite par une cause quelconque dans les intervalles intermoléculaires du fluide électrique donnera lieu à une production de travail mécanique dont la considération mérite un sérieux examen.

Désignons par  $r$  la distance de deux particules électriques,  $dm$  et  $dm'$  appartenant au système des conducteurs ci-dessus désignés. Le travail élémentaire des forces électriques a pour expression

$$d\mathcal{E} = \int \frac{dm dm'}{r^2} dr = - d \int \frac{dm dm'}{r},$$

le signe de l'intégration s'étendant à toutes les combinaisons deux à deux des molécules électriques.

Nous désignerons sous le nom de *potentiel total* du système électrique l'expression

$$W = - \int \frac{dm dm'}{r},$$

de sorte que nous aurons

$$d\mathcal{E} = dW.$$

En passant d'un certain état initial, que nous caractériserons par l'indice zéro, à un état quelconque, nous aurons pour le travail déve-

loppé entre les deux états

$$(1) \quad \mathcal{E} = W - W_0.$$

Avant d'aller plus loin, nous ferons remarquer que, si le fluide revient à l'état neutre, on aura  $W = 0$ , puisque toutes les masses électriques s'annuleront, et par suite

$$(2) \quad \mathcal{E} = -W_0.$$

Si nous désignons par  $V$  la fonction potentielle de  $dm$  relative à tous les autres éléments du système électrique, et si nous considérons l'intégrale

$$\int V dm,$$

étendue à tous les éléments  $dm$  du système total, les termes tels que  $\frac{dm dm'}{r}$  seront reproduits deux fois, et nous devons prendre

$$(3) \quad W = \frac{1}{2} \int V dm.$$

Si nous remarquons que, à la surface de  $(A_i)$  comme dans son intérieur,  $V$  est constant ou égal au niveau potentiel  $V_i$ , pour chacun des conducteurs  $V$  sortira de l'intégrale, et l'on voit que, en désignant par  $M_i$  la charge du conducteur ci-dessus, on aura

$$(4) \quad W = \frac{1}{2} (M_1 V_1 + M_2 V_2 + M_3 V_3, \dots).$$

Si  $(A_i)$  est isolé et n'a pas reçu de charge initiale, le conducteur ne sera électrisé que par influence et renfermera, par suite, autant d'électricité positive que d'électricité négative, et l'on aura  $M_i = 0$ ; si maintenant  $(A_i)$  est en communication avec la Terre, on a  $V_i = 0$ . De sorte que, dans les deux cas,  $(A_i)$  ne laissera aucune trace dans la formule (4).

**20. Décharge d'une bouteille de Leyde.** — Soient  $(A_1)$  et  $(A_2)$  l'armature intérieure et l'armature extérieure, les deux seuls conducteurs

que nous avons à considérer; comme la seconde de ces armatures est censée mise en communication avec le sol, nous devons supposer  $V_2 = 0$ ; les formules (4) et (2) nous donnent pour le travail effectué après la décharge

$$(5) \quad \mathcal{E} = -\frac{1}{2} M_1 V_1,$$

ou, en ayant égard à la formule (27) du n° 11,

$$(6) \quad \mathcal{E} = \frac{2\pi e}{\Omega} M_1^2.$$

Ce travail, qui, pour une même bouteille, est proportionnel au carré de la charge, est employé en partie à vaincre la résistance de l'air ou celle que présente un corps non conducteur traversé par l'électricité, ce qui donne lieu à l'étincelle; l'autre partie est transformée en chaleur et correspond à la perte d'une demi-force vive, qui devra être d'autant plus grande que la vitesse du fluide sera elle-même plus grande ou que la section et la longueur du fil de communication seront plus faibles.

On explique ainsi pourquoi, toutes choses égales d'ailleurs, lorsque le fil est gros et court, l'étincelle est énergique et l'échauffement du conducteur très faible, tandis que l'inverse a lieu quand le fil est long et d'un petit diamètre.

Si l'on augmente la résistance à vaincre en interposant entre les extrémités du fil une carte ou une feuille de mica, l'étincelle est plus forte et l'échauffement plus faible, comme M. Riess l'a reconnu par l'expérience (1).

**21. Décharge d'une batterie.** — Considérons une batterie composée de  $n$  bouteilles identiques; il est évident que le travail effectué pendant la décharge s'obtiendra en multipliant les équations (5) et (6) par  $n$ , et nous aurons notamment

$$\mathcal{E} = \frac{2\pi e}{\pi} n M_1^2.$$

---

(1) *Annales de Poggendorff*, t. XLV.



Si  $M$  désigne la charge totale  $M, n$ , cette expression prend la forme suivante

$$(7) \quad \mathfrak{E} = \frac{2\pi e}{\Omega} \frac{M^2}{n},$$

d'où cette loi, découverte expérimentalement par M. Riess <sup>(1)</sup> : *L'énergie totale d'une batterie est proportionnelle au carré de la charge et en raison inverse du nombre de bouteilles.*

**22. Décharges incomplètes.** — Supposons qu'après avoir chargé la batterie ci-dessus de  $n$  bouteilles identiques on réunisse les armatures intérieures à celles d'une batterie à l'état neutre, composée de  $n'$  bouteilles semblables aux précédentes.

Le travail accumulé  $\mathfrak{E}'$  dans la batterie de  $n + n'$  bouteilles s'obtiendra en remplaçant  $n$  par  $n + n'$  dans la formule (7), puisque la charge totale est restée la même. Nous avons donc

$$\mathfrak{E}' = \frac{2\pi e}{\Omega} \frac{M^2}{n + n'}.$$

Mais le travail emmagasiné primitivement dans la batterie de  $n$  bouteilles est fourni par la même formule (7). D'où il suit que le travail accompli dans la réunion des deux batteries a pour expression

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{E}' = \frac{2\pi e}{\Omega} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n + n'} \right),$$

ou encore

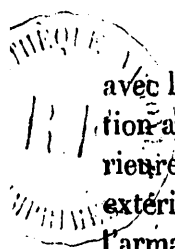
$$(8) \quad \mathfrak{E} - \mathfrak{E}' = T \frac{n'}{n + n'},$$

relation à laquelle M. Riess est arrivé par l'expérience.

**23. Batteries chargées en cascades.** — Soient  $(A_1), (A_2), \dots, (A_m)$   $m$  batteries composées respectivement de  $n_1, n_2, \dots, n_m$  bouteilles identiques; l'armature extérieure de la  $n^{\text{ième}}$  batterie communique

---

<sup>(1)</sup> Plusieurs géomètres ont donné à l'expression de  $\mathfrak{E}$  le nom d'*énergie potentielle*.



avec le sol, tandis que l'armature intérieure de la première est en relation avec une source dont le niveau potentiel est  $V_1$ . L'armature intérieure de la première batterie reçoit une charge  $M_1$ ; sur l'armature extérieure il se développe une charge  $-M_2$ , tandis que la charge de l'armature intérieure de la seconde batterie est  $M_2$ , le niveau potentiel  $V_2$  étant le même pour ces deux conducteurs, et ainsi de suite, en remarquant toutefois que  $V_m = 0$ . Le travail accumulé dans le système total est donc

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{2}(M_1 V_1 - M_2 V_2 + M_2 V_2 - M_3 V_3 + \dots),$$

ou simplement

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{2} M_1 V_1,$$

comme on devait le prévoir d'après une remarque faite à la fin du n° 19.

Si nous posons  $\lambda = \frac{4\pi e}{\Omega}$ , la formule (27) du n° 11 donne

$$V_1 - V_2 = -\lambda \frac{M_1}{n_1},$$

$$V_2 - V_3 = -\lambda \frac{M_2}{n_2},$$

.....,

$$V_m - 0 = -\lambda \frac{M_m}{n_m},$$

en remarquant que la charge de chaque bouteille de  $(A_i)$  est  $\frac{M_i}{n_i}$ .

On déduit de là

$$V_1 = -\lambda \left( \frac{M_1}{n_1} + \frac{M_2}{n_2} + \dots \right),$$

et enfin

$$(9) \quad \mathfrak{E} = \frac{\lambda}{2} M_1 \left( \frac{M_1}{n_1} + \frac{M_2}{n_2} + \dots \right).$$

Si les bouteilles sont parfaitement fermées, les charges des deux arma-

tures de chacune d'elles sont égales, ou

$$M_1 = M_2 = M_3 = \dots;$$

par suite,

$$\mathfrak{E} = \frac{\lambda}{2} M_1^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots \right).$$

Dans le cas de deux batteries seulement, on a

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2} \lambda M_1^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right),$$

résultat auquel M. Riess est arrivé par l'expérience.