JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEORGES DOSTOR

Théorie générale des polygones étoilés

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 6 (1880), p. 343-386.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1880_3_6__343_0>

Théorie générale des polygones étoilés;

Par M. Georges DOSTOR.

INTRODUCTION.

Les polygones réguliers étoilés trouvent leur emploi dans les arts professionnels, dans les arts décoratifs et quelquefois en Architecture.

L'existence de ces figures constellées n'était pas ignorée des anciens. Pythagore avait connaissance du pentagone étoilé, qui, sous le nom d'ὑγιθά, était regardé par ses disciples comme l'emblème du salut et de la santé (*sanitatem Pythagoræ*) (1).

L'étoile pentagonale des Grecs reparaît dans la *Géométrie* de Boèce, est citée dans les *Commentaires* de Campanus sur Euclide, et se trouve étudiée dans les écrits de Lucas di Borgo (2), Peletier du Mans (3), Clavius (4) et Ramus. Tous ces auteurs reconnaissent, avec Campanus, que, dans le pentagone étoilé, la somme des cinq angles est égale à deux angles droits, comme cela se présente pour le triangle.

Bradwardin (5) fut le premier qui eût étendu la théorie du pentalpha

---

(1) *Encyclopedia universa Alstedii*, Herbonæ, liber XV, 1620; in-4°.

(2) *Euclidis opera a Campano interprete fidissimo translata, Lucas Paciolus emendavit.* Venetiis, 1509; in-fol.

(3) *Demonstratio in Euclidis elementa Geometriæ, libri sex.* Lyon, 1557; in-8°.

(4) *Euclidis elementorum libri XVI.* Romæ, 1574; in-8°.

(5) *Geometria speculativa Thome Bradwardini*, etc. Parisiis, 1496; in-fol.

aux polygones rayonnés d'un plus grand nombre de côtés, qu'il appelle *polygones égrédients* (*egredi*, se porter en dehors).

Cette théorie n'a été réellement constituée qu'entre les mains de Képler [1], qui vint y ajouter la célébrité de son nom, en l'asseyant sur des considérations analytiques. Dans l'inscription des polygones réguliers, convexes et étoilés, le grand astronome détermine par l'analyse le rapport des côtés au diamètre du cercle circonscrit et en déduit une construction géométrique pour chacun d'eux; il calcule en même temps la valeur des angles des divers polygones réguliers étoilés qu'il considère.

Après Képler, la science des polygones étoilés retombe dans l'oubli. Ce n'est qu'en 1809 que l'illustre Poinsot [2] la ressuscite, lui donne un corps complet et l'érige en doctrine définitive.

Dans son remarquable Mémoire, le savant académicien considère les polygones sous le rapport de la situation relative de leurs sommets et détermine, d'une manière générale, la somme de leurs angles. Il démontre qu'il existe autant de polygones de n côtés et à périmètre continu qu'il y a de nombres premiers avec n depuis 1 jusqu'à $\frac{n-1}{2}$ [3], et il essaye de prouver en même temps que, dans les polygones de n côtés et de l'espèce p, la somme des angles est égale à $2(n-2p)$ angles droits [4]. Ce n'est que par un raisonnement intuitif et pour ainsi dire expérimental que Poinsot établit ce théorème et le généralise en l'étendant aux polygones irréguliers.

Nous nous proposons, dans cette rédaction : 1° de chercher le nombre des polygones étoilés à périmètre continu de n côtés et d'en déduire le nombre des polygones étoilés de $2n$ côtés; 2° de déterminer d'une manière générale, facile mais rigoureuse, la somme des angles d'un polygone étoilé quelconque; 3° d'établir quelques théorèmes utiles sur les polygones étoilés qui sont réguliers; 4° de calculer les côtés des principaux de ces polygones; enfin, 5° de donner la formule

---

(1) *Harmonices mundi libri V*. Lincii Austriæ, 1619; in-fol.

(2) *Journal de l'École Polytechnique*, 1810, t. V, cahier X, p. 16 à 48.

(3) *Loc. cit.*, p. 21.

(4) *Loc. cit.*, p. 22.

qui fournit la surface d'un polygone régulier étoilé à périmètre continu ou à périmètre composé, de tirer de cette formule les conséquences les plus importantes et d'en présenter des applications.

Nous avons lieu de penser que cette exposition résume la théorie complète des polygones étoilés, dont on ne s'est guère occupé depuis les travaux de Poinsot. Le professeur A. Amiot (1) et MM. Rouché et de Comberousse (2) sont les seuls auteurs français qui aient exposé les idées de Poinsot, sans toutefois les développer. Celles-ci n'ont pas eu plus d'écho à l'étranger.

§ I. — NOMBRE DES POLYGONES ÉTOILÉS DE n COTÉS ET DE $2n$ CÔTÉS.

1. THÉORÈME I. — *Étant donnée une courbe convexe et fermée, divisée en n parties consécutives, lorsqu'on joint les points de division, à partir de l'un d'eux, dans le même sens de p en p par des droites, on forme un polygone à périmètre continu de n côtés, si les nombres n et p sont premiers entre eux, et l'on n'en forme qu'un.*

Ce principe élémentaire est d'une démonstration facile.

2. *Définition I.* — Le polygone obtenu est dit *étoilé* et de *l'espèce p*. Les polygones *convexes* sont de la *première* espèce.

3. *Remarque I.* — Il est évident que le périmètre de notre polygone étoilé sous-tend np divisions consécutives de la courbe ou p fois la courbe elle-même.

4. *Remarque II.* — Si l'on parcourt, dans le même sens, la suite des côtés d'un polygone étoilé, on trouvera un même nombre a de sommets à droite de chaque côté du polygone et aussi un même nombre b de sommets à gauche de chaque côté, et, si n désigne le

(1) *Leçons nouvelles de Géométrie*, 2e édition, 1865; Ire Partie, p. 267 et suiv.
(2) *Traité de Géométrie*, 4e édition, 1879; Ire Partie, p. 168 et suiv.

nombre des côtés du polygone et p son espèce, on aura

$$n = 2 + a + b;$$

$p = a + 1$ ou $p = b + 1$.

Nous prendrons toujours, pour désigner l'espèce de notre polygone, le plus petit des nombres $a + 1$, $b + 1$.

Ainsi le polygone étoilé de n côtés et de l'espèce p a $p - 1$ sommets d'une part de chacun de ses côtés et $n - p - 1$ de l'autre part.

On en conclut que :

Si, dans notre courbe, nous joignons les points de division d'abord de p en p, puis de $n - p$ en $n - p$, nous obtiendrons deux polygones étoilés de même espèce.

5. *Remarque III.* — Si les nombres n et p, au lieu d'être premiers entre eux, avaient un facteur commun d (¹), le polygone formé par la jonction des points de division de p en p n'aurait que $\frac{n}{d}$ côtés et son périmètre sous-tendrait $\frac{p}{d}$ fois la courbe.

6. *Définition II.* — Dans ce cas, si l'on joint les points de division de p en p, successivement à partir des points $1, 2, 3, \ldots, d$, on formera d polygones étoilés de $\frac{n}{d}$ côtés et de l'espèce $\frac{p}{d}$.

On peut encore admettre que l'ensemble de ces d polygones constitue un polygone de n côtés et de l'espèce p; mais alors les côtés ne forment plus une ligne brisée continue. Nous dirons donc que le polygone résultant est *à périmètre composé,* mais non étoilé proprement dit.

Ainsi l'hexagone de deuxième espèce se compose de deux triangles, superposés sans coïncider, et placés en sens inverses.

7. Théorème II. — *Il existe autant d'espèces de polygones de n côtés qu'il y a d'unités dans la moitié du nombre qui exprime combien il y a de nombres entiers inférieurs à n et premiers avec n.*

(¹) Le nombre d est supposé le plus grand commun diviseur entre n et p.

En effet, si p est premier avec n, $n-p$ le sera aussi, et, comme les deux polygones étoilés de n côtés qui correspondent aux nombres p et $n-p$ sont de même espèce (n° 4), le principe se trouve démontré ([1]).

L'un de ces polygones est toujours convexe ; les autres sont étoilés.

Ainsi il y a deux espèces de pentagones, trois heptagones, deux octogones, deux ennéagones, cinq endécagones, deux dodécagones, quatre pentédécagones, etc.

Si n est un nombre premier absolu, il existera $\frac{n-1}{2}$ espèces de polygones de n côtés à périmètre continu, car tous les nombres entiers, inférieurs à n, seront premiers avec n.

L'espèce la plus élevée des polygones de n côtés est $\frac{n-1}{2}$ *ou* $\frac{n-2}{2}$, *suivant que n est un nombre impair ou un nombre pair.*

8. Théorème III. — *Lorsque n est un nombre impair, il existe autant d'espèces de polygones de $2n$ côtés à périmètre continu, qu'il y a d'espèces de polygones de n côtés à périmètre continu.*

Soit p un nombre entier inférieur à la moitié de n et premier avec n. Il existera un polygone à périmètre continu de n côtés et de l'espèce p.

Puisque p est inférieur à la moitié de n, $2p$ sera moindre que n; par suite, $n-2p$ sera un nombre entier positif et plus petit que n ou que la moitié de $2n$.

Or je dis que $n-2p$ est premier avec $2n$.

En effet, n étant impair, $n-2p$ sera aussi impair. Il s'ensuit que tout facteur entier commun à $n-2p$ et $2n$ ne saurait être qu'un nombre impair, qui, par suite, diviserait n. Ce facteur, divisant $n-2p$ et n, diviserait leur différence $2p$ et par conséquent p. Donc p et n ne seraient pas premiers entre eux.

Ainsi, à chaque nombre entier p inférieur à la moitié de n et premier avec n correspond un nombre entier $n-2p$ inférieur à la moitié de $2n$ et premier avec $2n$.

Réciproquement, à chaque nombre entier q inférieur à la moitié n

---

([1]) Poinsot, *Journal de l'École Polytechnique*, 1810, t. V, cahier X, p. 21.

de $2n$ et premier avec $2n$ correspond un nombre entier $\frac{n-q}{2}$ inférieur à la moitié de n et premier avec n.

Car q, étant premier avec $2n$, est un nombre impair; comme n est supposé impair, $\frac{n-q}{2}$ est un nombre entier évidemment moindre que la moitié de n.

D'ailleurs q, étant premier avec $2n$, l'est avec n; donc $\frac{n-q}{2}$ est aussi premier avec n.

Il s'ensuit que, si n est un nombre impair, à toute espèce de polygone de n côtés correspond une espèce de polygone de $2n$ côtés, et réciproquement.

9. *Définition III.* — Nous appellerons *polygones correspondants* deux polygones à périmètre continu, l'un d'un nombre impair n de côtés et l'autre d'un nombre double $2n$ de côtés, dont les espèces sont respectivement p et $n - 2p$.

Il s'ensuit que :

Lorsque n est un nombre impair, deux polygones à périmètre continu, l'un de n et l'autre de $2n$ côtés, sont correspondants, si la double espèce du premier, augmentée de l'espèce du second, donne une somme égale à n.

10. Théorème IV. — *Lorsque n est un nombre pair, il existe deux fois autant de polygones à périmètre continu de $2n$ côtés, qu'il y a de polygones à périmètre continu de n côtés.*

Soit, en effet, p un nombre entier inférieur à la moitié de n et premier avec n. Il existera un polygone à périmètre continu de n côtés et de l'espèce p.

Or le nombre p, étant premier avec le nombre pair n, est nécessairement impair; par suite, il est aussi premier avec $2n$.

Mais, p étant premier avec n, $n - p$ l'est aussi, non seulement avec n, mais encore avec $2n$; de plus, $n - p$ est évidemment moindre que n ou que la moitié de $2n$.

Donc, si n est pair, à chaque polygone à périmètre continu de $2n$ côtés et de l'espèce p correspondent deux polygones à périmètre continu de $2n$ côtés et des espèces respectives p et $n - p$.

La réciproque est évidente.

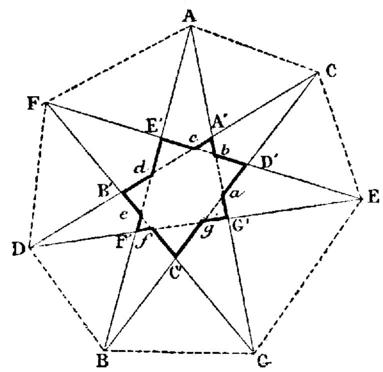
Il s'ensuit que le nombre des polygones à périmètre continu de $2n$ côtés est double du nombre des polygones à périmètre continu de n côtés.

11. *Définition IV.* — Nous appellerons *polygones conjugués* deux polygones à périmètre continu, d'un nombre doublement pair $2n$ de côtés, dont la somme des espèces est égale à n.

§ II. — Évaluation de la somme des angles dans les polygones quelconques, a périmètre continu ou a périmètre composé.

12. *Définition I.* — Considérons le polygone étoilé ABCDEFG (*fig.* 1), que nous supposerons quelconque. Nous donnerons le nom d'*angle*

Fig. 1.



saillant à tout angle, tel que GAB, qui est compris entre deux côtés consécutifs GA et AB.

13. *Définition II.* — Les côtés GA et AB d'un angle saillant sont généralement rencontrés par tous les autres côtés du polygone. Les points d'intersection A′ et E′, les plus rapprochés du sommet A, sont les sommets de deux angles AA′C et AE′F, qui s'appuient respectivement sur les deux côtés de l'angle GAB.

Ces deux angles AA'C et AE'F peuvent être appelés des *angles rentrants* du polygone ABCDEFG.

14. *Remarque.* — Dans ce paragraphe, nous ne ferons aucune distinction entre les polygones ; ils peuvent être à périmètre continu ou à périmètre composé. Nous considérerons même la suite non interrompue de toutes les espèces des polygones de n côtés, qui naturellement sont au nombre de $\frac{n-1}{2}$ ou de $\frac{n-2}{2}$, suivant que n est impair ou pair.

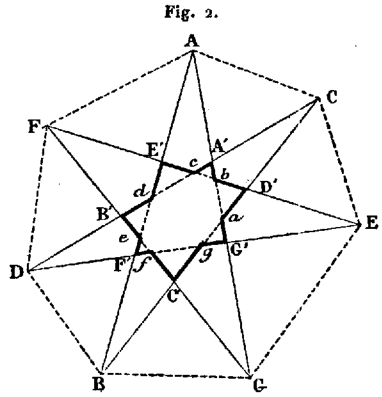
L'inspection de la *fig.* 1 fait voir que les angles rentrants du polygone ABCDEFG sont opposés par le sommet aux angles saillants du polygone A'B'C'D'E'F'G', dont les côtés ont les mêmes directions que ceux du premier, mais dont l'espèce est inférieure d'une unité à celle de ce polygone.

15. Théorème I. — *La différence entre les sommes des angles saillants de deux polygones quelconques, ayant le même nombre de côtés, mais étant de deux espèces consécutives, est constante et égale à quatre angles droits.*

Désignons, en général, par $\Sigma_{c,e}$ la somme des angles saillants dans un polygone de c côtés et de l'espèce e.

Considérons les deux polygones A'B'C'... et ABC... (*fig.* 2),

Fig. 2.



ayant n côtés, et se trouvant le premier de l'espèce $p-1$ et le second de l'espèce immédiatement supérieure p.

Tirons les droites AF, FD, DB... ; nous formons un polygone convexe de n côtés AFDB.... Sur les n côtés de ce polygone s'appuient les n triangles AFE', FDB', DBF', ..., dont les angles au sommet E', B', F', ... sont égaux aux angles saillants du polygone A'B'C'D'... de l'espèce $p-1$ (n° **14**). Nous avons donc

$$\Sigma_{n,p-1} + E'AF + E'FA + B'FD + B'DF + \ldots = 2n \text{ angles droits},$$

d'où nous tirons

$$\Sigma_{n,p-1} = n\pi - (E'AF + E'FA + B'FD + B'DF + \ldots),$$

en désignant par π la mesure de deux angles droits. Or la somme des angles entre parenthèses égale la somme des angles du polygone convexe AFDB..., moins la somme $\Sigma_{n,p}$ des angles saillants du polygone étoilé ABCD... de l'espèce p. Puisque la somme des angles d'un polygone convexe de n côtés est égale à $n-2$ fois deux angles droits ou égale à $(n-2)\pi = n\pi - 2\pi$, nous aurons

$$\Sigma_{n,p-1} = n\pi - (n\pi - 2\pi - \Sigma_{n,p}),$$

ou

$$\Sigma_{n,p-1} = 2\pi + \Sigma_{n,p}.$$

Nous en tirons l'égalité

$$\Sigma_{n,p-1} - \Sigma_{n,p} = 2\pi, \qquad (I)$$

qu'il fallait établir.

16. Corollaire. — *Dans tout polygone étoilé, la différence entre la somme des angles rentrants et celle des angles saillants est constante et égale à quatre angles droits.*

17. *Remarque.* — Dans cette démonstration, nous n'avons fait aucune restriction sur la nature de nos deux polygones étoilés, qui peuvent être, l'un ou tous les deux, à périmètre continu ou à périmètre composé.

18. Théorème II. — *Dans tout polygone étoilé de n côtés et de l'es-*

pèce p, la somme des angles (saillants) *est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a d'unités dans le nombre n des côtés, diminué du double nombre 2p de l'espèce* (¹), c'est-à-dire que

$$\text{(II)} \qquad \Sigma_{n,p} = (n - 2p)\pi.$$

En effet, la relation (I) nous donne

$$\Sigma_{n,p} = \Sigma_{n,p-1} - 2\pi.$$

Si nous attribuons à p successivement les valeurs

$$1, 2, 3, \ldots, p-1, p,$$

et que nous ayons égard à l'expression $\Sigma_{n,1} = (n-2)\pi$, nous aurons la suite des égalités

$$\begin{aligned}
\Sigma_{n,1} &= n\pi - 2\pi,\\
\Sigma_{n,2} &= \Sigma_{n,1} - 2\pi,\\
\Sigma_{n,3} &= \Sigma_{n,2} - 2\pi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Sigma_{n,p-1} &= \Sigma_{n,p-2} - 2\pi,\\
\Sigma_{n,p} &= \Sigma_{n,p-1} - 2\pi.
\end{aligned}$$

Ajoutons ces p équations membre à membre et supprimons les sommes $\Sigma_{n,1}, \Sigma_{n,2}, \ldots, \Sigma_{n,p-1}$, qui seront communes aux deux membres de l'équation résultante; nous obtenons l'égalité

$$\Sigma_{n,p} = n\pi - 2\pi p$$

ou

$$\Sigma_{n,p} = (n - 2p)\pi,$$

qu'il fallait établir.

19. Corollaire I. — Si n est pair, l'espèce la plus élevée sera marquée par le nombre $\frac{n-2}{2}$ (nº **7**); par suite, on aura

$$\text{(III)} \qquad \Sigma_{n,\frac{1}{2}(n-2)} = [n - (n-2)]\pi = 2\pi.$$

(¹) Poinsot, *Journal de l'École Polytechnique*, 1810, t. V, cahier X, p. 22.

Si n est impair, l'espèce la plus élevée sera marquée par le nombre $\frac{n-1}{2}$ (n° 7); par suite, il viendra

$$\text{(IV)} \qquad \Sigma_{n,\frac{1}{2}(n-1)} = [n-(n-1)]\pi = \pi.$$

On en conclut que :

La somme des angles d'un polygone étoilé de l'espèce la plus élevée, parmi ceux d'un même nombre de côtés, est égale à quatre *angles droits, ou égale à* deux *angles droits, suivant que le nombre des côtés du polygone étoilé est* pair *ou* impair.

Ainsi, la somme des angles du triangle, celle des angles du pentagone de deuxième espèce, ou de l'heptagone de troisième espèce, de l'ennéagone de quatrième espèce, du pentédécagone de septième espèce, etc., est la même et toujours égale à *deux* angles droits.

De même la somme des angles de l'octogone de troisième espèce, du décagone de quatrième espèce, du dodécagone de cinquième espèce, etc., est aussi la même et égale à *quatre* angles droits.

20. Corollaire II. — Lorsqu'un polygone a un nombre de côtés *simplement pair* $2n$, et que p est moindre que n et premier avec n, nous avons

$$\Sigma_{2n,n-2p} = [2n - 2(n-2p)]\pi = 4p\pi.$$

Donc *la somme des angles du polygone étoilé de* $2n$ *côtés et de l'espèce* $n-2p$ *est indépendante du nombre des côtés et ne dépend que de l'espèce* p *du polygone. Cette somme est égale à* $2p$ *fois quatre angles droits.*

Puisqu'on a

$$\Sigma_{n,p} = (n-2p)\pi = n\pi - 2p\pi,$$

il vient

$$\text{(V)} \qquad 2\Sigma_{n,p} + \Sigma_{2n,n-2p} = 2n\pi.$$

Ainsi, *lorsque n est impair, les angles de deux polygones correspondants, dont l'un a n côtés, sont tels, que la double somme des angles* *du premier polygone, augmentée de la somme des angles du second, est indépendante des espèces de ces deux polygones et ne dépend que du nombre de leurs côtés. Cette somme est égale à n fois quatre angles droits.*

21. Corollaire III. — Lorsqu'un polygone a un nombre de côtés *doublement pair* $2n$ et que p est inférieur à la moitié de n et premier avec n, on a

$$\Sigma_{2n,n-p} = [2n - 2(n-p)]\pi = 2p\pi.$$

Donc, *la somme des angles du polygone étoilé de* $2n$ *côtés et de l'espèce* $n - p$ *est indépendante du nombre des côtés et ne dépend que de l'espèce du polygone. Cette somme est égale à p fois quatre angles droits.*

Puisque l'on a

$$\Sigma_{2n,p} = (2n - 2p)\pi = 2n\pi - 2p\pi,$$

il vient

$$\text{(VI)} \qquad \Sigma_{2n,p} + \Sigma_{2n,n-p} = 2n\pi.$$

Ainsi, *lorsque n est pair, la somme des angles de deux polygones conjugués est indépendante de leurs espèces et ne dépend que du nombre* $2n$ *de leurs côtés. Cette somme est égale à n fois quatre angles droits.*

22. Théorème III. — *Dans tout polygone, la somme des angles extérieurs, que l'on obtient en prolongeant tous les côtés dans le même sens, est égale à autant de fois quatre angles droits qu'il y a d'unités dans l'espèce du polygone.*

En effet, la somme des angles, tant extérieurs que saillants, est égale à autant de fois deux angles droits que le polygone a de sommets ou de côtés. Si le polygone a n côtés, cette somme sera $n\pi$.

Mais, si le polygone est de l'espèce p, la somme des angles saillants sera

$$\Sigma_{n,p} = (n - 2p)\pi.$$

Nous avons, par suite, pour la somme E des angles extérieurs,

$$E = n\pi - \Sigma_{n,p} = n\pi - (n - 2p)\pi = n\pi - n\pi + 2p\pi.$$

Donc il vient

$$\text{(VII)} \qquad E = p\,2\pi.$$

Ainsi, dans le pentagone de seconde espèce, la somme des angles extérieurs est égale à huit angles droits.

§ III. — Les polygones réguliers étoilés.

23. Théorème I. — *Dans tout polygone régulier étoilé de n côtés et de l'espèce p,*

1° *Chaque angle saillant est égal à l'excès de deux angles droits sur* $\frac{4p}{n}$ *d'angle droit;*

2° *Chaque angle rentrant est égal à l'excès de deux angles droits sur* $\frac{4(p-1)}{n}$ *d'angle droit.*

1° Car, les n angles saillants étant égaux entre eux et valant ensemble $(n-2p)\pi$, chacun d'eux vaudra la $n^{\text{ième}}$ partie de cette somme, ou $\frac{(n-2p)\pi}{n}$. En désignant l'un quelconque de ces angles par α, on a donc

$$\text{(I)} \qquad \alpha = \pi - \frac{2p\pi}{n} = 2\text{ droits} - \frac{4p}{n}\text{ d'angle droit.}$$

2° De même les n angles rentrants, étant les angles saillants du polygone de n côtés et de l'espèce $p-1$, valent ensemble $[n-2(p-1)]\pi$, et, puisqu'ils sont égaux entre eux, chacun d'eux vaudra $\frac{[n-2(p-1)]\pi}{n}$. En représentant l'un quelconque de ces angles par β, on a, par conséquent,

$$\text{(II)} \qquad \beta = \pi - \frac{2(p-1)\pi}{n} = 2\text{ droits} - \frac{4(p-1)}{n}\text{ d'angle droit.}$$

24. Corollaire. — Les deux formules (I) et (II) nous donnent

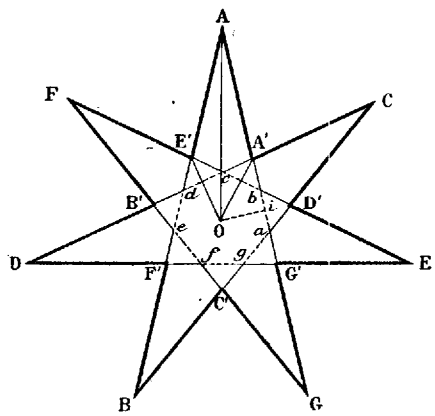
$$\beta - \alpha = -\frac{(2p-1)\pi}{n} + \frac{2p\pi}{n} = \frac{\pi}{n}.$$

Donc, *dans tout polygone régulier étoilé de n côtés, la différence entre un angle rentrant et un angle saillant est égale à la $n^{ième}$ partie de deux angles droits.*

25. Théorème II. — *L'angle au centre d'un polygone régulier étoilé, de n côtés et de l'espèce p, est égal à la $n^{ième}$ partie de p fois quatre angles droits.*

En effet, soient O le centre d'un polygone régulier étoilé (*fig.* 3),

Fig. 3.



AG un de ses côtés et Oi la perpendiculaire abaissée du centre O sur ce côté.

Dans le triangle rectangle OAi, l'angle OAi est la moitié de l'angle α du polygone régulier, et l'angle AOi est la moitié de l'angle au centre de ce polygone. Or les deux angles OAi et AOi sont évidemment complémentaires; par suite, si nous désignons par γ l'angle au centre, nous aurons

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{\pi}{2},$$

d'où nous tirons

$$\gamma=\pi-\alpha.$$

Mais la formule (I) nous donne

$$\pi - \alpha = \frac{2p\pi}{n};$$

donc nous avons

$$\text{(III)} \qquad \gamma = \frac{2p\pi}{n} = \frac{p}{n} 2\pi.$$

26. Corollaire. — Cette formule prouve que :

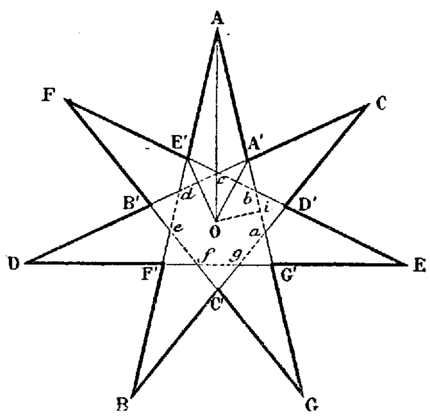
Le périmètre d'un polygone régulier de l'espèce p sous-tend p fois la circonférence, ce que nous savions déjà (n° **3**).

27. *Relations entre le côté, le rayon et l'apothème d'un polygone régulier étoilé.* Représentons, en général, par

$$C_{c,e}, \ R_{c,e}, \ r_{c,e}$$

le côté, le rayon et l'apothème du polygone régulier étoilé de c côtés et de l'espèce e. Dans le triangle rectangle OAi (*fig.* 4), l'hypoténuse

Fig. 4.



OA est le rayon du cercle circonscrit, le côté Oi est le rayon du cercle inscrit, et le second côté Ai est le demi-côté du polygone régulier. Ce triangle donne

$$Ai = OA \sin AOi,$$
$$Oi = OA \cos AOi,$$
$$Ai = Oi \tang AOi.$$

Supposons que le polygone ait n côtés et soit de l'espèce p. L'angle AOi étant le demi-angle au centre, on aura (nº **25**)

$$AOi = \frac{p\pi}{n};$$

par suite, les trois égalités précédentes reviennent à

$$\text{(IV)} \quad \left\{ \begin{aligned} C_{n,p} &= 2R_{n,p} \sin \frac{p\pi}{n}, \\ r_{n,p} &= R_{n,p} \cos \frac{p\pi}{n}, \\ C_{n,p} &= 2r_{n,p} \tang \frac{p\pi}{n}. \end{aligned} \right.$$

28. *Polygones réguliers de n côtés inscrits dans le même cercle.* — Soit R le rayon de ce cercle. La première des relations (IV) nous donne

$$C_{n,p} = 2R \sin \frac{p\pi}{n},$$
$$C_{n,p-1} = 2R \sin \frac{p-1}{n}\pi;$$

nous en tirons

$$\text{(V)} \qquad C_{n,p} = \frac{\sin \frac{p\pi}{n}}{\sin \frac{p-1}{n}\pi} C_{n,p-1}.$$

Par la seconde des égalités (IV), nous avons

$$r_{n,p} = R \cos \frac{p\pi}{n},$$
$$r_{n,p-1} = R \cos \frac{p-1}{n}\pi,$$

d'où il nous vient

$$\text{(VI)} \qquad r_{n,p} = \frac{\cos\frac{p\pi}{n}}{\cos\frac{p-1}{n}\pi}\, r_{n,p-1}.$$

Ces deux dernières relations nous donnent

$$\frac{r_{n,p-1}}{r_{n,p}} - \frac{C_{n,p-1}}{C_{n,p}} = \frac{\cos\frac{p-1}{n}\pi}{\cos\frac{p\pi}{n}} - \frac{\sin\frac{p-1}{n}\pi}{\sin\frac{p\pi}{n}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{2p\pi}{n}},$$

ou

$$\frac{r_{n,p-1}}{r_{n,p}} = \frac{C_{n,p-1}}{C_{n,p}} + \frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{2p\pi}{n}}.$$

Mais, puisque

$$C_{n,1} = 2R\sin\frac{\pi}{n}, \quad C_{n,2p} = 2R\sin\frac{2p\pi}{n},$$

on a

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{2p\pi}{n}} = \frac{2C_{n,1}}{C_{n,2p}}.$$

Donc il vient

$$\text{(VII)} \qquad \frac{r_{n,p-1}}{r_{n,p}} = \frac{C_{n,p-1}}{C_{n,p}} + \frac{2C_{n,1}}{C_{n,2p}}.$$

29. THÉORÈME IV. — *Les côtés de deux polygones réguliers correspondants sont ceux de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est le diamètre du cercle commun qui est circonscrit aux deux polygones.*

Représentons par R le rayon du cercle circonscrit à deux polygones réguliers, l'un d'un nombre impair n de côtés et l'autre d'un nombre double $2n$ de côtés, qui sont des espèces respectives p et $n-2p$ (n° **9**). Les côtés de ces deux polygones seront (n° **27**)

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} C_{n,p} = 2R\sin\frac{p\pi}{n}, \\ C_{2n,n-2p} = 2R\sin\frac{n-2p}{2n}\pi. \end{cases}$$

Or il est aisé de voir que

$$\frac{n-2p}{2n}\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{p\pi}{n};$$

par suite, il vient

$$(2) \qquad C_{2n,n-2p} = 2R\cos\frac{p\pi}{n}.$$

Élevant au carré les deux côtés (1) et (2), et ajoutant, on obtient la relation

$$(\text{VIII}) \qquad C^2_{n,p} + C^2_{2n,n-2p} = 4R^2,$$

qui démontre la proposition énoncée.

30. *Remarque.* — La relation précédente permet de calculer les côtés des polygones réguliers d'un nombre impair n de côtés lorsqu'on connaît ceux des polygones réguliers de $2n$ côtés, et réciproquement.

31. *Première application.* — *Les côtés des deux pentagones réguliers peuvent* ainsi *s'obtenir au moyen des côtés des deux décagones réguliers, que l'on sait être*

$$C_{10,1} = \tfrac{1}{2}R(\sqrt{5}-1), \quad C_{10,3} = \tfrac{1}{2}R(\sqrt{5}+1).$$

Car on a (n° **29**)

$$C^2_{5,1} = 4R^2 - C^2_{10,3} = 4R^2 - \tfrac{1}{4}R^2(\sqrt{5}+1)^2 = \tfrac{1}{4}R^2(10-2\sqrt{5}),$$
$$C^2_{5,2} = 4R^2 - C^2_{10,1} = 4R^2 - \tfrac{1}{4}R^2(\sqrt{5}-1)^2 = \tfrac{1}{4}R^2(10+2\sqrt{5}),$$

d'où l'on tire les valeurs suivantes,

$$C_{5,1} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \quad C_{5,2} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

pour les côtés des deux pentagones réguliers, l'un convexe et l'autre étoilé.

32. *Deuxième application.* — Si l'on connaît les côtés des quatre pentédécagones réguliers, on pourra aussi *calculer les côtés des quatre polygones réguliers de trente côtés,* qui leur sont naturellement correspondants.

Les côtés des quatre pentédécagones réguliers s'obtiennent par un procédé très simple, qui se trouve exposé au n° **43**. Ces côtés sont

$$\begin{aligned}
C_{15,7} &= \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{15}+\sqrt{3}\right),\\
C_{15,1} &= \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{15}-\sqrt{3}\right),\\
C_{15,2} &= \tfrac{1}{4}R\left(-\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{15}+\sqrt{3}\right),\\
C_{15,1} &= \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{15}+\sqrt{3}\right).
\end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans la formule (VIII), on trouve de suite, en effectuant les calculs, que

$$\begin{aligned}
C_{30,1} &= \tfrac{1}{4}R\sqrt{36-4\sqrt{5}-4\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1\right),\\
C_{30,7} &= \tfrac{1}{4}R\sqrt{36+4\sqrt{5}-4\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right),\\
C_{30,11} &= \tfrac{1}{4}R\sqrt{36-4\sqrt{5}+4\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1\right),\\
C_{30,13} &= \tfrac{1}{4}R\sqrt{36+4\sqrt{5}+4\sqrt{3}\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{3}\sqrt{10+2\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right)
\end{aligned}$$

sont les côtés des quatre polygones réguliers de trente côtés, qui sont inscrits dans le cercle de rayon R.

On trouvera au n° **44** un procédé plus simple et plus rapide pour obtenir ces côtés, et où se trouve évitée l'extraction des racines carrées.

33. THÉORÈME V. — *Étant donnés deux polygones réguliers, l'un d'un nombre impair* n *de côtés et l'autre d'un nombre double* $2n$ *de côtés; si ces polygones sont correspondants et des espèces respectives* p *et* q, *le produit de leurs côtés sera égal au rayon commun* R *multiplié par le côté du polygone régulier qui a autant de côtés* n *que le premier de ces polygones et qui est de la même espèce* q *que le second.*

On a (n° **27**)

$$C_{n,p} = 2R\sin\frac{p\pi}{n}, \quad C_{2n,q} = 2R\sin\frac{q\pi}{2n},$$

d'où l'on tire

$$C_{n,p} \times C_{2n,q} = 4R^2 \sin\frac{p\pi}{n} \sin\frac{q\pi}{2n}.$$

Puisque les deux polygones sont correspondants, il vient la relation (nº **9**)

$$2p + q = n,$$

d'où l'on tire

$$q = n - 2p,$$

et par suite

$$\sin\frac{q\pi}{2n} = \sin\frac{n-2p}{2n}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{p\pi}{n}\right) = \cos\frac{p\pi}{n}.$$

Le produit de nos côtés devient, par conséquent,

$$C_{n,p} \times C_{2n,q} = 4R^2 \sin\frac{p\pi}{n} \cos\frac{p\pi}{n} = 2R^2 \sin\frac{2p\pi}{n} = R.2R \sin\frac{n-2p}{n}\pi$$

ou

$$\text{(IX)} \qquad C_{n,p} \times C_{2n,q} = R.2R \sin\frac{q\pi}{n} = R \times C_{n,q},$$

ce qu'il fallait prouver.

34. *Application.* — Ainsi l'on a

$$C_{5,2} \times C_{10,1} = R \times C_{5,1},$$
$$C_{5,1} \times C_{10,3} = R \times C_{5,3} = R \times C_{5,2}.$$

ou

$$\tfrac{1}{2}R\sqrt{10+2\sqrt{5}} \times \tfrac{1}{2}R(\sqrt{5}-1) = R \times \tfrac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$
$$\tfrac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}} \times \tfrac{1}{2}R(\sqrt{5}+1) = R \times \tfrac{1}{2}R\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

c'est-à-dire

$$(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}} = 2\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$
$$(\sqrt{5}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

ce qu'il est d'ailleurs bien aisé de vérifier.

35. Théorème VI. — *Les côtés de deux polygones réguliers conjugués, inscrits dans le même cercle, sont ceux de l'angle droit d'un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est le diamètre du cercle circonscrit aux deux polygones.*

Soit, en effet,

$$C_{2n,p} = 2R \sin\frac{p\pi}{2n} \tag{3}$$

le côté d'un polygone régulier ayant un nombre doublement pair $2n$ de côtés et étant de l'espèce p. Le côté de son conjugué, parmi ceux de $2n$ côtés, sera (n° **11**)

$$C_{2n,n-p} = 2R \sin\frac{n-p}{2n}\pi$$

ou

$$C_{2n,n-p} = 2R \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{p\pi}{2n}\right).$$

On a donc

$$C_{2n,n-p} = 2R \cos\frac{p\pi}{2n}. \tag{4}$$

Élevant au carré les deux côtés (3) et (4) et ajoutant, on obtient la relation

$$C^2_{2n,p} + C^2_{2n,n-p} = 4R^2. \tag{X}$$

36. *Application.* — Connaissant les côtés de l'une des moitiés des polygones réguliers d'un nombre doublement pair $2n$ de côtés, on peut, au moyen de ce théorème, calculer les côtés de l'autre moitié des polygones réguliers de $2n$ côtés.

37. Théorème VII. — *Le produit des côtés de deux polygones réguliers conjugués est égal au rayon multiplié par le côté du polygone régulier d'un nombre de côtés deux fois moindre, mais de même espèce que l'un ou l'autre des deux premiers polygones.*

Puisqu'on a

$$C_{2n,p} = 2R \sin\frac{p\pi}{2n}, \quad C_{2n,n-p} = 2R \cos\frac{p\pi}{2n},$$

on obtient, en multipliant,

$$C_{2n,p} \times C_{2n,n-p} = 4R^2 \sin\frac{p\pi}{2n}\cos\frac{p\pi}{2n} = 2R^2\sin\frac{p\pi}{n}.$$

Or nous savons que

$$2R\sin\frac{p\pi}{n} = 2R\sin\frac{n-p}{n}\pi = C_{n,p} = C_{n,n-p};$$

donc il vient

$$C_{2n,p} \times C_{2n,n-p} = R \times C_{n,p} = R \times C_{n,n-p}.$$

§ IV. — Inscription dans le cercle des polygones réguliers de cinq, huit, dix, douze, quinze, trente, soixante et cent vingt côtés.

38. Dans tout ce paragraphe, nous ne considérons que les polygones réguliers à périmètre continu.

39. *Pentagones réguliers.* — Il existe deux pentagones réguliers, l'un convexe et l'autre étoilé. Ce dernier est de deuxième espèce.

En appelant toujours R le rayon du cercle circonscrit à nos polygones réguliers, on a de suite

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} C_{5,1} &= 2R\sin\frac{\pi}{5} = 2R\sin 36^\circ = \frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}},\\ C_{5,2} &= 2R\sin\frac{2\pi}{5} = 2R\sin 72^\circ = \frac{1}{2}R\sqrt{10+2\sqrt{5}}.\end{aligned}\right.$$

On en déduit

$$C_{5,1}^2 + C_{5,2}^2 = 5R^2.$$

Ainsi, *la somme des carrés des côtés des deux pentagones réguliers est égale au quintuple carré du rayon.*

40. *Octogones réguliers.* — Il y a aussi deux octogones réguliers, dont l'étoilé est de troisième espèce. On a donc

$$C_{8,1} = 2R\sin\frac{\pi}{8} = 2R\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = R\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

$$C_{8,3} = 2R\sin\frac{3\pi}{8} = 2R\cos\frac{\pi}{8} = 2R\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = R\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

On en tire

$$C_{8,1}^2 + C_{8,3}^2 = 4R^2.$$

Donc, *dans les deux octogones réguliers, la somme des carrés des côtés est égale au carré du diamètre du cercle circonscrit.*

41. *Décagones réguliers.* — On compte deux décagones réguliers, dont l'étoilé est de troisième espèce. Les côtés de ces deux polygones s'obtiennent en divisant le rayon en moyenne et extrême raison, et ont pour valeurs les deux solutions fournies par cette division. Ces côtés sont ainsi

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} C_{10,1} = 2R\sin\frac{\pi}{10} = \frac{1}{2}R(\sqrt{5}-1), \\ C_{10,3} = 2R\sin\frac{3\pi}{10} = \frac{1}{2}R(\sqrt{5}+1). \end{cases}$$

On en conclut d'abord

$$C_{10,1} \times C_{10,3} = R^2,$$

puis

$$C_{10,3} - C_{10,1} = R.$$

Ainsi : 1° *le rayon est moyen proportionnel entre les côtés des deux décagones réguliers;* 2° *il est égal à la différence des côtés de ces deux décagones.*

On a encore

$$C_{10,1}^2 + C_{10,3}^2 = 3R^2.$$

La somme des carrés des côtés des deux décagones réguliers est égale au triple carré du rayon.

42. *Dodécagones réguliers.* — Il y a, outre le dodécagone régulier convexe, un dodécagone régulier étoilé, qui est de cinquième espèce.

Les côtés de ces deux polygones sont

$$C_{12,1} = 2R\sin\frac{\pi}{12} = 2R\sin 15^\circ,$$

$$C_{12,5} = 2R\sin\frac{5\pi}{12} = 2R\cos\frac{\pi}{12} = 2R\cos 15^\circ.$$

Puisque

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}),$$

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}),$$

on a

$$C_{12,1} = \tfrac{1}{2}R(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = R\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$C_{12,5} = \tfrac{1}{2}R(\sqrt{6}+\sqrt{2}) = R\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Ces expressions donnent

$$C_{12,1}\times C_{12,5} = R^2,\quad C_{12,1}^2 + C_{12,5}^2 = 4R^2.$$

Ainsi : 1° *le rayon est moyen proportionnel entre les côtés des deux dodécagones réguliers;* 2° *la somme des carrés des côtés des deux dodécagones réguliers est égale au carré du diamètre du cercle circonscrit.*

43. *Pentédécagones réguliers.* — Il existe quatre polygones réguliers de quinze côtés, dont les trois étoilés sont des espèces 2, 4 et 7. Les côtés de ces polygones sont donc

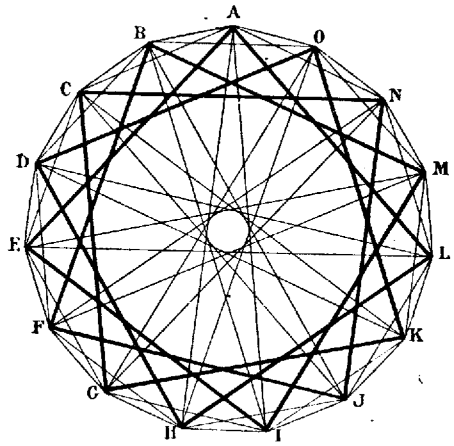
$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} C_{15,1} &= 2R\sin\frac{\pi}{15},\\ C_{15,2} &= 2R\sin\frac{2\pi}{15},\\ C_{15,4} &= 2R\sin\frac{4\pi}{15},\\ C_{15,7} &= 2R\sin\frac{7\pi}{15}.\end{aligned}\right.$$

Les sinus des quatre arcs

$$\frac{\pi}{15},\quad \frac{2\pi}{15},\quad \frac{4\pi}{15},\quad \frac{7\pi}{15}$$

peuvent aisément se calculer en valeur de sinus et cosinus d'arcs plus

Fig. 5.



simples que l'on connaît déjà, car on a

$$(2)\quad \frac{\pi}{15}=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{10},\quad \frac{2\pi}{15}=\frac{3\pi}{10}-\frac{\pi}{6},\quad \frac{4\pi}{15}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{10},\quad \frac{7\pi}{15}=\frac{3\pi}{10}+\frac{\pi}{6}.$$

Si l'on observe que

$$\sin\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\quad \cos\frac{\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\sqrt{3},$$
$$\sin\frac{\pi}{10}=\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1),\quad \cos\frac{\pi}{10}=\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$
$$\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1),\quad \cos\frac{3\pi}{10}=\sin\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

et que l'on substitue dans les égalités (1), après y avoir développé les seconds membres suivant les identités (2), on trouvera de suite que

$$
\text{(III)} \qquad \left\{
\begin{aligned}
C_{15,1} &= \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3} \right),\\
C_{15,2} &= \tfrac{1}{4}R\left(-\sqrt{10-2\sqrt{5}} + \sqrt{15} + \sqrt{3} \right),\\
C_{15,4} &= \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{15} - \sqrt{3} \right),\\
C_{15,7} &= \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{10-2\sqrt{5}} + \sqrt{15} + \sqrt{3} \right) \text{ (1)}.
\end{aligned}
\right.
$$

La comparaison de ces expressions nous fournit les deux relations

$$
C_{15,1} + C_{15,4} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{10+2\sqrt{5}} = C_{5,2},
$$
$$
C_{15,7} - C_{15,2} = \tfrac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}} = C_{5,1}.
$$

Ainsi : 1° *la somme des côtés des deux pentédécagones réguliers des espèces 1 et 4, inscrits dans le même cercle, est égale au côté du pentagone régulier étoilé qui est inscrit dans ce cercle;* 2° *la différence des côtés des deux pentédécagones réguliers des espèces 7 et 2, inscrits dans le même cercle, est égale au côté du pentagone régulier convexe qui est inscrit dans ce cercle.*

Les formules (III) nous fournissent aussi les égalités

$$
C_{15,1} \times C_{15,4} = \tfrac{1}{2}R^2(\sqrt{5}-1) = R \times C_{10,1},
$$
$$
C_{15,2} \times C_{15,7} = \tfrac{1}{2}R^2(\sqrt{5}+1) = R \times C_{10,3}.
$$

Donc : 1° *le rayon est la quatrième proportionnelle au côté du décagone régulier convexe et aux côtés des deux pentédécagones réguliers des espèces 1 et 4;* 2° *il est aussi la quatrième proportionnelle au côté du décagone régulier étoilé et aux côtés des deux pentédécagones réguliers des espèces 2 et 7.*

Si l'on élève au carré les quatre valeurs (III), et que l'on ajoute les résultats, on trouvera que

$$
C_{15,1}^2 + C_{15,2}^2 + C_{15,4}^2 + C_{15,7}^2 = 7R^2.
$$

(1) Ces côtés se trouvent calculés par la Géométrie pure, d'une manière fort élégante, dans le Traité de MM. Rouché et de Comberousse, 4e édition, Ire Partie, p. 173.

Donc, *la somme des carrés des côtés de quatre pentédécagones réguliers, qui sont inscrits dans le même cercle, est égale à sept fois le carré du rayon.*

44. *Polygones réguliers de trente côtés.* — Comme la moitié de 30 est un nombre impair, il existe aussi quatre polygones réguliers de trente côtés (n° **8**), dont les trois étoilés sont des espèces 7, 11 et 13.

Les côtés de ces quatre polygones sont

$$\begin{aligned}
C_{30,1} &= 2R\sin\frac{\pi}{30} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}\right),\\
C_{30,7} &= 2R\sin\frac{7\pi}{30} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{10}\right),\\
C_{30,11} &= 2R\sin\frac{11\pi}{30} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{6}\right),\\
C_{30,13} &= 2R\sin\frac{13\pi}{30} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{10}\right).
\end{aligned}$$

Développant et effectuant les substitutions convenables, on trouve que

$$(\mathrm{VI})\qquad \left\{\begin{aligned}
C_{30,1} &= \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}}-\sqrt{5}-1\right),\\
C_{30,7} &= \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right),\\
C_{30,11} &= \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{30-6\sqrt{5}}+\sqrt{5}+1\right),\\
C_{30,13} &= \tfrac{1}{4}R\left(\sqrt{30+6\sqrt{5}}+\sqrt{5}-1\right).
\end{aligned}\right.$$

La comparaison de ces expressions nous fournit les deux relations

$$\begin{aligned}
C_{30,11}-C_{30,1} &= \tfrac{1}{2}R\left(\sqrt{5}+1\right) = C_{10,3},\\
C_{30,13}-C_{30,7} &= \tfrac{1}{2}R\left(\sqrt{5}-1\right) = C_{10,1},
\end{aligned}$$

qui prouvent que :

1° *La différence entre les côtés des polygones réguliers de trente* *côtés et des espèces 11 et 1, inscrits dans le même cercle, est égale au côté du décagone régulier étoilé qui est inscrit dans ce cercle.*

2° *La différence entre les côtés des polygones réguliers de trente côtés et des espèces 13 et 7, inscrits dans le même cercle, est égale au côté du décagone régulier convexe qui est inscrit dans ce cercle.*

Les mêmes formules (IV) nous donnent aussi

$$C_{30,1} \times C_{30,11} = \tfrac{1}{4}R^2(6 - 2\sqrt{5}) = C_{10,1}^2,$$
$$C_{30,7} \times C_{30,13} = \tfrac{1}{4}R^2(6 + 2\sqrt{5}) = C_{10,3}^2.$$

On en conclut que :

1° *Le côté du décagone régulier convexe est moyen proportionnel entre les côtés des deux polygones réguliers de trente côtés, des espèces 1 et 11.*

2° *Le côté du décagone régulier étoilé est moyen proportionnel entre les côtés des deux polygones réguliers de trente côtés, des espèces 7 et 13.*

Nous avons, en vertu du théorème du n° 29,

$$C_{30,1}^2 = 4R^2 - C_{15,7}^2, \quad C_{30,7}^2 = 4R^2 - C_{15,4}^2,$$
$$C_{30,11}^2 = 4R^2 - C_{15,2}^2, \quad C_{30,13}^2 = 4R^2 - C_{15,1}^2,$$

et par suite, en ajoutant,

$$C_{30,1}^2 + C_{30,7}^2 + C_{30,11}^2 + C_{30,13}^2$$
$$= 16R^2 - (C_{15,1}^2 + C_{15,2}^2 + C_{15,4}^2 + C_{15,7}^2) = 9R^2.$$

Donc, *la somme des carrés des côtés des quatre polygones réguliers de trente côtés qui sont inscrits dans le même cercle est égale à neuf fois le carré du rayon.*

45. *Polygones réguliers de soixante côtés.* — Il existe huit polygones réguliers de soixante côtés, dont les espèces sont 1, 7, 11, 13,

17, 19, 23 et 29. Leurs côtés seront donc

$$
\begin{aligned}
C_{60,1} &= 2R\sin\frac{\pi}{60} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{30}\right),\\
C_{60,7} &= 2R\sin\frac{7\pi}{60} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{15}\right),\\
C_{60,11} &= 2R\sin\frac{11\pi}{60} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{15}\right),\\
C_{60,13} &= 2R\sin\frac{13\pi}{60} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{30}\right),\\
C_{60,29} &= 2R\sin\frac{29\pi}{60} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{30}\right),\\
C_{60,23} &= 2R\sin\frac{23\pi}{60} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{15}\right),\\
C_{60,19} &= 2R\sin\frac{19\pi}{60} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{15}\right),\\
C_{60,17} &= 2R\sin\frac{17\pi}{60} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{30}\right).
\end{aligned}
$$

Développant et substituant, on obtient les valeurs

$$
\begin{aligned}
C_{60,1} &= \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}\left[(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1) - (\sqrt{3}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right],\\
C_{60,7} &= \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}\left[(\sqrt{3}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}} - (\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)\right],\\
C_{60,11} &= \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}\left[(\sqrt{3}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}} + (\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1)\right],\\
C_{60,13} &= \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}\left[(\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1) - (\sqrt{3}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right],\\
C_{60,17} &= \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}\left[(\sqrt{3}+1)\sqrt{10-2\sqrt{5}} + (\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}+1)\right],\\
C_{60,19} &= \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}\left[(\sqrt{3}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}} - (\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)\right],\\
C_{60,23} &= \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}\left[(\sqrt{3}-1)\sqrt{10-2\sqrt{5}} + (\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}+1)\right],\\
C_{60,29} &= \tfrac{1}{8}R\sqrt{2}\left[(\sqrt{3}+1)\sqrt{10+2\sqrt{5}} + (\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)\right].
\end{aligned}
$$

Les huit polygones réguliers de soixante côtés à périmètre continu sont conjugués deux à deux ; nous avons par suite, en vertu du théorème du n° 35,

$$
\begin{aligned}
C^2_{60,1} + C^2_{60,29} &= C^2_{60,7} + C^2_{60,23} = 4R^2,\\
C^2_{60,11} + C^2_{60,19} &= C^2_{60,13} + C^2_{60,17} = 4R^2.
\end{aligned}
$$

On en conclut que :

La somme des carrés des côtés des huit polygones réguliers de soixante côtés, qui sont inscrits dans le même cercle, est égale à seize fois le carré rayon.

46. *Polygones réguliers de cent vingt côtés.* — Ces polygones sont au nombre de seize. On pourra calculer les côtés de ces polygones en suivant la même méthode. Il suffira de faire usage des identités suivantes :

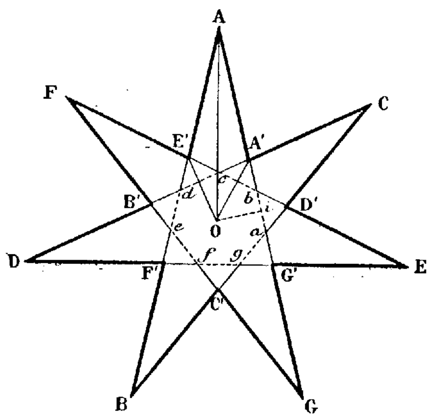
$$
\begin{aligned}
&\frac{\pi}{120} = \frac{\pi}{8} - \frac{7\pi}{60}, &&\frac{29\pi}{120} = \frac{\pi}{8} + \frac{7\pi}{60},\\
&\frac{7\pi}{120} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{15}, &&\frac{23\pi}{120} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{15},\\
&\frac{11\pi}{120} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{30}, &&\frac{19\pi}{120} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{30},\\
&\frac{13\pi}{120} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{60}, &&\frac{17\pi}{120} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{60},\\
&\frac{31\pi}{120} = \frac{3\pi}{8} - \frac{7\pi}{60}, &&\frac{59\pi}{120} = \frac{3\pi}{8} + \frac{7\pi}{60},\\
&\frac{37\pi}{120} = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{15}, &&\frac{53\pi}{120} = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{15},\\
&\frac{41\pi}{120} = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{30}, &&\frac{49\pi}{60} = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{30},\\
&\frac{43\pi}{120} = \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{60}, &&\frac{47\pi}{120} = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{60}.
\end{aligned}
$$

47. Ce mode de calcul, comme l'on voit, fournit toutes les valeurs que donne la résolution de l'équation binôme $x^n - 1 = 0$. Il a l'avantage d'être plus élémentaire et surtout plus facile.

§ V. — Surface des polygones réguliers étoilés.

48. *Surface du polygone régulier de n côtés et de l'espèce p en valeur du rayon du cercle circonscrit.* — Considérons le polygone régulier ABC...EFG (*fig.* 6), qui a n côtés et dont l'espèce est p.

Fig. 6.



Joignons le centre O à un sommet A de ce polygone, ainsi qu'aux deux sommets voisins A' et E' du polygone régulier de n côtés et de l'espèce $p - 1$, qui sont situés sur les côtés issus du sommet A dans le polygone de l'espèce p.

Du centre O abaissons en même temps la perpendiculaire Oi sur le côté AG.

La droite OA sera le rayon R du cercle circonscrit à notre polygone régulier; la droite Oi sera le rayon r du cercle inscrit, et la ligne Ai sera le demi-côté $\frac{1}{2}$C du polygone régulier.

La surface de notre polygone se composera évidemment de n quadrilatères, tels que AA'OE', ou de $2n$ triangles, tels que AA'O. En désignant, en général, par $S_{c,e}$ la surface du polygone régulier qui a c côtés et qui est de l'espèce e, nous avons ainsi

$$S_{n,p} = 2n.\mathrm{AA'O}.$$

Le triangle AA'O est parfaitement déterminé, car nous y connaissons le côté AO, qui est le rayon R du cercle circonscrit, ainsi que les deux angles OAA' et AOA'.

L'angle OAA' est en effet la moitié de l'un des n angles saillants de notre polygone régulier; il a donc pour valeur (n° **23**),

$$OAA' = \frac{\pi}{2} - \frac{p\pi}{n}.$$

L'angle AOA' est égal à la différence entre les demi-angles au centre AOi et A'Oi des deux polygones réguliers de n côtés, qui sont le premier de l'espèce p et le second de l'espèce $p-1$; il vient, par suite (n° **25**),

$$AOA' = \frac{p\pi}{n} - \frac{p-1}{n}\pi = \frac{\pi}{n}.$$

On sait que la surface d'un triangle en valeur du côté a et des deux angles adjacents B et C est exprimée par la fraction

$$\frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin(B+C)}.$$

Comme nous avons $a = R$ et

$$\sin B = \sin OAA' = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{p\pi}{n}\right) = \cos\frac{p\pi}{n},$$

$$\sin C = \sin AOA' = \sin\frac{\pi}{n},$$

$$\sin(B+C) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{p\pi}{n} + \frac{\pi}{n}\right) = \cos\frac{p-1}{n}\pi,$$

$2n$ fois la surface du triangle AA'O sera

$$(1) \qquad S_{n,p} = nR^2 \frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{p\pi}{n}}{\cos\frac{p-1}{n}\pi}.$$

Telle est l'expression de la surface du polygone régulier de n côtés et de l'espèce p.

49. *Remarque*. — Dans le calcul précédent, nous n'avons établi aucune restriction sur la nature du polygone régulier. La formule (I) est ainsi générale et convient aussi bien aux polygones réguliers à périmètre composé qu'aux polygones réguliers à périmètre continu. Elle s'applique donc indistinctement à tous les polygones réguliers, qu'ils soient étoilés ou pseudo-étoilés.

50. Corollaire I. — Si nous posons $p = 1$ dans la formule précédente, le facteur de $n\mathrm{R}^2$ deviendra

$$\frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}{\cos 0} = \frac{1}{2}\,2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n},$$

et nous aurons

$$S_{n,1} = \frac{1}{2}n\mathrm{R}^2\sin\frac{2\pi}{n},$$

pour l'*expression de la surface des polygones convexes de n côtés.*

51. Corollaire II. — Si l'on fait $p = 2$ dans la même formule, elle deviendra

$$S_{n,2} = n\mathrm{R}^2\,\mathrm{tang}\frac{\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}.$$

52. *Surface d'un polygone régulier en valeur du rayon r du cercle inscrit.* — La seconde des formules (IV) du n° **27** nous donne $\mathrm{R} = \dfrac{r}{\cos\frac{p\pi}{n}}$. Substituant dans l'expression (I), nous obtenons, après réduction,

$$\text{(II)}\qquad S_{n,p} = nr^2\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{p\pi}{n}\cos\frac{p-1}{n}\pi}.$$

53. Corollaire I. — Si nous faisons $p = 1$ dans cette formule, nous aurons

$$S_{n,1} = nr^2\,\mathrm{tang}\frac{\pi}{n}$$

pour la *surface du polygone régulier convexe de n côtés, en valeur du rayon du cercle inscrit.*

54. Corollaire II. — Si nous posons $p=2$ dans la formule (II), nous trouvons que *la surface des polygones réguliers de n côtés et de la deuxième espèce* est exprimée par

$$S_{n,2} = nr^2 \operatorname{tang}\frac{\pi}{n} \operatorname{séc}\frac{2\pi}{n}.$$

55. *Remarque.* — Supposons que ces derniers polygones soient circonscrits à un même cercle. Si leurs côtés sont dirigés suivant les mêmes droites, la différence D_n de leurs surfaces sera égale à la somme de n triangles que l'on forme en prolongeant, de deux en deux, les n côtés du polygone régulier convexe. Cette différence est donc

$$D_n = nr^2 \operatorname{tang}\frac{\pi}{n}\left(\operatorname{séc}\frac{2\pi}{n} - 1\right).$$

Ainsi, si les deux pentagones réguliers sont circonscrits à un même cercle de rayon r, la différence de leurs surfaces sera

$$D_5 = 5r^2\sqrt{25 - 10\sqrt{5}}.$$

56. *Surface d'un polygone régulier en valeur de son côté.* — La troisième des formules (IV) du n° **27** nous donne

$$r = \frac{C}{2}\cos\frac{p\pi}{n}.$$

Mettant cette valeur dans (II), nous trouvons que

$$\text{(III)} \qquad S_{n,p} = \frac{1}{4} n C^2 \frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{p\pi}{n}}{\sin^2\frac{p\pi}{n}\cos\frac{p-1}{n}\pi}.$$

57. *Surface d'un polygone régulier en valeur des rayons* R *et* r *des cercles, l'un circonscrit et l'autre inscrit.* — La formule (I) peut s'écrire

$$S_{n,p} = n\mathrm{R}.\mathrm{R}\cos\frac{p\pi}{n}\,\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{p-1}{n}\pi},$$

et, comme on a $R \cos \frac{p\pi}{n} = r$, il vient aussi

$$(\text{IV}) \qquad S_{n,p} = nRr \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{p-1}{n}\pi}.$$

58. Corollaire I. — Si nous faisons $p = 1$ dans cette expression, nous aurons

$$S_{n,1} = nRr \sin \frac{\pi}{n},$$

pour la *surface des polygones réguliers convexes de n côtés*.

59. Corollaire II. — En posant $p = 2$ dans la même expression, on trouve

$$S_{n,2} = nRr \operatorname{tang} \frac{\pi}{n}$$

pour la *surface des polygones réguliers de deuxième espèce*.

60. *Surface d'un polygone régulier en valeur du côté et du rayon du cercle circonscrit.* — Dans la formule (I), remplaçons l'un des facteurs R par sa valeur $\frac{C}{2 \sin \frac{p\pi}{n}}$ en fonction de C; elle devient

$$(\text{V}) \qquad S_{n,p} = \frac{1}{2} nCR \frac{\sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{p\pi}{n}}{\cos \frac{p-1}{n}\pi}.$$

61. Corollaire I. — Posant $p = 1$, on trouve

$$S_{n,1} = \frac{1}{2} nCR \cos \frac{\pi}{n}$$

pour la *surface du polygone régulier convexe de n côtés*.

62. Corollaire II. — En faisant $p = 2$, on obtient

$$S_{n,2} = \frac{1}{2} nCR \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} \cot \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{4} nCR \left(1 - \operatorname{tang}^2 \frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{4} nCR \frac{\cos \frac{2\pi}{n}}{\cos^2 \frac{\pi}{n}}.$$

63. *Surface d'un polygone régulier en valeur du côté et du rayon du cercle inscrit.* — Dans la formule (II), remplaçons l'un des facteurs r par son équivalent $\frac{1}{2}C\cot\frac{p\pi}{n}$; nous aurons aussi

$$\text{(VI)} \qquad S_{n,p} = \frac{1}{2}nrC\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{p\pi}{n}\cos\frac{p-1}{n}\pi}.$$

64. Corollaire I. — Si l'on fait $p = 1$, on aura la formule connue

$$S_{n,1} = \frac{1}{2}nrC$$

pour la *surface du polygone régulier convexe de n côtés.*

65. Corollaire II. — En posant $p = 2$, on trouve

$$S_{n,2} = \frac{1}{4}nrC\,\text{séc}^2\frac{\pi}{n}$$

pour la *surface des polygones réguliers de deuxième espèce.*

66. Puisque nous avons

$$\sin\frac{\pi}{n} = \sin\left(\frac{p\pi}{n} - \frac{p-1}{n}\pi\right) = \sin\frac{p\pi}{n}\cos\frac{p-1}{n}\pi - \sin\frac{p-1}{n}\pi\cos\frac{p\pi}{n},$$

la formule (II) peut s'écrire

$$S_{n,p} = nr^2\left(\frac{\sin\frac{p\pi}{n}}{\cos\frac{p\pi}{n}} - \frac{\sin\frac{p-1}{n}\pi}{\cos\frac{p-1}{n}\pi}\right)$$

ou

$$\text{(VII)} \qquad S_{n,p} = nr^2\left(\text{tang}\frac{p\pi}{n} - \text{tang}\frac{p-1}{n}\pi\right).$$

Or les deux triangles rectangles AOi et $A'Oi$ (*fig.* 7) nous donnent

$$Ai = r\,\text{tang}\frac{p\pi}{n}, \quad A'i = r\,\text{tang}\frac{p-1}{n}\pi,$$

d'où nous tirons

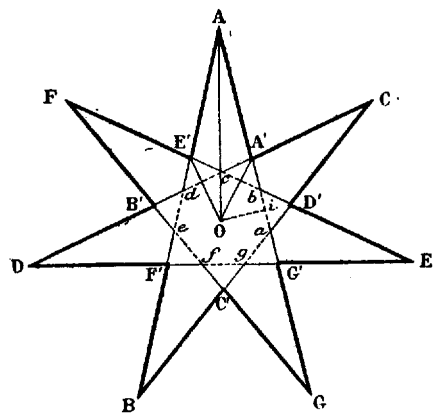
$$AA' = r\left(\tang\frac{p\pi}{n} - \tang\frac{p-1}{n}\pi\right).$$

L'expression (VII) devient ainsi

$$S_{n,p} = nr.AA' = n.2AA'.\tfrac{1}{2}r.$$

Mais n fois $2AA'$ ou n fois $(AA' + GG')$ représente évidemment le péri-

Fig. 7.



mètre apparent du polygone régulier étoilé. Donc on peut dire que :

La surface d'un polygone régulier étoilé a pour mesure le produit de son périmètre apparent par la moitié du rayon du cercle inscrit.

Cette proposition devient d'ailleurs évidente par l'inspection directe de la figure, puisqu'on a

$$\text{surf. } AA'O = AA'.\tfrac{1}{2}Oi = AA'.\tfrac{1}{2}r,$$

et, par suite,

$$2n \,\text{surf. } AA'O = n(AA' + GG')\tfrac{1}{2}r.$$

67. Théorème I. — *La surface d'un polygone régulier, qui a un nombre impair n de côtés et qui est de l'espèce la plus élevée* $\frac{n-1}{2}$, *est la moitié de la surface du polygone régulier inscrit dans le même* *cercle, qui a un nombre double $2n$ de côtés et qui est aussi de l'espèce la plus élevée $n - 2$.*

Si nous appelons R le rayon du cercle circonscrit à nos deux polygones réguliers, la surface du premier polygone sera (nº **48**)

$$S_{n,\frac{n-1}{2}} = nR^2 \frac{\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{n-1}{2n}\pi}{\cos\frac{n-3}{2n}\pi},$$

pendant que celle du second polygone régulier sera

$$S_{2n,n-2} = 2nR^2 \frac{\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n-2}{2n}\pi}{\cos\frac{n-3}{2n}\pi}.$$

Or ces deux expressions ont même dénominateur $\cos\frac{n-3}{2n}\pi$. Au numérateur de la première se trouve le facteur

$$\cos\frac{n-1}{2n}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right) = \sin\frac{\pi}{2n},$$

pendant que le numérateur de la seconde contient le facteur

$$\cos\frac{n-2}{2n}\pi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = \sin\frac{\pi}{n}.$$

Il s'ensuit que les deux fractions ont aussi même numérateur. Donc on a

$$S_{n,\frac{n-1}{2}} = \tfrac{1}{2}S_{2n,n-2},$$

ce qu'il fallait prouver.

68. Corollaire. — Si l'on donne à n successivement les valeurs 3, 5, 15, 17, ...,

pour $n = 3$, on aura $\frac{n-1}{2} = 1$, $2n = 6$, $n - 2 = 1$,

» $n = 5$, » $\frac{n-1}{2} = 2$, $2n = 10$, $n - 2 = 3$,

» $n = 15$, » $\frac{n-1}{2} = 7$, $2n = 30$, $n - 2 = 13$,

» $n = 17$, » $\frac{n-1}{2} = 8$, $2n = 34$, $n - 2 = 15$, ...

Ainsi le triangle équilatéral est la moitié de l'hexagone régulier qui est inscrit dans le même cercle; la surface du pentagone régulier étoilé est la moitié de la surface du dodécagone régulier étoilé ; le polygone régulier de quinze côtés et de la septième espèce est la moitié du polygone régulier de trente côtés et de la treizième espèce, etc.

69. Théorème II. — *La surface d'un polygone régulier, qui a un nombre pair* $2n$ *de côtés et qui est de l'espèce la plus élevée* $n-1$, *est à la surface du polygone régulier inscrit dans le même cercle, qui a un nombre double* $4n$ *de côtés et qui est aussi de l'espèce la plus élevée* $2n-1$, *dans le rapport de* $\cos^2\frac{\pi}{4n}$ *à* $\cos\frac{\pi}{2n}$.

En effet, la surface du polygone régulier de $2n$ côtés, qui est de l'espèce $n-1$, a pour expression

$$S_{2n,n-1} = 2nR^2\frac{\sin\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n-1}{2n}\pi}{\cos\frac{n-2}{2n}\pi} = 2nR^2\frac{\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{n}},$$

ou

$$S_{2n,n-1} = nR^2\operatorname{tang}\frac{\pi}{2n}.$$

La surface du polygone régulier de $4n$ côtés qui est de l'espèce $2n-1$ a pour expression

$$S_{4n,2n-1} = 4nR^2\frac{\sin\frac{\pi}{4n}\cos\frac{2n-1}{4n}\pi}{\cos\frac{2n-2}{4n}\pi} = 4nR^2\frac{\sin\frac{\pi}{4n}\sin\frac{\pi}{4n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

ou

$$S_{4n,2n-1} = 2nR^2\operatorname{tang}\frac{\pi}{4n}.$$

On a donc

$$\frac{S_{2n,n-1}}{S_{4n,2n-1}} = \frac{\operatorname{tang}\frac{\pi}{2n}}{2\operatorname{tang}\frac{\pi}{4n}} = \frac{1}{1-\operatorname{tang}^2\frac{\pi}{4n}} = \frac{\cos^2\frac{\pi}{4n}}{\cos^2\frac{\pi}{4n}-\sin^2\frac{\pi}{4n}}$$

ou

$$\frac{S_{2n,n-1}}{S_{4n,2n-1}} = \frac{\cos^2\frac{\pi}{4n}}{\cos\frac{\pi}{2n}}.$$

70. THÉORÈME III. — *Lorsque deux polygones réguliers, l'un d'un nombre impair n de côtés et de l'espèce la plus élevée $\frac{n-1}{2}$, et l'autre d'un nombre double 2n de côtés et aussi de l'espèce la plus élevée n − 2, sont circonscrits à un même cercle, le rapport de leurs surfaces est égal à* $2\cos^2\frac{\pi}{2n}$.

En vertu de la formule (II) du n° 52, nous avons

$$S_{n,\frac{n-1}{2}} = nr^2 \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{n-1}{2n}\pi\cos\frac{n-3}{2n}\pi} = nr^2\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{2n}\sin\frac{3\pi}{2n}},$$

$$S_{2n,n-2} = 2nr^2\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\cos\frac{n-2}{2n}\pi\cos\frac{n-3}{2n}\pi} = 2nr^2\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{2n}};$$

nous en tirons

$$\frac{S_{n,\frac{n-1}{2}}}{S_{2n,n-2}} = \frac{\sin^2\frac{\pi}{n}}{2\sin^2\frac{\pi}{2n}} = \frac{4\sin^2\frac{\pi}{2n}\cos^2\frac{\pi}{2n}}{2\sin^2\frac{\pi}{2n}},$$

ou

$$\frac{S_{n,\frac{n-1}{2}}}{S_{2n,n-2}} = 2\cos^2\frac{\pi}{2n}.$$

71. Proposons-nous, comme application, de calculer les surfaces des polygones réguliers étoilés de cinq, huit, dix, douze et quinze côtés.

72. *Pentagone régulier étoilé.* — Nous poserons $n = 5$, $p = 2$ dans la formule (I) du n° **48**; elle nous donnera

$$S_{5,2} = 5R^2\frac{\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}} = 5R^2\frac{\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{\pi}{10}}{\sin\frac{3\pi}{10}}.$$

Mais, puisque

$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1),\quad \sin\frac{3\pi}{10} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}+1),$$

il nous vient

$$\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{4},$$

d'où nous tirons

$$\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{10}}=4\sin\frac{\pi}{10}.$$

L'expression de notre surface devient ainsi

$$S_{5,2}=20R^2\sin\frac{\pi}{5}\sin^2\frac{\pi}{10}$$

ou

$$S_{5,2}=\tfrac{5}{16}R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}\,(\sqrt{5}-1)^2$$
$$=\tfrac{5}{8}R^2\sqrt{(10-2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})^2}=\tfrac{5}{4}R^2\sqrt{(5-\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})}.$$

La surface du pentagone régulier étoilé inscrit dans le cercle de rayon R est donc

$$(1)\qquad S_{5,2}=\tfrac{5}{4}R^2\sqrt{50-22\sqrt{5}}.$$

73. *Octogone régulier étoilé.* — Puisque $n=8$, $p=3$, il vient

$$S_{8,3}=8R^2\frac{\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}}{\cos\frac{2\pi}{8}}=8R^2\frac{\sin^2\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{4}},$$

et, comme

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad 2\sin^2\frac{\pi}{8}=1-\cos\frac{\pi}{4}=\frac{2-\sqrt{2}}{2},$$

nous aurons

$$S_{8,3}=4R^2\frac{2-\sqrt{2}}{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ou

$$(2)\qquad S_{8,3}=4R^2(\sqrt{2}-1)$$

pour la surface de l'octogone régulier étoilé.

74. *Décagone régulier étoilé.* — En posant $n = 10$, $p = 3$ dans notre formule, nous obtenons

$$S_{10,3} = 10R^2 \frac{\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{5}} = 10R^2 \frac{\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{3\pi}{10}}.$$

Cette surface est donc double de celle (n° **71**) du pentagone régulier étoilé qui est inscrit dans le même cercle, ce que nous savions d'ailleurs (n° **67**). Nous avons ainsi

$$(3) \qquad S_{10,3} = \frac{5}{2}R^2\sqrt{50 - 22\sqrt{5}}.$$

75. *Dodécagone régulier étoilé.* — Nous avons, dans ce cas, $n = 12$, $p = 5$; il nous vient, par suite,

$$S_{12,5} = 12R^2 \frac{\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{4\pi}{12}} = 12R^2 \frac{\sin^2\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{6}}.$$

Mais

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad 2\sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \cos\frac{\pi}{6} = 1 - \sin\frac{\pi}{3} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

Donc nous avons

$$(4) \qquad S_{12,5} = 6R^2(2 - \sqrt{3}).$$

76. *Pentédécagone régulier convexe.* — En faisant $n = 15$, $p = 1$ dans la formule (I), elle nous donnera

$$S_{15,1} = 15R^2\sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{\pi}{15} = \frac{15}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{15} = \frac{15}{4}RC_{15,2}.$$

Si nous remplaçons $C_{15,2}$ par son expression (III) du n° **43**, nous trouverons que la surface du pentédécagone régulier convexe est

$$(5) \qquad S_{15,1} = \frac{15}{8}R^2\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right).$$

77. *Pentédécagone régulier étoilé de deuxième espèce.* — Posons $n = 15$, $p = 2$ dans (I); il nous vient

$$S_{15,2} = 15R^2\frac{\sin\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}}{\cos\frac{\pi}{15}} = 15R^2\frac{\sin\frac{\pi}{15}\sin\frac{11\pi}{30}}{\sin\frac{13\pi}{30}} = \frac{15}{2}R\frac{C_{15,1}C_{30,11}}{C_{30,13}}.$$

Il suffira de substituer à $C_{15,1}$, $C_{30,11}$ et $C_{30,13}$ leurs valeurs obtenues aux n^{os} **43** et **44** pour avoir l'expression numérique de $S_{15,2}$.

On procédera de la même manière pour déterminer les surfaces des deux autres polygones réguliers étoilés de quinze côtés.

78. Notre formule (I) nous permet aussi de *calculer la surface des polygones réguliers étoilés à périmètre composé.*

Ainsi supposons que, de deux carrés qui coïncident, l'un ait tourné d'un huitième de circonférence autour du centre commun. Il en résultera un octogone étoilé de deuxième espèce, dont la surface sera

$$S_{8,2} = 8R^2\frac{\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{2\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}} = 8R^2\frac{\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{8}}$$

ou, puisque $\sin\frac{\pi}{4} = 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$,

$$S_{8,2} = 16R^2\sin^2\frac{\pi}{8}.$$

On a

$$2\sin^2\frac{\pi}{8} = 1 - \cos\frac{\pi}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{2};$$

donc il vient

$$S_{8,2} = 4R^2(2-\sqrt{2}).$$

La surface du carré inscrit dans le même cercle étant $2R^2$, la somme des quatre triangles extérieurs sera égale à

$$4R^2(2-\sqrt{2}) - 2R^2 = 2R^2(3-2\sqrt{2}) = 2R^2(\sqrt{2}-1)^2$$

ou à

$$2(R\sqrt{2}-R)^2.$$